Begabtenseminar "Gipfel und Nordwände der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade"

ulm university universität ulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Vorlesung

Trigonometrie

Ein weiteres Teilgebiet der Mathematik, zu dem verschiedenste (Un)gleichungen formuliert werden können, ist die Trigonometrie. Gesucht ist für diese (Un)gleichungen wieder eine Lösungsmenge. Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen werden nun allerdings auch oft diskrete, unendliche Lösungsmengen herauskommen.
Im Folgenden werden einige typische trigonometrische (Un)gleichungstypen mit passenden Lösungsstrategien beschrieben.

1. **Hilfsargumenten-Methode**

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 > 0$ gilt

$$a\sin(x) \pm b\cos(x) = \left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos(\varphi)}\sin(x) \pm \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin(\varphi)}\cos(x)\right) \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \Big(\sin(x)\cos(\varphi) \pm \cos(x)\sin(\varphi)\Big) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x \pm \varphi).$$

Dies folgt aus

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

mit $\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Insbesondere gilt

$$\sin(x) \pm \cos(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right),$$

denn $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe 1:
Löse

$$12\cos(x) - 5\sin(x) = -13.$$

Es ist $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, somit gilt $\frac{12}{13}\cos(x) - \frac{5}{13}\sin(x) = -1$. Sei $\varphi = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$, dann folgt

$$\begin{aligned} 12\cos(x) - 5\sin(x) = -13 &\iff \sin(\varphi)\cos(x) - \cos(\varphi)\sin(x) = -1 \\ &\iff \sin(\varphi - x) = -1 \\ &\iff \varphi - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\quad x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) + 2\pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$

2. Zurückführen auf ein Polynom von einer trigonometrischen Funktion

Aufgabe 2:
Löse

$$\sin(3x) + \cos(2x) = 1.$$

Transformiere die linke Seite zu einem Polynom von $\sin(x)$:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$1 - 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 1 \iff \sin(x)\big(3 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x)\big) = 0.$$

$$\sin(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi n\,, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$3 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$$

Substituiere $t = \sin(x)$:

$$-4t^2 - 2t + 3 = 0$$

Berechne die Diskriminante:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 3 = 52 = 4 \cdot 13$$

$$\Longrightarrow \qquad t_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} \sin(x) = t_- &= \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} < -1 \Rightarrow \emptyset \\ \sin(x) = t_+ &= \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{4}\right) + \pi n\,, \; n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\quad x \in \left\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{ (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{4}\right) + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$

Aufgabe 3:
Löse

$$5\sin(2x) - 5\cos(2x) = \tan(x) + 5. \tag{1}$$

Transformiere dies zu einer rationalen Funktion von $\tan(x)$:

Es gilt

$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

und damit

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos^2(x) = 2\tan(x)\cos^2(x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

sowie

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\cos^2(x)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} - \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}.\end{aligned}$$

Zusammen folgt mittels Gleichung (1) die neue Gleichung

$$\frac{2\tan(x) - 1 + \tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{\tan(x)}{5} + 1. \tag{2}$$

Gleichung (1) und (2) sind äquivalent, da sie den gleichen Definitionsbereich besitzen. Substituiere nun $t = \tan(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{2t-1+t^2}{1+t^2} = \frac{t}{5} + 1 &\iff \frac{t^2+2t-1-\frac{t}{5}\left(t^2+1\right)-t^2-1}{t^2+1} = 0\\ &\iff \frac{-t^3+5t^2+10t-5-5t^2-5-t}{t^2+1} = 0\\ &\iff \frac{t^3-9t+10}{\underbrace{t^2+1}_{\geq 1}} = 0\\ &\iff t^3-9t+10 = 0\end{aligned}$$

Mittels Polynomdivision erhalten wir

$$t^3 - 9t + 10 = \left(t-2\right)\left(t^2+2t-5\right) = \left(t-2\right)\left(t+1-\sqrt{6}\right)\left(t+1+\sqrt{6}\right)$$

und damit auch

$$\begin{aligned}\frac{2t-1+t^2}{1+t^2} = \frac{t}{5} + 1 &\iff \left(t-2\right)\left(t+1-\sqrt{6}\right)\left(t+1+\sqrt{6}\right) = 0\\ &\iff t \in \left\{2, -1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}\right\}.\end{aligned}$$

