

## Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 28.06.2017 vor den Übungen)

1. Beurteilen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und bestimmen Sie im Fall der Existenz den Wert des Integrals.

(a)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(x) dx$

(2 + 2 Punkte)

2. Bestimmen Sie für folgende Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils  $\int_{-c}^c f(x) dx$  in Abhängigkeit von  $c > 0$ . Beurteilen Sie außerdem jeweils die Existenz von  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

(a)  $f(x) = x e^{-x^2}$

(b)  $f(x) = \sin(x)$

(2 + 2 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle  $\alpha > 0$ , für die  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  und alle  $\beta > 0$  für die  $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx$  existiert.

(4 Punkte)

4. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sind die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade durch  $\vec{0}$  in Richtung  $\vec{a}$  und der Ebene durch  $\vec{d}$ , die durch  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannt wird oder zeigen Sie, dass kein solcher Punkt existiert.
- (c) Zeigen Sie, dass die vier Vektoren linear abhängig sind.
- (d) Bestimmen Sie einen Vektor  $\vec{v}$  mit  $|\vec{v}| = 1$  sowie  $\vec{v} \perp \vec{b}$  und  $\vec{v} \perp \vec{c}$ .
- (e) Berechnen Sie die Projektionen  $(-\vec{a})_{\vec{d}}$ ,  $\vec{b}_{\vec{d}}$  und  $\vec{c}_{\vec{d}}$  von  $-\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  auf  $\vec{d}$ .
- (f) Bestimmen Sie den Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{d}$  sowie den Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- (g) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes der genau zwischen den Punkten mit den Koordinaten  $\vec{a}$  und  $\vec{d}$  liegt.

(2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.