Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
27.01.2012
Blatt 13

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 03.02.2012, vor den Übungen)

1. Ein Medium behauptet das Ergebnis eines Münzwurfs vorhersehen zu können. Bei einem Versuch unter Laborbedingungen wird 120-mal eine faire Münze geworfen, um die Vorhersagen zu überprüfen. Ein Mitarbeiter des Labors trifft zu Vergleichszwecken ebenfalls Vorhersagen über die 120 Ergebnisse. Das Medium lag 66-mal richtig, die Vergleichsperson nur 53-mal.

   Berechne asymptotische Konfidenzintervalle für die Trefferwahrscheinlichkeit des Mediums, sowie des Mitarbeiters, jeweils für $\beta = 0{,}9$ und $\beta = 0{,}95$ und jeweils einmal nach der Tschebyscheff-Ungleichung und einmal nach dem zentralen Grenzwertsatz.

   (4 Punkte)

2. Bei der maschinellen Produktion von Weingläsern für ein Einrichtungshaus wird der Durchmesser des Bodens zufällig gemäß einer Normalverteilung $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ variiert, um den Eindruck von handgefertigten Unikaten zu erwecken. Bei einer Kontrolle wurden folgende Abweichungen (in mm) vom Standarddurchmesser festgestellt:

   $$-4{,}40 \quad -6{,}48 \quad +0{,}33 \quad -4{,}22 \quad -10{,}19 \quad +0{,}82 \quad +1{,}64$$

   Um zu Überprüfen, ob die Maschine richtig eingestellt ist - der Erwartungswert der Abweichung sollte 0 sein - werden β-Konfidenzintervalle für den Erwartungswert berechnet.

   (a) Berechne Stichprobenmittel $\bar{X}$ und Stichprobenvarianz S^2.
   (b) Berechne Konfidenzintervalle für $\beta = 0{,}9$ und $\beta = 0{,}95$ bei unbekannter Varianz.
   (c) Berechne Konfidenzintervalle für $\beta = 0{,}9$ und $\beta = 0{,}95$, wenn bekannt ist, dass $\sigma = 5$ gilt.

   (1 + 1,5 + 1,5 Punkte)

3. Es sind folgende Schätzer für den Parameter λ einer Poi(λ)-Verteilung gegeben (mit $n \geq 4$):

   $$T_1(X_1, \ldots, X_n) := \bar{X}$$
   $$T_2(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{3}(X_1 + X_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + X_n)$$

   (a) Zeige, dass beide Schätzer erwartungstreu für λ sind.
   (b) Zeige, dass T_1 schwach konsistent für λ ist.
   (c) Zeige, dass T_2 nicht schwach konsistent für λ ist.

   Hinweis: Verwende die Tschebyscheff-Ungleichung für (b) und ein konkretes Gegenbeispiel (z.B. $\lambda = 3$ und $\varepsilon = \frac{1}{3}$) für (c). Bei $\lfloor x \rfloor$ handelt es sich um die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich x ist, also $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} | n \leq x\}$.

   (1 + 2 + 1 Punkte)

4. Wir betrachten erneut das folgende Beispiel aus der Vorlesung:

   Zur Vorbereitung auf eine Klausur durchläuft eine Gruppe A von Studenten ein spezielles Vorbereitunsgprogramm, eine Gruppe B absolviert dieses Programm nicht. Bei der Klausur ergeben sich folgende Punktzahlen:

A	106	106	74	146	116	122	72	114	92	110
B	66	112	52	86	92	110	108	78	112	96

   (a) Wir gehen davon aus, dass die Punktzahlen in Gruppe A eine Stichprobe einer $N(\mu_a, \sigma_a^2)$-Verteilung und in Gruppe B eine Stichprobe einer $N(\mu_b, \sigma_b^2)$-Verteilung sind. Dabei sind alle Parameter unbekannt. Berechne $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalle, jeweils für μ_a, μ_b und jedes $\alpha \in \{0{,}35; 0{,}1; 0{,}05; 0{,}025; 0{,}01; 0{,}001\}$

   (b) Mit mindestens welcher Wahrscheinlichkeit gilt $\mu_a \neq \mu_b$? Begründe Deine Abschätzung mit den in (a) für $\alpha = 0{,}35$ berechneten Konfidenzintervallen.

(3 + 1 Punkte)

Quantiltabelle zur t_n-Verteilung:

	0,65	0,825	0,9	0,95	0,975	0,9875	0,99	0,995	0,999	0,9995
6	0,4043	1,0133	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,1427	3,7074	5,2076	5,9588
7	0,4015	1,0014	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	2,998	3,4995	4,7853	5,4079
8	0,3995	0,9925	1,3968	1,8595	2,306	2,7515	2,8965	3,3554	4,5008	5,0413
9	0,3979	0,9858	1,383	1,8331	2,2622	2,685	2,8214	3,2498	4,2968	4,7809
10	0,3966	0,9804	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,7638	3,1693	4,1437	4,5869
11	0,3956	0,9761	1,3634	1,7959	2,201	2,5931	2,7181	3,1058	4,0247	4,437
19	0,3912	0,9582	1,3277	1,7291	2,093	2,4334	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834
20	0,3909	0,957	1,3253	1,7247	2,086	2,4231	2,528	2,8453	3,5518	3,8495

Erklärung: Die Quantiltabelle enthält auf vier Nachkommastellen gerundete Werte von $F_n^{-1}(x)$, wobei $x \in \{0{,}65; 0{,}825; \ldots; 0{,}999; 0{,}9995\}$ gilt und F_n die Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden (also der t_n-Verteilung) ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte die korrekte Anzahl an Freiheitsgraden n. Dann geht man bis zur Spalte der gesuchten Wahrscheinlichkeit x nach rechts. Beispielsweise steht $F_7^{-1}(0{,}95)$ (also das 95%-Quantil der t_7-Verteilung) in der zweiten Zeile und vierten Spalte: $F_7^{-1}(0{,}95) \approx 1{,}8946$. Für den Fall $x \in \{0{,}001; 0{,}01; 0{,}025; 0{,}05; 0{,}1; 0{,}35\}$ verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $F_n^{-1}(1-x) = -F_n^{-1}(x)$.

Achtung: Ab sofort werden bei Blättern, die lose (bzw. nur mit gefalteten Ecken) abgegeben werden, sowie bei Blättern mit einem oder drei Namen, zwei Punkte abgezogen. Bitte Namen und slc-Login leserlich auf das Übungsblatt schreiben, sowie Vorder- und Rückseite der Blätter beschriften.

Dieses Blatt ist das letzte Blatt, das zur Vorleistung zählt. Wer bei den Blättern 1 bis inklusive 13 insgesamt 100 Punkte oder mehr erzielt hat und sich bis 07.02.12 im Hochschulportal für die Vorleistung angemeldet hat, der hat die Vorleistung erbracht, bekommt ab 10.02.12 einen entsprechenden Eintrag im Hochschulportal und kann sich dann zur Klausur anmelden.