Prof. Dr. Evgeny Spodarev **Schuljahr 2019/20**

Begabtenseminar
Aufgabensammlung Olympiade-Probleme

1. (Belgien, 1979) Finde die Summe aller 7! Zahlen, die sich aus allen möglichen Permutationen von 1234567 ergeben.
   Hinweis: Benutze die Dezimaldarstellung der Summanden.

2. (UdSSR, 1990) Zeige, dass das Produkt gewisser natürlicher Zahlen nicht $4 \cdot 3^{662}$ übersteigt, falls die Summe dieser Zahlen 1990 ist.
   Hinweis: Betrachte jene natürlichen Zahlen mit dem maximalen Produkt.

3. (Tschechien, 1971) Zeige, dass für eine beliebige Primzahl $p > 2$ der Zähler m des Bruches
   $$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
   durch p teilbar ist.
   Hinweis: Berechne m und n in Abhängigkeit von p.

4. (UdSSR, 1990) Falls eine zweistellige Zahl ab durch die Zahl $2(a+b)$ geteilt wird, so ergibt sich 3 mit Rest 3. Falls von ab die Zahl $5(a+b)$ abgezogen wird, so ergibt sich 6. Finde ab.

5. (UdSSR, 1990) Finde alle Primzahlen p, die man als Summe und Differenz zweier Primzahlen darstellen kann.

6. (UdSSR, 1990) Zeige, dass es zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau ein Glied der beiden Folgen
   $$\Big(1 + x, 2(1+x), 3(1+x), \ldots\Big)$$
   und
   $$\left(1 + \frac{1}{x}, 2\left(1 + \frac{1}{x}\right), 3\left(1 + \frac{1}{x}\right), \ldots\right)$$
   gibt, wobei x eine positive irrationale Zahl ist.

7. (UdSSR, 1990) Finde alle positiven ganzen Zahlen x, deren Produkt der jeweiligen einzelnen Ziffern in der Dezimaldarstellung gleich $x^2 - 10x - 22$ ist.

8. (New York, 1975) Zeige:
   $$n^n - n^2 + n - 1 \mid (n-1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   Hinweis: Benutze Lemma 2, 1).

9. (Kanada, 1983) Zeige, dass für jede Primzahl p unendlich viele Zahlen x der Form $x = 2^n - n$ mit $n \in \mathbb{N}$ existieren, für die $x \mid p$ gilt.
   Hinweis: Benutze Satz 1 (Kleiner Fermat-Satz).

10. (UdSSR, 1990) Ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten nimmt den Wert 5 an 5 unterschiedlichen ganzzahligen Stellen an. Kann dieses Polynom ganzzahlige Nullstellen besitzen?
Hinweis: Benutze Satz 2 von Bézout.

11. (Ungarn, 1983) Ein Polynom $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ mit $a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 0$ hat n reelle Nullstellen. Zeige, dass $P(2) \geq 3^n$.
Hinweis: Benutze den Satz 3 über Mittelwerte und den Satz 4 (Viète).

12. (DDR, 1977) Finde alle Polynome $P(x)$, die die Gleichheit $x \cdot P(x-1) \equiv (x-2)P(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.

13. (USA, 1975) Ein Polynom des Grades n erfüllt die Gleichung $P(k) = \frac{k}{k+1}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Finde $P(n+1)$.
Hinweis: Beweise, dass genau ein solches P existiert und konstruiere es direkt unter Verwendung von Satz 2.

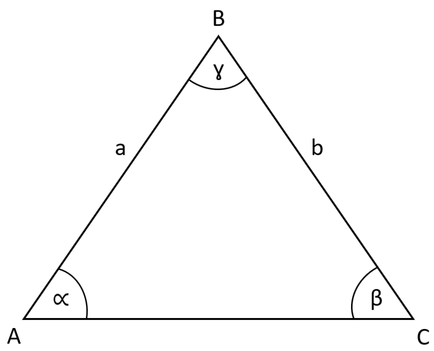
14. (Rumänien, 1983) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlenfolge, das heißt es gilt:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass für ein Polynom $P(x)$ des Grades 990 mit $P(k) = a_k$, $k = 992, \ldots, 1982$, die Gleichung $P(1983) = a_{1983} - 1$ gilt.
Hinweis: Zeige per Induktion, dass aus $P(k) = a_k$ für alle $k = n+2, \ldots, 2n+2$ die Gleichung $P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$ folgt.

