Seminar Approximationstheorie Themenvorschläge

9. Oktober 2018

1. Existenz und Eindeutigkeit von Bestapproximationen: Unter geeigneten Voraussetzungen an einen normierten Raum X und eine Teilmenge $M \subset X$ lässt sich das Bestapproximationsproblem lösen. Für *gleichmäßig konvexe* Normen erhält man ein Eindeutigkeitsresultat.
   Literaturvorschlag: [Che00, 1.6], [Riv69, Introduction], [Sha71, 4.1], [Ach56, 8-9.]

2. Der Approximationssatz von Weierstraß in $1-$D: Stetige Funktionen auf einem Intervall können gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. Eventuell kann dabei auch auf die Rolle *monotoner Operatoren* auf $\mathcal{C}([a,b])$ eingegangen werden (Satz von Bohman-Korovkin).
   Literaturvorschlag: [Che00, 3.3], [Riv69, 1.1.1], [Ach56, 20.]

3. Der Satz von Stone-Weierstraß: Der Satz von *Stone-Weierstraß* verallgemeinert das eindimensionale Resultat auf $\mathcal{C}(K)$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (oder sogar für K ein *kompakter Hausdorffraum*).
   Literaturvorschlag: [Che00, 6.1], [Rud90, Chapter 6], [Yos95, S.9]

4. Tschebyscheff-Approximation (3 Vorträge): Hierbei geht es um die Charakterisierung der Approximation auf $\mathcal{C}([a,b])$ durch Polynome. Wichtige Resultate sind der *Satz von de La Vallée Poussin*, der *Alternantensatz* und der *Eindeutigkeitssatz*. Das lässt sich auf „verallgemeinerte Polynome“ übetragen - sogenannte *Haar-Systeme*. Ein interessantes Nichtexistenzresultat ist der *Satz von Mairhuber-Curtis*.
   Literaturvorschlag: [Che00, 5.4-5.5],[Riv69, 1.2], [Cur59], [Sha71, Chapter 2]

5. Satz von Müntz-Szász: Dieser Satz gibt eine überraschende Charakterisierung der Dichtheit von $\operatorname{span}\{t^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{C}([a,b])$ für eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$.
   Literaturvorschlag: [Che00, 6.2], [Ach56, 27.],[Mün14],[Szá16]

6. L^2-Approximation (3 Vorträge): Ein gutes Mittel für die Approximation bezüglich der L^2-Norm sind *Fourierreihen*. Nach einer kurzen Vorstellung der allgemeinen Theorie sollen hier verschiedene Konvergenzarten und -resultate vorgestellt werden. Auch hier kann mit Polynomen approximiert und die Bestapproximation charakterisiert werden.
   Literaturvorschlag: [Wal88, 1.1-2.6], [Riv69, 2.1], [Che00, 4.1-4.4], [SS03, Kapitel 2 & 3]

7. Sätze von Jackson: Die *Sätze von Jackson* erlauben, den Fehler durch die Approximation mit (trigonometrischen) Polynomen zu kontrollieren. Höhere Regularitätsaussagen für die zu approximierende Funktion (etwa die Existenz hoher Ableitungen) führen zu kleineren Approximationsfehlern. In Absprache mit 6.
Literaturvorschlag: [Che00, 4.6],[Riv69, 1.1.2], [Ach56, 87. & 89.]

Weitere mögliche Themen:

- Holomorphe Approximation: Für $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $D \supset K$ offen beschäftigt sich die *Runge-Theorie* mit der Frage ob sich für ein holomorphes $f\colon K \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D finden lässt, welche auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Als Anwendung dieser Theorie kann beispielsweise der *Satz von Mittag-Leffler* bewiesen werden. Vorkenntnisse in der Funktionentheorie sind hilfreich.
Literaturvorschlag: [RS07, Kapitel 12 & 13],[Rud87, Chapters 13 & 20]

- L^1-Approximation: Anstatt Approximation bezüglich der L^2 oder L^∞ Normen, betrachtet man die L^1 Norm. Diese Norm ist zwar nicht gleichmäßig konvex, allerdings gilt dennoch ein Eindeutigkeitsresultat. Außerdem findet sich auch eine Charakterisierung der Bestapproximation.
Literaturvorschlag: [Che00, 6.6], [Riv69, 3.1]

Literatur

[Ach56] Naum I. Achiezer. *Theory of approximation*. Ungar, New York, 1956.

[Che00] Elliott W. Cheney. *Introduction to approximation theory*. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2. ed., repr. edition, 2000.

[Cur59] Philip C. Curtis, Jr. n-parameter families and best approximation. *Pacific J. Math.*, 9:1013–1027, 1959.

[Mün14] Ch. H. Müntz. *Über den Approximationssatz von Weierstraß*, pages 303–312. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1914.

[Riv69] Theodore J. Rivlin. *An introduction to the approximation of functions*. A Blaisdell book in numerical analysis and computer science. Blaisdell, Waltham, Mass., 1969.

[RS07] R. Remmert and G. Schumacher. *Funktionentheorie 2*. Number Bd. 2 in Grundwissen Mathematik. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill series in higher mathematics. McGraw-Hill, New York, NY [u.a.], 3. ed. edition, 1987.

[Rud90] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, Auckland, 3. ed. edition, 1990.

[Sha71] Harold S. Shapiro. *Topics in approximation theory*. Lecture notes in mathematics ; 187. Springer, Berlin, 1971.

[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*, volume 1: Princeton lectures in analysis ; 1. Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.

[Szá16] O. Szász. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. *Mathematische Annalen*, 77:482–496, 1916.

[Wal88] James S. Walker. *Fourier analysis*. Oxford Univ. Pr., New York, 1988.

[Yos95] Kōsaku Yoshida. *Functional analysis*. Classics in mathematics. Springer, Berlin; Heidelberg, repr. of the 1980 ed. edition, 1995.