Dr. H. Lanzinger
M. Weyhmüller

Winter 2011
03.02.2012
Blatt 14

Übungen zu Stochastik für Wiwi

(Abgabe: Fr., 10.02.2012, vor den Übungen)

1. Zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ soll getestet werden, ob sich die Reisezeit zwischen Berlin und Ulm mit dem Auto von der Fahrzeit der Bahn signifikant unterscheidet. Es liegen die Daten von 16 Fahrten mit dem Auto vor, die mittlere Dauer beträgt 6 Stunden, mit einer Stichprobenvarianz von 5,29. Idealisierend gehen wir davon aus, dass die Fahrzeit des ICE von Berlin nach Ulm immer 6 Stunden und 33 Minuten beträgt (also 6,55h) und dass die Dauer der Autofahrt $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt ist.

   (a) Teste ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Fahrzeiten gibt. Bestimme dazu den kritischen Bereich und die Testgröße aus der Vorlesung.

   (b) Teste ob das Auto schneller ist als der ICE. Bestimme den kritischen Bereich, achte dabei auf die richtige Wahl der Hypothesen.

   (c) Wie lange müsste die Zugfahrt dauern, damit die Autofahrt signifikant schneller ist?

(3 + 3 + 4 Punkte)

2. Zur Vorhersagewahrscheinlichkeit p von Münzwürfen wird erneut ein Experiment durchgeführt. Bei diesem Experiment werden 10 Würfe durchgeführt, Kopf und Zahl fällt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5. Es wird die Anzahl der korrekten Vorhersagen gezählt und dann die Hypothese $H_0 : p = 0{,}5$ gegen $H_1 : p \neq 0{,}5$ getestet. Als Teststatistik T wird die Zahl der korrekt vorhergesagten Würfe eingesetzt.

   Es stehen zwei kritische Bereiche und damit zwei verschiedene Tests zur Auswahl:

$$K_1^{(a)} := \big\{(x_1, \ldots, x_{10}) \,|\, T(x_1, \ldots, x_{10}) \in \{0; 1; 9; 10\}\big\}$$
$$K_1^{(b)} := \big\{(x_1, \ldots, x_{10}) \,|\, T(x_1, \ldots, x_{10}) = 2\big\}$$

   (a) Berechne jeweils die Gütefunktion $g(\theta) := \mathrm{P}_\theta(T \in K_1)$.

   (b) Handelt es sich bei den beiden Tests um Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$?.

   (c) Überprüfe, ob es sich beim Test mit kritischem Bereich $K_1^{(a)}$ um einen unverfälschten Test zum Niveau $\alpha = \frac{11}{512}$ handelt.

   (d) Überprüfe, ob es sich beim Test mit dem kritischen Bereich $K_1^{(b)}$ um einen unverfälschten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ handelt.

(2 + 1 + 3 + 3 Punkte)

3. Die Zufallsvariable X ist $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt. Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := F_X(X)$.

   (a) Finde eine Menge M, so dass $\mathrm{P}(Y \in M) = 1$ gilt.

   (b) Bestimme die Verteilung von Y, also $F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y)$ für ein $y \in [0, 1]$.

(2 + 4 Punkte)

4. Ein Tetraeder wird zweimal geworfen. Die Seiten sind mit den Zahlen 1–4 beschriftet und fallen mit der selben Wahrscheinlichkeit. Die Zufallsvariable X sei das Minimum der Augenzahlen der beiden Würfe. Die Zufallsvariable Y sei die Augenzahl im zweiten Wurf.

   (a) Bestimme die gemeinsame Zähldichte, sowie die Randdichten des Zufallsvektors $(X, Y)^\top$.

   (b) Berechne Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(X, Y)^\top$. Sind X und Y unabhängig?

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Minimum im zweiten Wurf auf? Berechne $\mathrm{P}(X = Y)$.

(4 + 4 + 1 Punkte)

5. Eine Urne enthält jeweils 5 rote, blaue und weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln gezogen. Nach jedem Zug wird die Kugel zurück in die Urne gelegt, und von den beiden Farben die nicht gezogen wurden je eine Kugel durch die gezogene Farbe ersetzt.

   (a) Die Ziehung welcher Landesfarben ist wahrscheinlicher: Frankreichs (blau, weiß, rot) oder Österreichs (rot, weiß, rot)? Es soll die Zugreihenfolge beachtet werden.

   (b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten in (a), wenn die Zugreihenfolge außer Acht gelassen wird.

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis aller drei Ziehungen identisch ist?

