

Das Vorhersagerisiko der Sterblichkeitentwicklung - Kann es durch eine geeignete Portfoliozusammensetzung minimiert werden?

Carmen Wetzler und Hans-Joachim Zwiesler

Preprint Series: 2007-02



Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
UNIVERSITÄT ULM

Das Vorhersagerisiko der Sterblichkeitsentwicklung

—

Kann es durch eine geeignete Portfoliozusammensetzung minimiert werden?

Carmen Wetzel und Hans-Joachim Zwiesler

Februar 2008

The original publication is available at www.springerlink.com
<http://dx.doi.org/10.1007/s11857-008-0039-1>

Zusammenfassung

Das Geschäft mit Rentenversicherungen birgt durch die lebenslange Laufzeit – vor allem in Niedrigzinsphasen – Risiken für die Lebensversicherungsunternehmen. Seit Jahren läßt sich ein Anstieg der Lebenserwartung beobachten. Wie sich dieser Trend in der Zukunft entwickelt ist ungewiss.

In diesem Artikel untersuchen wir, ob ein Versicherungsunternehmen durch eine geeignete Portfoliozusammensetzung das Vorhersagerisiko der Sterblichkeitsentwicklung minimieren kann.

Hierfür werden stochastische Zins- und Sterblichkeitsentwicklungen zugrunde gelegt, wobei für Renten- und Risikolebensversicherungen unterschiedliche Sterblichkeitsentwicklung unterstellt werden. Anhand eines Beispiels werden die Auswirkungen der Portfoliozusammensetzung auf das Vorhersagerisiko betrachtet.

Die Ergebnisse zeigen, dass durch eine bewußte Portfoliozusammensetzung das Vorhersagerisiko signifikant verringert werden kann.

Abstract

The pension insurance business involves risks for the insurance companies due to the lifetime duration – especially in low-interest phases. For the past years there can be observed an increasing life expectancy. If this development will continue is uncertain.

In this article, we will examine whether an insurance company can minimize the longevity risk through an appropriate composition of the portfolio.

We will use stochastic interest rates and mortality trends. For pension

and life insurances different mortality trends will be used. Based on an example we will show the impact of the portfolio composition to the longevity risk.

The results prove that a deliberate portfolio composition can significantly reduce the longevity risk for the insurance company.

1 Einleitung

Die aktuelle wirtschaftliche Lage und das zunehmende Altern der Bevölkerung stellen die gesetzliche Rentenversicherung vor schwerwiegende Probleme. Die private Altersvorsorge wird aus diesem Grund immer wichtiger. Auch der Staat fördert sie z.B. durch die Riester Rente und die Basisvorsorge.

Andererseits hat die gemischten Lebensversicherung, als bisher gefragtestes Produkt der privaten Vorsorge, durch die Steueränderung 2005 an Attraktivität verloren, während die Rentenversicherung steuerlich profitierte. Nach Meldungen des GDV stieg im Neugeschäft des 1. Halbjahr 2005 die Anzahl der Rentenversicherungen um 1,6 Prozent auf 1,2 Mio Verträge, während Kapitallebensversicherungen zurückgingen.

Das Geschäft mit Rentenversicherungen birgt jedoch durch die lebenslange Laufzeit – vor allem in der aktuellen Niedrigzinsphase – Risiken für die Lebensversicherungsunternehmen. Wie lange das Versicherungsunternehmen eine Rente bezahlen muss, ist im Voraus unbekannt. Seit Jahren lässt sich ein Anstieg der Lebenserwartung beobachten, was die DAV dazu veranlasste neue Tafeln zu entwickeln, die diesen Trend stärker berücksichtigen. Die Abbildung 1 der DAV zeigt, dass die Lebenserwartung in der jüngeren Vergangenheit jährlich um ca. 1/4 Jahr angestiegen ist. Wie sich dieser Trend in der Zukunft entwickelt, ist ungewiss.

Aubrey de Grey – Biogerontologe und Bioinformatiker der University of Cambridge – stellt sogar die These auf, dass in 25 Jahren die Menschen nicht mehr aufgrund ihres Alters sterben werden, sondern nur noch an alter-sunabhängigen Gründen, wie z.B. Unfällen und Epidemien¹.

Für die Versicherungsunternehmen stellt sich somit die Frage, wieviel Geld bei Beginn der Rentenbezugsphase vorhanden sein muss, um die Rentenzahlungen finanzieren zu können. Der Kapitalbedarf für eine Rentenversicherung mit jährlicher Rentenhöhe 12.000€, deren letzte Auszahlung mit 75 stattfindet (Beginn der Rentenzahlung im Alter 65) beläuft sich bei einem Zinssatz von 2,75% auf 106.532,14€. Findet die letzte Zahlung im Alter 79 statt, benötigt man stattdessen schon 141.684,13€, also knapp 1/3 mehr.

Im Zusammenhang mit fondsgebundenen Versicherungen sind aufgrund dieser Unsicherheit viele Lebensversicherungsunternehmen dazu übergegangen den Rentenfaktor² nicht zu garantieren. Bei den klassischen Produkten ist es in Deutschland jedoch üblich, bei Abschluss einer aufgeschobenen Rentenversicherung die Rentenhöhe zu garantieren.

¹siehe [dG]

²Gibt die jährliche Rente pro 10.000€ Fondsguthaben gemäß der gewählten Rentenzahlweise an.

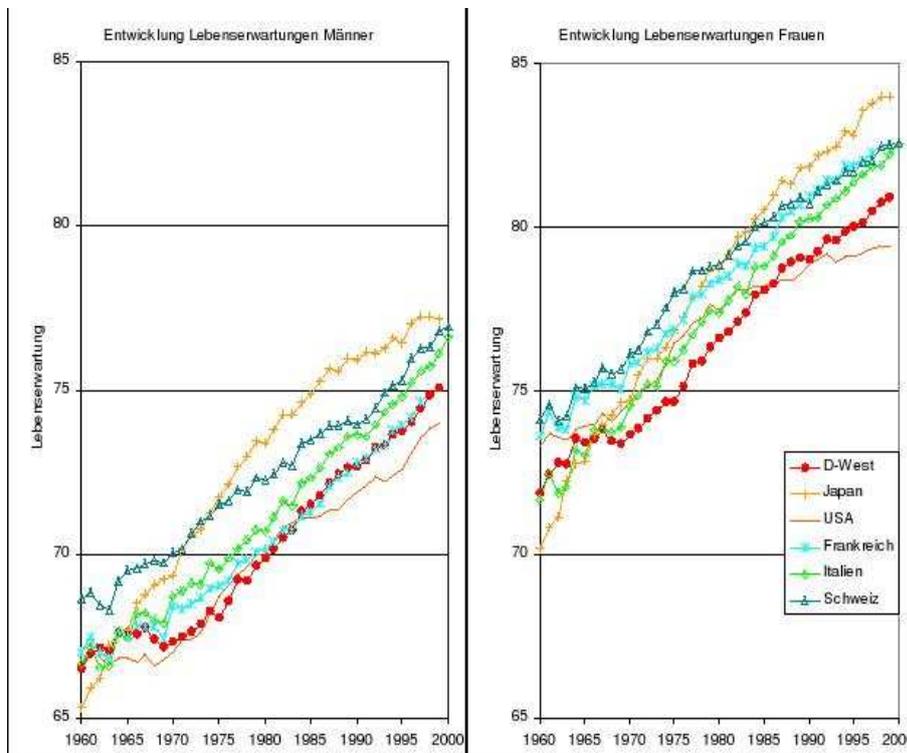


Abbildung 1: Entwicklung der Lebenserwartung *Quelle:* Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen, DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit

Welche Möglichkeiten kann ein Versicherungsunternehmen ergreifen, um das Risiko durch die Sterblichkeitsentwicklung zu minimieren und damit im Rentenversicherungsmarkt erfolgreich zu sein? In der aktuellen Literatur wird fast ausschließlich über Kapitalmarktlösungen nachgedacht. So erörtern z.B. Lin und Cox [LC03], [LC04b], [LC05] sowie Blake und Burrows [BB01], Bauer und Russ [BR06], Cairns, Blake und Dowd [CBD04], [CBD], Cowley und Cummins [CC05], Denuit, Devolder und Goderniaux [DDG] und Biffis, Denuit und Devolder [BDD] in ihren Artikeln Möglichkeiten der Securitization. Versuche einer praktischen Umsetzung der Securitization sind bisher jedoch gescheitert. Im November 2004 brachte die European Investment Bank (EIB) in Zusammenarbeit mit BNP Paribas und der Partner Re den ersten Longevity-Bond über ca. 550 Mio UKP auf den Markt. Da bis Februar 2005 keine Bondanteile verkauft wurden, nahm EIB den Bond für ein Redesign vom Markt.

Die Möglichkeit des natürlichen Hedges wird bisher noch recht wenig betrachtet. Lin und Cox untersuchen in ihrem Artikel [LC04a] die Auswirkungen des

natürlichen Hedges auf die Risikoprämie. Anhand empirischer Daten kommen sie zu dem Ergebnis, dass die Risikoprämie durch natürliches Hedging sinkt und Versicherungsunternehmen dadurch Wettbewerbsvorteile entstehen.

Gründl, Post und Schulze [GPS06] untersuchen in ihrem Artikel die Auswirkungen des natürlichen Hedges auf den Shareholder Value.

Bayraktar und Young [BY06] untersuchen mit Hilfe der „Sharpe Ratio“ die Auswirkungen eines natürlichen Hedges auf den Preis eines Portfolios. Sie zeigen, dass der Preis für ein gemischtes Portfolio niedriger ist, als die Summe der Preise der Portfolios, die nur aus Risikolebensversicherung bzw. Erlebensfallversicherungen bestehen.

Allerdings geht keine dieser Arbeiten auf die Messung des Sterblichkeitsrisikos detailliert ein und dadurch erfolgen auch keine Untersuchungen zur Verbesserung oder Optimierung von Beständen. Diesem Aspekt widmen sich bisher nur Wang und Yang in [WY03]. Sie betrachten in ihrem Artikel die Frage, ob durch eine geeignete Portfoliozusammensetzung das Vorhersagerisiko der Sterblichkeitsentwicklung minimiert werden kann. Sie unterstellen dazu jedoch, dass sich die Sterblichkeitsintensität für Renten- und Risikolebensversicherungen identisch entwickelt.

Im vorliegenden Artikel greifen wir diese Fragestellung auf, entwickeln allerdings das Modell an wesentlichen Stellen weiter. Insbesondere erlauben wir in unserem Modell, dass die Sterblichkeitsintensitäten vom Alter und dem betrachteten Produkt abhängen können, was für die Realitätsnähe von erheblicher Bedeutung ist. Zudem integrieren wir eine stochastische Zinsentwicklung, wodurch dem Umstand Rechnung getragen wird, dass ein typischer Lebensversicherer immer gleichzeitig dem biometrischen und dem Kapitalmarkt-Risiko ausgesetzt wird. Dies führt automatisch zur Notwendigkeit das entstehende Risiko entsprechend aufzuteilen. Hierzu wenden wir erstmalig im Zusammenhang mit natürlichem Hedging die Methode der Varianzzerlegung an, die es uns gestattet, die Auswirkungen beider Risiken zu separieren und getrennt zu analysieren. Damit stellen wir ein Instrumentarium zur Verfügung, mit dem Versicherungsunternehmen durch einen natürlichen Hedge ihr Vorhersagerisiko im Versicherungsbestand minimieren können und damit dem Problem der Langlebigkeit begegnen können.

Dazu legen wir in Abschnitt 2 die grundlegenden Annahmen dar und definieren die Auszahlungsfunktionen der betrachteten Produkte. Wir nennen die aktuellen Trends der Sterblichkeitsentwicklung und führen in die Stochastizität der Sterblichkeits- und der Zinsentwicklung ein. Die Modellierung der Entwicklungen erfolgt dabei in Binomialbäumen.