<u>Rücksubstitution</u>	<u>Rücksubstitution</u>	<u>Rücksubstitution</u>
$\tan(x) = t = 2$	$\tan(x) = t = -1+\sqrt{6}$	$\tan(x) = t = -1-\sqrt{6}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$x = \arctan(2) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \arctan(-1+\sqrt{6}) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = -\arctan(1+\sqrt{6}) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Lösungsmenge:

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ \arctan(2) + \pi n, \arctan(-1+\sqrt{6}) + \pi n, -\arctan(1+\sqrt{6}) + \pi n \right\}$$

3. <u>Polynomdivision</u>

Es soll das Polynom

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n_a} a_k x^k\ ,\ n_a \geq 1$$

durch das Polynom

$$b(x) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k x^k$$

mit $\mathrm{Deg}(b) = n_b \leq n_a = \mathrm{Deg}(a)$ geteilt werden. Gesucht sind also Polynome $q(x)$ und $r(x)$, sodass

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$$

mit $\mathrm{Deg}(r) < \mathrm{Deg}(b)$.

Beispiel:
$a(x) = x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1$
$b(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(x^4 & + 6x^3 & - 3x^2 & - x & + 1 \big) & : \big(x^2 - 2x + 3\big) = x^2 + 8x + 10 + \dfrac{-5x - 29}{x^2 - 2x + 3} \\
\underline{- x^4} & \underline{+ 2x^3} & \underline{- 3x^2} & & & \\
 & 8x^3 & - 6x^2 & - x & & \\
 & \underline{- 8x^3} & \underline{+ 16x^2} & \underline{- 24x} & & \\
 & & 10x^2 & - 25x & + 1 & \\
 & & \underline{- 10x^2} & \underline{+ 20x} & \underline{- 30} & \\
 & & & - 5x & - 29 &
\end{array}$$

Demnach erhalten wir $q(x) = x^2 + 8x + 10$ und $r(x) = -5x - 29$.

Beispiel aus Aufgabe 3:
In Aufgabe 3 wurde eine Faktorisierung von $a(t) = t^3 - 9t + 10$ gesucht. Wir raten zunächst die Nullstelle $t_0 = 2$:

$$a(t_0) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 8 - 18 + 10 = 0$$

Nun setzen wir $b(t) = (t - t_0) = (t - 2)$ und führen die Polynomdivision mit $a(t)$ und $b(t)$ durch.

$$\begin{array}{rrrl}
\big(t^3 & & - 9t + 10 \big) & : \big(t - 2\big) = t^2 + 2t - 5 \\
\underline{- t^3} & \underline{+ 2t^2} & & \\
 & 2t^2 & - 9t & \\
 & \underline{- 2t^2} & \underline{+ 4t} & \\
 & & - 5t + 10 & \\
 & & \underline{5t - 10} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Durch die Mitternachtsformel bekommen wir zudem $t^2 + 2t - 5 = \left(t + 1 - \sqrt{6}\right)\left(t + 1 + \sqrt{6}\right)$ und damit die Faktorisierung

$$t^3 - 9t + 10 = \left(t - 2\right)\left(t + 1 - \sqrt{6}\right)\left(t + 1 + \sqrt{6}\right).$$

4. Ausnutzung von Ungleichungen und Monotonie

Aufgabe 4:
Löse

$$\sin(3x) + \cos(2x) + 2 = 0.$$

Da $|\sin(3x)| \leq 1$ und $|\cos(2x)| \leq 1$ ist, gilt

$$\sin(3x) + cos(2x) = -2 \iff \begin{cases} \sin(3x) = -1 \\ \cos(2x) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \pi + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ überall beliebig.
Lösungsmenge: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} : n \in \mathbb{Z} \right\} \cap \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$

