Dr. M. Harder 14.06.2017
Blatt 08

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 21.06.2017 vor den Übungen)

1. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ gegeben. Geben Sie Funktionen $g_1, g_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass

$$\int_0^1 f(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g_1(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 f(x)g_2(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g_2(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt (und zeigen Sie, dass g_1 und g_2 die gewünschten Eigenschaften aufweisen).

(3 Punkte)

2. Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale. Geben Sie insbesondere an, welche Integrationstechniken Sie verwenden.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 + \frac{1}{3}}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\pi} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{4x^3 - 10x^2 + 11x - 3}{(1-x)^3 x}\,\mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 9}{\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4\right)(2+2x)}\,\mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{2} \frac{\cos(x)+3}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Es sei $R\big(\sin^2(x), \cos^2(x)\big)$ eine rationale Funktion bezüglich $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$.

   (a) Zeigen Sie, dass für $y = \tan(x)$ bereits $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + y^2$ und $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{y^2+1}{y^2}$ gilt (vorausgesetzt alle Terme sind definiert, also $y \neq 0$, $\sin(x) \neq 0$ und $\cos(x) \neq 0$).

   (b) Folgern Sie aus der vorherigen Teilaufgabe, dass

$$\int R\big(\sin^2(x), \cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{y^2}{1+y^2}, \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

   mit der Substitution $y = \tan(x)$ gilt.

(3 + 1 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.