Begabtenseminar "Gipfel und Nordwnde der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade"

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Vorlesung

(Un)gleichungen

In allen Teilgebieten der Mathematik werden eine Reihe verschiedener Gleichungen sowie Ungleichungen benutzt, um Probleme und Sachverhalte beschreiben zu knnen. Meist soll eine Lsungsmenge als Teilmenge der reellen Zahlen gefunden werden, wobei die (Un)gleichung fr eine Zahl x genau dann als erfllt angesehen wird, wenn x innerhalb der Lsungsmenge liegt. Der Ausdruck

$$\mathcal{A} \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} \mathcal{B}$$

soll in dieser Vorlesung bedeuten, dass ein beliebiges der vier Symbole $<, \leq, >, \geq$ zwischen der linken Seite $\mathcal{A}$ und der rechten Seite $\mathcal{B}$ steht. Im Folgenden werden einige typische solcher (Un)gleichungstypen mit passenden Lsungsstrategien beschrieben.

1.) Rationale (Un)gleichungen

Gemeint sind hier Ungleichungen des Typs

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} 0$$

mit $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

Als Lsungsstrategie wird oft die <u>Intervallmethode</u> benutzt:
Finde alle Nullstellen $\{c_i\}_{i=1}^k$ (sogenannte <u>kritische Punkte</u>) von P_n und Q_m fr ein $\mathbb{N} \ni k \leq m+n$ und trage sie auf der Reelachse auf. Die Funktion $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ behlt ihr Vorzeichen zwischen zwei kritischen Stellen bei. Dann setze in jedem Intervall (c_i, c_{i+1}) mit $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ einen beliebigen Punkt daraus in f ein, um das Vorzeichen von f auf diesen Intervallen zu bestimmen. Die Nullstellen von Q_m sind als leer gekennzeichnet, also "$\circ$", nicht inklusive, da sie nicht zum Definitionsbereich von f gehren. Dieses Schaubild knnte dann zum Beispiel wie in Abb. 1 aussehen.

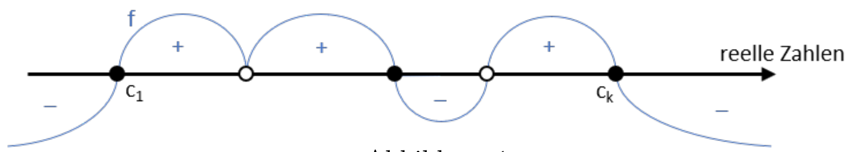

Abbildung 1

Bringe die Ungleichung $f(x) \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} 0$ in die Form

$$g(x) := \frac{\prod_{i=1}^{\ell}(x-\alpha_i)^{\ell_i}}{\prod_{j=1}^{p}(x-\beta_j)^{p_j}} \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} 0$$

mit $\{c_i\}_{i=1}^k = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell} \cup \{\beta_j\}_{j=1}^{p}$ und $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \ell_i = n$ sowie $\sum\limits_{j=1}^{p} p_j = m$. Bestimme das Vorzeichen von f bzw. g in $(-\infty, c_1)$ bzw. $(c_k, +\infty)$ und daraus die entsprechende Lsungsmenge.

Es gilt die folgende Regel bezglich der Vorzeichen:
Falls c_j ein α_i oder β_j mit Potenz ℓ_i oder p_j gerade ist, so wechselt das Vorzeichen von f beim bergang von rechts nach links bei c_j nicht. Andernfalls wechselt das Vorzeichen von f bei c_j.

