

Replizierende Portfolios in der Lebensversicherung

Axel Seemann

Preprint Series: 2009-02



Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
UNIVERSITÄT ULM

Replizierende Portfolios in der Lebensversicherung

Axel Seemann

Institut für Versicherungswissenschaften

22. März 2009

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
Abkürzungsverzeichnis	vii
Symbolverzeichnis	viii
1 Einleitung	1
2 Verfahren zur Erstellung eines replizierenden Portfolios	3
2.1 Kapitalmarktmodell	4
2.2 Zusammenhand zwischen Marktwert und Cash-Flows	7
2.3 Match auf den zeitlichen Verlauf des Cash-Flows	8
2.4 Match an den Barwert der Cash-Flows	14
2.5 Ein Bucket-Modell	21
2.6 Einführung von Nebenbedingungen	24
3 Der Prozess	29
3.1 Die Vorbereitungsphase	30
3.2 Die Optimierungsphase	36
3.3 Die Analyse	38

4 Ein einfaches Beispiel	40
4.1 Einfache Verträge	44
4.1.1 Sparvertrag und deterministische Auszahlung	44
4.1.2 Garantieverzinsung	48
4.2 Zusätzliche Einflussfaktoren	54
4.2.1 Storno	54
4.2.2 Sterblichkeit	63
4.2.3 Reduzierte Überschussbeteiligung	77
4.2.4 Pfadabhängiges Storno	95
4.3 Vereinigung von Beständen	99
5 Zusammenfassung und Ausblick	103
Literaturverzeichnis	105

Abbildungsverzeichnis

2.1	Vereinfachte Darstellung der Erstellung eines replizierenden Portfolios.	9
3.1	3 Stufen des Prozesses.	29
3.2	Mögliche Entwicklung der Marktwerte über die Zeit im Vergleich von möglichen replizierenden Portfolios.	36
4.1	Quantile von $\int_{t-1}^t r_s ds$ für $t \in \{1, 2, \dots, 10\}$.	45
4.2	Barwerte des Bestandes von Sparverträgen mit fixem Zinssatz von 20% über 100 Szenarien.	47
4.3	Barwerte des Sparvertrages mit Garantiezins 3,5% über 100 Szenarien.	49
4.4	Mögliche Entwicklung eines Guthabens über die Zeit unter Berücksichtigung eines Garantiezinses von 3,5%.	50
4.5	Barwerte des Bestandes aus 1.000 Sparverträgen mit Garantiezins von 3,5% (Bestand) über 100 Szenarien im Vergleich mit dem replizierenden Portfolio (RP).	51
4.6	Vergleich der Barwerte von einem Bestand mit 1.000 Verträgen mit Storno mit dem replizierenden Portfolio.	58
4.7	Entwicklung der Deckungsrückstellung mit Unterteilung in Sparanteil und Risikoanteil.	68
4.8	Vergleich der Barwerte von einem Bestand mit 1.000 Verträgen mit dem replizierenden Portfolio.	73
4.9	Ein Scatter- und ein Quantilplot für die Replikation eines Bestandes von 1.000 gemischten Versicherungsverträgen mit 100%-iger Überschussbeteiligung.	75

4.10	Out-of-Sample Test für den Bestand der gemischten Lebensversicherungen mit Überschussbeteiligung von 100%.	78
4.11	Vergleich der Entwicklung der Deckungsrückstellung und der Überschüsse in einem Beispielszenario mit unterschiedlichen Überschussbeteiligungen.	81
4.12	Vergleich der Verzinsung des Kapitals des Bestandes in Abhängigkeit des risikolosen Zinssatzes.	83
4.13	Vergleich der Barwerte der replizierenden Portfolios mit Floorlets, bestimmt mit <i>PV</i> - bzw. Verlaufs-Modell mit dem Bestand über die 100 Szenarien.	87
4.14	Scatter- und Quantilplot für die Replikation des Bestandes mit 90% Überschussbeteiligung im <i>PV</i> -Modell.	88
4.15	Out-of-Sample Test für den Bestand der gemischten Kapitallebensversicherung und Überschussbeteiligung von 90%.	89
4.16	Scatterplot zum Vergleich der Verpflichtungen mit dem replizierenden Portfolio, welches mit Hilfe von 10.000 Szenarien erstellt wurde. . . .	92
4.17	Die Zinssensitivitäten der Versicherungsverpflichtungen im Vergleich mit den Sensitivitäten eines replizierenden Portfolios.	95
4.18	Portfolios im Vergleich mit einem Versicherungsbestand unter Berücksichtigung eines zinsabhängigen Stornos.	98
4.19	Vergleich zweier Portfolios mit der Summe zweier Bestände.	102

