UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: (24+9) Punkte

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 18. November 2008, in der Vorlesung

1. Gegeben sei eine Tasse heißen Tees (180 g), in den (zum Zeitpunkt $t = 0$) ein wenig Zucker (20 g) gegeben wird. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Zucker im Tee auflöst, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge an Zucker und der Differenz zwischen Sättigungskonzentration (hier 1/4) und der momentanen Zuckerkonzentration.

   (a) Finde die Differentialgleichung, die die Veränderung der Menge gelösten Zuckers $u(t)$ zur Zeit t beschreibt.

   (b) Bestimme die Menge $u(t)$ zur Zeit $t > 0$.

   (c) In der Lösung u tritt eine Proportionalitätskonstante auf. Welchen Wert hat diese, wenn nach fünf Minuten eine Zuckerkonzentration von **1/20 (!)** vorliegt?

   (d) Nach welcher Zeit sind drei Viertel des Zuckers aufgelöst? (4)

2. Löse die DGL- Systeme

   (a) $\begin{cases} x \cdot y_1'(x) + y_2(x) = 0 \\ x \cdot y_2'(x) + y_1(x) = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x \cdot y_1'(x) + 2(y_1(x) - y_2(x)) = x \\ x \cdot y_2'(x) + y_1(x) + 5y_2(x) = x^2 \end{cases}$ (8)

3. (a) Berechne e^{xA} für

   i. eine Diagonalmatrix $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

   ii. eine idempotente Matrix, d.h. $A = A^2$,

   iii. eine diagonalisierbare Matrix, d.h. $A = S^{-1} diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) S$

   iv. und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Finde ein relles Fundamentalsystem für $y' = Ay$, wobei

   i. die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf Aufgabe a)

   ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist. (6)

4. Finde eine Lösung der DGL

   (a) $y''(x) - y(x) = e^{2x}(1 + x)$

   (b) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \log(x)$. (6)

5. Die Aufgabe 3 auf dem vierten Übungsblatt war falsch gestellt; die Matrix war die gleiche wie in Aufgabe 1. Daher wird die Aufgabe des vierten Blattes nicht gewertet und daher hier nochmals (und diesmal richtig) gestellt.
   Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige:

   (a) Die Matrix A ist diagonalisierbar.

   (b) Finde eine reguläre Matrix S, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

   (c) Berechne $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

   (d) Zeichne das zu $f(x) = Ax$ gehörende Richtungsfeld für $x \in [-2, 2]^2$. (9)