In Abschnitt 3 stellen wir den verwendeten Prozess zur Modellierung der Sterblichkeit vor. Es handelt sich dabei um den von Milevsky in [MP01] auf-

geführten „Mean Reverting Brownian Gompertz Prozess“. Es wird aufgezeigt wie dieser stochastische Prozess in ein Binomialbaummodell überführt werden kann. Desweiteren werden für die Alter $x = 31$ und $x = 70$ konkrete Verläufe für die Überlebenswahrscheinlichkeit ermittelt.

Als Zinsmodell wird in Abschnitt 4 das Black/Derman/Toy-Modell verwendet und ein konkreter Binomialbaum für die Zinsentwicklung erzeugt.

An dieser Stelle ist es uns wichtig darauf hinzuweisen, dass wir hier konkrete Modelle verwenden, die in der Literatur gut untersucht sind, dass unsere Methodik allerdings genauso für beliebige andere Modelle für Sterblichkeit und Zins funktionieren, solange diese zu rekombinierbaren Binomialbäumen führen.

In Abschnitt 5 beschäftigen wir uns mit der Methode zur Messung des Vorhersagerisikos bzw. Investitionsrisikos. Dazu wird zuerst die Modellierung des Portfolios definiert. Anschließend werden anhand dieser Definition die Maßgrößen für das Vorhersage- bzw. Investitionsrisiko mit Hilfe der in der Literatur bekannten Varianzzerlegung bestimmt. Welche konkreten Aussagen mit Hilfe der gewonnenen Maßgrößen getroffen werden können, verdeutlichen wir anhand eines Beispiels. Wir betrachten dazu einen fiktiven Versicherungsbestand und untersuchen die Fragestellungen

1. Kann allein durch eine größere Anzahl von Rentenversicherungen das Vorhersagerisiko gesenkt werden?
2. Wie groß ist das Vorhersagerisiko eines gegebenen Bestandes?
3. Kann das Vorhersagerisiko durch Veränderungen in der Anzahl der Risikolebensversicherungen verringert werden? Und wenn ja, mit welcher Portfoliozusammensetzung erreicht man das geringste Vorhersagerisiko?

Anschließend untersuchen wir – ebenfalls anhand des Beispiels – wie stabil die Ergebnisse sind, wenn sich nach der Bestimmung des Portfolios die Parameter der Sterblichkeitskurve ändern.

In Abschnitt 6 fassen wir die gewonnenen Erkenntnisse kurz zusammen und zeigen weitere relevante Fragestellungen auf.

2 Grundlagen

Für den weiteren Verlauf dieser Ausarbeitung wird unterstellt, dass

Annahme 1

- es sich bei Versicherungsnehmer und versicherter Person um dieselbe Person handelt,
- alle Zahlungen jährlich nachschüssig erfolgen,
- alle Versicherungen gegen Einmalbeitrag verkauft werden,
- der Versicherungsnehmer (VN) sich nur in den Zustände „tot“ oder „lebendig“ befinden kann und
- die einzelnen Versicherungsverträge voneinander unabhängig sind (d. h. der Tod einer versicherten Person hat keinen Einfluss auf anderen versicherte Personen).

Kosten und eine Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer werden nicht betrachtet.

Die Funktion $A_{x;W}(t)$ gibt den auszahlenden Geldbetrag zum Zeitpunkt $t \geq 0$ an – unter der Annahme, dass ein x -jähriger das Produkt W in $t = 0$ erworben hat – und hilft die Auszahlungen der Produkte formelmäßig darzustellen.

$$A_{x;W} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

Die Auszahlung einer Risikolebensversicherung RL_n ergibt sich als:

$$A_{x;RL_n}(t) = \begin{cases} VS : & \text{VN ist innerhalb } (t-1, t] \text{ verstorben, } t \leq n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

wobei hier und im Folgenden n die Versicherungsdauer darstellt und nur ganzzahlige Zeitpunkte betrachtet werden (d.h. $t, n \in \mathbb{N}$).

Die Auszahlung einer nachschüssigen Rentenversicherung R_n definiert sich als:

$$A_{x;R_n}(t) = \begin{cases} VS : & 0 < t \leq n \text{ und VN lebt} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Eine Termfixversicherung T_n mit Fälligkeit n zahlt unabhängig vom Alter des VN aus:

$$\begin{aligned} A_{x;T_n}(t) &= A_{T_n}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & : 0 < t \leq n \\ VS & : t = n \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Um den heutigen Wert der Auszahlungen mathematisch ermitteln zu können, benötigt man

- den Zinssatz r (Anlagezins) und
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsnehmer zu einem bestimmten Zeitpunkt lebt bzw. tot ist (Überlebenswahrscheinlichkeit bzw. Sterbewahrscheinlichkeit).

Der Zinssatz r soll im weiteren Verlauf stets folgende zwei Annahmen erfüllen:

Annahme 2

1. *Der Anlagezins ist von der Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeit unabhängig.*
2. *Der Anlagezins entspricht dem Marktzins.*

und wird stochastisch modelliert (siehe Seite 15 ff).

Einflusskriterien für die Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten sind in dieser Arbeit nur das Geschlecht, das Eintrittsalter³, das betrachtete Produkt⁴ und das zum Betrachtungszeitpunkt erreichte Alter der versicherten Person. Andere Einflüsse wie z. B. der Beruf oder der Familienstand haben im Weiteren keine Auswirkungen auf die Höhe der Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Annahme 3 *Der betrachtete Bestand enthält kein „Small sample risk“⁵.*

In der klassischen Lebensversicherungsmathematik werden deterministische Sterbewahrscheinlichkeiten unterstellt. So werden von der DAV (Deutschen Aktuarvereinigung) Tafeln zur Verfügung gestellt, in denen abhängig von Geburtsjahr, Geschlecht und Alter die Sterbewahrscheinlichkeit abgelesen werden kann.

Die Sterbewahrscheinlichkeit unterliegt jedoch einer ständigen Entwicklung. Aktuell sind folgende Trends erkennbar⁶:

³Alter zu Vertragsbeginn

⁴D.h. wir unterstellen z.B. für Versicherungsnehmer einer Risikolebensversicherung eine andere Überlebenswahrscheinlichkeit als für Käufer von Rentenversicherungen.

⁵Siehe [MP01]. Das „Small sample risk“ umfasst das Risiko, dass eine versicherte Person gesünder ist als der Durchschnitt und somit länger lebt als erwartet. Dieses Risiko ist durch das Kollektiv hedgbar (Individuelles Modell der Risikotheorie). Das „Small sample risk“ sinkt mit der Anzahl der Policen und ist somit diversifizierbar.

⁶siehe [OP02]

1. Die Sterblichkeit konzentriert sich am Maximum der Sterblichkeitskurve (ϖ), d. h. immer mehr Leute sterben später. Die Überlebensfunktion nähert sich somit einem Rechteck an \Rightarrow Rectangularisierung (siehe Abbildung 2)

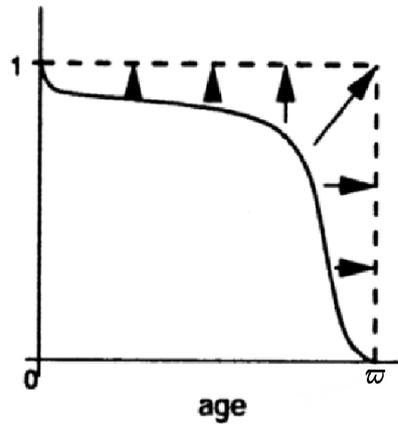


Abbildung 2: Überlebensfunktion: Rectangularization *Quelle:* [OP02]

2. Das Maximum der Sterblichkeitskurve (ϖ) verschiebt sich in Richtung höherer Alter, d. h. die Leute sterben immer später \Rightarrow Expansion (siehe Abbildung 3)

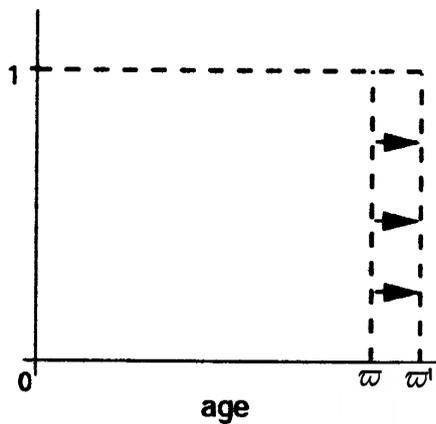


Abbildung 3: Überlebensfunktion: Expansion *Quelle:* [OP02]

Wie sich diese Trends in Zukunft entwickeln ist unbekannt. Kalkuliert das Versicherungsunternehmen mit deterministischen Werten – und damit mit einem festgelegten Trend – kann es zu Abweichungen zwischen der angenommenen Entwicklung und der tatsächlichen Entwicklung des Sterblichkeitstrends kommen. Sinkt die Sterblichkeit stärker als erwartet, spricht man bei Renten- und Erlebensfallversicherungen vom **Langlebigkeitsrisiko**. Je größer die Abweichung ist, desto größer ist das daraus resultierende Risiko.

Deterministische Werte sind somit nicht ausreichend. Allein eine stochastische Darstellung der Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit kann der gegebenen Unsicherheit Rechnung tragen. Aus diesem Grund werden wir in dieser Ausarbeitung die Sterblichkeit als stochastisch annehmen.

Für die stochastische Darstellung der Sterblichkeiten legen wir abhängig von Eintrittsalter x ⁷ den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^x, \mathcal{F}^x, \mathcal{P}^x)$ zugrunde⁸.

Die Modellierung des Wahrscheinlichkeitsraum folgt [Haa05]:

Die Grundmenge Ω^x enthält alle möglichen Restlebensdauern zum Eintrittsalter x . Für $\omega_x \in \Omega^x$ gilt:

$$\omega_x = t \quad \text{mit } t \in (0, \infty).$$

wobei t die restliche Lebensdauer kennzeichnet. Ist $\omega_x = t$ stirbt ein x -jähriger Versicherungsnehmer somit im Alter $x + t$.

$\mathcal{F}^x := \mathcal{B}(\Omega^x)$ ist die Borel- σ -Algebra auf Ω^x und als Filtration wird

$\mathcal{F}_t^x := \mathcal{B}((0, t])$ verwendet.

Die Sterbeverteilung sei $\mathcal{P}^x : \mathcal{F}^x \rightarrow [0, 1]$.

Die Größe $p_x(0, t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Individuum aus dem Bestand – mit Eintrittsalter x zum Zeitpunkt 0 – bis zum Zeitpunkt t überlebt.

$$p_x(0, t) := \mathcal{P}^x(\omega_x > t) \tag{5}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum aus dem Bestand – mit Eintrittsalter x zum Zeitpunkt 0 – bis zum Zeitpunkt t überlebt, unter der Bedingung, dass es zum Zeitpunkt $k \leq t$ noch lebt, wird mit $p_x(k, t)$ gekennzeichnet.

$$p_x(k, t) := \mathcal{P}^x(\omega_x > t \mid \omega_x > k) \quad \forall k < t \tag{6}$$

⁷Auf die Abhängigkeit vom betrachteten Produkt W wird in der folgenden theoretischen Aufführung aus Darstellungsgründen verzichtet. Um sie zu betrachten, muss x jeweils durch x, W ersetzt werden.

⁸siehe auch [Haa05], [MP01]

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist folgendes Theorem bekannt:

Theorem 2.1 Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_t \in \mathcal{F}$ mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_t) > 0$ $t \geq 2$. Dann gilt:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_t) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_t | A_1 \cap \dots \cap A_{t-1}) \quad (7)$$

Sei $A_k := \{\omega_x > k\}$, $k = 1 \dots t$. Damit gilt:

$$p_x(0, t) := p_x(0, 1) \cdot p_x(1, 2) \cdot \dots \cdot p_x(t-1, t) \quad (8)$$

Um stochastische Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, seien die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x(t-1, t)$ nun wiederum zufällig.

Für den weiteren Verlauf der Ausarbeitung wird unterstellt:

Annahme 4 Die Überlebenswahrscheinlichkeit entwickelt sich in Form eines Binomialbaums⁹ (siehe Abbildung 4).

