



Wintersemester 2020/2021

Begabenseminar

Gipfel und Nordwände der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade

Hausaufgaben Trigonometrie

Löse die folgenden (Un)Gleichungen oder Systeme und beweise die folgenden Aussagen:

1. $3 \sin(x) + 4 \cos(x) = 5$
2. $\sqrt{3} \sin(2x) - \cos(2x) = \sqrt{3}$
3. $\sqrt{3} \cos(x) + \cot^2(x) = \frac{\sin^3(x) + 1}{\sin^2(x)}$
4. Beweise folgende Identität:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)$$

5. Zeige, dass falls α, β, γ Winkelmaße in einem Dreieck sind gilt, dass

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$

6. Berechne die folgenden Summen:

(a) $\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(7\alpha) + \dots + \cos((2n+1)\alpha)$

(b) $\tan(\alpha) + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4} \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

7. Beweise, dass die Gleichung

$$(\sin(x) + \sqrt{3} \cos(x)) \sin(4x) = 2$$

keine Lösung besitzt.

8. Beweise, dass

$$\sin^2(x) \cos^2(x) \leq \frac{1}{4}$$

9. Finde

(a) $\cos\left(2 \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

(b) $\cos(2 \operatorname{arccot}(-2))$

10. $1 + \cos(2x) \geq \cos(x)(1 + |1 - 2 \cos(x)|)$

11. $\sqrt{\frac{1}{2} - \cos(2x)} \geq \sin(x) - \cos(x)$

12. $\sin(x) < |\cos(x)|$

13. Für welche a hat die Ungleichung

$$\tan^2(\cos(\sqrt{4\pi^2 - x^2})) - 4a \tan(\cos(\sqrt{4\pi^2 - x^2})) + 2 + 2a \leq 0$$

eine endliche Anzahl von Lösungen? Finde diese Lösungen.

14. Für welche a hat die Gleichung

$$(\arcsin(x))^3 + (\arccos(x))^3 = a$$

eine eindeutige Lösung?

15. Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\int_0^\alpha \cos(x + \alpha^2) dx = \sin(\alpha),$$

welche im Intervall $[2, 3]$ liegen.

16. $\tan^2(x) \tan^2(3x) = 1$

17. $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{5}{8}$

18. $\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\cos(x)} = 2\sqrt{2}$

19. $\tan(x) \tan\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

20. $2 \tan(2x) + \tan(3x) = \tan(5x)$

21. $2 \cos(x) = \sqrt{2 + \sin(3x)}$

22. Für welche a besitzt die Gleichung

$$\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)} = a$$

Lösungen?

23. Finde alle p , für welche die Gleichung

$$\sin(x) + p \cos(x) = 2p$$

Lösungen besitzt.

$$24. \begin{cases} \tan(x) \tan(2y) = 1, \\ \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \cos(2y) = 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2 \sin(x) \sin(y) = \cos(2x) + \cos(2y), \\ 2 \cos(x) \sin(y) = \cos(2x) - \cos(2y) \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \sin(x) + \sin(z) = \sqrt{2} \cos(y), \\ \cos(x) + \cos(z) = \sqrt{2} \sin(y), \\ \cos(2y) + \cos(2z) = \sin(2x) \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \sin(x) + \tan(y) = 0, \\ \sin^2(x) + \tan^2(y) = 1 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \sqrt{\sin(x)} \cos(y) = 0, \\ 2 \sin^2(x) - \cos(2y) - 2 = 0 \end{cases}$$

Lösungen

1. $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
2. $\frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
3. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
6. (a) $\frac{\cos((n+2)\alpha) \sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$
 (b) $\frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 2 \cot(2\alpha)$
9. (a) $-\frac{1}{8}$
 (b) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$
10. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
11. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi n,$
 $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{7\pi}{8} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
12. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
13. $a = \frac{\tan^2(1) + 2}{2(2 \tan(1) - 1)} : x = 0, x = \pm 2\pi$
 $a = -\frac{1}{2} : x = \pm \sqrt{3\pi^2 \pm 2\pi \arccos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\arccos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$
14. $a = \frac{\pi^3}{32}, \frac{\pi^3}{8} < a \leq \frac{7\pi^3}{8}$
15. $\sqrt{3\pi}, \frac{\sqrt{1+8\pi}-1}{2}$
16. $\frac{\pi(1+2n)}{8}, \frac{\pi(1+2n)}{4}, n \in \mathbb{Z}$
17. $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
18. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
19. $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 - n} \right), n \neq -1, 0, n \in \mathbb{Z}$
20. $\pi n, \frac{\pi(1+2n)}{16}, n \in \mathbb{Z}$
21. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\arcsin\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

22. $|a| \leq 1$

23. $|p| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

24. $\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi m, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \right), m, n \in \mathbb{Z}$

25. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m, (-1)^{m+n+1} \arcsin \left(\frac{\sqrt{10} - \sqrt{12}}{4} + \pi n \right) \right),$
 $\left(\pi m, (-1)^m \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right),$
 $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m, (-1)^{m+1} \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), m, n \in \mathbb{Z}$

26. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi m, \pi(2n + m), \frac{3\pi}{4} + \pi(2p + m) \right),$
 $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m, \frac{\pi}{2} + \pi(2n + m), \frac{\pi}{4} + \pi(2p + m) \right),$
 $\left(-\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\pi m}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \pi \left(2n - \frac{m}{2} \right), -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \pi \left(2p + \frac{m}{2} \right) \right),$
 $m, n, p \in \mathbb{Z}$

27. $\left((-1)^n \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) + \pi n, \pm \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \pi m \right), m, n \in \mathbb{Z}$

28. $\left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m \right), m, n \in \mathbb{Z}$