Dr. M. Harder

28.06.2017
Blatt 10

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 05.07.2017 vor den Übungen)

1. Berechnen Sie die Fläche des von den folgenden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

   (a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

   (a) Rechnen Sie nach, dass $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{a}$ und $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \vec{b}$ gilt.

   (b) Rechnen Sie nach, dass $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ gilt.

   (c) Bestimmen Sie drei der folgenden vier Vektoren, die in einer Ebene liegen.

   $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (2 + 2 + 3 Punkte)

3. Skizzieren Sie folgende Mengen:

   (a) $M_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}, r \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \right\}$

   (b) $M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}, -\frac{\pi}{4} \leq r < \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

   (c) $M_3 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{\pi}\cos(\varphi) \\ \frac{\varphi}{\pi}\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \varphi \in [\pi, 4\pi] \right\}$

   (2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$ mit der Definition der partiellen Ableitung.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ und $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$. Beurteilen Sie dadurch die Stetigkeit der Funktion f.

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$ sowie $g_x(a,b)$ und $g_y(a,b)$ für $(a,b) \neq (0,0)$. Verwenden Sie g_x und g_y um mit der Definition der partiellen Ableitung $g_{xy}(0,0)$ und $g_{yx}(0,0)$ zu bestimmen.

(2 + 2 + 3 Punkte)