Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
11.11.2011
Blatt 4

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 18.11.2011, vor den Übungen)

1. Du bist Kandidat bei einer Quizshow. Es werden 15 Fragen gestellt, zu jeder Frage gibt es vier mögliche Antworten, wovon genau eine richtig ist. Mit jeder richtigen Antwort steigt der mögliche Gewinn, die Gewinnstufen sind 50 €, 100 €, 200 €, 300 €, 500 €, 1000 €, 2000 €, 4000 €, 8000 €, 16000 €, 32000 €, 64000 €, 125000 €, 500000 €, den Hauptgewinn von 1000000 € erhält man falls man alle 15 Fragen richtig beantwortet. Sobald eine Frage falsch beantwortet wird scheidet man aus. Allerdings sind die Gewinnstufen 500 € und 16000 € sicher, das bedeutet, dass man beim Ausscheiden 500 € erhält, falls man bereits die ersten fünf Fragen richtig beantwortet hat, und 16000 €, falls man die ersten zehn Fragen richtig beantworten konnte. Liegt man bereits bei einer der ersten fünf Fragen falsch gewinnt man nichts. Allerdings kann man jederzeit aussteigen und erhält als Gewinn die aktuelle Gewinnstufe (z.B. 300 € wenn drei Fragen richtig beantwortet wurden und man bei der vierten Frage aussteigt).

   (a) Du bist auf der 32000 €-Stufe und hast keine Ahnung wie die richtige Antwort auf die 64000 €-Frage lautet. Berechne den erwarteten Gewinn für den Fall, dass Du nicht aussteigst, sondern einfach zufällig eine der vier Antworten wählst. Ist es sinnvoller zu raten oder auszusteigen? Wie ist die Situation auf der 125000 €-Stufe, also bei der zufälligen Beantwortung der 500000 €-Frage?

   (b) Wie groß ist der erwartete Gewinn wenn man jede Frage zufällig beantwortet? Wie groß ist er wenn man bereits die 16000 €-Frage richtig beantwortet hat und lediglich die Antworten auf die letzten fünf Fragen zufällig auswählt?

   In dieser Aufgabe werden Joker nicht berücksichtigt.

   (4 Punkte)

2. Ein Tutorium hat 20 Teilnehmer, davon bestehen 18 die Klausur beim ersten Versuch. Die Wahrscheinlichkeit dass ein Student besteht wenn er nie im Tutorium war ist $\frac{2}{3}$.

   (a) Ist es plausibel dass das Tutorium die Wahrscheinlichkeit zu bestehen erhöht hat? Wie wahrscheinlich ist es dass 18 oder mehr von 20 Studenten, die kein Tutorium besucht haben, die Klausur bestehen?

   (b) Skizziere die Zähldichte der Zufallsvariable X, die angibt wieviele von 20 Studenten ohne Tutorium bestehen.

   (4 Punkte)

3. Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf den geraden Zahlen zwischen 1 und (einschließlich) N. Berechne Erwartungswert und Varianz von X.

   Hinweis: Unterscheide die Fälle dass N gerade oder ungerade ist.

   (4 Punkte)

4. Die örtliche Spielbank bietet für Neulinge „Einsteiger-Roulette“ an, dabei fehlt im Kessel die Null, also ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn man auf „Rot“ oder „Schwarz“ setzt, jeweils genau $\frac{1}{2}$. Der Mindesteinsatz ist 1 €, der maximale Einsatz beträgt 1024 €. Setzt man auf eine Farbe und gewinnt, wird der Einsatz verdoppelt (setzt man 1 € auf „Rot“ und die Kugel fällt auf eine rote Zahl erhält man 2 €, man hat also einen Euro gewonnen), falls man verliert geht der Einsatz an die Bank.

   Andrea und Bastian beschließen das Einsteiger-Roulette zu spielen. Andrea plant lediglich ein einziges Spiel zu wagen, sie setzt 1 € auf „Rot“. Bastian will eine Strategie aus dem Internet ausprobieren: Im ersten Spiel setzt er ebenfalls 1 €. Falls er gewinnt hört er auf. Falls er verliert setzt er in der nächsten Runde das Doppelte (also 2 €). Dieses Vorgehen wiederholt er so lange bis er entweder gewonnen hat, oder er den Einsatz nicht mehr verdoppeln kann weil das Limit erreicht ist, in diesem Fall hört er ebenfalls auf zu Spielen. Bastian setzt immer auf „Schwarz“.

   Wir betrachten den W-Raum $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}\big)$, sowie die Zufallsvariablen X_A, X_B und Y mit

$$\begin{aligned}
\Omega &:= \{\text{rot}; \text{schwarz}\}^{11} \\
X_A(\omega) &:= \text{Gewinn von Andrea bei Ergebnis } \omega \\
X_B(\omega) &:= \text{Gewinn von Bastian bei Ergebnis } \omega \\
Y(\omega) &:= \text{Anzahl der Spiele, die Bastian spielt, bei Ergebnis } \omega
\end{aligned}$$

   (a) Wie hoch ist der erwartete Gewinn der beiden?

   (b) Berechne die Varianzen und Standardabweichungen von X_A und X_B.

   (c) Bilde eine Wertetabelle der Zähldichte von Y und zeichne die Dichte, sowie die Verteilungsfunktion von Y in ein gemeinsames Schaubild.

(4 Punkte)