(4 + 4 + 3 Punkte)

6. Wir betrachten einen Zufallsvektor $(X, Y)^\top$.

   (a) Finde eine gemeinsame Zähldichte, so dass die Randverteilungen gerade Gleichverteilungen auf der Menge $\{-1; 1\}$ sind und der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y) \notin \{-1; 0; 1\}$ ist.

   (b) Finde eine gemeinsame Zähldichte, so dass $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ gilt, aber X und Y nicht unabhängig sind. Ausserdem soll $\mathrm{P}(X = 2) > 0$ gelten.

   Hinweis: Für beide Situationen können Beispiele aus der Vorlesung angewandt und sofern notwendig leicht abgewandelt werden.

(4 + 4 Punkte)

7. Der Zufallsvektor $(U, V)^\top$ hat die gemeinsame Dichte

$$f(u, v) := \begin{cases} \frac{1}{9}(u + v)\mathbb{1}_{[\frac{1}{2}u, 2u]}(v) & \text{falls } 0 \le u \le 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Berechne die Randverteilungen von U und V. Sind U und V unabhängig?

   (b) Berechne die Kovarianz von U und V.

   (c) Berechne die bedingte Verteilung von U, gegeben $V = 2$.

(3 + 5 + 4 Punkte)

8. Ein Kartenspiel enthält die Karten 2–10, sowie Bube, Dame, König und Ass in jeweils vier Farben. Wir gehen davon aus, dass die Karten beim Mischen zufällig in eine beliebige Reihenfolge gebracht werden und dabei alle Anordnungen gleich wahrscheinlich sind. Die Karten wurden gemischt und liegen jetzt offen, nebeneinander auf dem Tisch.

   (a) Wieviele mögliche Mischungen des Kartenspiels gibt es?

   (b) Ein Kartenspiel in dieser Form gibt es ca. 600 Jahre. Wir gehen davon aus, dass es in der ganzen Zeit 6 Milliarden Menschen gab, von denen die eine Hälfte jede Minute je ein Kartenspiel mischt, während die andere Hälfte schläft. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Mischvorgänge, die die Mischung auf dem Tisch ergaben. Ist die erwartete Anzahl der Mischungen, die mit unserer identisch sind, größer oder kleiner als 1?

   (c) Die Karten werden erneut gemischt und eine Runde Poker gespielt. Du hältst fünf Karten auf der Hand (die Reihenfolge spielt keine Rolle). Wir gehen weiter davon aus, dass nach jedem Mischvorgang der letzten 600 Jahre die obersten fünf Karten aufgedeckt wurden. Die Zufallsvariable Y sei die Anzahl der historischen Mischungen, bei denen Deine Hand aufgedeckt wurde. Ist die erwartete Anzahl der historischen Hände, die mit Deiner identisch sind größer oder kleiner als eins?

   Hinweis: Schaltjahre können vernachlässigt werden.

(1 + 2 + 2 Punkte)

Quantiltabelle zur t_n-Verteilung:

	0,65	0,825	0,9	0,95	0,975	0,9875	0,99	0,995	0,999	0,9995
6	0,4043	1,0133	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,1427	3,7074	5,2076	5,9588
7	0,4015	1,0014	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	2,9980	3,4995	4,7853	5,4079
8	0,3995	0,9925	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	2,8965	3,3554	4,5008	5,0413
9	0,3979	0,9858	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	2,8214	3,2498	4,2968	4,7809
10	0,3966	0,9804	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,7638	3,1693	4,1437	4,5869
11	0,3956	0,9761	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	2,7181	3,1058	4,0247	4,4370
15	0,3928	0,9647	1,3406	1,7531	2,1314	2,4899	2,6025	2,9467	3,7328	4,0728
16	0,3923	0,9627	1,3368	1,7459	2,1199	2,4729	2,5835	2,9208	3,6862	4,0150
19	0,3912	0,9582	1,3277	1,7291	2,0930	2,4334	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834
20	0,3909	0,9570	1,3253	1,7247	2,0860	2,4231	2,5280	2,8453	3,5518	3,8495

Erklärung zur Quantiltabelle: Siehe Blatt 13.

Dieses Blatt zählt nicht mehr zur Vorleistung. Wer bei den Blättern 1 bis inklusive 13 insgesamt 100 Punkte oder mehr erzielt hat und sich bis 07.02.12 im Hochschulportal für die Vorleistung angemeldet hat, der hat die Vorleistung erbracht, bekommt spätestens ab 10.02.12 einen entsprechenden Eintrag im Hochschulportal und kann sich dann zur Klausur anmelden. Wer im Hochschulportal bereits einen Eintrag über eine erbrachte Vorleistung aus vergangenen Semestern hat, der kann sich sofort zur Klausur anmelden.