Aufgabe 5:
Für gewisse $x, y \in \mathbb{R}$ sei die Gleichung

$$x + e^x = y + e^y$$

bekannt. Gilt für solche x, y auch die Gleichung

$$\sin(x) + \cos(y) = \cos(x) + \sin(y)?$$

Da $x + e^x = y + e^y$ für ein festes (x, y)-Paar gilt und die Funktion $f(x) = x + e^x$ streng monoton wächst, gilt $x = y$. Damit folgt direkt

$$\sin(x) + \cos(y) = \sin(x) + \cos(x) = \cos(x) + \sin(x) = \cos(x) + \sin(y).$$

5. Summation von trigonometrischen Funktionen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen

Oft ist der Wert einer Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

von trigonometrischen Funktionen u_k gefragt. Eine erzeugende Funktion $f(k)$ ist eine Funktion, für die $f(k+1) - f(k) = u_k$ gilt. Falls solch ein f existiert, gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[f(k+1) - f(k) \right] = f(n+1) - f(1).$$

Aufgabe 6:
Berechne den Wert von

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + kh).$$

Ziel ist es, eine erzeugende Funktion f zu finden:
Durch die Formel

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{3}$$

gilt

$$\cos\left(\alpha + \frac{2k+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right) = -2\sin\left(\underbrace{\frac{2\alpha + \frac{2k}{2}2h}{2}}_{\alpha+kh}\right)\sin\left(\underbrace{\frac{\alpha + \frac{2k+1}{2}h - \alpha - \frac{2k-1}{2}h}{2}}_{\frac{h}{2}}\right).$$

Damit folgt

$$\sin(\alpha + kh) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{2k+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right)}{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)} = f(k+1) - f(k)$$

mit

$$f(k) := -\frac{\cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right)}{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(k+1) - f(k)\right] = f(n) - f(0) \\ &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha - \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \overset{(3)}{=} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also die Identität

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha + kh) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

6. Umwandlung von Summen und Produkten

Aufgabe 7:
Löse

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

Es gelten die beiden Identitäten

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases} . \tag{4}$$

Dadurch gilt

$$\begin{aligned} &\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right] \\ &\overset{(4)}{=} -4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8} - x + \frac{\pi}{8} + x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{8} - x - \frac{\pi}{8} - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{8} - x + \frac{\pi}{8} + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{8} - x - \frac{\pi}{8} - x}{2}\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x) = \frac{1}{2} \\ &\iff \sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff 2x = \frac{\pi}{4}(-1)^n + \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{8}(-1)^n + \frac{\pi}{2}n\,,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\quad x \in \left\{\frac{\pi}{8}(-1)^n + \frac{n\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$

7. Lösen von Ungleichungen

Aufgabe 8:
Löse

$$\operatorname{arccot}^2(x) - 5\operatorname{arccot}(x) + 6 > 0.$$

Substituiere $t = \operatorname{arccot}(x)$:

$$\underbrace{t^2 - 5t + 6}_{=:f(t)} > 0$$

Es gilt $D_g = 25 - 4 \cdot 6 = 1$ und somit

$$f(t) = 0 \iff t_\pm = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 1} \iff t \in \{2, 3\}.$$

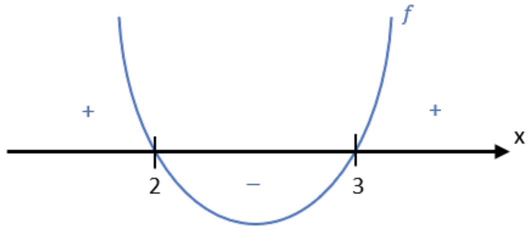

Abbildung 1

Es gilt also (s. Abb. 1)

$$\operatorname{arccot}^2(x) - 5\operatorname{arccot}(x) + 6 > 0 \iff \operatorname{arccot}(x) < 2 \;\text{ oder }\; \operatorname{arccot}(x) > 3.$$

