Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
16.12.2011
Blatt 9

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 23.12.2011, vor den Übungen)

1. Beim Spiel „5-Finger-Morra“ zeigen beide Spieler zugleich ein bis fünf Finger. Gleichzeitig geben sie einen Tipp ab, wie viele Finger insgesamt gezeigt werden (also 2-10). Ruft ein Spieler die korrekte Anzahl, bekommt er einen Punkt. Wir gehen davon aus, dass beide Spieler die Anzahl der Finger die sie zeigen zufällig wählen, ohne eine Strategie zu bevorzugen. Es sei X die Anzahl der Finger, die Spieler 1 zeigt und Y sei die Anzahl der Finger, die Spieler 2 zeigt. Z sei die Gesamtzahl der gezeigten Finger.

   (a) Bestimme die Zähldichte von Z.

   (b) Besteht eine Korrelation zwischen der Gesamtzahl und der Anzahl der Finger die Spieler 1 zeigt? Berechne $\operatorname{cov}(X, Z)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Z)$.

(1+3 Punkte)

2. Die Dichte des Zufallsvektors $(X, Y)^\top$ ist durch

$$f_{(X,Y)}(x, y) := \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-(x+y)} & \text{falls } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben. Berechne die Kovarianz von X und Y.

   Hinweis: Verwende die Randdichten zur Berechnung der Erwartungswerte von X und Y.

(4 Punkte)

3. Es sei $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen X_i $(i \in \mathbb{N})$ seien unabhängig und $\operatorname{Exp}(\lambda)$-verteilt. Wir betrachten die Summen $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ dieser Zufallsvariablen $(n \in \mathbb{N})$.

   (a) Bestimme die Dichte von $X_1 + X_2$. Zeige also, dass $f_{Y_2}(y) = \lambda^2 y\, \mathrm{e}^{-\lambda y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$ gilt.

   (b) Zeige durch vollständige Induktion, dass $f_{Y_n}(y) = \lambda^n \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda y}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

(2+2 Punkte)

4. Alex und Bert gehen zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 12h und 13:30h in die Mensa. Sie wählen die Zeitpunkte gleichverteilt und unabhängig voneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen essen, wenn jeder bereit ist, maximal 15 Minuten auf den anderen zu warten?

   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit durch geometrische Überlegungen und eine Skizze.

   (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit durch passende Integration der gemeinsamen Dichte der zufälligen Ankunftszeitpunkte.

(2+2 Punkte)

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben.