(Un)gleichungen, 18.10.15.

1) Rationale Ungleichungen:

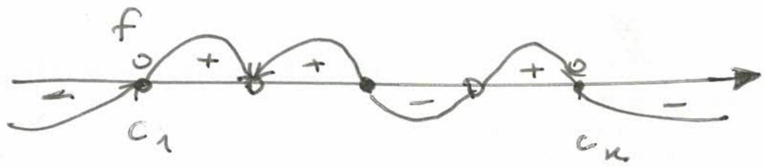
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \begin{matrix}\le\\ \ge\\ >\\ <\end{matrix} 0$$

wobei $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

Intervallmethode: finde alle Nullstellen von P_n, Q_m $\{c_i\}_{i=1}^{k}$, $k \le n+m$ (sie werden kritische Punkte genannt) und trage sie auf die Reelachse auf. $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ behält das Vorzeichen zwischen 2 benachbarten kritischen Stellen bei!

Dann finde das Vorzeichen von f in einem bel. Punkt des Intervalls durch Einsetzen eines bel. Punktes aus dem Intervall.



inkl.	nicht inkl.
•	∘
$\ge$	$>$
$\le$	$<$

Alle Nullstellen von Q_m sind leer, also „∘" nicht inklusive, weil sie nicht zum Def. bereich $f(x) \lesseqgtr 0$ gehören!

Nachdem die Ungl. $f(x) \gtrless 0$ zur Form

$$g(x) = \frac{\prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{n_i}}{\prod_{j=1}^{l} (x-\beta_j)^{m_j}} \begin{matrix}<\\ >\\ \ge\\ \le\end{matrix} 0$$

gebracht wurde, bestimme das Vorzeichen von $g(x)$ im Intervall $(c_k, +\infty)$ und fülle alle and

$\{c_i\} = \{\alpha_i\} \cup \{\beta_j\}$

Intervalle mit Vorzeichen nach der Regel:

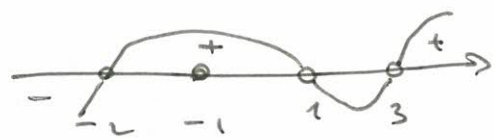
falls c_j ein α_j oder β_j ist mit Potenz n_j oder m_j gerade, so wird das Vorzeichen beim Übergang von rechts nach links über c_j nicht gewechselt. Ansonsten wechselt das Vorzeichen!!!

Aufgabe 1: Löse $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0$.

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

Kritische Punkte: $x = -2, -1, 1, 3.$



$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)(x-1)}{x+2}, \quad x \neq -1$$

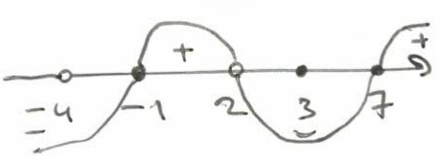
Antwort: $x \in (-2;-1) \cup (-1;1) \cup (3;+\infty)$.

Aufgabe 2: Löse $f(x) = \dfrac{(x-3)^2 (x-7)^3 (x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$

$(x-3)^2 \geq 0$, $(x+4)^4 > 0$ muss sein immer $\Rightarrow$

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{(x-7)(x+1)}{(x-2)} \geq 0, \quad x \neq -4.$$

krit. Punkte: $x = -1, 2, 7$.



Antwort: $x \in [-1, 2) \cup [7; +\infty) \cup \{3\}$.

2 (Un)gleichungen mit Beträgen:

Aufgabe 3: Löse $|x^2+2x| - |2-x| = |x^2-x|$.

Dafür bestimme Nullstellen der Beträge:

$x = -2, 0, 1, 2$

Fall a): $x \le -2$

$x^2+2x-(2-x) = x^2-x$

$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} > 2 \Rightarrow \emptyset$

b) $x \in [-2;0]$

$-x^2-2x+x-2 = x^2-x$

$2x^2 = -2 \Rightarrow \emptyset$

c) $x \in [0,1]$

$x^2+2x+x-2 = x-x^2$

$x^2+x-1=0$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \quad x \in [0,1] \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

d) $x \in [1,2]$

$x^2+2x+x-2 = x^2-x$

$x = \frac{1}{2} \notin [1,2] \Rightarrow \emptyset$

e) $x \ge 2$

$x^2+2x-x+2 = x^2-x$

$x = -1 < 2 \Rightarrow \emptyset$

Antwort: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

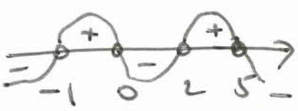
Aufgabe 4: Löse $\dfrac{|2x-1|}{x^2-x-2} > \dfrac{1}{2}$.

Es ist äquivalent zu

a): $x \geq 1/2$: $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)} > \dfrac{1}{2}$ (1)

b) $x < 1/2$: $\dfrac{-2x+1}{(x+1)(x-2)} > \dfrac{1}{2}$ (2)

a): $x \geq 1/2$, (1) ist $\Leftrightarrow$ zu $\dfrac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)} > 0$.



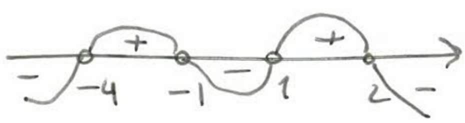
Nach Intervallmethode, $x \in [(-1;0) \cup (2;5)] \cap$

$\cap [1/2;+\infty)$

$= (2;5)$.

b): $x < 1/2$, (2) ist $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-2)} > 0$.

Nach Intervallmethode



$\Rightarrow$

$x \in [(-4;-1) \cup (1,2)] \cap (-\infty; 1/2) \Rightarrow x \in (-4;-1)$

Antwort: $x \in (-4;-1) \cup (2;5)$.

