UNIVERSITÄT ULM
Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: **Dienstag, 20. Mai 2008 um 10:15 Uhr im H 13**, vor den Übungen

1. Berechne die Darstellungsmatrizen folgender linearer Abbildungen:

   (a) $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], Dp = p'$ bezüglich der kanonischen Basis.

   (b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (2x - 3y, x + y)^T$ bezüglich

      i. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$

      ii. der Basis $\{(1, 2)^T, (2, 3)^T\}$.

3 Punkte

2. Bestimme die Eigenwerte sowie die Basen der Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

4 Punkte

3. (a) Entscheide, welche der folgenden Matrizen auf Hauptachsen transformierbar sind und führe diese Transformation gegebenenfalls durch:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne C^{42}.

6 Punkte

4. Zeige:

(a) Ist A singulär, so ist 0 ein Eigenwert von A.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert.

2 Punkte

5. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeige: $\lambda^2 + 1$ ist ein Eigenwert von $A^2 + E$.

2 Punkte

6. Die Spur einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist definiert als $Spur(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ (Summe der Hauptdiagonalelemente).

(a) Zeige: $Spur(A) = Spur(B^{-1}AB)$ mit einer regulären Matrix B.

(b) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Es sei bekannt, daß A die beiden Eigenwerte i und $1 + i$ besitze. Ferner sei $Spur(A) = 0$. Berechne die Determinante von A.

3 Punkte

7. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, B sei regulär. Zeige: Die Matrizen AB und BA besitzen dieselben Eigenwerte.

2 Punkte

8. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Zeige: $P_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

2 Punkte

9. * Es bezeichne $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen.
Zeige: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$ hat keine Eigenwerte.

2 Zusatzpunkte