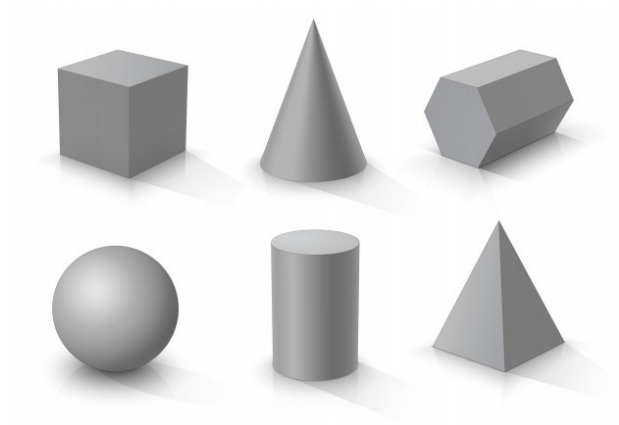




Mathematische Olympiaden-Probleme

I Zahlen und ihre Teilbarkeit

$n \geq 1$ (1990, UdSSR) Gibt es eine Zahl

der Form $2019\,2019\,2019 \dots 2019\,00\dots 0\dots 0$,

die sich durch 2020 teilen läßt?

Beweis: Schreibe 2021 Zahlen x_j der Form

j	1	2	3	...	2021
x_j	2019	20192019	201920192019	...	$\underbrace{2019\dots 2019}_{2021 \text{ Mal}}$

$$\exists i, j : i \neq j, \quad i, j = 1 \dots 2021 :$$

$$x_i = a \cdot 2020 + m$$

$$m \in \{0, \dots, 2019\}$$

$$x_j = a \cdot 2020 + m$$

$$\text{Sei } x_i > x_j \Rightarrow x_i - x_j = (a - b) \cdot 2020$$

$$x_i - x_j \stackrel{!}{=} 2020 \Rightarrow x_i - x_j \text{ ist die}$$

Lösung!

Nº 2 (UdSSR, 10. Klasse, Stadtolympiade)

Finde alle Primzahlen p und q , so dass

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Lösung: $p^2 = 2q^2 + 1$ $q \nmid 3$. Nach Lemma 1

(Formelsammlung) $\exists n \in \mathbb{N} : q^2 = 3n + 1$.

$$p^2 = 2q^2 + 1 = 2(3n + 1) + 1 = 6n + 3 \mid 3 \Rightarrow$$

$$p \mid 3 \Rightarrow p = 3. \quad 2q^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow q^2 = 4$$

$$\Rightarrow q = 2 \quad \underline{\text{Lösung:}} \quad (p, q) = (3, 2).$$

Nº 3 (N4, 1976)

Seien $a, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Stimmt es, dass $\sum_{k=0}^n (a^2+1)^{3k} \cdot a_k \mid a^2 \pm a + 1$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \mid \underbrace{a^2 \pm a + 1}_{b_\varepsilon} \quad ? \quad (1)$$

Lösung: | Def.: | $b_\varepsilon = a^2 + \varepsilon a + 1$ | $\varepsilon = \{\pm 1$

$$\underline{(a^2+1)^3 = (b_\varepsilon - \varepsilon a)^3 \equiv -\varepsilon a^3 \pmod{b_\varepsilon}}.$$

Def.: $a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}:$

$$a = c \cdot m + b$$

$$(b_\varepsilon - \varepsilon a)^3 = \underbrace{b_\varepsilon^3}_{b_\varepsilon} - \underbrace{3b_\varepsilon^2}_{b_\varepsilon} \cdot \underbrace{\varepsilon a}_{b_\varepsilon} + \underbrace{3b_\varepsilon}_{b_\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 a^2 - \underbrace{(\varepsilon a)^3}_{b_\varepsilon} \equiv -\varepsilon a^3 \pmod{b_\varepsilon}$$

$$(11): a^2 = b_\varepsilon - \varepsilon a - 1 \quad | \times (-a \cdot \varepsilon)$$

$$- \varepsilon a^3 = - \varepsilon a b_\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2 a^2}_{1} + \varepsilon a = - \varepsilon a b_\varepsilon + \underbrace{a^2 + \varepsilon a}_{b_\varepsilon}$$

$$\underline{+1 - 1} = b_\varepsilon (-\varepsilon a + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{b_\varepsilon}.$$

$$\Rightarrow (a^2 + 1)^3 \equiv -1 \pmod{b_\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k (a^2 + 1)^{3k} \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \pmod{b_\varepsilon} \right)$$

□

$n \geq 4$ (Rumanien, 1962) | Zeige, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ und

$\alpha \in \mathbb{R}: n > 1, \sin \alpha \neq 0$ das Polynom

$$P(x) = x^n \cdot \sin \alpha - x \cdot \sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$$

durch das Polynom $Q(x) = x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1$

teilbar ist.

Lösung: Induktion: Falls alle Nullstellen von Q auch Nullstellen von P sind, so ist $P \mid Q$ nach dem Satz von Bézout (Satz 2, Formelsammlung).

