UNIVERSITÄT ULM

Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 30. April 2008, vor den Übungen

1. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim V = 4$, und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in V$ mit $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ und $2a_2 - 4a_4 + 3a_5 = 0$.

   (a) Zeige: $\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_5) \leq 3$.

   (b) Läßt sich aus den Vektoren $a_1, \ldots, a_5$ eine Basis von V auswählen (mit Begründung)?

2. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\langle x, y \rangle = \overline{x}^T A x$ für $x, y \in \mathbb{K}^n$. Zeige:

   (a) Es gelten die Eigenschaften $(S3)$ und $(S4)$.

   (b) Die Eigenschaft $(S2)$ gilt genau dann, wenn $A = \overline{A}^T$ gilt.

   (c) Finde eine Matrix A, die $(S2)$ aber nicht $(S1)$ erfüllt.

   (d) Es sei D=diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Wann ist D positiv definit?

3. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \alpha x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + 3 x_3 y_3$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

4. (a) Gegeben sind folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$: $a_1 = (0,1,-1,1)^T$, $a_2 = (0,1,1,1)^T$ und $a_3 = (2,1,0,2)^T$. Orthonormalisiere a_1, a_2, a_3 mit Hilfe des Gram- Schmidt- Verfahrens in angegebener Reihenfolge (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes).

   (b) Orthogonalisiere mit dem Gram- Schmidt- Verfahren die reellen Polynome 2, $1+x$ und $(2x-1)^2$ in $C[0,1]$ bezüglich $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

5. (a) Sei V ein Euklidischer Raum und $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$.
   Zeige, daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\|x - \lambda y\| = \|\lambda x - y\|$.

   (b) Zeige, daß $(x-y) \perp (x+y)$ genau dann gilt, wenn $\|x\| = \|y\|$ gilt.