

## Stochastik III

(Abgabe: Do., 11.11.2010, 14:15 Uhr, vor den Übungen)

1. Es sei  $\mathcal{P} = \{U(0, \theta) \mid \theta > 0\}$  die Familie der Gleichverteilungen auf  $(0, \theta)$ . Bestimme einen UMP-Test für die Hypothese  $\theta \leq \theta_0$  vs.  $\theta > \theta_0$  für  $\theta_0 > 0$ .

(4 Punkte)

2. Gegeben sei eine iid Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  zum Merkmal  $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ .

- (a) Berechne den Maximum Likelihood Schätzer für  $\mu$ .  
(b) Wie lässt sich basierend darauf ein Test für die beidseitige Hypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  konstruieren?  
(c) In dieser Teilaufgabe soll die einseitige Hypothese  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$  getestet werden. Dafür wird der folgende Test verwendet.

$$\mathbb{1}_{\{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0) > \Phi^{-1}(1-\alpha)\}}.$$

Hierbei bezeichnet  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeige, dass dieser Test ein UMPU Test ist. Berechne die Gütefunktion und plote diese in  $\mathbb{R}$ .

- (d) Gegeben sei der Datensatz `geysir.dat`. Er enthält Messungen der Eruptionsdauern und der Zeiten zwischen zwei Eruptionen eines bestimmten Geysirs an 8 aufeinanderfolgenden Tagen. Man gehe von einer  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  Verteilung der Eruptionsdauern aus und teste in  $\mathbb{R}$  die Hypothese:

$$H_0 : \mu \leq 3.5 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu > 3.5$$

Als Signifikanzniveau soll  $\alpha = 0.05$  verwendet werden.

(2 + 2 + 4 + 4 Punkte)

3. Gegeben sei eine parametrische Familie  $\mathcal{P} = \{F_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ . Hierbei soll  $F_\theta$  bezüglich des Lebesgue-Maßes eine Dichte  $f(x, \theta)$ , welche auf  $\mathbb{R}^2$  zweimal stetig differenzierbar sei, besitzen. Zeige:

$$\frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_0)} \text{ ist monoton wachsend in } x \text{ für beliebige } \theta_0 < \theta_1 \iff \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \log f(x, \theta) \geq 0.$$

(4 Punkte)

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stufabe/wima3/stochiiiws10.html>