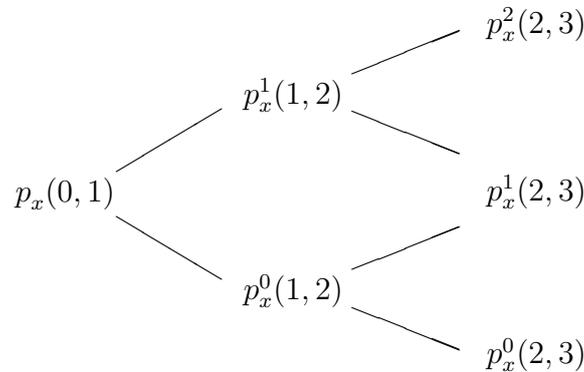


Abbildung 4: Entwicklung der Überlebenswahrscheinlichkeit in einem Binomialbaum für Versicherungen mit Laufzeit $n = 3$

Bei dem in Abbildung 4 dargestellten Binomialbaum handelt es sich um einen sogenannten rekombinierenden Binomialbaum, d. h. ein Knoten des Baumes ist über mehrere Pfade erreichbar.

⁹siehe [Hul02] S. 200 ff; [CRR79]

Der Wert eines Knotens ist nur davon abhängig, wieviel Aufwärtsbewegungen bis zu ihm insgesamt eingetreten sind¹⁰. u_t bezeichne die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bis zum Zeitpunkt t und $p_x^{u_t}(t, t+1)$ stellt die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t eines in $t = 0$ x -jährigen dar, unter der Annahme, dass u_t Aufwärtsbewegungen eingetreten sind. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für das erste Versicherungsjahr ist bekannt ($p_x(0, 1)$), für das zweite Jahr sind zwei mögliche Überlebenswahrscheinlichkeiten denkbar, im dritten Jahr drei usw. ... Allgemein gilt: im n ten Jahr existieren n mögliche Überlebenswahrscheinlichkeiten; es können 0 bis n Aufwärtsbewegungen eingetreten sein.

Die Entwicklung der Überlebenswahrscheinlichkeit in einem Binomialbaum sei wie folgt modelliert¹¹

I sei ein möglicher Pfad durch den Binomialbaum. Es gilt

$$I = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (9)$$

mit $u_\nu \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} u_{\nu+1} &= \begin{cases} u_\nu + 1 \\ u_\nu \end{cases} & \forall \nu = 0, \dots, n-2 \\ u_0 &= 0 \end{aligned}$$

\mathcal{I} sei die Menge aller möglichen Entwicklungen, $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_{2^{n-1}}\}$. Im Binomialbaum aus Abbildung 4 ist

$$I_1 := (u_0 = 0; u_1 = 0; u_2 = 0)$$

$$I_2 := (u_0 = 0; u_1 = 0; u_2 = 1)$$

$$I_3 := (u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 1)$$

$$I_4 := (u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 2)$$

$$\mathcal{I} := \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$$

Definieren wir

$$\mathcal{K}_n := \sigma(\{(u_0, \dots, u_{n-1})\}) = \tilde{\Sigma} \quad (10)$$

$$\mathcal{K}_t := \sigma(T_t(u_0, \dots, u_t)) \subset \mathcal{K}_{t+1} \quad (11)$$

¹⁰Vgl. [Hul02]

¹¹Nähere Informationen zur diskreten Finanzmathematik findet der interessierte Leser in Sandmann [San99].

mit

$$T_t(u_0, \dots, u_t) := \left\{ (u_0, \dots, u_{n-1}) : u_\nu \in \mathbb{N}_0, u_{\nu+1} = \begin{cases} u_\nu + 1 \\ u_\nu \end{cases} \quad \forall \nu > t \right\}. \quad (12)$$

Zusammen mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß \tilde{P}^x erhält man den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{I}, \tilde{\Sigma}, \tilde{P}^x)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}^x(U_{t+1} = u_t + 1 \mid u_t) &= \rho_x \\ \tilde{P}^x(U_{t+1} = u_t \mid u_t) &= 1 - \rho_x \end{aligned} \quad \forall t = 0, \dots, n-2 \quad (13)$$

mit

$$\tilde{P}^x(U_0 = 0) = 1 \quad (14)$$

und

$$\tilde{P}^x((U_0, \dots, U_{n-1}) = I_\nu) = \tilde{P}^x(I_\nu) = \rho_x^{u_{n-1}} (1 - \rho_x)^{n-1-u_{n-1}}. \quad (15)$$

Damit gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \tilde{P}^x((U_0, \dots, U_{n-1}) = I_\nu) = \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \tilde{P}^x(I_\nu) = 1 \quad (16)$$

Die n -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist bei gegebener Entwicklung I_ν definiert durch:

$$\begin{aligned} p_x^{I_\nu}(0, n) &= P^x(\omega_x > n \mid I_\nu) \\ p_x^{I_\nu}(t, n) &= P^x(\omega_x > n \mid \omega_x > t; I_\nu) \quad t < n \end{aligned}$$

Definiert man $A_i := \{\omega_x > i \mid I_\nu\} \in \mathcal{F}^x$ mit I_ν bekannt, erhält man mit Hilfe des Theorem 2.1:

$$p_x^{I_\nu}(0, n) = p_x^{I_\nu}(0, 1) \cdot p_x^{I_\nu}(1, 2) \cdot \dots \cdot p_x^{I_\nu}(n-1, n)$$

Da hier wiederum nur einjährige Überlebenswahrscheinlichkeiten betrachtet werden, braucht nicht jedes mal die komplette Folge der u_ν betrachtet zu werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} p_x^{I_\nu}(0, n) &= p_x^{u_0}(0, 1) \cdot p_x^{u_1}(1, 2) \cdot \dots \cdot p_x^{u_{n-1}}(n-1, n) \\ &= \prod_{t=0}^{n-1} p_x^{u_t}(t, t+1) \end{aligned} \quad (17)$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_x(0, t) &:= E_{\tilde{p}_x}(p_x(0, t)) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2^n-1} \tilde{P}^x(I_\nu) \cdot p_x^{I_\nu}(0, t) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2^n-1} \tilde{P}^x(I_\nu) \prod_{k=0}^{t-1} p_x^{I_\nu}(k, k+1) \\
\tilde{p}_x(k, t) &:= E_{\tilde{p}_x}(p_x(k, t) \mid \mathcal{K}_k) \\
&= \sum_{\nu=1}^{2^n-1} \tilde{P}^x(I_\nu \mid \mathcal{K}_k) \prod_{i=k}^{t-1} p_x^{I_\nu}(i, i+1)
\end{aligned} \tag{18}$$

Bei $\tilde{p}_x(k, t)$ handelt es sich um eine „Forward Rate“, da gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_x(0, t) &= E_{\tilde{p}_x}(p_x(0, t)) \\
&= E_{\tilde{p}_x}(p_x(0, k) \cdot p_x(k, t)) \\
&= \tilde{p}_x(0, k) E_{\tilde{p}_x}(E_{\tilde{p}_x}(p_x(k, t) \mid \mathcal{K}_k)) \\
&= \tilde{p}_x(0, k) E_{\tilde{p}_x}[\tilde{p}_x(k, t)]
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_x(k, t) &= E_{\tilde{p}_x}(p_x(k, t) \mid \mathcal{K}_k) \\
&= E_{\tilde{p}_x}(p_x(k, k+1) \cdot p_x(k+1, t) \mid \mathcal{K}_k) \\
&= \tilde{p}_x(k, k+1) E_{\tilde{p}_x}(E_{\tilde{p}_x}(p_x(k+1, t) \mid \mathcal{K}_{k+1}) \mid \mathcal{K}_k) \\
&= \tilde{p}_x(k, k+1) E_{\tilde{p}_x}[\tilde{p}_x(k+1, t) \mid \mathcal{K}_k] \quad \forall k < t
\end{aligned} \tag{20}$$

Analog zur Überlebenswahrscheinlichkeit modelliert man die Zinsentwicklung ebenfalls durch ein Binomialmodell. Der Zinssatz von Zeitpunkt t für die Laufzeit 1 wird dargestellt durch

$$r(t, t+1).$$

Annahme 5 *Der Zins entwickelt sich in Form eines Binomialbaums (siehe Abbildung 5).*

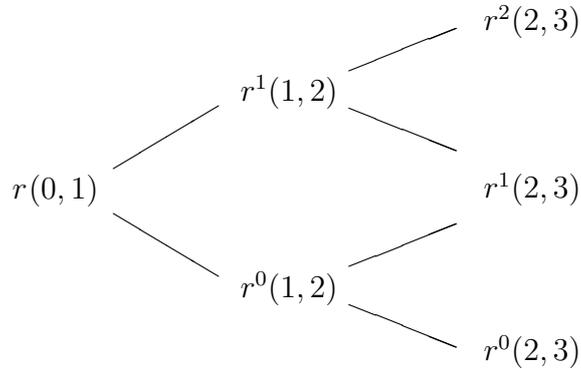


Abbildung 5: Entwicklung des Zinses in einem Binomialbaum; Laufzeit $n = 3$

Der Wahrscheinlichkeitsraum ist gegeben durch:

$$(\mathcal{J}, \hat{\Sigma}, \hat{P}) \quad (21)$$

wobei $\mathcal{J} := \{J_l : l = 1, \dots, 2^{n-1}\}$, mit $J_l := \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$
 $\hat{\Sigma} := \sigma(\{(u_0, \dots, u_{n-1})\})$.

$\hat{P}(J_l)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für die Entwicklung J_l an. Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{P}(U_{t+1} = u_t + 1 \mid u_t) &= \varrho \\ \hat{P}(U_{t+1} = u_t \mid u_t) &= 1 - \varrho \end{aligned} \quad \forall t = 0, \dots, n-2 \quad (22)$$

mit

$$\hat{P}(U_0 = 0) = 1 \quad (23)$$

Damit gilt:

$$\hat{P}(J_l) = \varrho^{u_{n-1}} (1 - \varrho)^{n-1-u_{n-1}} \quad (24)$$

$$\sum_{l=1}^n \hat{P}(J_l) = 1 \quad (25)$$

Der Zins für die Laufzeit n unter Annahme der Entwicklung J_l sei wie folgt definiert:

$$r^{J_l}(t, t+n) = \prod_{k=0}^{n-1} [1 + r^{J_l}(t+k, t+k+1)] - 1 \quad (26)$$

Betrachtet man Zins und Sterblichkeit zusammen, müssen die beiden Binomialbäume kombiniert werden. Zu einem gegebenen Zeitpunkt existieren somit jeweils 4 mögliche Entwicklungen für das nächste Jahr (siehe Abbildung 6).

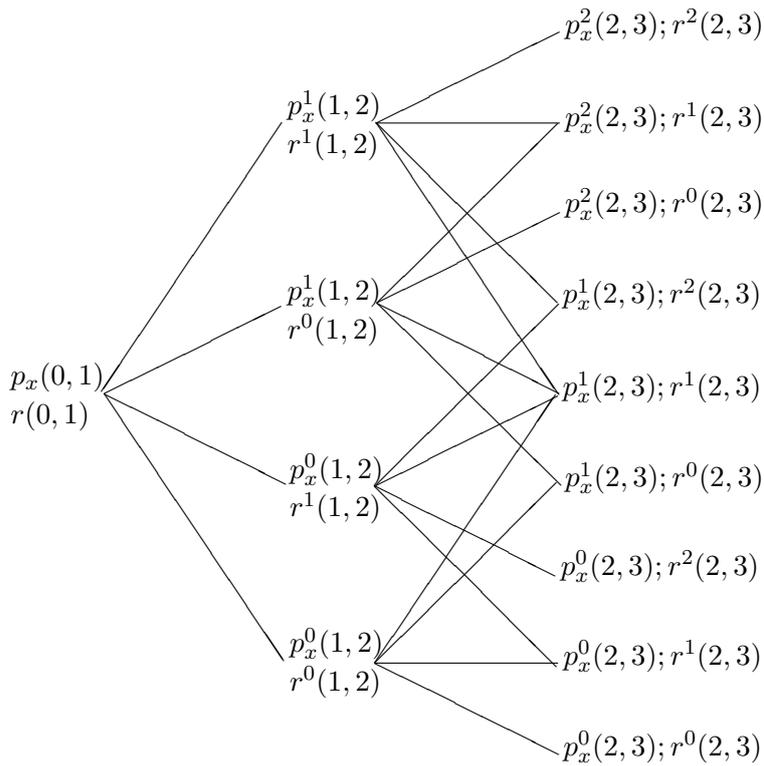


Abbildung 6: Quattuornomialbaum für Zins und Sterblichkeit; Laufzeit $n = 3$

Die erwarteten Barwerte der einzelnen Produkte ergeben sich somit als:

$$\begin{aligned} \Pi(RL_n) &= VS \cdot \sum_{l=1}^{2^{n-1}} \hat{P}(J_l) \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \tilde{P}^x(I_\nu) \\ &\cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1 - p_x^{I_\nu}(t, t+1)}{1 + r^{J_l}(t, t+1)} \prod_{j=0}^{t-1} \frac{p_x^{I_\nu}(j, j+1)}{1 + r^{J_l}(j, j+1)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Pi(R_n) &= VS \cdot \sum_{l=1}^{2^{n-1}} \hat{P}(J_l) \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \tilde{P}^x(I_\nu) \\ &\cdot \sum_{j=1}^n \prod_{t=0}^{j-1} p_x^{I_\nu}(t, t+1) \frac{1}{1 + r^{J_l}(t, t+1)} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Pi(T_n) = VS \cdot \sum_{l=1}^{2^{n-1}} \hat{P}(J_l) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + r^{J_l}(i, i+1)} \quad (29)$$

3 Sterblichkeitsmodell

Bisher wurde als Verteilungsfunktion der Überlebenswahrscheinlichkeit ein genereller Binomialbaum unterstellt. Wenden wir uns nun einem konkreten Modell für die Entwicklung der Überlebenswahrscheinlichkeiten zu.

Als Modell wird das in der Literatur schon recht früh vorgestellte Modell von Milevsky¹² verwendet. Diese Modell ist rein beispielhaft zu verstehen und kann jederzeit durch ein anderes Modell, das als geeigneter angesehen wird, ersetzt werden.

Zuerst betrachten wir den gewählten stochastischen Prozess etwas genauer und wenden uns anschließend dessen Darstellung in einem Binomialbaum zu.

3.1 Der „Mean Reverting Brownian Gompertz Prozess“

Milevsky unterstellt, dass zwischen der Überlebenswahrscheinlichkeit und der Hazard Rate (Sterberate) h_t folgender Zusammenhang besteht:

$$p_x(t, T) := e^{-\int_t^T h_{x+u} du} \quad (30)$$

Die Hazard Rate sei in unserem Modell abhängig vom Alter x der betrachteten Person, von der Art des Versicherungsprodukts – gekennzeichnet durch

¹²siehe [MP01]

W – und der abgelaufenen Dauer t . Modelliert wird $h_{x,W,t}$ durch einen „Mean Reverting Brownian Gompertz Prozess“ (MRBG):

$$h_{x,W,t} = h_{x,W,0} \cdot e^{g_{x,W} \cdot t + \sigma_{x,W} \cdot Y_t} \quad (31)$$

mit

$$g_{x,W}, \sigma_{x,W}, h_{x,W,0} > 0.$$

Wie aus der Formel ersichtlich wird, wächst der „Mean Reverting Brownian Gompertz Prozess“ exponential und ist immer größer als Null.

Die Zufallskomponente ergibt sich durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess Y_t :

$$dY_t = -bY_t dt + dB_t \quad (32)$$

mit dem Wiener Prozess B_t , $b \geq 0$, und $Y_0 = 0$.

Die Variable b legt dabei die Mean-Reverting Eigenschaft des Prozesses fest. Dieser Prozess sei unabhängig vom Alter x und dem betrachteten Versicherungsprodukt W . Wir unterstellen dazu, dass die generelle Entwicklung der Sterblichkeit für die gesamte Bevölkerung identisch verlaufe und nur die Intensität der Entwicklung für verschiedene Personengruppen unterschiedlich stark ausfallen kann (abgebildet durch $\sigma_{x,W}$).

Die stochastische Differentialgleichung von Y_t besitzt die Lösung:

$$Y_t = \int_0^t e^{-b(t-u)} dB_u \quad (33)$$

mit Erwartungswert Null (stochastisches Integral):

$$E[Y_t] = 0 \quad (34)$$

und Varianz (durch Ito Isometry):

$$Var[Y_t] = \frac{1 - e^{-2bt}}{2b} \quad (35)$$

Die Log-Sterberate $\ln(h_{x,W,t})$ ist dadurch normalverteilt mit Erwartungswert

$$g_{x,W} \cdot t + \ln(h_{x,W,0})$$

und Varianz

$$\sigma_{x,W}^2 \cdot \frac{1 - e^{-2bt}}{2b}$$

Da $\ln(h_{x,W,t})$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $g_{x,W} \cdot t + \ln(h_{x,W,0})$ und Varianz $\sigma_{x,W}^2 \cdot \frac{1-e^{-2bt}}{2b}$, ist $h_{x,W,t}$ lognormalverteilt mit Erwartungswert

$$E(h_{x,W,t}) = h_{x,W,0} \cdot e^{g_{x,W} \cdot t + \frac{\sigma_{x,W}^2}{2} \left(\frac{1-e^{-2bt}}{2b} \right)} \quad (36)$$

Die Momente von $h_{x,W,t}$ ergeben sich aus

$$E[h_{x,W,t}^n] = h_{x,W,0}^n \cdot e^{n \cdot g_{x,W} \cdot t} \cdot e^{\frac{(n\sigma_{x,W})^2}{2} \left(\frac{1-e^{-2bt}}{2b} \right)}$$

Setzt man $b = 0$ ist die erwartete Sterberate die standardmäßige Gompertz-Funktion

$$E(h_{x,W,t}) = h_{x,W,0} \cdot e^{(g_{x,W} + \frac{\sigma_{x,W}^2}{2})t}$$

3.2 Diskretisierung des Prozesses von Milevsky

Im nächsten Schritt wird der oben dargestellten Prozess für die Entwicklung der Sterberate diskretisiert. Es ist ein Binomialbaum gesucht, der gegen den vorgegebenen Prozess konvergiert. Hierzu wird auf die Artikel von Nelson und Ramaswamy [NR90] und Hahn und Dyer [HD04] zurückgegriffen.

Gesucht wird eine Sequenz eines Binomial-Prozesses, die im Intervall $[0, T]$ gegen den von Milevsky vorgestellten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$dY_t = -bY_t dt + dB_t$$

konvergiert.

Dazu wird das Intervall $[0, T]$ in l gleiche Teile der Länge

$$\eta := \frac{T}{l} \quad (37)$$

aufgeteilt. Für jedes η wird ein stochastischer Prozess $\{Y_t\}$ auf dem Intervall $[0, T]$ betrachtet, der zwischen den Knoten konstant ist und an den Knoten sich mit der Wahrscheinlichkeit q_η (bzw. $1 - q_\eta$) nach oben (bzw. nach unten) entwickelt. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess wird nach Nelson und Ramaswamy durch den wie folgt aufgebauten Binomialbaum approximiert:

$$Y_\eta^- := Y - \sqrt{\eta} \quad (38)$$

$$Y_\eta^+ := Y + \sqrt{\eta} \quad (39)$$

$$q_\eta := \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{\eta} \frac{bY}{2} & \text{wenn } 0 < \frac{1}{2} - \sqrt{\eta} \frac{bY}{2} < 1 \\ 0 & \text{wenn } \frac{1}{2} - \sqrt{\eta} \frac{bY}{2} \leq 0 \\ 1 & \text{wenn } 1 \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\eta} \frac{bY}{2} \end{cases} \quad (40)$$

wobei $+\sqrt{\eta}$ bzw. $-\sqrt{\eta}$ die Höhe des Sprungs angibt.

Zur Bestimmung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozess aus (32) benötigt man somit das Zeitintervall $[0, T]$, die Aufteilung dieses Intervalls in η -Teile, einen Startwert $Y_\eta(0)$ und den Parameter b .

Die Parameter für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess und dessen Diskretisierung seien für die weiteren Betrachtungen altersunabhängig wie folgt gewählt¹³:

$$\begin{aligned} b &= 0,5 \\ Y_\eta(0) &= 0 \end{aligned}$$

Als Zeitintervall wird hier eine Dauer von 5 Jahren ($T = 5$) gewählt, in der sich die Überlebenswahrscheinlichkeit jährlich ändern kann ($\Rightarrow \eta = 1$). Durch die Formeln (37) - (39) ergibt sich damit folgender Baum:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & -2 & & -2 & \\
 & -1 & & -1 & & -1 \\
 Y_5(t) = & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & 2 & & 2 & \\
 \hline
 \mathbf{t} = & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5}
 \end{array} \tag{41}$$

Damit $h_{x,W,t}$ aus (31) ermittelt werden kann, fehlen nun noch die Größen $\sigma_{x,W}$, $g_{x,W}$ und $h_{x,W,0}$. Die Hazard Rate $h_{x,W,0}$ bestimmt sich aufgrund (30) durch die aktuelle Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$h_{x,W,0} = -\ln(p_{x,W}(0, 1)) \tag{42}$$

3.2.1 Sterblichkeitsentwicklung eines 70-jährigen Mannes

Der Hazard Rate einer Rentenversicherung (R) $h_{70,R,t}$ ergibt sich aus (31) und (41) mit den von Milevsky in [MP01] für dieses Alter vorgegeben Parametern¹³

$$\begin{aligned} h_{70,R,0} &= 0,015 \\ \sigma_{70,R} &= 0,2 \\ g_{70,R} &= 0,1 \end{aligned}$$

¹³Die Parameter sind aus einem Beispiel von Milevsky [MP01] entnommen. Sie beruhen nicht auf empirischen Daten.

als:

		0,01228096		0,015	
	0,01357256		0,01657756		0,02024788
0,015		0,01832104		0,02237737	
	0,02024788		0,02473082		0,03020629
		0,02733178		0,03338311	
t = 0	1	2	3	4	5

Mit Hilfe der Formel (30) resultieren daraus folgende Erlebenswahrscheinlichkeiten $p_{70,R}(t, t + 1)$:

		0,98779414		0,98511194	
	0,98651913		0,98355909		0,97995573
0,98511194		0,98184577		0,97787115	
	0,97995573		0,97557248		0,97024536(43)
		0,97303835		0,96716795	
t = 0	1	2	3	4	5

3.2.2 Sterblichkeitsentwicklung eines 31-jährigen Mannes

Als Grundlage des hier konstruierten Sterblichkeitsverlauf dient die DAV-Sterbetafel 1994 T Männer.

Für eine Risikoversicherung (RL) sei $h_{31,RL,0}$ so gewählt, dass die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines 31-jährigen mit der der DAV-Sterbetafel 1994 T Männer übereinstimmt:

$$p_{31,RL}(0, 1) = 0,998524$$

Aufgrund Formel (42) ergibt sich $h_{31,RL,0}$ somit als

$$\begin{aligned} h_{31,RL,0} &= -\ln(p_{31,RL}(0, 1)) \\ &= 0,00147709 \end{aligned}$$

Es wird unterstellt, dass der Trend $g_{31,RL}$ und $\sigma_{31,RL}$ kleiner sind als bei einem 70-jährigen. Sie wurden so gewählt, dass der Erwartungswert der Hazard Rate $h_{31,RL,t}$ (36) sich den Sterblichkeiten der DAV-Sterbetafel 1994 T Männer annähert.

$$\begin{aligned}\sigma_{31,RL} &= 0,1 \\ g_{31,RL} &= 0,04\end{aligned}$$

Die Hazard Rate ergibt sich damit als:

		0,00131006		0,00141917	
	0,00139107		0,00150693		0,00163244
0,00147709		0,00160011		0,00173338	
	0,00169906		0,00184057		0,00199386
		0,00195438		0,00211716	
t = 0	1	2	3	4	5

Berechnet man $p_{31,RL}(t, t+1)$ mit Hilfe der Formel (30) erhält man folgenden Binomialbaum:

		0,9986908		0,99858183	
	0,9986099		0,99849421		0,99836889
0,998524		0,99840117		0,99826812	
	0,99830238		0,99816112		0,99800812(44)
		0,99804753		0,99788508	
t = 0	1	2	3	4	5

4 Zinsmodell

Wenden wir uns nun der Zinsentwicklung zu. Als zugrunde liegendes Modell wird das Black/Derman/Toy-Modell verwendet¹⁴.

Die Grundidee des Black/Derman/Toy-Modells ist es, mit Hilfe der aktuellen Zinsstruktur und ihrer Volatilität einen Baum von möglichen zukünftigen „Short Rates“¹⁵ zu erzeugen. Dazu werden folgende Voraussetzungen benötigt:

- Die „Short Rates“ entwickeln sich in einem Binomialgitter.

¹⁴Siehe [BDT90], [WB98], [Boh02]

¹⁵Zinssatz für ein Jahr $r(t, t+1)$.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt t zum u -ten mal eine Aufwärtsbewegung im Gitter stattfindet ist

$$\hat{q}^u(t) := \frac{1}{2} \quad \forall u, t \quad (45)$$

wobei u die Anzahl der Entwicklungen nach oben angibt ($u \leq t$).

- Die „Short Rates“ sind lognormal-verteilt.

Des Weitern unterstellen Black/Derman/Toy:

$$\begin{aligned} r^{u+1}(t, t+1) &= r^u(t, t+1) \cdot e^{2 \cdot \sigma(t)} \\ &= r^0(t, t+1) \cdot e^{2(u+1)\sigma(t)} \quad \forall u, t \end{aligned} \quad (46)$$

mit u : Anzahl der Entwicklungen nach oben ($u \leq t$),

$\sigma(t)$: Volatilität des Logarithmus der Short Rate zum Zeitpunkt $t - 1$.

Für die Entwicklung des Binomialbaums benötigt man somit die Zins- und Volatilitätsstruktur. Die Zinsstrukturkurve¹⁶ wird regelmäßig von der Bundesbank veröffentlicht. Zur Ermittlung der Volatilitätsstruktur verwenden wir den von Bohl in [Boh02] vorgestellten exponentialen Ansatz mit den dort ermittelten Parametern:

$$\sigma(t) := \nu_1 e^{-\nu_2(t)} \quad (47)$$

mit

$$\nu_1 = 0,1877$$

$$\nu_2 = 0,0074$$

	Zinssatz bei Restlaufzeiten von ... Jahren in % p.a.									
Datum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31.12.2004	2,28	2,53	2,76	2,96	3,14	3,3	3,44	3,57	3,69	3,79

Quelle: www.bundesbank.de

Tabelle 1: Zinsstrukturkurve vom 31.12.2004

Mit Hilfe der Werte aus Tabelle 1 und Tabelle 2 erhält man durch die Gleichung (46) und indem man $r^0(t, t+1)$ an die aktuelle Zinsstruktur anpasst¹⁷, die in Tabelle 3 beispielhaft für 5 Jahre dargestellte Zinsentwicklung.

¹⁶Sie enthält die Werte $r(0, t)$ und bestimmt sich aus den Preisen der Zero-Coupon Bonds.

¹⁷Verfahren siehe [BDT90], [WB98]

Volatilitätsstruktur						
t	1	2	3	4	5	...
$\sigma_s(t)$	15,4751%	15,361%	15,2477%	15,1353%	15,0237%	...
t	...	6	7	8	9	10
$\sigma_s(t)$...	14,9129%	14,803%	14,6939%	14,5855%	14,478%

Tabelle 2: Volatilitätsstruktur

5 Varianzzerlegung

Wenden wir uns nun dem Problem der Messung der in einem Versicherungsbestand enthaltenen Risiken zu. Dazu wird das Prinzip der Varianzzerlegung verwendet, das u.a. auch in den Artikeln von Bruno, Camerine und Tomasetti [BCT00], Parker [Par97] und Coppola, Di Lorenzo und Sibillo [CDS02] zum Einsatz kommt. Jedoch verwenden wir diese Methode erstmalig um die Wirkungsweise des natürlichen Hedgings aufzuzeigen.

Im ersten Abschnitt wird das allgemeine Modell der Varianzzerlegung erläutert, welches dann im zweiten Abschnitt anhand eines Beispiels zur Anwendung kommt.

5.1 Allgemeines Modell

Betrachten wird ein Portfolio, welches sich aus c verschiedenen Risiken zusammensetzt. Jedes Risiko wird durch den Index $v = 1, \dots, c$ gekennzeichnet. Das Vorhersage- bzw. Investitionsrisiko soll anhand des diskontierten Cash-Flows gemessen werden. Da wir uns in diesem Artikel auf Einmalbeitragsversicherungen ohne Gewinnbeteiligung beschränken, setzt sich der Cash-Flow nur aus den Auszahlungen der einzelnen Verträge zusammen.

Die stochastische Auszahlung des Risikos v zum Zeitpunkt t wird durch

$$A_{x_v; W_v}(t)$$

beschrieben, wobei

x_v das Alter des Risikos v darstellt und

W_v die Art des Vertrages; $W_v \in \{RL_{n_v}, R_{n_v}, T_{n_v}\}$;

n_v Vertragslaufzeit des Risiko v .

Unter der Annahme $c = 1$ ist die Nummerierung der Risiken nicht notwendig und man erhält die in (1) definierte Auszahlungsfunktion.

					0.0832533
				0.0681543	
			0.0546088		0.0616463
		0.0428741		0.0503535	
	0.0320955		0.0402553		0.0456471
0.0227999		0.0315334		0.037202	
	0.0235521		0.0296745		0.0338002
		0.0231925		0.0274854	
			0.0218748		0.0250279
				0.0203067	
					0.0185323

t = 0	1	2	3	4	5
-------	---	---	---	---	---

Tabelle 3: Zinsentwicklung bestimmt nach Black/Derman/Toy für 5 Jahre

Der diskrete Diskontfaktor vom Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt 0 sei

$$\frac{1}{\mathcal{R}(t)}$$

Durch die Annahmen 1 und 2 sind insbesondere folgende 2 Bedingungen erfüllt:

1. Die Zufallsvariablen $\frac{1}{\mathcal{R}(t)}$ sind im Allgemeinen nicht unabhängig.
2. Die Zufallsvariablen $A_{x_v;W_v}(t)$ und $\frac{1}{\mathcal{R}(t)}$ sind unabhängig $\forall x_v, W_v, t$.

Die diskontierte Zahlung des Vertrags v vom Zeitpunkt t ist gegeben durch:

$$PF_v^{(t)} := A_{x_v;W_v}(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \quad (48)$$

Für das gesamte Portfolio erhält man die zufällige Zahlung zum Zeitpunkt t als:

$$A(t) := \sum_{v=1}^c A_{x_v;W_v}(t) \quad (49)$$

Diskontiert man (49), ergibt sich der Barwert der zufälligen Zahlungen zum Zeitpunkt t :

$$PF^{(t)} := \sum_{v=1}^c A_{x_v; W_v}(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \quad (50)$$

$$= A(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \quad (51)$$

Die diskontierte zufällige Zahlung – d.h. der diskontierte Cash-Flow – des gesamten Portfolios für den Zeitraum $(0; n]$ erhält man durch:

$$PF := \sum_{t=1}^n A(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)} \quad (52)$$

wobei n das Maximum über alle Vertragslaufzeiten n_v sei.

$$n := \max(n_v; v = 1, \dots, c)$$

Der Erwartungswert und die Varianz des Cash-Flows des Portfolios berechnen sich als:

$$\begin{aligned} E(PF) &= E\left(\sum_{t=1}^n A(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right) \\ &\stackrel{\text{Annahme 2}}{=} \sum_{t=1}^n E(A(t)) * E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} V(PF) &= E(PF^2) - E^2(PF) \\ &= E\left(\left(\sum_{t=1}^n A(t) * \frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right)^2\right) - E^2(PF) \\ &= \sum_{t_1=1}^n \sum_{t_2=1}^n \left[E\left(A(t_1)A(t_2)\right) E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)} \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right) \right] \\ &\quad - E^2(PF) \end{aligned} \quad (54)$$

Der diskontierte Cash-Flow PF ist – wie in (52) zu sehen – abhängig von den Auszahlungen und der Zinsentwicklung. Die Auszahlungen sind wiederum abhängig von der Sterblichkeitsentwicklung (siehe Abschnitt 2). Diese beiden Faktoren beeinflussen somit die Varianz des Portfolios. Unser Ziel ist es Maße für die Varianz des Portfolios aufgrund

- der Sterblichkeitsentwicklung
- und der Zinsentwicklung

zu finden.

Die mögliche Zinsentwicklung sei durch die Folge der ZV $\mathcal{R}(t)$ ($\{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}$) gegeben.

Die Varianz des Portfolio–Cash–Flows kann durch die Varianzzerlegung in zwei Teile zerlegt werden¹⁸.

Theorem 5.1 (Varianzzerlegung)

$$V(PF) = E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] + V[E(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] \quad (55)$$

Beweis 5.1

$$\begin{aligned} E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] &= E(E[PF^2 | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}] - E^2(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})) \\ &= E(PF^2) - E(E^2(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(E[PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}]) &= E(E^2[PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}] - E^2(E[PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}])) \\ &= E(E^2[PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}]) - E^2(PF) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] + E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] & \\ = E(PF^2) - E(E^2(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})) + E(E^2[PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty}]) - E^2(PF) & \\ = E(PF^2) - E^2(PF) & \\ = V(PF) & \end{aligned}$$

√□

Die Größe $V[E(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]$ lässt sich als Maß für das Zinsrisiko, in Zukunft **Investitionsrisiko** genannt, verwenden¹⁹.

Zuerst wird der Erwartungswert über PF unter der Bedingung, dass die Zinsentwicklung bekannt ist, gebildet und anschließend die Varianz diese Erwartungswerte je nach Zinsentwicklung bestimmt.

$E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]$ kann als ein Maß für das Sterblichkeitsrisiko angesehen werden²⁰. Hier wird zuerst die Varianz der PF unter der Bedingung,

¹⁸Siehe auch [BCT00], [Par97] und [CDS02]

¹⁹Siehe auch [BCT00], [Par97] und [CDS02]

²⁰Siehe auch [BCT00], [Par97] und [CDS02]

dass man die Zinsentwicklung kennt, gebildet und anschließend der Erwartungswert über die Varianzen je nach Zinsentwicklung bestimmt.

Das Sterblichkeitsrisiko wiederum setzt sich aus zwei Faktoren zusammen, zum einem aus dem Vorhersagerisiko – dem Risiko, dass eine generelle Abweichung der Sterblichkeitsentwicklung von der zugrunde gelegten existiert – und zum anderem aus dem Versicherungsrisiko – das Risiko, dass in Einzelfällen die tatsächliche Sterblichkeit vom Erwartungswert abweicht.

Da nach Annahme 3 ein Versicherungsrisiko nicht existiert, wird im Weiteren $E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]$ als Maß für das **Vorhersagerisiko** verwendet.

Als Maß für die Varianz des Portfolios aufgrund der Sterblichkeitsentwicklung dient in dieser Ausarbeitung somit $\mathbf{E}[V(\mathbf{PF} | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]$.

Die Varianz aufgrund der Zinsentwicklung wird mit $\mathbf{V}[\mathbf{E}(\mathbf{PF} | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]$ gemessen.

Ersetzt man PF durch die Definition 52, lässt sich das Vorhersagerisiko berechnen als:

$$E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] = \sum_{t=1}^n V(A(t))E\left(\frac{1}{\mathcal{R}^2(t)}\right) + 2 \sum_{t_1=1}^{n-1} \sum_{t_2=t_1+1}^n cov[A(t_1), A(t_2)]E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)} \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right) \quad (56)$$

Analog erhält man für das Investmentrisiko folgende Formel:

$$V[E(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] = \sum_{t=1}^n (E[A(t)])^2 * V\left[\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right] + 2 \sum_{t_1=1}^{n-1} \sum_{t_2=t_1+1}^n E[A(t_1)]E[A(t_2)]cov\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)}, \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right) \quad (57)$$

Mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Formeln kann nun der abschließende Schritt – die Messung des Vorhersagerisikos eines gegebenen Bestandes sowie die Ermittlung des Portfolios, welches das kleinste Vorhersagerisiko erzeugt – vorgenommen werden.

Wie die Formeln dabei zum Einsatz kommen und wie damit die eingangs gestellten Fragen analysiert werden können, zeigt das folgende Beispiel anhand eines fiktiven Portfolios.

5.2 Beispiel

Als erstes trennen wir den Versicherungsbestand nach Risikolebensversicherungen, Renten und den übrigen im Bestand befindlichen Produkten auf. Der Bestand des hier betrachteten Versicherungsunternehmens bestehe aus Risikolebensversicherungen, Renten und Termfixversicherungen.

Diese Gruppen teilen wir wiederum in Altersklassen auf. Innerhalb der Altersklassen wird dann noch nach Versicherungssumme VS und Versicherungsdauer gruppiert.

Eine Altersklasse kann aus einem einzigen Alter bestehen, oder eine Zusammenfassung mehrerer Alter sein. Sind in einer Altersklasse mehrere Alter enthalten muss ein repräsentatives Alter ermittelt werden, dessen Sterblichkeitsentwicklung der Klasse zugrunde gelegt wird.

Für das hier vorgestellte Beispiel wird angenommen, dass alle Versicherungsnehmer einer Gruppe gleich alt sind und alle Verträge einer Gruppe sich auf die selbe VS beziehen. Die einzige benötigte Untergruppe sei die Aufteilung nach der Versicherungsdauer. Der Bestand lasse sich in folgende 9 gleichartige Gruppen unterteilen:

Gruppe	Beschreibung
$RL3$	3-jährige Risikolebensversicherungen
$RL2$	2-jährige Risikolebensversicherungen
$RL1$	1-jährige Risikolebensversicherungen
$R3$	3-jährige Rentenversicherungen
$R2$	2-jährige Rentenversicherungen
$R1$	1-jährige Rentenversicherungen
$T3$	3-jährige Termfixversicherungen
$T2$	2-jährige Termfixversicherungen
$T1$	1-jährige Termfixversicherungen

Tabelle 4: Portfolioaufteilung

Das Portfolio des Unternehmens hat damit ein Laufzeit von $n = 3$ Jahren.

In Gruppe $RL3$, $RL2$ und $RL1$ gelte $x = 31$ (Sterblichkeitsentwicklung siehe (44)) und für Gruppe $R3$, $R2$ und $R1$ gelte $x = 70$ (Sterblichkeitsentwicklung siehe (43)).

Die Versicherungssumme und Anzahl der Versicherungen je Gruppe sei wie in Tabelle 5 dargestellt.

Gruppe	Alter	Versicherungssumme (VS) in Geldeinheiten (GE)	Anzahl der Verträge
$RL3$	31	100.000, –	200.000
$RL2$	31	100.000, –	80.000
$RL1$	31	100.000, –	50.000
$R3$	70	3.000, –	300.000
$R2$	70	3.000, –	250.000
$R1$	70	3.000, –	100.000
$T3$	-	50.000, –	200.000
$T2$	-	50.000, –	150.000
$T1$	-	50.000, –	100.000

Tabelle 5: Versicherungssumme und Anzahl der Versicherungen

Das Langlebigkeitsrisiko dieses Versicherers läßt sich nicht alleine durch ein größeres Renten-Portfolio beseitigen. Nehmen wir an, das Versicherungsunternehmen verkaufe nur Renten²¹. In diesem Fall steigt das Vorhersagerisiko absolut gesehen an – wie die Abbildung 7 zeigt. Auch relativ (Abbildung 8) läßt sich das Vorhersagerisiko nicht durch ein größeres Renten-Portfolio auf Null senken, sondern steigt bei einer festen Anzahl 2-jähriger Rentenversicherungen ebenfalls an. Für relative Betrachtungen verwenden wir dabei den quadratischen Variationkoeffizient, d.h. das Risikomaß wird durch den Erwartungswert des Portfolios im Quadrat geteilt²².

²¹ $T1 = T2 = T3 = RL1 = RL2 = RL3 = 0$, $R1 = 100.000$, $R2, R3$ variabel.

²²Für die Abbildung 8 bedeutet dies:

$$\frac{E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})]}{E^2(PF)} \quad (58)$$

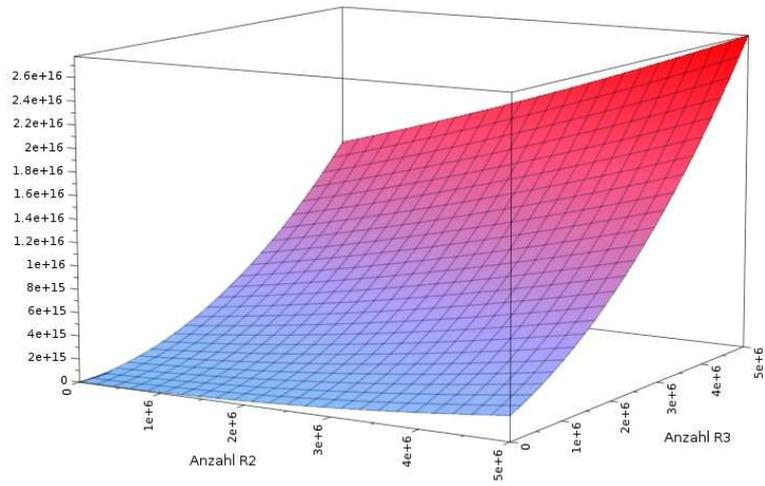


Abbildung 7: Vorhersagerisiko eines reinen Rentenportfolios

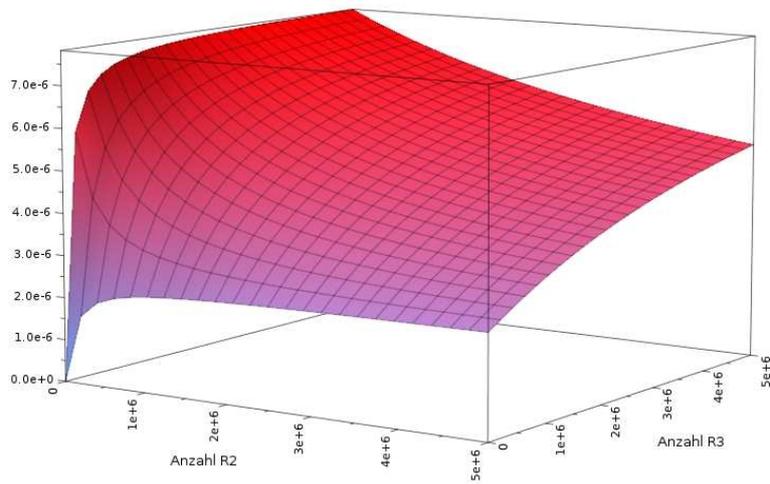


Abbildung 8: Quadratischer Variationskoeffizient des Vorhersagerisiko eines reinen Rentenportfolios

Welches Risiko ist in dem gesamten Portfolio aus Tabelle 5 enthalten, wenn die Zinsentwicklung gemäß Tabelle 3 unterstellt wird?

Zur Berechnung des Vorhersagerisikos nach der Formeln (56) bzw. des Investitionsrisikos nach der Formeln (57) werden die Größen

- $E(A(t))$
- $E(A(t)^2)$
- $E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right)$
- $E\left(\frac{1}{\mathcal{R}^2(t)}\right)$
- $cov[A(t_1), A(t_2)]$
- $E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)} \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right)$ und
- $cov\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)}, \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right)$

mit $t = 1, \dots, n$; $t_1 = 1, \dots, n-1$; $t_2 = t_1 + 1, \dots, n$ benötigt.

Für dieses Beispiel gilt^{23 24}:

t	1	2	3
$E(A(t))$	$6,970 \cdot 10^9$	$9,141 \cdot 10^9$	$10,888 \cdot 10^9$
$E(A(t)^2)$	$48,576 \cdot 10^{18}$	$83,564 \cdot 10^{18}$	$118,541 \cdot 10^{18}$
$E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t)}\right)$	0,9777083474	0,9512576334	0,9215687617
$E\left(\frac{1}{\mathcal{R}^2(t)}\right)$	0,9559136126	0,9049067152	0,8493760816

$t_1; t_2$	1; 2	1; 3	2; 3
$cov[A(t_1), A(t_2)]$	0	0	$296,659177 \cdot 10^{10}$
$E\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)} \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right)$	0,9300525	0,9010255	0,8766818
$cov\left(\frac{1}{\mathcal{R}(t_1)}, \frac{1}{\mathcal{R}(t_2)}\right)$	0	0	$3,2483554 \cdot 10^{-5}$

²³Die Werte sind aus Darstellungsgründen gerundet. Die Berechnungen erfolgen jedoch mit ungerundeten Werten.

²⁴Für die Berechnungen wurde das Mathematikprogramm MuPAD der Firma SciFace GmbH verwendet.

Im beschriebenen Bestand lassen sich damit Risiken in folgender Höhe feststellen:

Vorhersagerisiko	$13,20 \cdot 10^{12}$
Investitionsrisiko	$18.096,93 \cdot 10^{12}$

Auf welches Vorhersagerisiko kann dieser Bestand verringert werden, indem die Anzahl der Risikolebensversicherungen mit $VS = 100.000$, – variiert wird?

Im ersten Jahr ist sowohl die Sterblichkeit wie auch der Zins bekannt. Desweiteren gilt $cov(A(1), A(t)) = 0$; $t = 2, 3$. Die Anzahl der 1-jährigen Risikolebensversicherungen ist für das Minimum des Vorhersage- und Investitionsrisiko somit irrelevant, $RL1 = 50.000$ kann beibehalten werden.

Betrachten wir nun das Vorhersagerisikos des gegebenen Bestandes nach Formel (56). Es gilt:

$$\begin{aligned}
 E[V(PF | \{\mathcal{R}(t)\}_{t=0}^{\infty})] &= 641,729 \cdot RL2 \cdot RL3 - 470.606.927,83 \cdot 10^9 \cdot RL3 \\
 &\quad - 268.371.350,13 \cdot RL2 + 213,30 \cdot RL2^2 \\
 &\quad + 648,05 \cdot RL3^2 + 91.235.705.682.848,00 \quad (59)
 \end{aligned}$$

Abbildung 9 zeigt den Verlauf diese Funktion graphisch. Es handelt sich dabei um eine quadratische Funktion in $RL2$ und $RL3$. Das Minimum läßt sich somit eindeutig bestimmen.

Das Minimum wird in

$$\begin{aligned}
 RL3 &= 202.248,09 \\
 RL2 &= 324.859,88
 \end{aligned}$$

angenommen und ergibt folgende absoluten Werte:

Vorhersagerisiko		Investitionsrisiko	
ohne Min.	$13,20 \cdot 10^{12}$	ohne Min.	$18.096,93 \cdot 10^{12}$
mit Min.	$0,0545 \cdot 10^{12}$	mit Min.	$18.135,68 \cdot 10^{12}$
Diff. in %	-99,59 %	Diff. in %	+0,214 %

Durch die Minimierung der Varianz ändert sich allerdings der Bestand an Risikolebensversicherungen. In diesem konkreten Beispiel steigt die Anzahl der

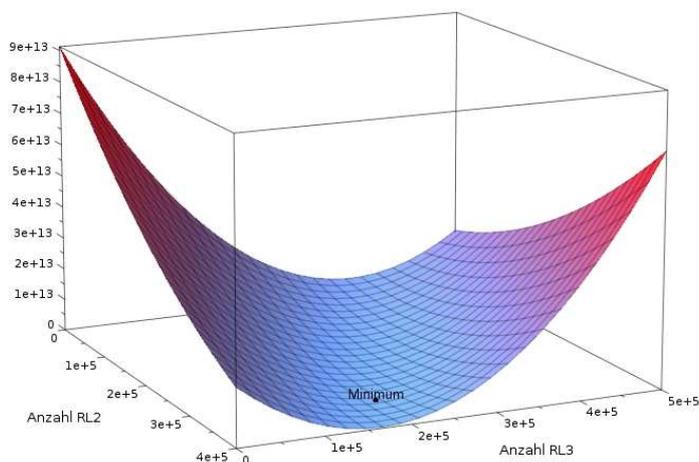


Abbildung 9: Vorhersagerisiko des Portfolios in Abhängigkeit von $RL2$ und $RL3$ mit Minimum

2-jährigen Risikolebensversicherungen von 80.000 auf 324.859,88 und die Anzahl der 3-jährigen Risikolebensversicherungen von 200.000 auf 202.248,09 Stück. Für ein aussagekräftiges Ergebnis ist somit eine relative Betrachtung mit Hilfe des quadratischen Variationskoeffizienten notwendig.

Das relative Vorhersagerisiko (siehe Abbildung 10) entwickelt sich analog zu den absoluten Werten (siehe Abbildung 9). Ebenso verringert sich das Vorhersagerisiko durch die neu bestimmte Portfoliozusammensetzung ebenfalls um mehr als 99%. Das Investitionsrisiko sinkt unter der Betrachtung des quadratischen Variationskoeffizienten sogar leicht ab.

Das absolute Ergebnis wird also durch die relative Betrachtung noch gestärkt.

Vorhersagerisiko		Investitionsrisiko	
ohne Min.	$18,11 \cdot 10^{-9}$	ohne Min.	$24,83 \cdot 10^{-6}$
mit Min.	$0,074 \cdot 10^{-9}$	mit Min.	$24,74 \cdot 10^{-6}$
Diff. in %	-99,59 %	Diff. in %	-0,36 %

Das Vorhersagerisiko des Gesamtportfolios lässt sich um mehr als 99% reduzieren, ohne dass sich das Investitionsrisiko signifikant ändert.

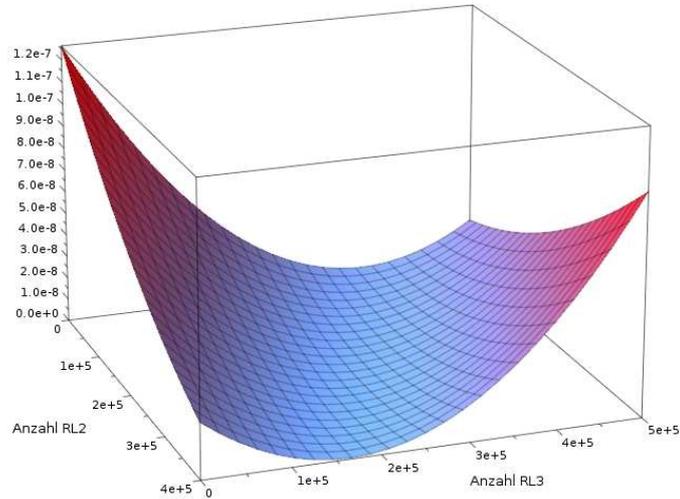


Abbildung 10: Variationskoeffizient des Vorhersagerisiko in Abhängigkeit von *RL2* und *RL3*

Das Beispiel zeigt, dass durch eine bewusste Portfoliozusammensetzung das Vorhersagerisiko signifikant verringert werden kann. Es kann sich für Versicherungsunternehmen somit lohnen, Überlegungen zur Portfoliozusammensetzung anzustellen. Sei es um ein Gefühl für das enthaltene Risiko zu bekommen oder zur Lenkung des Vertriebs. Durch das verringerte Risiko kann eventuell auch ein Rückversicherungsschutz preiswerter erworben werden.

Aufgrund der geschäftspolitischen Ausrichtung bzw. der aktuellen Lage des Versicherungsmarkts ist das Minimum des Vorhersagerisikos jedoch nicht immer erreichbar. In diesem Fall kann das Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen gebildet werden.

Kann das betrachtete Versicherungsunternehmen z.B. das Neugeschäft an Risikolebensversicherungen nur um max. 10% verringern bzw. um max. 25% erhöhen, betrachten wir diesen Ausschnitt der Funktion des Vorhersagerisikos (siehe Abbildung 11).

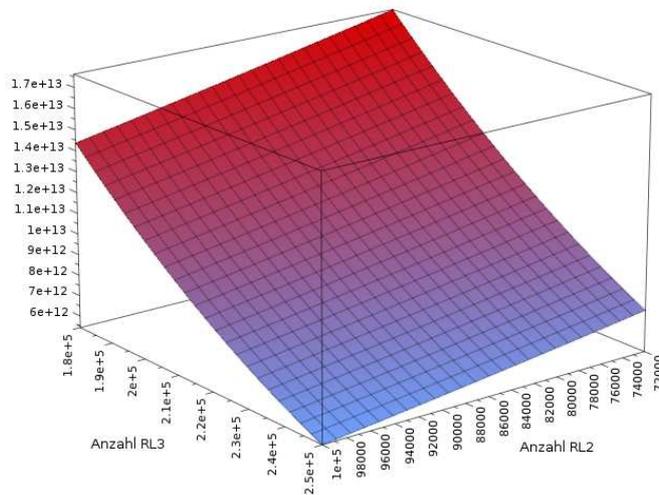


Abbildung 11: Vorhersagerisiko in Abhängigkeit von $RL2$ und $RL3$; $RL2 \in [72.000, 100.000]$, $RL3 \in [180.000, 250.000]$

In diesem konkreten Fall erreicht das Versicherungsunternehmen das lokale Minimum, in dem es versucht zusätzlich zu den gegebenen Rentenversicherungen so viel Risikolebensversicherungen wie möglich zu verkaufen.

Als nächsten Punkt wollen wir anhand des Beispiels untersuchen, wie stabil die Ergebnisse sind, wenn sich nach der Berechnung des Portfolios die Parameter der Sterblichkeitskurve ändern. In die Modellierung der Sterblichkeit fließen die Parameter b , g , σ ein (siehe Kapitel 3).

Da der Parameter b für Renten- und Risikolebensversicherung identisch ist, ändert sich die Portfoliozusammensetzung durch Veränderungen von b kaum (siehe Tabelle 6).

Veränderungen der Parameter g und σ führen zu etwas größeren Veränderungen. Betrachtet man die Abbildungen 12 bis 17 stellt man fest, dass aufgrund der geänderten Parameter nicht mehr das absolute Minimum erreicht wird, das Modell jedoch als hinreichend stabil angenommen werden kann.

	<i>RL2</i>	<i>RL3</i>	Vorhersagerisiko gesamt
-30%: $b : 0,5 \rightarrow 0,35$			
neu	324.585,20	202.248,68	63.695.314.786,42
alt	324.859,88	202.248,09	63.711.294.873,32
Diff			+0,02%
+30%: $b : 0,5 \rightarrow 0,65$			
neu	325.134,25	202.247,60	42.028.344.822,58
alt	324.859,88	202.248,09	42.044.324.871,98
Diff			+0,04%
-50%: $b : 0,5 \rightarrow 0,25$			
neu	324401,83	202249,15	68.028.460.585,67
alt	324.859,88	202.248,09	68.072.849.761,80
Diff			+0,06%
+50%: $b : 0,5 \rightarrow 0,75$			
neu	325.317,03	202.247,32	31.916.837.305,70
alt	324.859,88	202.248,09	31.961.226.305,88
Diff			+0,14%
-80%: $b : 0,5 \rightarrow 0,1$			
neu	324.126,31	202.250,01	71.819.551.475,27
alt	324.859,88	202.248,09	71.933.187.978,54
Diff			+0,16%
+80%: $b : 0,5 \rightarrow 0,9$			
neu	325.591,06	202.246,93	14.040.961.160,86
alt	324.859,88	202.248,09	14.154.596.912,35
Diff			+0,8%

Tabelle 6: Variation Parameter b

	<i>RL2</i>	<i>RL3</i>	Vorhersagerisiko gesamt
<i>g</i> : +200%			
neu	331.295,70	226.638,97	78.244.957.900,96
alt	324.859,88	202.248,09	389.465.828.085,90
Diff			+398%
<i>g</i> : +400%			
neu	340.614,48	283.537,47	157.615.057.070,00
alt	324.859,88	202.248,09	6.411.854.414.845,52
Diff			+3968%
<i>g</i> : -60%			
neu	320.530,76	188.802,14	43.725.882.479,39
alt	324.859,88	202.248,09	378.697.804.095,40
Diff			+766%

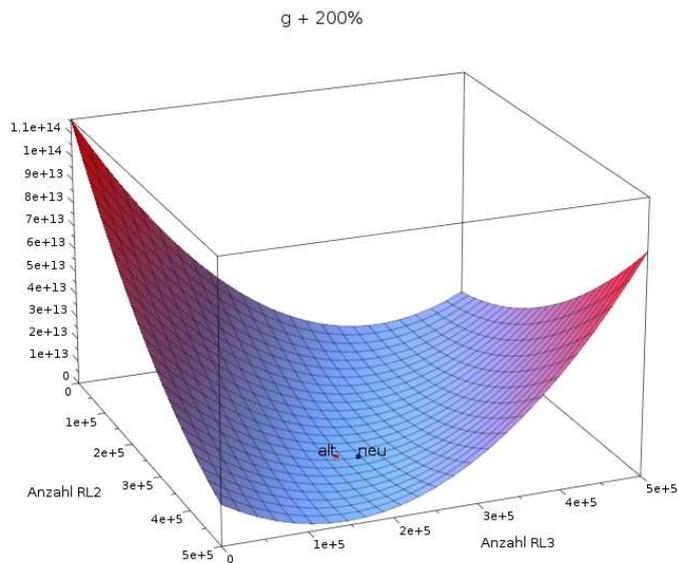


Abbildung 12: $g_{31,RL} = 0,08$ und $g_{70,R} = 0,2$

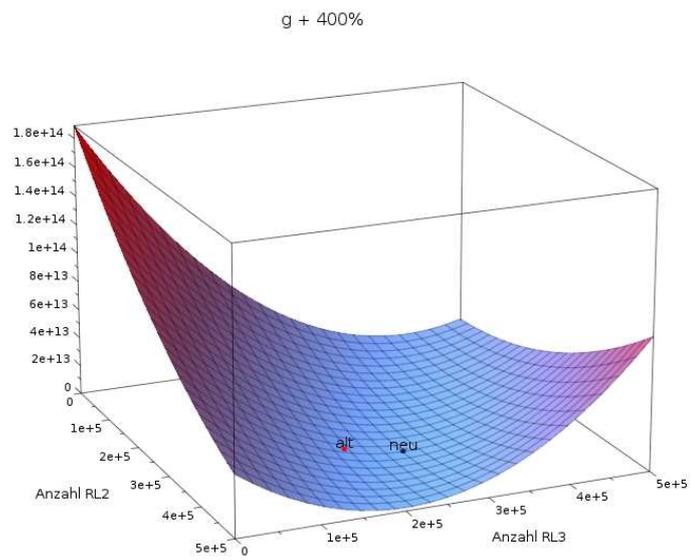


Abbildung 13: $g_{31,RL} = 0,16$ und $g_{70,R} = 0,4$

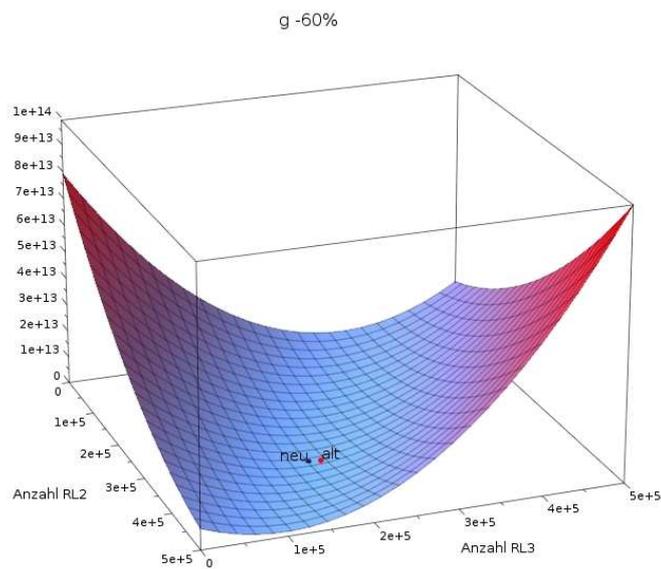


Abbildung 14: $g_{31,RL} = 0,016$ und $g_{70,R} = 0,04$

	<i>RL2</i>	<i>RL3</i>	Vorhersagerisiko gesamt
$\sigma : +200\%$			
neu	314.253,76	217.678,09	847.519.884.424,55
alt	324.859,88	202.248,09	1.018.785.003.579,16
Diff			+20%
$\sigma : +400\%$			
neu	278.647,38	274.510,18	12.393.876.883.280,20
alt	324.859,88	202.248,09	40.610.835.100.320,40
Diff			+228%
$\sigma : -60\%$			
neu	327.973,17	197.825,59	1.446.653.832,20
alt	324.859,88	202.248,09	13.033.850.557,09
Diff			+800%

