UNIVERSITÄT ULM
Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Probeklausur
keine Abgabe

1. Gegeben sind folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (1,1,1,1)^T$, $a_2 = (1,0,1,0)^T$ und $a_3 = (1,2,3,4)^T$. Orthonormalisiere a_1, a_2 und a_3 mit Hilfe des Gram- Schmidt- Verfahrens in angegebener Reihenfolge (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).

2. Führe, falls möglich, die Hauptachsentransformation für folgende Matrizen A durch, d.h. bestimme alle Eigenwerte und eine unitäre Matrix U, so daß $U^{-1}AU = diag(\lambda_\nu)$ ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Untersuche- soweit möglich- auf Definitheit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Singulärwertzerlegung und die verallgemeinerte Moore- Penrose- Inverse.

5. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeige: λ^n ist ein Eigenwert von A^n.

6. Skizziere die Menge $M = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| < 1\}$. Bestimme $\overline{M}$, M° und δM. Ist M abgeschlossen, offen, beschränkt, kompakt?

7. (a) Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (b) Bestimme, falls existent f_x, f_{xy} und f_{yx} der Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^y.$$

8. Bestimme Maximum und Minimum von

   (a) $f : [0,3]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(3-x-y)$.

   (b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z,w) = xyzw$ unter den Nebenbedingungen $x^2+y^2 = 1$ und $z^2+w^2 = 4$.

9. Bestimme die (Kurven-) integrale

   (a) $\int_1^2 \int_{1/x}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$

   (b) $\int_{\mathcal{K}} f$ mit $\mathcal{K} :\ [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ f(x,y) = (e^x, x)$.

   (c) $\int_M f\,dx$ mit $M = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4, xy \ge 0\}$,
   $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$.

10. Gegeben sei die Fläche $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 2, z = 2-x^2-y^2\}$. Bestimme eine Parametrisierung von M und berechne den Flächeninhalt im $\mathbb{R}^3$.

11. Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $f :\ G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g :\ G \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeige:

   (a) $div(fg) = (\nabla f)^T g + f \cdot div(g)$

   (b) $rot(fg) = f \cdot rot(g) + (\nabla f) \times g$.