Aufgabe 1:
Lse

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0.$$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1)(x+1) \\ x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2) \end{aligned}$$

kritische Punkte: $\begin{array}{cccc} -2 & -1 & 1 & 3 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$

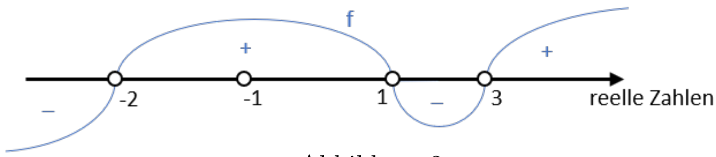

Abbildung 2

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)} \quad , \quad x \neq -1$$

Lsungsmenge: $x \in (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

Aufgabe 2:
Lse

$$f(x) := \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0.$$

$(x-3)^2 \geq 0$ und $(x+4)^4 \geq 0$ gilt immer, also folgt fr $x \neq -4$

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-7)(x+1)}{(x-2)} \geq 0.$$

kritische Punkte: $\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 7 \\ \bullet & \circ & \bullet \end{array}$

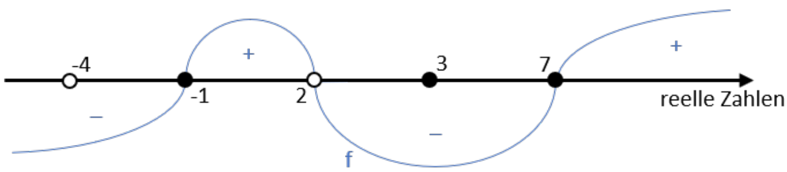

Abbildung 3

Lsungsmenge: $x \in [-1, 2) \cup [7, +\infty) \cup \{3\}$

2.) (Un)gleichungen mit Betrgen

Aufgabe 3:
Lse

$$|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|.$$

Bestimme dafr alle Nullstellen der einzelnen Betrge: $\{-2, 0, 1, 2\}$.

Abbildung 4

Es treten nun verschiedene Flle auf:

a) $x \leq -2$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - (2 - x) = x^2 - x \\ \iff & 4x = 2 \\ \implies & x = \frac{1}{2} > -2 \\ \implies & \emptyset \end{aligned}$$

b) $x \in [-2, 0]$

$$\begin{aligned} & -x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x \\ \iff & 2x^2 = -2 \\ \implies & \emptyset \end{aligned}$$

c) $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + x - 2 = x - x^2 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \\ \iff & x \in \left\{ \underbrace{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in[0,1]}, \underbrace{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}_{<0} \right\} \\ \implies & x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

d) $x \in [1, 2]$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + x - 2 = x^2 - x \\ \iff & x = \frac{1}{2} \notin [1, 2] \\ \implies & \emptyset \end{aligned}$$

e) $x \geq 2$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - x + 2 = x^2 - x \\ \iff & x = -1 < 2 \\ \implies & \emptyset \end{aligned}$$

Lsungsmenge: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Aufgabe 4:
Lse

$$\frac{|2x - 1|}{x^2 - x - 2} > \frac{1}{2}.$$

Es treten hier zwei Flle auf:

(1) $x \geq \frac{1}{2}$: $\quad \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 2} > \dfrac{1}{2}$

(2) $x < \frac{1}{2}$: $\quad \dfrac{-2x + 1}{x^2 - x - 2} > \dfrac{1}{2}$

Zu (1):

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

Mittels der Intervallmethode erhalten wir $x \in \Big[(-1,0) \cup (2,5)\Big] \cap [\frac{1}{2}, +\infty] = (2,5)$.

Zu (2):

$$\frac{-2x+1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

Mittels der Intervallmethode erhalten wir $x \in \Big[(-4,-1) \cup (1,2)\Big] \cap [-\infty, \frac{1}{2}] = (-4,-1)$.

Lsungsmenge: $x \in (-4,-1) \cup (2,5)$

3.) (Un)gleichungen mit Wurzeln

Aufgabe 5:
Lse

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1.$$

Definitionsbereich: $x \in [-5, +\infty] \cap [0, +\infty] = [0, +\infty]$
Die Wurzelfunktion ist monoton steigend. Daher gilt fr alle $x \geq 0$

$$\sqrt{x+5} > \sqrt{x} \Longleftrightarrow \sqrt{x+5} - \sqrt{x} > 0$$

und damit auch

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x} \\ \Longleftrightarrow\ & x+5 = 1 + 2\sqrt{x} + x \\ \Longleftrightarrow\ & 2\sqrt{x} = 4 \\ \Longrightarrow\ & \sqrt{x} = 2 \\ \Longrightarrow\ & x = 4 \end{aligned}$$