(3) (Un)gleichungen mit Wurzeln:

Aufgabe 5: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

Definitionsbereich: $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \geqslant 0$

Da für $x \geqslant 0$ $\sqrt{x+5} > \sqrt{x}$, $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} > 0 \quad \forall x$

Dann, für $x \geqslant 0$

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$$

$$x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

$$2\sqrt{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Antwort: $x = 4$.

Aufgabe 6: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 2 - x$.

Def. bereich: $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \geqslant 0$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$$

a) **$2 - x \geqslant 0$:** $\quad x^2 - 4x + 3 \geqslant (2-x)^2$

$x \leq 2$ $\quad x^2 - 4x + 3 \geqslant 4 - 4x + x^2$

$$3 \geqslant 4 \quad \Rightarrow \quad \emptyset$$

b) **$2 - x \leq 0$** : $\forall x \in$ Def. bereich $\cap\, [2; +\infty)$ sind Lösungen

$x \geqslant 2$

$\Rightarrow \quad x \in [3; +\infty)$ **Antwort:** $x \geqslant 3$.

4 Exp. (Un)gleichungen:

Aufgabe 7: Löse $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$

Def. bereich: $x \in \mathbb{R}$. $\quad |x-3|^{x^2-x} = |x-3|^2$

Fälle: a): $|x-3| = 1 \quad x = 4, \quad x = 2.$ – immer Lösungen!

b) $|x-3| \neq 1$, also $x \neq 2, 4$:

$$x^2 - x = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = 2; -1$$

$\Rightarrow$ **Antwort:** $x = -1; 2; 4.$

Aufgabe 8: Löse $4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$

Benutze $\log_2$:

$$2 + (x-1)\log_2 9 = \log_2 3 + \tfrac{1}{2}(2x+1)\log_2 2$$
$$2 + 2(x-1)\log_2 3 = \log_2 3 + x + \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{3}{2} + 2x\log_2 3 - 3\log_2 3 - x = 0$$
$$2\cancel{(\log_2 3 - \tfrac{1}{2})}x = 3\cancel{(\log_2 3 - \tfrac{1}{2})}$$
$$x = \tfrac{3}{2}$$

Da $4 \cdot 9^{x-1} > 0$,

$3\sqrt{2^{2x+1}} > 0$,

beide Gleichungen sind äquivalent!

Antwort: $3/2$

Aufgabe 9: $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} \leq 1$

Def. bereich: $4x^2+2x+1 > 0$

Das braucht man nicht!

Schreibe es um: $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} \leq (4x^2+2x+1)^0$

Also: a) $4x^2+2x+1=1 \Rightarrow \forall x$ passt

$2x^2+x=0$

$x(2x+1)=0$, $x=0$ od. $x=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{2};0$ – Lösungen.

b) $4x^2+2x+1 \geq 1 \Rightarrow x^2-x \leq 0$. Im Schnitt bekommt man

$x \in (-\infty;-\frac{1}{2}] \cup [0;+\infty)$ $\cap$ $x \in [0;1]$

$\underline{\underline{x \in [0;1]}}$.

c) $4x^2+2x+1 \in (0;1) \Rightarrow x^2-x \geq 0$

$x \in [-\frac{1}{2};0]$ $\cap$ $x \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$

Im Schnitt $x \in [-\frac{1}{2};0]$.

$\Rightarrow$ Antwort: $x \in [-\frac{1}{2};1]$.

(5) Logarithmische (Ln) Gleichungen:

Aufgabe 10: Löse $f(x) := \log_{0,3}(\log_2(\log_{x-2} 25)) > 0$

Def Bereich:
$$\begin{cases} \log_2(\log_{x-2} 25) > 0 \implies \log_{x-2} 25 > 1 \\ x-2 > 0,\ x \neq 3 \end{cases}$$

2 Fälle: a) $x-2 > 1$: $\implies x > 3$. Dann $25 > x-2$, $x < 27$

potenziere zu $x-2$:

$\implies x \in (3;27)$.

b) $x-2 \in (0;1) \implies x \in (2;3)$. Dann $25 < x-2 \implies x > 27$

$$\begin{cases} x > 27 \\ x \in (2;3) \end{cases} \implies \emptyset$$

Also: $D(f) = (3;27)$.

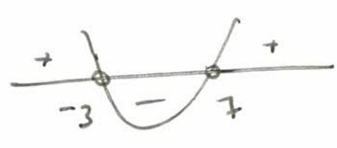
Lösung: mache $0{,}3^y$: $\log_2(\log_{x-2} 25) < 1$

mache 2^y: $\log_{x-2} 25 < 2$

Da $x \in D(f) \implies x > 3 \implies x-2 > 1 \implies$ mache $(x-2)^y$:

$25 < (x-2)^2 \implies 25 < x^2 - 4x + 4 \implies x^2 - 4x + 21 > 0$.

$x \in (-\infty;3) \cup (7;+\infty)$



Schneide es mit $x \in (3;27)$

$\implies$ **Antwort:** $x \in (7;27)$.

Aufgabe 11: Löse $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0$

Def. Bereich: $\begin{cases} 4x+1>0, \ 4x+1 \neq 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}, \ x \neq 0. \\ 9x>0, \ 9x \neq 1 \Rightarrow x>0, \ x \neq 1/9 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (0; 1/9) \cup (1/9; +\infty)$.

Lösung:

$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_7(4x+1)} = -\frac{1}{\log_7(9x)}$

$\Leftrightarrow \log_7(9x) + \log_7(4x+1) = 0$

$\log_7(9x(4x+1)) = 0 \Rightarrow 9x(4x+1) = 1 \Rightarrow$

$x = \frac{1}{12}; -1/3$

Im Schnitt mit Def. Bereich $x = -1/3$ passt nicht.

Also Antwort: $x = \frac{1}{12}$.