Tabellenverzeichnis

4.1	„real-world“-Parameter für das Modell nach J. Barbarin und P. Devolder.	41
4.2	Parameter für das Vasicek-Modell.	42
4.3	RP: Garantiezins von 3,5%.	52
4.4	RP: Garantiezins von 3,5%. Zusätzlich wurden Floorlets mit fixem Zins von 3,5% berücksichtigt.	53
4.5	RP: Garantiezins von 3,5%. Zusätzlich wurden Floors mit fixem Zins von 3,5% berücksichtigt.	54
4.6	RP: Eingeschränkter Garantiezins.	55
4.7	RP: Verlaufs-Modell für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.	57
4.8	RP: <i>PV</i> -Modell für einen Bestand mit eingeschränktem Garantiezins und Storno-Option.	59
4.9	RP: Verlaufs-Modell für einen Bestand mit eingeschränktem Garantiezins und Storno-Option.	61
4.10	RP: <i>PV</i> -Modell für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.	62
4.11	RP: <i>PV</i> -Modell mit Floorlets für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.	63
4.12	Die Sterbetafel, basierend auf der DAV 2008 T-Tafel 1.Ordnung. . . .	65
4.13	Die Entwicklung der Deckungsrückstellung in Euro.	67
4.14	RP: Verlaufsmodell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.	72
4.15	RP: <i>PV</i> -Modell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.	76

4.16	RP: Aufsummierte Gewichte des Portfolios gemäß dem Verlaufsmodell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.	77
4.17	Die Barwerte der Auszahlungen je Jahr für zwei Extremszenarien.	79
4.18	RP: Verlaufsmodell für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.	80
4.19	RP: Verlaufsmodell mit Floor_S zu $3,8\%$ für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.	82
4.20	RP: <i>PV</i> -Modell für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.	84
4.21	RP: Verlaufsmodell mit Floorlets für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.	85
4.22	RP: <i>PV</i> -Modell mit Floorlets für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.	86
4.23	Die Barwerte des replizierenden Portfolios (RP) im Vergleich zu den Barwerten der Verbindlichkeiten (Bestand).	89
4.24	RP: <i>PV</i> -Modell mit Floorlets und 1.000 Szenarien für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.	90
4.25	RP: <i>PV</i> -Modell mit Floorlets und 10.000 Szenarien für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.	91
4.26	RP: Gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90% und der Nebenbedingung, den Marktwert zu $t = 0$ zu treffen.	92
4.27	Marktwerte und Sensitivitäten im Vergleich.	93
4.28	RP: Gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90% und den Nebenbedingungen, die Sensitivitäten zu treffen.	96
4.29	RP: Verlaufsmodell für das zinsabhängige Storno.	97
4.30	RP: <i>PV</i> -Modell für das zinsabhängige Storno.	98
4.31	RP: Gemischte Lebensversicherung einem Garantiezins von $2,75\%$	101
4.32	RP: Vereinigung zweier Bestände.	101

Abkürzungsverzeichnis

bp	Basispunkt
EB	Einmalbeitrag
FL	Floorlet
Floor _S	Floorlet, das von der stochastischen Zinsentwicklung abhängt
G	Geldmarktkonto
MV	Marktwert der Versicherungsverpflichtungen
OP	Optimierungsproblem
PV	Barwert (engl. Present Value)
RP	replizierendes Portfolio
SV	Sparvertrag
SVG	Sparvertrag mit Garantiezins
TCF	Terminal Cash-Flow
V	Versicherungsverbindlichkeit
VS	Versicherungssumme
ZCB	Zero-Coupon Bonds

Symbolverzeichnis

AS_t	Anzahl Stornofälle in Jahr t
AT_t	Anzahl der Todesfälle im Zeitraum $[t, t+1)$
AV_t	Anzahl Versicherungsverträge zu Beginn des Jahres t
B	Notationsindex für Bucket-Modell
B_t	Numéraire
BW_{ZCB}	Barwert eines Zero-Coupon-Bonds
CF	Vektor der Cash-Flows aus dem Unternehmen
CF_t	Cash-Flow zum Zeitpunkt t
$CF_{T,G}$	Cash-Flow des Geldmarktkontos zum Zeitpunkt T
d	Dimension des Markovprozesses Y_t
D	Matrix mit den Diskontierungsfaktoren
d_t	Anzahl der Personen, die in der Zeit $[t - 1, t)$ sterben
DR_t	Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt t
E_t	Anteil der Zinserträge pro Vertrag im Jahr t
GZB_t	Garantiezinsblock zum Zeitpunkt t
i	fester Zinssatz
k	die Geschwindigkeit der Mean Reversion θ
K_1	Anzahl der inneren Simulationen zur Bestimmung des Schätzers des Marktwertes \widehat{MV}_1^k
K_t	Kapital zu Beginn des Jahres t
l_t	Anzahl der Lebenden nach t Jahren
m	Anzahl der Finanzinstrumente
M	die Cash-Flow-Matrix aller betrachteten Finanzinstrumente über alle Szenarien
n	Anzahl der Szenarien
\mathbb{P}	„real-world“-Wahrscheinlichkeitsmaß
p_t	Wahrscheinlichkeit einer Person den Zeitraum $[t, t+1)$ zu überleben, unter der Bedingung, dass sie Zeitpunkt t lebt

$P_{Floor}(\tau, t, r)$	Preis eines Floorlets zum Zeitpunkt τ mit Auszahlung in $t > \tau$ und garantiertem Zins r
$P(t, T)$	Preis eines Zero-Coupon-Bonds zur Zeit t mit Auszahlung von 1 in $T > t$
PV	Notationsindex für Barwert (engl. Present Value)
PV_{RP}	Der zufällige Barwert des replizierenden Portfolios
PV_V	Der zufällige Barwert der Versicherungsverpflichtungen
\mathcal{Q}	risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß
q_t	Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in dem Zeitraum $[t, t + 1)$ stirbt, unter der Bedingung, dass sie Zeitpunkt t lebt
r	garantierter Zinssatz
R^2	das Bestimmtheitsmaß
r_t	stetiger risiko-freier Zins
RA_t	Risikoanteil zum Zeitpunkt t
$S_{i,t}$	Preis der Anlage i zum Zeitpunkt t
S_t	Vektor der Preise aller Finanzanlagen zum Zeitpunkt t
SA_t	Sparanteil zum Zeitpunkt t
SB_t	Sterblichkeitsblock zum Zeitpunkt t
T	Planungshorizont
$Term$	Notationsindex für Terminal Cash-Flow
$Term_b$	Notationsindex für Terminal Cash-Flow des Bucket b , auch als Bucket-Cash-Flow bezeichnet
TCF	Notationsindex für Terminal Cash-Flow im PV-Modell
U_t	Höhe der Summe der Überschussbeteiligung für einen Vertrag zum Zeitpunkt t in Euro
V	der Vektor der Cash-Flows der Verbindlichkeiten über alle Szenarien
VL_{t+1}	Versicherungsleistung im Jahr t , ausgezahlt zum Zeitpunkt $t + 1$
W_t	eine Brownsche Bewegung
X	Vektor der Cash-Flows eines Portfolios
$X_{t,\omega}$	der Cash-Flow eines Portfolios ω zur Zeit $t \geq 0$
Y_t	ausreichend regulärer d -dimensionaler Markov-Prozess
$Y_{t,s}$	ausreichend regulärer Markov-Prozess
Z	Matrix mit den Cash-Flows der einzelnen Finanzinstrumente
$Z_{i,t}$	Auszahlung der Anlage i zum Zeitpunkt t
Z_t	Vektor der Auszahlungen aller Finanzanlagen zum Zeitpunkt t
ZE_t	Zinserträge in Jahr t

γ	Überschussbeteiligung
ΔSB_t	Veränderung des Sterblichkeitsblocks im Jahr t
ϵ_t	eine standardnormalverteilte Zufallsvariable zur Erstellung der Szenarien
θ	Mean Reversion im Vasicek-Modell
λ	Marktpreis des Risikos
ν	Bewertungsfunktion
ν_b	Bewertungsfunktion für Bucket b
ρ	Korrelation
σ	die Standardabweichung des stochastischen Prozesses
ϕ	Dichte einer Standardnormalverteilung
χ	Die Menge der zulässigen Portfolios mit $\chi \subset \mathbb{R}^m$,
ω	Gewichtvektor eines Portfolios
ω_i	Gewicht des Instrumentes i in einem Portfolio ω

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten Jahren gewinnt die marktkonsistente Bewertung von Lebensversicherungsverpflichtungen im Rahmen von Solvency II und IFRS zunehmend an Bedeutung. Aufgrund der in den Versicherungsverträgen enthaltenen Optionen und Garantien ist die Struktur von Versicherungsverpflichtungen aber sehr komplex, sodass die Bewertung in der Regel nicht mit geschlossenen Formeln möglich ist. In der Praxis wird dabei häufig auf Monte-Carlo Simulationen zurückgegriffen. Allerdings führt eine adäquate Bewertung via Monte-Carlo Simulation häufig zu sehr rechen- und zeitintensiven Simulationen in der Simulation („Nested Simulations“). Insbesondere wenn zusätzlich Sensitivitäten des Marktwertes der Versicherungsverpflichtungen berechnet werden sollen, oder die Berechnung des notwendigen Risikokapitals im Rahmen von Solvency II eine Neubewertung nach einer Periode erfordert, ist diese Methode in der Praxis kaum noch anwendbar.

Zudem steigt der Bedarf an Informationen über die aktuelle Risikosituation von Unternehmen in der momentanen weltweiten Finanzkrise an, sodass ein Ansatz benötigt wird, mit welchem tägliche Analysen der Auswirkungen des Kapitalmarktes auf die Versicherungsverpflichtungen durchgeführt werden können.

In dieser Arbeit werden Verfahren betrachtet, die eine approximative Bewertung der Versicherungsverpflichtungen über sogenannte replizierende Portfolios ermöglichen. Dabei liegt die Idee zugrunde, dass der Wert der Verpflichtungen über einfach zu bewertende Finanzinstrumente approximiert wird. Ein Portfolio, bestehend aus solchen Finanzinstrumenten, lässt sich deutlich schneller bewerten als der tatsächliche Versicherungsbestand. Damit können oben genannte Anforderungen besser erfüllt werden, als mit einem klassischen Ansatz zur Bewertung der Versicherungsverpflichtungen.

Die weitere Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

In Kapitel 2 wird die Theorie der replizierenden Portfolios dargestellt. Zu diesem Zweck werden diverse Modelle für die Bestimmung replizierender Portfolios betrach-

tet. Anhand dieser Theorie werden einfache Modelle analysiert um Schätzer für replizierende Portfolios zu erarbeiten.

Der Prozess zur Erstellung eines replizierenden Portfolios sowie geeignete Mittel zur Überprüfung der Qualität desselben werden in Kapitel 3 erläutert. Hier werden die wesentlichen Schritte erklärt, um auf einem klaren und strukturierten Weg von den Verbindlichkeiten zu einem geeigneten Replikationsportfolio zu gelangen. Eine große Bedeutung hat dabei die richtige Wahl der Finanzinstrumente, die für die Replikation zur Verfügung stehen.

In Kapitel 4 wird die in den vorherigen Kapiteln dargestellte Theorie auf ein einfaches Beispiel angewendet. Zunächst wird nur ein einfacher Sparvertrag betrachtet. Anschließend wird der Beispielvertrag sukzessive um zusätzliche Elemente erweitert. Hierdurch wird der Einfluss der unterschiedlichen Optionen und Garantien auf die Versicherungsverpflichtungen veranschaulicht. Außerdem wird durch dieses Vorgehen deutlich, welche Anlagen zur Replikation der einzelnen Optionen und Garantien verwendet werden können. Zusätzlich wird in diesem Kapitel auch auf verschiedene Probleme eingegangen, die bei der praktischen Umsetzung auftreten können, wie etwa bei einer Bestandsvereinigung. Des Weiteren wird analysiert, welchen Einfluss die Anzahl der verwendeten Szenarien auf die Replikationsqualität hat.

Das abschließende Kapitel 5 gibt eine kurze Zusammenfassung des Inhaltes und einen Ausblick über einen möglichen zukünftigen Einsatz replizierender Portfolios in der Lebensversicherung.

Kapitel 2

Verfahren zur Erstellung eines replizierenden Portfolios

Seit der Deregulierung des Versicherungswesens im Jahr 1994 haben Versicherungsunternehmen mehr Freiräume in der Gestaltung und Absicherung ihrer Versicherungsprodukte. In den Anfangsjahren wurde das tatsächliche Risikoexposure des jeweiligen Unternehmens noch wenig beachtet, mit der Folge, dass der Bestand der Mannheimer Versicherung am 1. Oktober 2003 auf die Protektor AG übertragen wurde. Es war das erste und bisher einzige Mal, dass ein deutsches Lebensversicherungsunternehmen Insolvenz anmelden musste.¹ Eine der Ursachen war die mangelhafte Analyse der eigenen Risiken, die das Versicherungsunternehmen, insbesondere durch sein Finanzinvestment, übernommen hatte. In den Folgejahren der Deregulierung wurden die aufsichtsrechtlichen Anforderungen an die Versicherungsunternehmen stetig ausgeweitet, sodass heute bei jedem Lebensversicherungsunternehmen ein Risikocontrolling existiert, mit der Aufgabe, die eigene Risikosituation aufzudecken und zu bewerten.

Es ist dabei abzusehen, dass mit der Einführung von Solvency II die Anforderungen dieser Selbstüberwachung weiter zunehmen werden. Der klassische Ansatz, die Versicherungsverpflichtungen direkt zu bewerten, wäre hierbei viel zu zeitaufwendig, um bei einer regelmäßigen Analyse der tatsächlichen Risikosituation eingesetzt zu werden. Leider existieren aufgrund der großen Komplexität der Versicherungsprodukte und regulatorischen Einflüsse im Allgemeinen keine geschlossenen Formeln für die Bewertung der Verbindlichkeiten. Deswegen wird hier ein aktueller Ansatz aufgegriffen, mit dem diese Bewertung der Verpflichtungen sehr viel schneller durchgeführt werden kann.

¹Für weitere Informationen siehe www.protektor-ag.de.

Das Ziel dieses Ansatzes ist es, ein Portfolio von Finanzinstrumenten (Puts, Calls, Swaps,...) zu erstellen, welches den Marktwert der Cash-Flows aus einem Versicherungsunternehmen möglichst gut approximiert, d.h. dass die Korrelation zwischen den Marktwerten der Versicherungsverbindlichkeit und des replizierenden Portfolios möglichst groß ausfällt. Der Vorteil an dieser Vorgehensweise ist, dass es Formeln für viele Derivate gibt und diese eine sehr schnelle, wenn auch indirekte Analyse der Verpflichtungen über das replizierende Portfolio ermöglichen.

Dabei können replizierende Portfolios nicht nur diesem Zwecke dienen, sie eröffnen zudem viele neue Anwendungsmöglichkeiten, die wegen des dazu notwendigen Aufwandes heute noch kaum zu bewältigen sind. So könnten sie auch bei der Berechnung des MCEV eingesetzt werden.

Hier wird ein Ansatz betrachtet, mit welchem replizierende Portfolios basierend auf den Cash-Flows der Verbindlichkeiten, bestimmt werden können. In einem ersten Schritt wird ein Verlaufs-Modell erstellt, das den Verlauf der Cash-Flows wiedergeben soll. Da für dieses Modell sehr viel Informationen und Erfahrung benötigt werden, wird im nachfolgenden *PV*-Modell darauf verzichtet, den kompletten Verlauf der Zahlungsströme zu treffen, nur der Barwert des Zahlungsstromes wird berücksichtigt. *PV* steht hierbei für *Present Value* und bezeichnet die Summe der einzelnen, auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierten Cash-Flows. In diesem Kapitel wird auch der Bezug zum Terminal Cash-Flow (*TCF*) hergestellt und gezeigt, dass beide Modelle eng miteinander verbunden sind, da sie bis auf die Diskontierung identisch sind. Als drittes Modell aus der Klasse der Cash-Flow-Modelle wird das Bucket-Modell vorgestellt, welches ein Hybrid aus Verlaufs- und *PV*-Modell ist.

Bevor die Modelle betrachtet werden können, muss ein allgemeines Kapitalmarktmodell aufgestellt werden, mit welchem die Finanzinstrumente und die Versicherungsverpflichtungen bewertet werden. Dieses Kapitalmarktmodell wird in Abschnitt 2.1 aufgestellt.

2.1 Kapitalmarktmodell

Es wird angenommen, dass sich das betrachtete Versicherungsunternehmen in einem zeitstetigen Kapitalmarkt befindet, welcher vollständig ist, d.h. jeder Claim² ist absicherbar, und jede Anlage ist beliebig teil- und handelbar. Darüber hinaus sei der

²Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ eine Filtration. Ein Claim $C = (C_t)_{t \in [0, T]}$ ist ein adaptierter reellwertiger Prozess, d.h. C_t ist \mathcal{F}_t -messbar für alle $t \in [0, T]$. Siehe hierzu auch (Irl03) S. 41 und 70.

Kapitalmarkt arbitragefrei.

Der Beobachtungszeitraum sei $[0, T]$. Falls ein einzelner Versicherungsvertrag betrachtet wird, so wäre T die maximale Laufzeit des Vertrages. Bei der Betrachtung mehrerer Verträge bezeichnet T somit die maximale Laufzeit aller Verträge.³

Mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ wird der Wahrscheinlichkeitsraum mit der Standardfiltration⁴ $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} , dem sogenannten „real-world“-Wahrscheinlichkeitsmaß, bezeichnet.

Durch die Verträge, die das betrachtete Unternehmen im Bestand hat, entstehen Verpflichtungen den Kunden gegenüber. Dadurch entstehen Zahlungsströme CF_t um diesen Verpflichtungen nachzukommen. CF_t bezeichnet hierbei den Cash-Flow zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T$. Hier wird ganz allgemein angenommen, dass auch stetige Zahlungsströme möglich sind. In der Praxis wird es aber meist nur diskrete Zahlungszeitpunkte geben.

Offensichtlich sind diese Zahlungsströme nicht deterministisch, sondern unsicher. Diese Unsicherheiten resultieren aus verschiedenen Einflussfaktoren, die auf die Zahlungsströme einwirken. Beispielsweise hängen die Versicherungsleistungen bei kapitalbildenden Lebensversicherungen unter anderem von den erwirtschafteten Erträgen des Versicherungsunternehmens ab, da dem Versicherungsnehmer zusätzlich zu den garantierten Leistungen eine Beteiligung an den Überschüssen zusteht. Deswegen wird angenommen, dass in diesem Kapitalmarkt ein d -dimensionaler, \mathbb{F} -adaptierter ausreichend regulärer Markov-Prozess $(Y_t)_{t \in [0, T]} = (Y_{t,1}, \dots, Y_{t,d})_{t \in [0, T]}$ existiert⁵, welcher alle Unsicherheiten in diesem Kapitalmarkt abbildet.

Es wird dazu angenommen, dass die Cash-Flows als \mathbb{F} -adaptierte Funktionen in Abhängigkeit von Y_t beschrieben werden können:

$$CF_t = f_t(Y_s, s \in [0, t]).$$

Eine weitere Annahme ist, dass es einen \mathbb{F} -adaptierten *Numéraire* $(B_t)_{t \in [0, T]}$ gibt, mit

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right),$$

wobei r_u der stetige, risiko-freie Zins ist, welcher stochastisch sein kann. Da Y_t alle Unsicherheiten abbildet, ist auch r_t eine \mathbb{F} -adaptierte Funktion in Abhängigkeit von Y_t , d.h.

$$r_t = r_t(Y_s, s \in [0, t]).$$

³In der Realität würde dies bedeuten, eine Laufzeit von über 80 Jahren anzunehmen, was aber nicht gemacht wird, da die Unsicherheiten in den Modellannahmen mit wachsender Dauer zunehmen. Üblicherweise wird für T z.B. 25, 30 oder 50 Jahre gewählt.

⁴Definition einer Standardfiltration findet sich bei (Irl03) S. 147.

⁵Die einzelnen $Y_{t,i}$ müssen nicht unabhängig sein.

Als Annahme gilt, dass auf dem Kapitalmarkt $m \in \mathbb{N}$, $m < \infty$ Finanzanlagen gehandelt werden. Der Wert (=Preis) der i -ten Finanzanlage zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ wird mit $S_{i,t}$ und die Höhe der Auszahlung dieser Finanzanlage zum Zeitpunkt t mit $Z_{i,t}$ für alle Finanzanlagen $i \in \{1, \dots, m\}$ bezeichnet. Wiederum sind $S_{i,t}$ und $Z_{i,t}$ \mathbb{F} -adaptierte Funktionen in Abhängigkeit von Y_t , also

$$S_{i,t} = S_{i,t}(Y_s, s \in [0, t]), \text{ und}$$

$$Z_{i,t} = Z_{i,t}(Y_s, s \in [0, t]), \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Mit $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{m,t})$, bzw. $Z_t = (Z_{1,t}, \dots, Z_{m,t})$ werden die m -dimensionalen Werte-, bzw. Auszahlungs-Vektoren aller Finanzanlagen zum Zeitpunkt t bezeichnet. Zusätzlich wird die Existenz eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{Q} angenommen⁶, bezüglich welchem die Zahlungsströme als Barwerte durch Diskontierung mit B_t bewertet werden können.

Alternativ kann die Bewertung mit dem „real-world“-Maß und zugehörigem Deflator⁷ durchgeführt werden.

Im Folgenden wird immer mit dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} gearbeitet, wobei die Ergebnisse für das „real-world“-Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} mit Deflatoren analog zu erhalten sind.

Zum Ende dieses Abschnittes wird nun der Begriff Portfolio definiert⁸. Ein Investor besitzt eine Auswahl an verschiedenen Finanzinstrumenten, die auf dem betrachteten Kapitalmarkt gehandelt werden. Von jedem Finanzinstrument $i \in \{1, \dots, m\}$ besitzt er $\omega_i \in \mathbb{R}$ Anteile. Diese Zusammensetzung wird als Portfolio bezeichnet.

Das bedeutet, dass sich ein Portfolio als ein Gewichtevektor $\omega \in \mathbb{R}^m$ definieren lässt, der jedem Finanzinstrument i ein Gewicht ω_i zuordnet, also

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m).$$

Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t ist dann gegeben durch

$$X_t = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot S_{i,t} = \omega^T S_t,$$

⁶Nach Theorem 6.1.2 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) bei (BK04) S. 235 garantiert dies, da angenommen wurde, dass der Kapitalmarkt arbitragefrei ist. Unter der Annahme, dass der Wert eindeutig ist, existiert ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß.

⁷Ein Deflator $\varphi(t)$ lässt sich in 2 Faktoren zerlegen: zum einen in einen Abszinsungsfaktor (den stochastischen, risikolosen Zins $\exp\left(-\int_0^t r_u du\right) := (B_t)^{-1}$) und die Radon-Nikodym-Dichte (RN-Dichte) ρ_t für den Maßwechsel in den risikoneutralen Raum. Somit ist $\varphi(t) = (B_t)^{-1} \cdot \rho_t$. Durch diese RN-Dichte wird gewährleistet, dass der faire Preis, welcher unter dem „real-world“-Modell berechnet wird, dem fairen Preis unter dem risikoneutralen Modell entspricht. Siehe (Oea07).

⁸(Irl03) S. 15.

und die Auszahlung des Portfolios zum Zeitpunkt t entspricht

$$R_t = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot Z_{i,t} = \omega^T Z_t.$$

2.2 Zusammenhand zwischen Marktwert und Cash-Flows

Der Marktwert der Versicherungsverpflichtungen zum Zeitpunkt 0 ist gegeben durch:

$$MV = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T CF_t \cdot \varphi(t) dt \right],$$

mit den folgenden Bezeichnungen

CF_t = Cash-Flow, bedingt durch die Verpflichtungen zum Zeitpunkt t ,

$\varphi(t)$ = der stetige Diskontierungsfaktor im Zeitintervall $[0, t]$.

$\varphi(t)$ ist dabei gegeben durch:

$$\varphi(t) = \frac{1}{B_t} = e^{-\left(\int_0^t r_u du\right)}.$$

Der stetige Zahlungsstrom ist nur eine theoretische Annahme. In der Regel wird nicht von stetigen Zahlungsströmen ausgegangen, da in der Praxis ein Zahlungsstrom nicht stetig ist. Beispielsweise wird eine Rente nur zu bestimmten Zeitpunkten gezahlt und nicht stetig über die gesamte Rentenbezugszeit. Auch die Prämien, die ein Versicherungsnehmer zahlt, werden monatlich (oder auch jährlich) gezahlt. Überweisungen werden von Banken effektiv erst nachts abgewickelt, so dass im Bankensektor stetige Transaktionen nicht möglich sind. Deswegen wird im Folgenden, sofern nicht anders beschrieben, angenommen, dass alle Zahlungen nur zu bestimmten Zeitpunkten $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ stattfinden. Für eine einfachere Darstellung wird angenommen, dass diese diskreten Zeitpunkte gerade den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots, T$ entsprechen. Dies ist einfach nachzuvollziehen, da z.B. die Prämien für einen Versicherungsvertrag oder eine Rente für gewöhnlich in konstanten Intervallen, etwa monatlich oder jährlich gezahlt werden.

Damit reduziert sich die Formel auf

$$MV = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^n CF_t \cdot \varphi(t) \right] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [CF_t \cdot \varphi(t)].$$

Das Ziel ist es nun, die Verbindlichkeiten eines Versicherungsunternehmens zu bewerten um den Preis dafür zu erhalten. Um diese replizierenden Portfolios zu bestimmen

werden unter anderem auch Optimierungsmethoden benötigt.

In den nächsten 3 Abschnitten wird auf verschiedene Modelle eingegangen, mit denen auf Basis der zukünftigen Cash-Flows replizierende Portfolios erstellt werden können. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Zusammensetzung des Portfolios zum Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt und über die gesamte Laufzeit nicht verändert wird.

Bemerkung.

Neben dem Ansatz ein replizierendes Portfolio basierend auf den Cash-Flows aufzustellen, gibt es weitere Methoden. Beispielsweise basiert ein Ansatz auf der Sensitivität des Marktwertes der Versicherungsverpflichtungen in $t = 1$. Bei diesem Ansatz geht es darum, mit Hilfe eines replizierenden Portfolios ein Quantil der Verteilung des Marktwertes in $t = 1$ zu schätzen, um die Berechnung des notwendigen Risikokapitals zu erleichtern. Bei der traditionellen Bewertung der Verpflichtungen werden viele einjährige real-world Szenarien generiert. Am Ende des einjährigen Horizontes wird je Szenario eine risikoneutrale Bewertung der Verpflichtungen durchgeführt, was zu sogenannten "Nested Simulations" führt. Diese sind sehr zeitaufwendig. Ein Vorteil des replizierenden Portfolios könnte sein, dass merklich weniger Bewertungen der Verbindlichkeiten notwendig sein werden. Dieses replizierende Portfolio kann anschließend für die Bestimmung des benötigten Quantils herangezogen werden, da es sich im Vergleich zu den Versicherungsverpflichtungen deutlich schneller bewerten lässt.

Jedoch gibt es hierbei, im Vergleich zu den im Folgenden betrachteten Cash-Flow-Modellen, viele zusätzliche Einflüsse, die auf die Qualität der Replikation einwirken und somit beachtet werden müssen. Zum Beispiel nimmt die Genauigkeit durch Rundungsfehler ab. Diese Rundungsfehler werden durch die verschachtelten Simulationen verursacht, die zur Bestimmung des Marktwertes der Versicherungsverpflichtungen in $t = 1$ notwendig sind. Zudem ist ein Modellrisiko zu berücksichtigen, da Annahmen an das Neugeschäft getroffen werden müssen.

2.3 Match auf den zeitlichen Verlauf des Cash-Flows

Bei diesem Modell wird das Ziel verfolgt, den Verlauf der Zahlungsströme möglichst exakt zu treffen. Dazu wird der Verlauf der abdiskontierten Zahlungen betrachtet um ein replizierendes Portfolio so zu bestimmen, dass die Differenz der abdiskontierten Zahlungen von Verbindlichkeit und replizierendem Portfolio zu jedem Zeitpunkt möglichst gering ist⁹. Dies veranschaulicht Bild 2.1. Bei diesen Abbildungen wird an-

⁹Es muss nicht notwendigerweise mit abdiskontierten Zahlungen gearbeitet werden, aber es bringt zwei Vorteile mit sich. Zum einen wird durch die Diskontierung der Einfluss extremer Zah-

genommen, dass nur 2 mögliche Zustände (Up und Down) existieren. Die erste Abbildung zeigt den abdiskontierten Zahlungsstrom der Versicherungsverpflichtungen zu den Zeitpunkten 1, 2 und 3. Die nächsten beiden Grafiken zeigen die abdiskontierten Zahlungsströme zweier Finanzinstrumente. Das letzte Bild stellt den Vergleich zwischen Verbindlichkeit und replizierendem Portfolio, welches mit den Instrumenten 1 und 2 erstellt wurde, dar.