Zeige, dass $x_{\pm} = \cos \alpha + i \cdot \varepsilon - \sin \alpha$, $\varepsilon = \pm 1$,
Nullstellen von Q sind. (Löse $Q(x) = 0$)

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - x_1)(x - x_{-1}) = (x - \cos \alpha - i \sin \alpha) \times \\ &\times (x - \cos \alpha + i \sin \alpha) = x^2 - \underline{x \cdot \cos \alpha} + \cancel{i x \sin \alpha} - \\ &\underline{- x \cos \alpha} - \cancel{i x \sin \alpha} + \underbrace{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}_{=1} \\ &= x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1. \end{aligned}$$

$$= x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + 1.$$

Nach Moivre-Parstellung $x_{\varepsilon}^n = (\cos \varepsilon \alpha + i \sin \varepsilon \alpha)^n$

$$= \cos(\varepsilon n \alpha) + i \sin(\varepsilon n \alpha) = \cos(n \alpha) + \varepsilon \cdot i \sin(n \alpha).$$

$$P(x_\varepsilon) = x_\varepsilon^n \cdot \sin \alpha - x_\varepsilon \cdot \sin(\alpha n) + \sin((n-1)\alpha) =$$

$$= (\cos(n\alpha) + i\varepsilon \sin(n\alpha)) \cdot \sin \alpha - (\cos \alpha + i\varepsilon \sin \alpha) \times$$

$$\times \sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha = \underbrace{\cos n\alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \times}_{\times \sin n\alpha} + \sin(n-1)\alpha = 0$$

$\Rightarrow x_\varepsilon$ ist eine Nullstelle
auch von P , $\varepsilon = \pm 1$.

$$\sin(1-n)\alpha =$$

$$= -\sin(n-1)\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P|Q}}$$

(II) Gewöhnliche Aufgaben

n=5 (Belgien, 1977) Es seien Zahlen $a, b, c > 0$

gegeben. Zeige, dass wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Δ mit Seitenlängen a^n, b^n, c^n $\exists$, so sind alle diese Δ gleichschenkelig.

Beweis: o.B.d.A. $a \leq b \leq c$. Falls $c > \frac{b}{a} \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{c^n} = 0, \text{ da } 0 < \frac{b}{c}, \frac{a}{c} < 1.$$

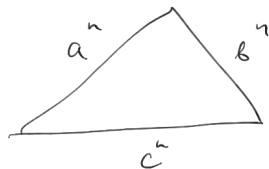
Falls n groß genug, dann gilt nicht die

Ungleichung $a^n + b^n > c^n$, die für die $\exists$ eines Δ mit Seitenlängen a^n, b^n, c^n notwendig ist.

$$\Rightarrow \left(\frac{a^n}{c^n} \right) + \left(\frac{b^n}{c^n} \right) > 1 \quad \forall n$$

$\downarrow \quad n \rightarrow \infty \quad \downarrow$
 $0 \qquad \qquad 0$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow \underline{\underline{b=c}}$



!!!
...

□

W°6 (UK, 1987) Die Seiten a und b eines Δ erfüllen $a > b$, und seien h_a und h_b die Längen der Höhe auf diese Seiten. Zeige die Ungleichung $\boxed{a + h_a > b + h_b}$. Finde, wann hier die Gleichung gilt.

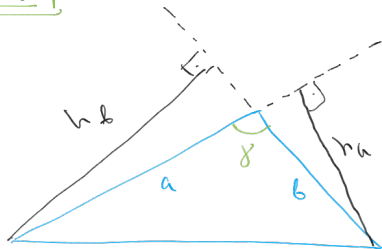
Lösung: Für die Fläche

S des Δ gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2S = ab \cdot \sin \gamma \leq \underline{ab} \\ \underline{2S = a \cdot h_a = b \cdot h_b} \end{array} \right\}$$

weil $0 \leq \sin \gamma \leq 1$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b}$$



$$(a+h_a) - (b+h_b) = \left(a + \frac{2S}{a}\right) - b - \frac{2S}{b} = (a-b) + 2S \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = a-b - 2S \frac{a-b}{ab} = \underbrace{(a-b)}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{2S}{ab}\right)}_{>0}$$

$$> 0 \Rightarrow a+h_a > b+h_b.$$

Die Flächenformel gilt hier, falls $S = \frac{1}{2}ab$, d.h.,

$$\sin \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta \text{ ist recht-}$$

winklig.



T4) Funktionen.

