UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

# Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

## Übungsblatt 12

Abgabe: Dienstag, 27. Januar 2009, in der Vorlesung

1. Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}^2\,dz$ mit $\gamma$ als gerader Wegstrecke $[0, 1+i]$

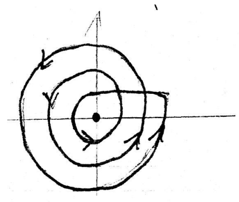
   (b) $\displaystyle\int_\gamma \bar{z}^2\,dz$ mit $\gamma$ als Verkettung von $[0,1]$ und $[1, 1+i]$

   (c) $\displaystyle\int_\gamma z\exp(z^2)\,dz$ mit $\gamma = S^1$ im Uhrzeigersinn (3)

2. Berechne mit der Cauchyschen Integralformel folgende komplexe Kurvenintegrale:

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$

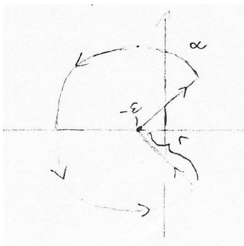
   (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$ mit $\gamma$ :

   (d) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1)-z}{(z-7)^{42}}\,dz$ (4)

3. „Pacman frißt $\mathbb{R}^+$“

(a) Für die Kurve $\alpha$ mit 

bestimme $\displaystyle\int_\alpha e^{z^2+3z+5}\frac{z^3+5}{(z-3)^5}\,dz$ mit $\epsilon, r > 0$.

(b) Wird Pacman satt? (2)

4. (a) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe positiven Konvergenzradius und innerhalb des Konvergenzkreises gelte: $f(z) = f(-z)$.
Zeige, daß in diesem Fall für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = 0$.

(b) Gib ein Beispiel einer ganzen Funktion an, die dieser Bedingung genügt. (3)

5. (a) Entwickle die folgenden Funktionen in Potenzreihen um $z_0$ und bestimme den Konvergenzradius:

i. $\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ um $z_0 = 0$

ii. $\dfrac{1}{(z-i)^3}$ um $z_0 = -i$

iii. $\bar{z}^2$ um $z_0 = 4$

iv. $\dfrac{1}{\alpha^2+z^2}$ um

A. $z_0 = 0$

B. $z_0 = i$

(b) Berechne die ersten sechs Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für

i. $e^{\frac{z}{1-z}}$

ii. $\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$

(9)

6. Zeige: Eine ganze Funktion $f$ ist genau dann ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq a + b|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ existieren.
(Verallgemeinerung des Satzes von Liouville) (3)