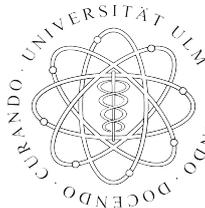


UNIVERSITÄT ULM

Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie



Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Probeklausur

keine Abgabe

1. Gegeben sind folgende Vektoren des \mathbb{R}^4 : $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)^T$ und $a_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. Orthonormalisiere a_1 , a_2 und a_3 mit Hilfe des Gram- Schmidt- Verfahrens in angegebener Reihenfolge (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).
2. Führe, falls möglich, die Hauptachsentransformation für folgende Matrizen A durch, d.h. bestimme alle Eigenwerte und eine unitäre Matrix U , so daß $U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_\nu)$ ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Untersuche- soweit möglich- auf Definitheit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Singulärwertzerlegung und die verallgemeinerte Moore- Penrose- Inverse.

5. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeige: λ^n ist ein Eigenwert von A^n .
6. Skizziere die Menge $M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 1\}$. Bestimme \overline{M} , M° und δM . Ist M abgeschlossen, offen, beschränkt, kompakt?
7. (a) Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (b) Bestimme, falls existent f_x , f_{xy} und f_{yx} der Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^y.$$

8. Bestimme Maximum und Minimum von

(a) $f : [0, 3]^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy(3 - x - y)$.

(b) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z, w) = xyzw$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $z^2 + w^2 = 4$.

9. Bestimme die (Kurven-) integrale

(a) $\int_1^2 \int_{1/x}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$

(b) $\int_{\mathcal{K}} f$ mit $\mathcal{K} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, x(t) = (\cos(t), \sin(t)), f(x, y) = (e^x, x)$.

(c) $\int_M f \, dx$ mit $M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 0\}$,
 $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Gegeben sei die Fläche $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z = 2 - x^2 - y^2\}$. Bestimme eine Parametrisierung von M und berechne den Flächeninhalt im \mathbb{R}^3 .
11. Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeige:

(a) $\operatorname{div}(fg) = (\nabla f)^T g + f \cdot \operatorname{div}(g)$

(b) $\operatorname{rot}(fg) = f \cdot \operatorname{rot}(g) + (\nabla f) \times g$.