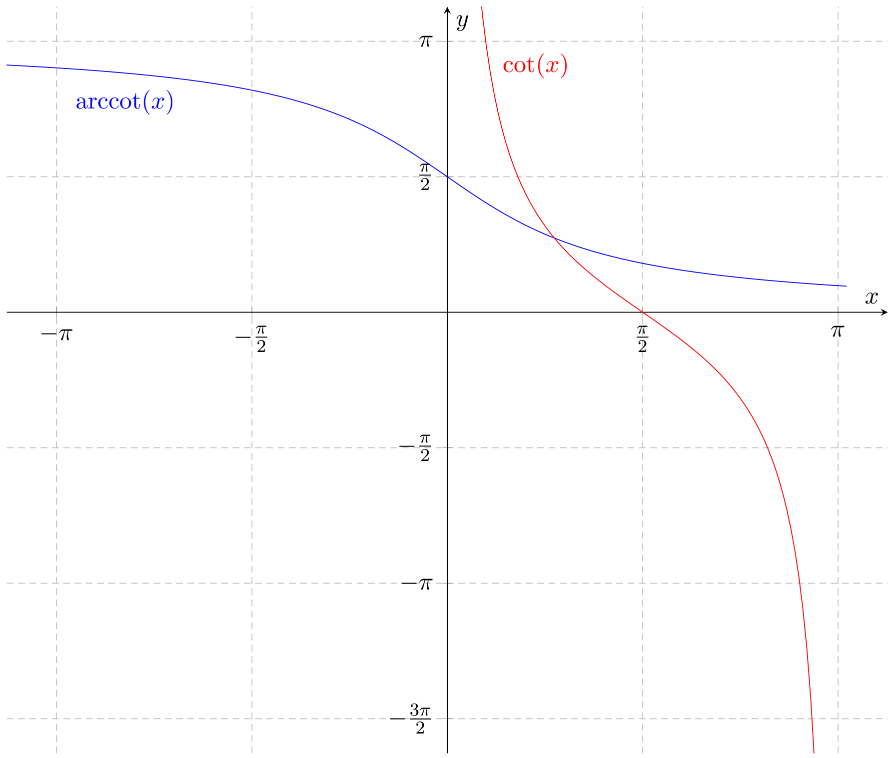

Abbildung 2

In Abb. 2 ist zu sehen, dass der Arkuskotangens monoton fallend ist. Daraus können wir

$$\operatorname{arccot}(x) < 2 \iff x > \cot(2)$$
$$\operatorname{arccot}(x) > 3 \iff x < \cot(3)$$

schließen.
Lösungsmenge: $\quad x \in (-\infty, \cot 3) \cup (\cot 2, +\infty)$

Aufgabe 9:

Beweise, dass

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \geq 6,$$

falls α, β und γ Winkel in einem Dreieck sind.

Beweis:

Es gilt $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Daraus ergibt sich auch $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} > 0$. Benutze nun die Ungleichung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. In unserem Fall ist $n = 3$:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}}$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\gamma+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und damit auch (s. Abb. 3)

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}_{<1} - \cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\right] \\
&< \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\max_{\alpha\in\mathbb{R}}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\max_{y\in[0,1]}\Big[y(1-y)\Big] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

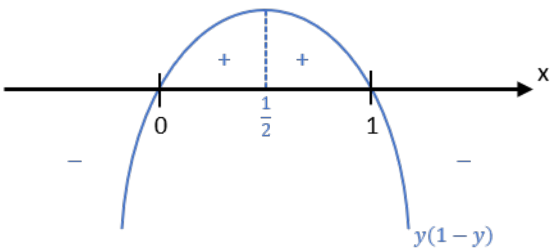

Abbildung 3

Zusammen folgt

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 3 \cdot 2 = 6.$$

□

Aufgabe 10:

Löse

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) < 0. \tag{5}$$

Zerlege mithilfe von Formel 24 (Formelsammlung) die linke Seite in Faktoren

$$\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$$

und schreibe

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x) + \cos(2x) = \cos(2x)\big(2\cos(x)+1\big).$$

