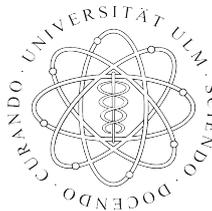


UNIVERSITÄT ULM

Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie



Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 30. April 2008, vor den Übungen

1. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit $\dim V = 4$, und es seien $a_1, a_2, \dots, a_5 \in V$ mit $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ und $2a_2 - 4a_4 + 3a_5 = 0$.
 - (a) Zeige: $\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_5) \leq 3$.
 - (b) Läßt sich aus den Vektoren a_1, \dots, a_5 eine Basis von V auswählen (mit Begründung)?
2. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\langle x, y \rangle = \bar{x}^T A x$ für $x, y \in \mathbb{K}^n$. Zeige:
 - (a) Es gelten die Eigenschaften (S3) und (S4).
 - (b) Die Eigenschaft (S2) gilt genau dann, wenn $A = \bar{A}^T$ gilt.
 - (c) Finde eine Matrix A , die (S2) aber nicht (S1) erfüllt.
 - (d) Es sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Wann ist D positiv definit?
3. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \alpha x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + 3x_3 y_3$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

4. (a) Gegeben sind folgende Vektoren des \mathbb{R}^4 : $a_1 = (0, 1, -1, 1)^T$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)^T$ und $a_3 = (2, 1, 0, 2)^T$. Orthonormalisiere a_1, a_2, a_3 mit Hilfe des Gram- Schmidt-Verfahrens in angegebener Reihenfolge (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes).
- (b) Orthogonalisiere mit dem Gram- Schmidt- Verfahren die reellen Polynome $2, 1 + x$ und $(2x - 1)^2$ in $C[0, 1]$ bezüglich $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.
5. (a) Sei V ein Euklidischer Raum und $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$.
Zeige, daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\|x - \lambda y\| = \|\lambda x - y\|$.
- (b) Zeige, daß $(x - y) \perp (x + y)$ genau dann gilt, wenn $\|x\| = \|y\|$ gilt.