

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 23.12.2011, vor den Übungen)

1. X und Y seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2\}$ bzw. $\{1, 2, 3\}$. Die folgende Tabelle gibt die Zähldichte des Zufallsvektors (X, Y) an.

X	Y		
	1	2	3
0	p_1	p_2	$\frac{1}{7}$
1	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{14}$
2	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$

Die Wahrscheinlichkeit p_2 ist doppelt so groß wie p_1 .

- (a) Bestimme p_1 und p_2 .
(b) Bestimme die Zähldichte und die Verteilungsfunktion von X bzw. Y .
(c) Sind X und Y unabhängig? Begründe Deine Aussage.

(4 Punkte)

2. Die Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt, die Zufallsvariable Y sei Cauchy-verteilt mit Parametern $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Berechne die q -Quantile x_q und y_q von X und Y für alle $q \in \{0.25; 0.5; 0.75; 0.99\}$.

Hinweis: Es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(4 Punkte)

3. Es sei $X \sim U[0, 1]$ und $Y := X$, sowie $Z := 1 - X$.

- (a) Bestimme die Verteilungen $F_{(X,Y)}$ und $F_{(X,Z)}$ der Zufallsvektoren $(X, Y)^\top$ bzw. $(X, Z)^\top$.
(b) Es sei $x \in (0, 1)$. Zeige, dass die bedingten Verteilungen $F_{Y|X}(\cdot|x)$ und $F_{Z|X}(\cdot|x)$ durch die Gleichverteilungen $U[0, x]$ und $U[1-x, 1]$ gegeben sind.

(4 Punkte)

4. Wir gehen davon aus, dass die Ankunft der Linie 3 am Bahnhof, sowie die Abfahrt der Linie 1 vom Bahnhof, immer verspätet stattfindet. Dabei sei X_1 die Verspätung der Linie 1 und X_3 die Verspätung der Linie 3. Die Dichte des Zufallsvektors $(X_1, X_3)^\top$ ist durch

$$f(x, y) := \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{3x+2y}{6}\right) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y)$$

gegeben. Wir wollen am Bahnhof von der 3 in die 1 umsteigen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- (a) Die Bahn hat mehr als 2,5 Minuten Verspätung, der Bus dagegen weniger als 2,5 Minuten.
- (b) Die Bahn hat mehr Verspätung als der Bus, also $P(X_3 < X_1)$
- (c) Die Verspätung der Bahn ist mehr als dreimal größer als die des Busses.

(4 Punkte)

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben.