UNIVERSITÄT ULM
Abteilung für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 25. Juni 2008, vor den Übungen

1. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes, daß für alle $a, b, c, d \in [1, e]$ gilt, daß

$$|\log(a)\log(b) - \log(c)\log(d)| \leq |a - c| + |b - d|$$

4 Punkte

2. (a) Bestimme Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) Bestimme Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = x^3 y^3 + z^3$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 1$ und $x, y, z \geq 0$.

3+3 Punkte

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Zeige, daß zu jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq \sqrt[3]{4}$ eine Umgebung $U = U_\epsilon(x_0)$ und eine Funktion $g = U \to \mathbb{R}$ mit $g \in C^1(U)$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$ existiert.
Berechne $g'(x_0)$ in Abhängigkeit von $g(x_0)$.

4 Punkte

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T$. Zeige, daß f in allen Punkten $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ lokal umkehrbar ist. Kann man f sogar global umkehren?

4 Punkte

5. Berechne für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz^2 \\ 0 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

jeweils an der Stelle $(x,y,z)^T = (1,2,3)^T$ die Werte von

(a) $div(\vec{F})$

(b) $rot(\vec{F})$

(c) $\Delta | \vec{F} |^2$.

2+2+2 Punkte