Dr. H. Lanzinger
C. Hering

Winter 2010
02.12.2010
Blatt 6

Stochastik III

(Abgabe: Do., 09.12.2010, 14:15 Uhr, vor den Übungen)

1. Gegeben sei der Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^n$ mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ und die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Zeige die folgenden Aussagen:

   (a) $C\Sigma D^T = 0 \Longleftrightarrow CX$ und DX sind unabhängig.

   (b) $A\Sigma D^T = 0 \Longrightarrow DX$ und $X^T AX$ sind unabhängig.

   (c) $A\Sigma B = 0 \Longrightarrow X^T AX$ und $X^T BX$ sind unabhängig.

(2 + 2 + 2 Punkte)

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu_X \mathbb{1}, \sigma_X^2 I_n)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y \mathbb{1}, \sigma_Y^2 I_m)$ unabhängige Zufallsvektoren, wobei $\mathbb{1}$ der Vektor aus $\mathbb{R}^n$, bzw. $\mathbb{R}^m$ sei, der in jeder Komponente den Eintrag 1 hat. Es soll nun ein Test auf Gleichheit der Mittelwerte durchgeführt werden. Die Varianzen seien unbekannt und werden mit der Größe: $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ bzw. S_Y^2 geschätzt. Die Statistik

$$T = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

   kann durch eine t-Verteilung approximiert werden. Dazu benötigt man die Unabhängigkeit von Zähler und Nenner. Weise diese nach.

(4 Punkte)

3. Gegeben sei das lineare Modell $X = A\beta + \varepsilon$, wobei gelte $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$.

   (a) Berechne die Maximum Likelihood Schätzer $\widehat{\beta}$ und $\widehat{\sigma^2}$.

   (b) Berechne außerdem $\mathbb{E}(\widehat{\beta}), \mathrm{Cov}(\widehat{\beta})$ und $\mathbb{E}(\widehat{\sigma^2})$.

(3 + 3 Punkte)

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechne in `R` die Spur und die Eigenwerte von A.

   (b) Löse das Gleichungssystem $(A^T A)^- A^T x = b$ in `R`.

(2 + 2 Punkte)

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/lanzinger/stochiiiws10.html