

Übungen zur angewandten diskreten Mathematik

(Abgabe: Freitag, 9.12.2011, 14.10 Uhr, H 22)

14. Eine Bande von 17 Räubern stahl einen Sack mit Goldstücken. Als sie ihre Beute in gleiche Teile teilen wollten, blieben drei Goldstücke übrig. Beim Streit darüber, wer ein Goldstück mehr erhalten sollte, wurde ein Räuber erschlagen. Beim erneuten Versuch, die Beute gerecht aufzuteilen, blieben zehn Goldstücke übrig. Erneut kam es zum Streit, und wieder verlor ein Räuber sein Leben. Jetzt endlich ließ sich die Beute gleichmäßig verteilen. Wieviele Goldstücke bekam jeder Räuber mindestens?

15. Zeige: Erfüllen zwei ganze Zahlen a, b und eine Primzahl p die Kongruenz $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, so gilt sogar $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

16. a) Berechne $\varphi(363)$, $\varphi(364)$ und $\varphi(365)$.

b) Zeige, daß für natürliche Zahlen d, n aus $d \mid n$ stets $\varphi(d) \mid \varphi(n)$ folgt.

(6 Punkte)

17. a) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$?

b) Zeige: Es gibt keine natürliche Zahl n mit $\varphi(n) = 14$.

c) Beweise für $a, b \in \mathbb{N}$: $\varphi(ab) = \frac{\text{ggT}(a, b) \varphi(a) \varphi(b)}{\varphi(\text{ggT}(a, b))}$

18. Finde jeweils alle Lösungen der folgenden Kongruenzen.

a) $3x^7 \equiv 4 \pmod{14}$ b) $28x^{113} \equiv 17 \pmod{29}$ c) $x^{24} \equiv 8 \pmod{39}$

(12 Punkte)

19. Zeige, daß in $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ erklärt ist durch

$$x \sim y \iff y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{für irgendwelche ganze Zahlen } a, b, c, d \text{ mit } ad \neq bc.$$

Beweise auch, daß $\mathbb{Q}$ eine Äquivalenzklasse von $\sim$ bildet.

(6 Punkte)