Übungen zur angewandten diskreten Mathematik

(Abgabe: Freitag, 13.1.2012, 14.10 Uhr, H 22)

20. Entscheide jeweils, ob $\mathbb{Z}$ eine Gruppe bezüglich der Operation $\square$ bildet.

a) $a \,\square\, b \;:=\; a+b-3 \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$ b) $a \,\square\, b \;:=\; a-b \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$

(je 3 Punkte)

21. Zeige,daß

$$G \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\; ad-bc=1 \right\}$$

bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

22. Ein Element g einer Gruppe heißt selbstinvers, wenn $g^{-1}=g$ ist. Zeige:

a) Ist in einer Gruppe G jedes Element selbstinvers, so ist G abelsch.
b) Die Menge aller Selbstinversen einer abelschen Gruppe G bildet eine Untergruppe von G.
c) Ist G eine unendliche Gruppe mit mindestens einem vom neutralen Element verschiedenen Selbstinversen, so ist G nicht zyklisch.

23. Zeige, daß in jeder endlichen abelschen Gruppe G gilt: $\prod_{g \in G} g^2 \;=\; e$

Gilt auch immer $\prod_{g \in G} g \;=\; e$?

(5 Punkte)

24. Entscheide jeweils, ob die Zahl 3 eine Primitivwurzel modulo m ist.

a) $m=5$ b) $m=7$ c) $m=11$ d) $m=13$ e) $m=17$

(10 Punkte)