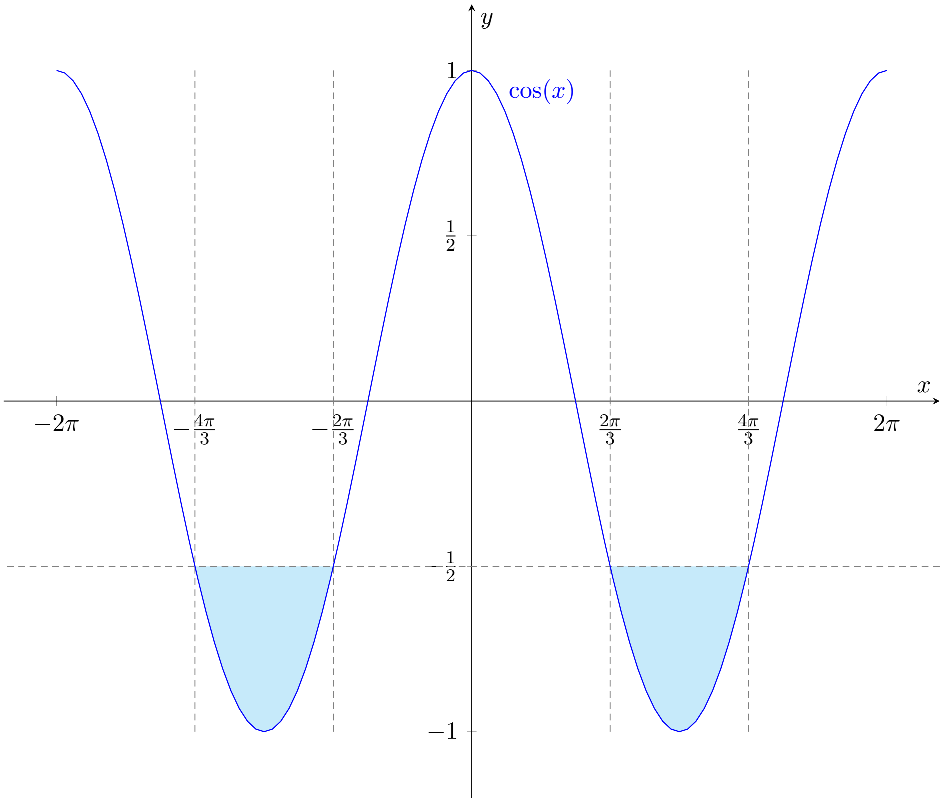

Abbildung 4

In Abb. 4 ist zu sehen, in welchen Intervallen der Cosinus kleiner als $-\dfrac{1}{2}$ ist.
Daraus lässt sich

$$
\begin{aligned}
(5) \iff{}& \cos(2x)\big(2\cos(x)+1\big) < 0 \\
\iff{}& \begin{cases} \cos(2x) > 0 \\ 2\cos(x)+1 < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \cos(2x) < 0 \\ 2\cos(x)+1 > 0 \end{cases} \\
\iff{}& \begin{cases} 2x \in \big(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\big) \\ \cos(x) < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 2x \in \big(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\big) \\ \cos(x) > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z} \\
\iff{}& \begin{cases} x \in \big(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\big) \\ x \in \big(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{4\pi}{3}+2\pi n\big) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x \in \big(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{3\pi}{4}+\pi n\big) \\ x \in \big(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{2\pi}{3}+\pi n\big) \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

folgern.
Lösungsmenge:

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n, \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\right]$$

8. Lösung von Gleichungssystemen

Aufgabe 11:

Löse das System

$$\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \tan(y) = \cot(x) \end{cases}.$$

Definitionsbereich: $x \notin \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$, $y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$

Zusammen mit Formel 12 aus der Formelsammlung gilt

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \tan(y) = \cot(x) \end{cases} \quad &\iff \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \sin(x)\sin(y) = -\frac{1}{4} \end{cases} \\
&\overset{(12)}{\implies} \begin{cases} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{Z} \\
&\implies \begin{cases} 2x = (x+y) + (x-y) = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi n \\ 2y = (x+y) - (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi m \mp \frac{2\pi}{3} + 2\pi\ell \end{cases} \qquad n, k, m, \ell \in \mathbb{Z} \\
&\implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right) \\ y = \frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{3} + \pi\left(\ell + \frac{m}{2}\right) \end{cases} \qquad n, k, m, \ell \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right) : n, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$y \in \left\{\frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{3} + \pi\left(\ell + \frac{m}{2}\right) : m, \ell \in \mathbb{Z}\right\}$$