Lsungsmenge: $x = 4$

Aufgabe 6:
Lse

$$\sqrt{\underbrace{x^2-4x+3}_{=:g(x)}} \geq 2-x.$$

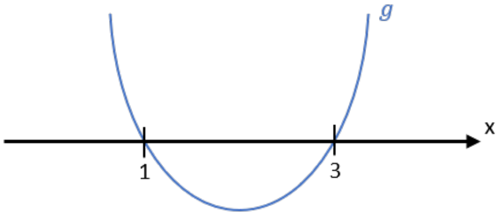

Abbildung 5

Definitionsbereich:

$$g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

Es treten nun zwei verschiedene Flle auf:

a) $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$$\begin{aligned} & x^2-4x+3 \geq (2-x)^2 \\ \Longleftrightarrow & x^2-4x+3 \geq 4-4x+x^2 \\ \Longrightarrow & 3 \geq 4 \\ \Longrightarrow & \emptyset \end{aligned}$$

b) $2-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
Da fr alle x aus dem Definitionsbereich $\sqrt{g(x)} \geq 0 \geq 2-x$ gilt, folgt in diesem Fall

$$x \in [(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)] \cap [2, +\infty) = [3, +\infty).$$

Lsungsmenge: $x \in [3, +\infty)$

4.) Exponentielle (Un)gleichungen

Aufgabe 7:
Lse

$$|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2.$$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Es treten nun zwei verschiedene Flle auf:

a) $x \in \{2, 4\} \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1$

$$\begin{aligned} & |x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 1^{x^2-x} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 = 1 \\ \Longrightarrow\ & x \in \{2, 4\} \end{aligned}$$

b) $x \notin \{2, 4\} \Leftrightarrow |x-3| \neq 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 \neq 1$

$$\begin{aligned} & |x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-x = 2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2-x-2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x \in \{2, -1\} \end{aligned}$$

Lsungsmenge: $x \in \{2, 4, -1\}$

Aufgabe 8:
Lse

$$\underbrace{4 \cdot 9^{x-1}}_{>0} = \underbrace{3\sqrt{2^{2x+1}}}_{>0}.$$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Wenn auf beiden Seiten der Gleichung der $\log_2(\cdot)$ angewandt wird, erhalten wir

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}} \\ \Longleftrightarrow\ & 2 + (x-1)\log_2 9 = \log_2 3 + \frac{2x+1}{2}\log_2 2 \\ \Longleftrightarrow\ & 2 + 2(x-1)\log_2 3 = \log_2 3 + x + \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{3}{2} + 2x\log_2 3 - 3\log_2 3 - x = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x(\log_2 3 - \frac{1}{2}) = 3(\log_2 3 - \frac{1}{2}) \\ \Longleftrightarrow\ & x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Lsungsmenge: $x = \frac{3}{2}$

Aufgabe 9:
Lse

$$\underbrace{(4x^2 + 2x + 1)}_{=:g(x)}{}^{x^2 - x} \leq 1.$$

Die Diskriminante D_g von g ist

$$D_g = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

Also hat g keine Nullstellen. Zudem ist g eine nach oben geffnete Parabel, damit liegt g vollstndig oberhalb der x-Achse. Fr den Definitionsbereich gilt folglich

$$g(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Es mssen zwei verschiedene Flle unterschieden werden:

a) $g(x) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x \leq 0$

$$\begin{aligned} & g(x) \geq 1 \\ \Longleftrightarrow\ & x\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \Longrightarrow\ & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, +\infty\right) \end{aligned}$$

