



Probeklausur zur Höheren Mathematik für Physiker III

Dr. Hartmut Lanzinger, Hans- Peter Reck

keine Abgabe

1. Finde eine Lösung für folgende DGL bzw. Anfangswertprobleme:

(a) $y' = ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} - \{1\}$

Hinweis: Verwende die Substitution $y = x^{\frac{1}{1-n}} u(x)$.

(b) $xy' - y = \frac{x \cos \log |\log |x||}{\log |x|}$ mit $y(e^{\exp(\frac{\pi}{4})}) = \frac{1}{e}$.

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = y^3 + x$ mit $y(0) = 0$. Entscheide anhand des Satzes von Picard- Lindelöf, ob für das gegebene AWP lokal genau eine Lösung existiert.

3. Löse die DGL

(a) $xy' - y(2y \log(x) - 1) = 0$,

(b) $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y) \cos y = 0$

Hinweis: dividiere die DGL durch $\cos^2 y$.

4. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 2 + i$ mit dem Eigenvektor $x_1 = (1, i, 2)^T$. Bestimme alle übrigen Eigenwerte von A und gib sowohl die allgemeine komplexe, als auch die allgemeine reelle Lösung des DGL- Systems $u' = Au$ an.

5. Löse die Randwertaufgabe $y'' + y' - 2y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y(-1/2) - y'(-1/2) = e$.

6. (a) Zeige, daß $\left(\sqrt{|z|} \frac{z+|z|}{|z+|z||} \right)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

(b) In welchem Sinne gilt $(a^b)^c = a^{bc}$ für $a, b, c \in \mathbb{C}$?

(c) Berechne alle Werte von 2^{-i} und den Hauptwert von $(i(i-1))^i$.

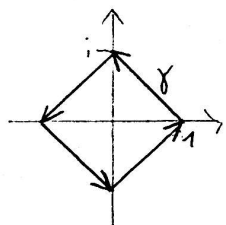
7. Überprüfe, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich komplex differenzierbar sind.

(a) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}\Im(z)$

(b) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \tan(z)$

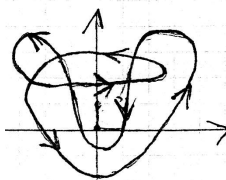
(c) $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}^2.$

8. Berechne folgende komplexe Kurvenintegrale:



(a) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ mit γ :

(b) $\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^2} dz$



(c) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} e^{3\pi z + 7 \sin z} dz$ mit γ :

9. Entwickle folgende Funktionen in eine Potenzreihe um den angegebenen Punkt

(a) $f(z) = e^z$ um $z_0 = 1$

(b) $f(z) = \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 3}$ um $z_0 = 4$

(c) $f(z) = \Re(z)$ um $z_0 = -1$

(d) $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ um $z_0 = 1$

10. Was für eine Singularität hat die Funktion

(a) $\frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}$ in $z = -i$

(b) $\frac{1}{1-e^z}$ in $z = 2\pi i$ und berechne die Residuen.

11. (a) Entwickle die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ für $0 < |a| < |z| < |b|$ in eine Laurentreihe

(b) Entwickle die Funktion $f(z) = z^{-2} \cos z$ auf $\mathbb{C}^\times$ in eine Laurentreihe. Ist f in 0 holomorph?

12. Berechne das Integral

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5 - \cos 4x} dx$