Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
23.12.2011
Blatt 10

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 13.01.2012, vor den Übungen)

1. Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen (Werte X_i) und dann das arithmetische Mittel der Messwerte ($Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$) berechnet. Die Zufallsvariable X_i sei der Messwert der i-ten Messung. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist und die Messfehler unabhängig voneinander und gemäß derselben Verteilung auftreten. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1.

   (a) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert Y_n der Messungen weniger als 0,1 vom wahren Wert abweicht, mindestens 90% ist?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Messung um mehr als die fünffache Standardabweichung neben dem Mittelwert liegt (wenn man vom schlechtesten Fall der Ungleichung von Tschebyscheff ausgeht)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der in (a) berechneten Anzahl an Messungen mindestens ein solcher Ausreisser auftritt?

   (c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten in (b), falls die Messwerte normalverteilt sind.

(1,5 + 1 + 1,5 Punkte)

2. Es seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $s_1, s_1 \in [0,\infty)$ und $r \in (-1,1)$. Die Verteilung des Zufallsvektors $(X,Y)^\top$ sei durch $\mathrm{N}(\mu, C)$ mit

$$\mu := \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C := \begin{pmatrix} s_1^2 & rs_1s_2 \\ rs_1s_2 & s_2^2 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Es gilt $\mathrm{Var}(X) = s_1^2$ und für den Korrelationskoeffizient von X und Y gilt $\rho(X,Y) = r$.

   (b) Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $\rho(X,Y) = 0$ gilt.

(2 + 2 Punkte)

3. Der Zufallsvektor $(U,V,W)^\top$ besitze die Dichte f mit $f(u,v,w) := \frac{1}{216}(2 - \frac{w}{3} - \frac{uv}{9} + \frac{uvw}{27})$ falls $(u,v,w)^\top \in [0,6]^3$ und $f(u,v,w) = 0$ sonst.

   (a) Bestimme Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix von $(U,V,W)^\top$.

   (b) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable $Z := 0{,}5U + 2V - W$.

(2+2 Punkte)

4. Du nimmst an einem Wettkampf im Bogenschießen teil. Obwohl Du bei jedem Schuss genau die Mitte des Ziels anvisierst, kommt es zu zufälligen Abweichungen um X Meter in horizontaler und um Y Meter in vertikaler Richtung. Der Zufallsvektor $(X, Y)^\top \sim \mathrm{N}(\mu, C)$ ist standardnormalverteilt. Sein Erwartungswertvektor und seine Kovarianzmatrix sind also durch

$$\mu := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für den Gewinn des Turniers ist der Abstand des Pfeils zur Mitte des Ziels ausschlaggebend, also der Wert der Zufallsvariable $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$.

(a) Zeige, dass $R^2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$ gilt, dass also die quadratische Entfernung exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$ ist.

(b) Es stehen zwei Ziele zur Auswahl: Das erste ist quadratisch und hat die Seitenlänge 2m, das zweite ist rund und hat den Radius $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$m. Ist die Wahrscheinlichkeit das Ziel zu treffen (also den Pfeil nicht komplett daneben zu schießen) bei einem der beiden größer? Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r \cdot f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$ (Polarkoordinatendarstellung).

(2+2 Punkte)

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben.