Prof. Dr. Evgeny Spodarev **Schuljahr 2020/21**

Begabtenseminar

„Gipfel und Nordwände der Schulmathematik“ oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade“

Formelsammlung Trigonometrie

Alle trigonometrischen Gleichungen werden gelöst durch Reduzieren auf eine der vier Grundgleichungen:

(1) $$\sin x = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, n \in \mathbb{Z}, & \text{wenn } |a| \le 1, \\ \emptyset, & \text{wenn } |a| > 1; \end{cases}$$

(2) $$\cos x = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, & \text{wenn } |a| \le 1, \\ \emptyset, & \text{wenn } |a| > 1; \end{cases}$$

(3) $$\tan x = a \Longleftrightarrow x = \arctan\ a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

(4) $$\cot x = a \Longleftrightarrow x = \ \text{arccot}\ \ a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Darüber hinaus ist es wichtigt, folgende Spezial-Lösungen zu kennen:

(5) $$\sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

(6) $$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

(7) $$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

(8) $$\cos x = 1 \Longleftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

(9) $$\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

(10) $$\cos x = -1 \Longleftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Folgende Formeln werden verwendet, um Gleichungen zu vereinfachen:

(11) $$\sin[x \pm y] = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

(12) $$\cos[x \pm y] = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

(13) $$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan\ x\ \tan\ y}$$

(14) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(15) $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

(16) $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

(17) $$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

(18) $$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

(19) $$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\ (x \pm \frac{\pi}{4})$$

(20) $$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

(21) $$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3 \cos x$$

Die Gruppierung und Faktorisierung erfolgt nach den folgenden Formeln

(22) $$\tan\ x \pm \tan\ y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

(23) $$\sin\ x \pm \sin\ y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

(24) $$\cos\ x + \cos\ y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

(25) $$\cos\ x - \cos\ y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

(26) $$\sin\ x \sin\ y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

(27) $$\sin\ x \cos\ y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

(28) $$\cos\ x \cos\ y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

Hilfsargumenten − Methode:

$$\begin{aligned} a \sin x \pm b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi \pm \cos x \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \varphi), \end{aligned}$$

wobei $\varphi = \arcsin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$.