Dr. M. Harder 07.06.2017
Blatt 07

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 14.06.2017 vor den Übungen)

1. (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \left(\frac{5x}{3}\right)^3$. Bestimmen Sie $\left(f^{-1}\right)'(1)$.
   (b) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2^x}{x^2}$. Bestimmen Sie $f'(x)$.
   (c) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{12} + 34x^5 - 6x^7 + 89$. Bestimmen Sie $f^{(42)}(x)$.
   (d) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^x$. Bestimmen Sie $f'(x)$.
   (e) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (\log x)^{\mathrm{e}}$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

   Hinweis: Bei Aufgabenteil (a) kann vorausgesetzt werden, dass f invertierbar ist.

   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Bestimmen Sie die Ableitungen von $\arccos(x)$ und $\arctan(x)$ und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich.

   (4 Punkte)

3. Beurteilen Sie für jede der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert.
   (a) $f(x) = x\Big(\exp\big(\frac{1}{x}\big) - 1\Big)$
   (b) $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

   (2 + 2 Punkte)

4. Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist die Gaußsche Glockenkurve durch die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
   gegeben. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Wendepunkte der Funktion in Abhängigkeit von μ und σ.

   (2 Punkte)

5. Eine Biene fliegt 2m über dem Boden direkt in Richtung einer 1m hohen Sonnenblume. In der Entfernung $s \geq 0$ sieht sie die Blume unter dem Blickwinkel
$$\varphi(s) = \arctan\left(\frac{2}{s}\right) - \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$
   In welchem Abstand zur Blume wird der Blickwinkel maximal?

   (2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

6. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := -2x^4 + 3x^3 - 6x + 5$, bestimmen Sie jeweils das zweite, vierte und fünfte Taylorpolynom von f in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

(4 Punkte)

In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection.

Hugo Rossi, 1996, *Mathematics is an Edifice, Not a Toolbox*,
Notices of the American Mathematical Society 43 (10): 1108
http://www.ams.org/notices/199610/page2.pdf

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.