UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 11

Abgabe: Dienstag, 20. Januar 2009, in der Vorlesung

1. (a) Es sei $z = x - iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \geq 0$. Weiterhin sei
$$\omega := \sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}.$$
Zeige: $\omega^2 = \bar{z}$.

   (b) Berechne Real- und Imaginärteil von
$$\left(\sqrt{\frac{|-2-3i|-2}{2}} + i\sqrt{\frac{|-2-3i|+2}{2}}\right)^2.$$

   (c) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 + (2-i)z^2 = 2i$ in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

   (d) Welche Beziehung besteht zwischen

      i. $\arcsin(z)$ und $\log(z)$

      ii. $\arctan(z)$ und $\log(z)$

   (e) Was bedeutet i^i? (8)

2. Es seien $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \ \Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ der Einheitskreis. Zeige:
Die Möbiustransformation $z \to \dfrac{z-i}{z+i}$ bildet $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{E}$ ab. (4)

3. Überprüfe folgende Funktionen auf dem angegebenen Definitionsbereich auf komplexe Differenzierbarkeit?

   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$

   (b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$

   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\bar{z}^2$

   (d) $M := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ y = x^2\}$, $f : M \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (6)

4. (a) Berechne $\displaystyle\int_{-i}^{+i} |z| \, dz$, indem Du den Weg

      i. geradlinig,

      ii. längs der linken bzw.

      iii. längs der rechten Hälfte des Einheitskreises

      wählst.

   (b) Berechne $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \Re(z) \, dz$, indem Du für $\mathcal{C}$

      i. den einmal positiv von $+1$ nach $+1$ umlaufenen Einheitskreis,

      ii. die geradlinige Strecke von z_1 nach z_2 bzw.

      iii. den einmal positiv umlaufenen Kreis mit Radius r um z_0

      nimmst. (6)