Dr. M. Harder 05.07.2017
Blatt 11

Übungen zu Mathematik im Orientierungssemester

(24 Punkte entsprechen 100%, Abgabe spätestens am Mittwoch, den 12.07.2017 vor den Übungen)

1. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$. Bestimmen Sie jeweils das zweite Taylorpolynom in den Punkten $(0,0)$ und $(1,0)$.

(5 Punkte)

2. Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x,y) = (x + y^2)\,\mathrm{e}^{2x}$

   (b) $f(x,y) = \sin(x)(x - 2y)$

   (c) $f(x,y) = 1024 - y^2\,\mathrm{e}^y - 2(x-y)^2$

(2 + 2 + 2 Punkte)

3. An einer Klausur haben n Studierende teilgenommen. Person k hat die Übungspunkte x_k und die Klausurpunkte y_k erreicht. Man vermutet, dass prinzipiell ein linearer Zusammenhang zwischen den Übungspunkten und den Klausurpunkten besteht, allerdings mit gewissen individuellen Abweichungen nach oben und unten (etwa durch Tagesform, Dauer der Prüfungsvorbereitung, etc.). Gesucht sind also Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Gerade $g(x) \coloneqq \alpha x + \beta$ eine möglichst geringe quadratische Abweichung von den Daten hat. Genauer sind α und β gesucht, so dass

$$f(\alpha,\beta) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha x_k + \beta - y_k\big)^2$$

minimal wird. Dieses Vorgehen wird „lineare Regression“ genannt.

Zeigen Sie, dass durch (α, β) mit

$$\alpha = \frac{n s_{xy} - s_x s_y}{n s_{xx} - s_x^2}, \qquad \beta = \frac{s_y s_{xx} - s_x s_{xy}}{n s_{xx} - s_x^2}$$

der einzige kritische Punkt von f gegeben ist, wobei folgende Notation verwendet wurde:

$$s_x \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad s_y \coloneqq \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$s_{xy} \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad s_{xx} \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

(5 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := -xy^2 + 11x$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 8$ sowohl mit der Lagrange- als auch mit der Einsetzmethode.

(4 Punkte)

5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy^2$ auf der Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

   (a) Bestimmen Sie lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit der Einsetzmethode.

   (b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit der Lagrange-Methode.

   (c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte für lokale Extrema von f ohne die Nebenbedingung zu berücksichtigen.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Mehrere Blätter sollten getackert werden. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.