15. (UdSSR, 1990) Für das Dreieck ABC gelte die Gleichung

$$a + b = tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(a \cdot tg(\alpha) + b \cdot tg(\beta)\right).$$



Zeige, dass ein solches Dreieck gleichschenklig ist.

16. (UdSSR, 1990) Auf der Ebene seinen Punkte A und B gegeben. Finde die Menge aller Punkte C, die zu A symmetrisch bezüglich der Geraden sind, die durch B gehen.

17. (UdSSR, 1990) Schreibe in einen gegebenen Kreis ein Dreieck ein. Dabei sind lediglich Punkte im Schnitt des Kreises mit Verlängerungen der Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und des Lotes gegeben, die alle von denselben Endpunkten des Dreiecks ausgehen.

18. (UdSSR, 1990) Zeige, dass ein konvexes Achteck mit gleichen Winkeln und rationalen Seitenlängen ein Zentrum der Symmetrie besitzt.

19. (UdSSR, 1990) Zeige, dass in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c sowie Radien R und r des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises gilt:

$$\frac{a\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + b\sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + c\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}{a+b+c} \geq r$$

20. (Schweden, 1979) Finde das Maximum von $x^2y^2z^2u$ unter den folgenden beiden Bedingungen:

$$\begin{cases} 2x + xy + z + yzu = 1, \\ x, y, z, u \geq 0. \end{cases}$$

Hinweis: Benutze den Satz 3 (Mittelwerte).

21. (UdSSR, 1990) Auf dem Segment $[0, 1]$ sei eine Funktion f mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(a) + f(b) - f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ für alle $a, b \in [0, 1]$ gegeben. Zeige, dass die Gleichung $f(x) = 0$ auf $[0, 1]$ unendlich viele Lösungen besitzt.

22. Finde alle Funktionen f, für die $f(f(x)) = x^2 - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Betrachte Fixpunkte von f, also Punkte x, für die $f(x) = x$ gilt.

23. (Ungarn, 1979) Zeige, dass für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq x$ und $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) \equiv x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

24. (Rumänien, 1979) Zeige, dass es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft: $f(x) \in \mathbb{Q}$ für genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x + 1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.

25. (Bulgarien, 1968) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$xf(y) + yf(x) \equiv (x + y)f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Setze $x = y = 1$.

26. (New York, 1975) Seien $A = \frac{a+b}{2}$ das arithmetische und $B = \sqrt{ab}$ das geometrische Mittel der beiden Zahlen $a, b > 0$, $a \neq b$. Zeige die folgende Ungleichung:

$$B < \frac{(a - b)^2}{8(A - B)} < A.$$

Hinweis: Verwende Satz 3 und die Relation $B < \frac{A+B}{2} < A$.

27. (UdSSR, 1990) Finde alle Tripel von Primzahlen a, b, c, für die $abc < ab + bc + ac$ gilt.

28. (UK, 1970) Löse die Gleichung

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$$

in den rationalen Zahlen.

29. (UK, 1975) Löse die Gleichung

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400$$

in den natürlichen Zahlen, wobei $[a]$ der ganze Teil von $a \in \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Berechne die Anzahl der Zahlen $m \in \mathbb{N}$, für die $[\sqrt[3]{m}] = k$, $k \in \mathbb{N}$ fixiert, gilt.

30. Löse die folgenden Gleichungen:

   a) $\sin(x) = x^2 + x + 1$
   Hinweis: Finde x mit $x^2 + x + 1 > 1$.

   b) $\sin^{13}(x) + \cos^8(x) = 1$
   Hinweis: Benutze $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$, $\sin^{13}(x) \leq \sin^2(x)$ und $\cos^8(x) \leq \cos^2(x)$.

   c) $\log_2\left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$
   Hinweis: Finde den Definitionsbereich der linken Seite der Gleichung und betrachte daraus resultierende Ungleichungen für die linke bzw. rechte Seite der Gleichung getrennt.

Prof. Dr. Evgeny Spodarev **Schuljahr 2019/20**

Begabtenseminar

Lösungen zur Aufgabensammlung
Olympiade-Probleme

1. 22399997760

4. 21

5. $p = 5$

7. $x = 12$

12. $p(x) = a(x^2 - x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

16. Ein Kreis mit Zentrum B und Radius BA

20. $\frac{1}{512}$

22. Solche Funktionen f gibt es nicht

25. $f(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

27. $(a, b, c) = (2, 2, p)$, p eine beliebige Primzahl, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 5)$

28. $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

29. $x = 5$

30. a) $\emptyset$
    b) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$
    c) $x = \pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $y = 1$.