Dr. H. Lanzinger
C. Hering

Winter 2010
11.11.2010
Blatt 3

Stochastik III

(Abgabe: Do., 18.11.2010, 14:15 Uhr, vor den Übungen)

1. Gegeben sei eine Zufallsstichprobe $X_1, \ldots, X_n$ zum Merkmal $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Um die Hypothese $H_0 : \sigma = 1$ gegen $H_1 : \sigma \neq 1$ zu testen wird ein Likelihoodquotiententest der Form $\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{\lambda(\vec{x}) \leq \varepsilon\}}$ für ein $\varepsilon > 0$ verwendet.
   (a) Man berechne den Likelihoodquotienten $\lambda(\vec{x})$.
   (b) Zeige, dass der Ablehnungsbereich W_n von φ in der Form
   $$W_n = \{||\vec{x}|| \leq t_1 \text{ oder } ||\vec{x}|| \geq t_2\},$$
   wobei hier $||\vec{x}||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ist.
   (c) Bestimme die Schranken t_1 und t_2 so, dass die erwartete Größe beider Teilbereiche von W_n gleich 0.05 ist, d.h. so, dass der Fehler erster Art gerade 0.1 ist. Bei dieser Teilaufgabe soll $n = 10$ verwendet werden.
   (d) Gegeben seien die Größen aus der vorherigen Teilaufgabe. Welche Macht hat der Test bei $\sigma = 2$?

(1 + 2 + 3 + 2 Punkte)

2. Gegeben sei der Zufallsvektor $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass der Vektor $Y = AX + c$ multivariat normalverteilt ist mit Mittelwertsvektor $A\mu + c$ und Kovarianzmatrix $A\Sigma A^T$.
   Hinweis: $\mathbb{E}\big(\exp(it^T X)\big) = \exp(i\mu^T t - \frac{1}{2} t^T \Sigma t)$

(5 Punkte)

3. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und idempotente Matrix. Zeige, dass für die Diagonalelemente stets gilt: $a_{ii} \in [0, 1]$. Zeige außerdem, dass im Fall $a_{ii} \in \{0, 1\}$ folgt $a_{ij} = a_{ji} = 0$ für alle $i \neq j$.
   (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeige, dass dann stets gilt: $\text{spur}(A) = \text{spur}(B)$.

(3 + 2 Punkte)

4. (a) Man führe Aufgabe 3b) von Blatt 2 nun für die beidseitige Hypothese $H_0 : \mu = 3.5$ gegen $H_1 : \mu \neq 3.5$ durch.
   (b) Man nehme an, dass die Wartezeiten zwischen den Eruptionsdauern, welche ebenfalls im Datensatz `geysir.dat` zu finden sind, ebenfalls $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind und teste die Hypothese, $H_0 : \mu = 75$ gegen $H_1 : \mu \neq 75$.

(2 + 2 Punkte)

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stufabe/wima3/stochiiiws10.html