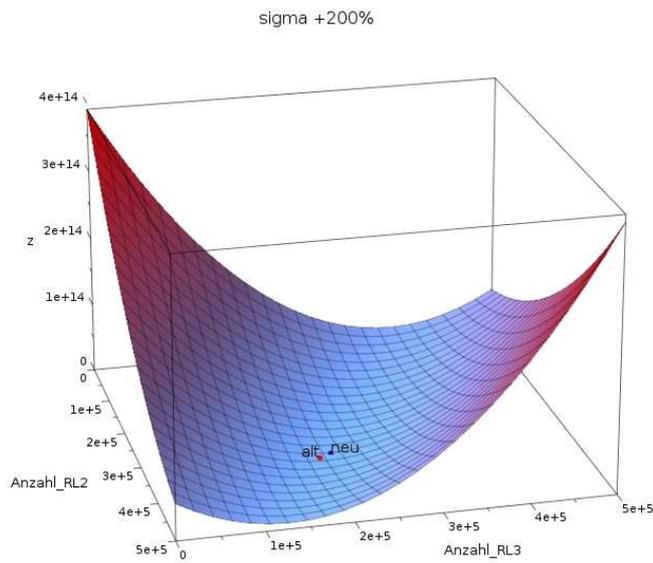


Abbildung 15: $\sigma_{31,RL} = 0,2$ und $\sigma_{70,R} = 0,4$

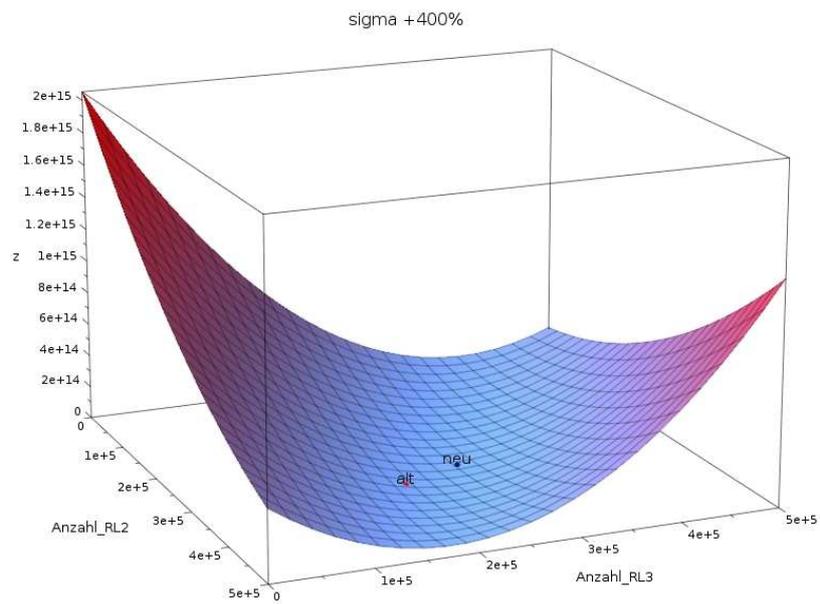


Abbildung 16: $\sigma_{31,RL} = 0,4$ und $\sigma_{70,R} = 0,8$

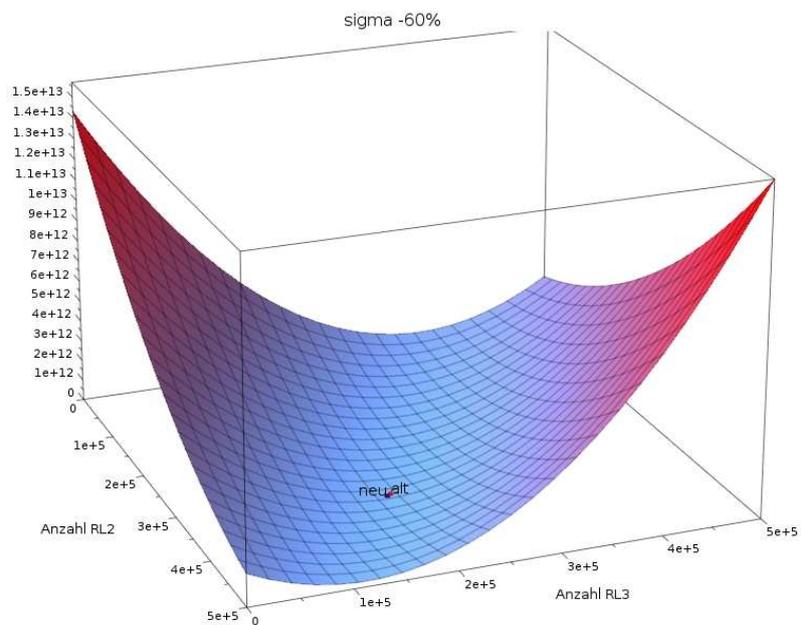


Abbildung 17: $\sigma_{31,RL} = 0,04$ und $\sigma_{70,R} = 0,16$

6 Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Varianzzerlegung haben wir Maßgrößen für das Vorhersagerisiko und das Investitionsrisiko erhalten. Mit Hilfe dieser Maßgrößen können die Risiken eines Versicherungsbestands berechnet werden, d.h. man kann ermitteln, wie hoch das Vorher- bzw. Investitionsrisiko in einem gegebenen Bestand ist.

Des Weiteren haben wir gezeigt, dass durch eine geeignete Portfoliowahl das Vorhersagerisiko eines Bestandes signifikant gesenkt werden kann, im konkreten Beispiel war es möglich das Vorhersagerisiko um mehr als 99% zu senken.

Durch ein mess- und beeinflussbares Vorhersagerisiko hat ein Versicherungsunternehmen somit Instrumente zur Hand, die ihm Wettbewerbsvorteile gegenüber Mitbewerbern verschaffen.

In zukünftigen Abhandlungen wollen wir die Betrachtungen in ein stetiges Modell überführen und laufende Prämienzahlung sowie realistische Portfoliolaufzeiten analysieren. Desweiteren soll auch eine Gewinnausschüttung an die Versicherungsnehmer integriert werden.

Danksagung:

Dem Referee der Arbeit möchten wir für seine Anregungen zur Verbesserung der Arbeit danken.

Literatur

- [BB01] D. Blake and W. Burrows. Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk. *The Journal of Risk and Insurance*, 68(2):339 – 348, 2001.
- [BCT00] M.G. Bruno, E. Camerine, and A. Tomassetti. Financial and Demographic Risks of a Portfolio of Life Insurance Policies with Stochastic Interest Rates: Evaluation Methods and Applications. *North American Actuarial Journal*, Vol. 4(4), 2000.
- [BDD] E. Biffis, M. Denuit, and P. Devolder. Stochastic Mortality Under Measure Changes. *Pensions Institute Discussion Paper PI-051 submitted*.
- [BDT90] F. Black, E. Derman, and W. Toy. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Option. *Financial Analysts Journal*, 1990.

- [Boh02] A. Bohl. *Bewertung von Wandelanleihen: eine Analyse unter Berücksichtigung von unsicheren Zinsen und Aktienkursen*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden, 1 edition, 29 April 2002.
- [BR06] D. Bauer and J. Russ. Pricing Longevity Bonds using Implied Survival Probabilities. *Working Paper, Ulm University and Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften*. Available at www.mortalityrisk.org, 2006.
- [BY06] Y Bayraktar and V. R. Young. Hedging life insurance with pure endowments. *Insurance: Mathematics and Economics*, doi:10.1016/j.insmatheco.2006.07.002, 2006. Text hier eingeben.
- [CBD] A. J.G Cairns, D. Blake, and K. Dowd. A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty. *Journal of Risk and Insurance; Revised version 3/11/05*.
- [CBD04] A.J.G Cairns, D. Blake, and K. Dowd. Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. In *the International AFIR Colloquium*, Boston, November 2004.
- [CC05] A. Cowley and J.D. Cummins. Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities. *Journal of Risk and Insurance*, 72(2):193 – 226, 2005.
- [CDS02] M. Coppola, E. Di Lorenzo, and M. Sibillo. Further Remarks on Risk Sources Measuring: The Case of an Life Annuity Portfolio. *Journal of Actuarial Practice*, Vol. 10, 2002.
- [CRR79] J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229–263, 1979.
- [DDG] M. Denuit, P. Devolder, and Goderniaux A.-C. Securitization of longevity risk: Pricing survivor bonds with Wang transform in the Lee-Charter framework. *Journal of Risk and Insurance*.
- [dG] A. de Grey. Timeframe for progress in life extension. <http://www.sens.org/time.htm>, Abruf am 17.11.2006.
- [GPS06] H. Gründl, T. Post, and R. Schulze. To Hedge or Not to Hedge: Managing Demographic Risk in Life Insurance Companies. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(1):19–41, 2006.
- [Haa05] J. Haas. Optionen in Lebensversicherungsverträgen. Master's thesis, Technische Universität München, 2005.
- [HD04] W. Hahn and J.S. Dyer. A Discrete-Time Approach for Valuing Real Options with Underlying Mean-Reverting

Stochastic Processes. <http://www.mcombs.utexas.edu/faculty/Warren.Hahn/Discrete%20M-R%20Paper.pdf>, Juli 2004.

- [Hul02] J.C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education, 5 edition, 2002. International Edition.
- [LC03] Y. Lin and S.H. Cox. Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *The 7th Asia-Pacific Risk and Insurance Association Annual Meeting*, 2003.
- [LC04a] Y. Lin and S.H. Cox. Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks. In *The eighth Asia-Pacific Risk and Insurance Association, Annual Conference*, 2004.
- [LC04b] Y. Lin and S.H. Cox. Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *Vortrag Uni Ulm*, 2004.
- [LC05] Y. Lin and S.H. Cox. Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 72(2):227 – 252, 2005.
- [MP01] M. A. Milevsky and S. D. Promislow. Mortality Derivatives and the Option to Annuitize. *Insurance: Mathematics and Economics*, 6:299 – 318, 2001.
- [NR90] D. B. Nelson and K. Ramaswamy. Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models. *The Review of Financial Studies*, 3(3):393–430, 1990.
- [OP02] A. Olivieri and E. Pitacco. Inference about Mortality Improvements in Life Annuity Portfolios. In *XXVIIth International Congress of Actuaries*, 2002.
- [Par97] G. Parker. Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks. *North American Actuarial Journal*, Vol. 1(2), 1997.
- [San99] K. Sandmann. *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [WB98] Z. Wiener and S. Benninga. Binomial Term Structurion Modells. *Mathematica in Education and Research*, 7(3), 1998.
- [WY03] J. L. Wang and M. L. Y. Yang. Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies. *A research proposal for the presentation at The Asia-Pacific Risk and Insurance Association 2003 Annual Meeting*, 2003.