$n \geq 7$ (Tschudik, 1983)

Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $a \in [0, n]$ finde das Maximum von $\left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right|$ unter der Bedingung,

dass $\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = a. \quad (3)$

Lösung: $f(\vec{x}) = \left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right|, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max \\ g(x) = a \end{cases}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i$$

Es gilt:

$$a = \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1 - \cos 2x_i) =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \cos(2x_i). \Rightarrow \sum_{i=1}^n \cos(2x_i) = n - 2a.$$

Betrachte Einheitsvektoren $\vec{v}_i = (\cos 2x_i, \sin 2x_i)$,

$$|\vec{v}_i| = 1 \quad \forall i, \quad \vec{v}_i \in \mathbb{R}^2 \quad i=1, \dots, n$$

$$\vec{s} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n = \left(\sum_{i=1}^n \cos 2x_i, \underbrace{\sum_{i=1}^n \sin 2x_i}_{=0} \right)$$

$$|\vec{s}| = l \leq n \cdot |\vec{v}_i| = \underline{n \cdot 1 = n}$$

$$f(x) = \left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right| = \sqrt{n^2 - \left(\sum_{i=1}^n \cos 2x_i \right)^2} \leq \sqrt{n^2 - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \cos 2x_i \right)^2}_{(n-2a)^2}}$$

Satz v. Pythagoras

$$= \sqrt{n^2 - (n-2a)^2} = \sqrt{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 4na - 4a^2} =$$

$$= 2\sqrt{a(n-a)} \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) \leq \underline{2\sqrt{a(n-a)}}$$

Dies ist aber Schranke an f wird erreicht

für $x_i = \arcsin(\sqrt{a/n})$, aus (3)

Lösung: $\max f(\vec{x}) = 2\sqrt{a(n-a)}$,

für $\vec{x} = (\arcsin(\sqrt{a/n}), \dots, \arcsin(\sqrt{a/n}))$.

$p \equiv 8$, UdSSR, 1990 Kann man aus Funktionen

f und g die Fkt. $h(x) = x$ allein mit Hilfe der Addition, Differenz und Multiplikation konstruieren, falls

a) $f(x) = x^4 + x$, $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^4 + x$, $g(x) = x^2 - 2$.

?

Lösung: a) Nein! $g(-1) = 3$, $f(-1) = 0$,

$h(-1) = -1 \neq 3$, aber eine bel. Kombination von

$$g(-1) = 3 \quad \text{und} \quad f(-1) = 0 \quad | \quad 3$$

$$b) \underline{\underline{Ja}}, \quad h(x) = x = (f-g)^2 - f - \underline{2(f-g)}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{(x+2)^2 - x^2 - x - 2(x+2)}_{||}$$

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 - x - 2x - 4 = x$$

13

$\mu \approx 5$, Belgien, 1976 | Zeige, dass

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

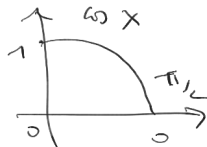
Lösung: a) $x \in [0, \pi/2)$. Für $y = \cos x \in (0, 1]$

nutze die Ungl. $\sin y < y, y > 0 \Rightarrow$

$$\sin(\cos x) < \cos x \quad \cos y \searrow \text{ auf } [0, \pi/2)$$

$$\Rightarrow \underline{x \geq \sin x} \Rightarrow \cos x \leq \cos(\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin(\cos x) < \cos x \leq \cos(\sin x).$$



$$\underline{b) \ x \in [\pi/2, \pi]}$$

$$\underbrace{\sin(\cos x)}_{\wedge \atop 0} < 0 < \underbrace{\cos(\sin x)}_{\vee \atop 0}$$

$$\underline{c) \ x \in [-\pi; 0]}$$

$$\sin(\cos x) \quad \text{und} \quad \cos(\sin x)$$

sind gerade Funktionen $\Rightarrow \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$

gilt auf $[-\pi; \pi]$

c) $x \in \mathbb{R}$: ungl. gilt wegen der 2π -

-Periodizität von $\cos, \sin$.

□

$N \cong 10$, Kanada, 1983

Löse die Gleichung

$$x! + y! + z! = u! \quad \text{in natürlichen Zahlen.}$$

Lösung: $x, y, z, u \in \mathbb{N}$. Sei $v = \max\{x, y, z\}$.

$$\Rightarrow 1 \leq v < u \Rightarrow u \cdot \cancel{v!} \leq u \cdot (u-1)! = u! =$$

$$= x! + y! + z! \leq 3 \cdot \cancel{v!} \Rightarrow u \leq 3, u \in \mathbb{N}$$

a) $u=1$ $\Rightarrow$ keine Lösung, da $x! + y! + z! > 1$

b) $u=2$ $\Rightarrow u! = 2 < 3 \leq x! + y! + z!$

keine Lösung.

$$\underline{c) \ n = 3} \quad ; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = x! + y! + z!$$

$$\Rightarrow x = y = z = 2 \quad \Rightarrow$$

$$(x, y, z, n) = (2, 2, 2, 3).$$

□

Nº 11, Jugoslawien, 1976

Berechne die Summe
1

$$\underline{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{99}}, \text{ wobei } a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

Lösung: $a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{\dots}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad ((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1})((n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1})$$

$$\downarrow \quad \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2 (n+1)} = \frac{\cancel{(n+1)n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)}{\cancel{(n+1)n} \underbrace{(n+1 - n)}_1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{99} a_n = \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} +$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \dots - \cancel{\frac{1}{\sqrt{99}}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\underline{\frac{9}{10}}}.$$

□