

Wintersemester 2019/2020

## Hausaufgaben

### Algebraische, Exponentielle und Logarithmische (Un)Gleichungen

Löse die folgenden (Un)Gleichungen oder Systeme:

1.  $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$

2.  $4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4$

3.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1$

4.  $|x^2 + 3x + 2| + 4x + 10 = 0$

5. 
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} 2|x-1| + 3|y+2| = 17 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} y\sqrt{y} + \sqrt{y} = 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} \\ x = y + 3 \end{cases}$$

8.  $(x^2 - 18x + 77)\sqrt{10-x} \geq 0$

9.  $2x - 17 < \sqrt{81-x^2}$

10.  $\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geq 0$

11.  $\sqrt{3x-4} + \sqrt{2x-13} > \sqrt{13-2x}$

12.  $\left|x - \frac{4}{x} - 2\right| \geq 1$

13. Für welche  $a$  hat das folgende System mindestens eine Lösung?

$$\begin{cases} ax - 1 \leq 0 \\ x - 4a \geq 0 \end{cases}$$

14. Für welches  $x$  erreicht die Funktion  $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$  ihr Minimum? Berechne

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

15.  $\sqrt{\left(\frac{x+1}{3-2x}\right)^2} > 1$

16.  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$

17.  $\frac{2}{2-x} + \frac{3}{2+x} \geq \frac{4x}{4-x^2}$

18. Beweise  $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$  für alle  $x, y, z > 0$ .

19.  $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$

20. Für welches  $a$  hat  $\log_{x-1}(x+a) = \frac{1}{2}$  eine einzige Lösung?

21.  $1 - \log_9(x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$

22.  $\log_{x+a} x \leq \log_a x^2$  für  $a \neq 1, a > 0$ .

23.  $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$

24.  $\log_{10} \sqrt{x-5} + \log_{10} \sqrt{2x-3} + 1 = \log_{10} 30$

25.  $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x - 5)^{\log_3 2}$

26.  $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$  für  $a \in (0, 1)$

27. Finde die Summe der Lösungen von

$$x + 1 = 2 \log_2(2^x + 3) - 2 \log_4(1983 - 2^{-x}).$$

28.  $\sqrt{4 \log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$

29.  $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[4]{27^{2x-1}}$

30.  $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$

31.  $(x^2 + x + 1)^x < 1$

32.  $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$

33. 
$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2 \\ -(\log_x(0, 2))^3 + y = 1 \end{cases}$$

34.  $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left( \frac{24 - x^2 - 2x}{14} \right) > 1$

# Lösungen

1.  $x = -3$
2.  $x = -1; 7$
3.  $x \in [1, 2]$
4.  $x = -3; -4$
5.  $(x, y) = (3, 2); (\frac{13}{5}, \frac{11}{5})$
6.  $(x, y) = (2, 3); (\frac{23}{4}, -\frac{9}{2})$
7.  $(x, y) = (4, 1)$
8.  $x \in (-\infty, 7); x = 10$
9.  $x \in [-9, \frac{34 + 2\sqrt{29}}{5}]$
10.  $x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup (-1, \sqrt{2}] \cup [3, 4)$
11.  $x = \frac{13}{2}$
12.  $x \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}] \cup [-1, 0) \cup (0, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}) \cup [4, \infty)$
13.  $a \in (-\infty, \frac{1}{2}]$
14.  $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$
15.  $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 4)$
16.  $x \in (-2, -1] \cup [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
17.  $x \in (-2, 2) \cup (2, \infty)$
- 18.
19.  $x = \frac{6}{10}$
20.  $a < -1; a = -\frac{3}{4}$
21.  $x = -7; -2; 1$
22. 
$$\begin{cases} x > 1 & \text{für } a > 1 \\ x \in (0, \sqrt{a} - a) \cup (1 - a, 1] & \text{für } a \in (0, 1) \end{cases}$$
23.  $x = 2$
24.  $x = 6$
25.  $x = -2 - \sqrt{10}$
26.  $x = 2$
27.  $\log_2 11$
28.  $x = 8$
29.  $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (4, \infty)$
30.  $x \in (2 - \sqrt{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{13}{4}, 2 + \sqrt{2})$
31.  $x \in (-\infty, -1)$
32.  $x \in (0, 2 - \log_2 3) \cup (1, \infty)$
33.  $(x, y) = (5, 0); (\frac{1}{5}, 2)$
34.  $x \in (-3, 1) \cup (3, 4)$