Dr. M. Harder

31.05.2017
Blatt 06

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 07.06.2017 vor den Übungen)

1. Es seien $P, Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 2$ und $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Bestimmen Sie alle Punkte an denen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ falls $Q(x) \neq 0$ und $f(x) = 5$ sonst. Beurteilen Sie außerdem das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.

   Hinweis: Es gilt $Q(2) = 0$.

   (4 Punkte)

2. (a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ eine Folge mit $x_k \to \infty$ für $k \to \infty$ (die Folge ist nach oben unbeschränkt). Zeigen Sie, dass für die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ dann $f(x_k) \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

   (b) Geben Sie eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ an, so dass $x_k \geq \pi k$ und $y_k \geq \pi k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem soll $\lim_{k\to\infty} \sin(x_k) = 1$ und $\lim_{k\to\infty} \sin(y_k) = 0$ gelten. Zeigen Sie, dass die Folgen die gewünschten Eigenschaften aufweisen.

   (2 + 2 Punkte)

3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen f und Punkte x_0 jeweils $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ (den rechts- und linksseitigen Grenzwert), sofern existent. Begründen Sie andernfalls, weshalb der jeweilige Grenzwert nicht existiert. Beurteilen Sie außerdem, ob f im Punkt x_0 stetig ist.

   (a) $x_0 = 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $x_0 = 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \cos(x^2) & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (c) $x_0 = 1$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \exp(x^{-1}) & \text{falls } x \geq 1 \\ \arctan(x) & \text{sonst.} \end{cases}$

   (d) $x_0 = -1$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = -1 \\ \ln(|x + 1|) & \text{sonst.} \end{cases}$

   (3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

4. Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig (auf $\mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g$ stetig ist.

   (3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Gegeben sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = \cos(x) - x$.

(a) Führen Sie mit den Startwerten $a = 1$ und $b = 2$ die ersten vier Schritte des Bisektionsverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f durch. Geben Sie dabei die Zwischenergebnisse a_k, b_k für $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ an.

(b) Führen Sie mit einem Programm Ihrer Wahl das Bisektionsverfahren automatisiert durch und bestimmen Sie damit die ersten 12 Nachkommastellen einer Nullstelle von g mit den Startwerten $a = 0$ und $b = 3$.

(2 + 24 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.