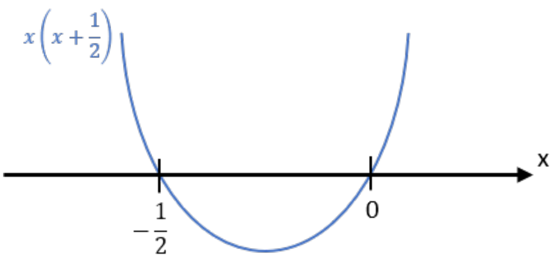

Abbildung 6

$$\begin{aligned} & x^2 - x \leq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x(x-1) \leq 0 \\ \Longrightarrow\ & x \in [0, 1] \end{aligned}$$

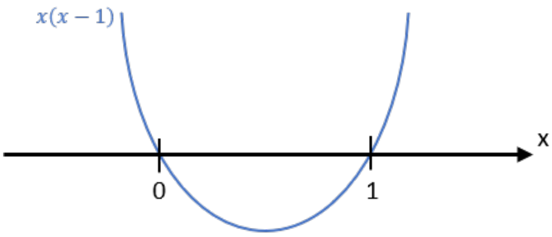

Abbildung 7

Zusammen ist also $x \in [0, 1]$.

b) $g(x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - x \geq 0$

Analog zur Rechnung in a) erhalten wir $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap \left[(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\right] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Lsungsmenge: $x \in [0, 1] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

5.) Logarithmische (Un)gleichungen

Aufgabe 10:
Lse

$$f(x) := \log_{0,3}(\log_2(\log_{x-2} 25)) > 0.$$

Da das Argument des Logarithmus grer als 0 und die Basis positiv, aber nicht gleich 1 sein darf, folgt fr den Definitionsbereich

$$\begin{cases} \log_2(\log_{x-2} 25) > 0 \\ \log_{x-2} 25 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \log_{x-2} 25 > 1 \\ x - 2 \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 25 < x - 2 & \text{falls } x - 2 \in (0, 1) \\ 25 > x - 2 & \text{falls } x - 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

und damit $x \in \Big[(27,+\infty) \cap (2,3)\Big] \cup \Big[(-\infty,27) \cap (3,+\infty)\Big] = \emptyset \cup (3,27) = (3,27)$.
Aufgrund des passenden Definitionsbereichs kann die Ungleichung mit $0,3 < 1$ und $2 > 1$ potenziert werden. Auerdem ist $x-2>1$, da $x > 27 > 3$ gilt. Wir erhalten damit

$$f(x) > 0 \iff \log_{x-2} 25 < \underbrace{2^{\left(0,3^0\right)}}_{=2} \iff 25 < (x-2)^2 \iff \underbrace{x^2-4x-21}_{=:g(x)} > 0.$$

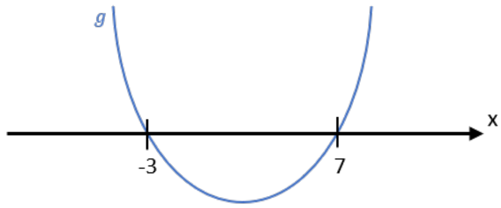

Abbildung 8

Lsungsmenge: $\quad x \in (3,27) \cap \Big[(-\infty,-3] \cup [7,+\infty)\Big] = (7,27)$

Aufgabe 11:
Lse

$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

Analog wie in Aufgabe 10 gilt fr den Definitionsbereich

$$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ 9x > 0 \\ 9x \neq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 4 > -\frac{1}{4} \\ x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases}$$

und damit $x \in (0,+\infty) \setminus \left\{\dfrac{1}{9}\right\}$.
Wir benutzen nun die Logarithmusrechenregel

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

mit $c = 7$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0 &\iff \frac{\log_7 7}{\log_7(4x+1)} = -\frac{\log_7 7}{\log_7(9x)} \\ &\iff \log_7(4x+1) = -\log_7(9x) \\ &\iff \log_7(4x+1) + \log_7(9x) = 0 \\ &\iff \log_7(9x(4x+1)) = 0 \\ &\iff 9x(4x+1) = 1 \\ &\iff x \in \left\{\frac{1}{12}, \underbrace{-\frac{1}{3}}_{<0}\right\}. \end{aligned}$$

Lsungsmenge: $\quad x = \dfrac{1}{12}$