Das Modell, mit welchem solche Portfolios erstellt werden, wird im Folgenden beschrieben:

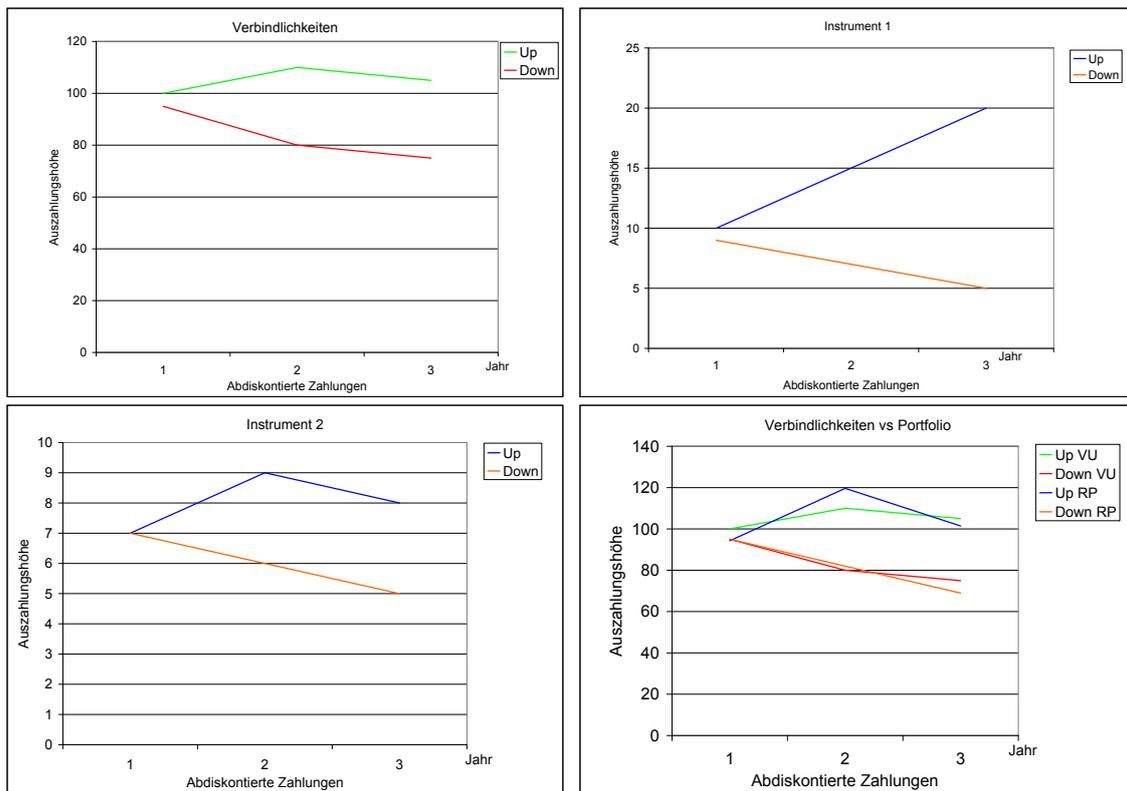


Abbildung 2.1: Vereinfachte Darstellung der Erstellung eines replizierenden Portfolios.

Allgemeines Modell:

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

lungsströme abgeschwächt, was die Replikationsqualität verbessert und zum anderen wird durch die Abdiskontierung implizit versucht, den Marktwert zu treffen, da es das Ziel ist, ein Portfolio zu finden, für welches gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T X_{t,\omega} e^{-\int_0^t r_u du} dt \right] \approx \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T CF_t e^{-\int_0^t r_u du} dt \right].$$

- χ die Menge der zulässigen Portfolios mit $\chi \subset \mathbb{R}^m$,
- ω ein Portfolio, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \chi$,
- CF_t den Cash-Flow der Versicherungsverbindlichkeit V zur Zeit $t \geq 0$,
- $X_{t,\omega}$ den Cash-Flow eines Portfolios ω zur Zeit $t \geq 0$.

Wie in Abschnitt 2.2 angenommen, wird nur von den diskreten Zahlungen $0, 1, \dots, T$ ausgegangen. Dann muss folgendes Optimierungsproblem gelöst werden:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=0}^T \nu \left((CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right) \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Ein Schätzer ω für diese Optimierungsaufgabe wird als replizierendes Portfolio RP bezeichnet. Hierbei ist ν eine beliebige, messbare Bewertungsfunktion mit den Eigenschaften $\nu(0) = 0$, $\nu \geq 0$, und $\nu(x)$ monoton wachsend für $|x| \nearrow$ (z.B. eine Norm oder Metrik), um den Wert der Abweichung zu messen.

Im Folgenden wird ν als die quadrierte euklidische Norm gewählt, d.h.

$$\nu = \|\cdot\|_2^2, \text{ im Folgenden } \|\cdot\|^2.$$

Damit lässt sich die Optimierungsfunktion folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=0}^T \left\| (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right\|^2 \right] &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=0}^T \left((CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \left[\begin{pmatrix} CF_0 - X_{0,\omega} \\ (CF_1 - X_{1,\omega}) e^{-\int_0^1 r_u du} \\ \vdots \\ (CF_T - X_{T,\omega}) e^{-\int_0^T r_u du} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} CF_0 - X_{0,\omega} \\ (CF_1 - X_{1,\omega}) e^{-\int_0^1 r_u du} \\ \vdots \\ (CF_T - X_{T,\omega}) e^{-\int_0^T r_u du} \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{Q}} \|(CF - X) D\|^2 \end{aligned}$$

Dabei haben die Bezeichner folgende Bedeutungen:

- $CF = (CF_0, \dots, CF_T)^T$ ist ein Vektor, welcher die Cash-Flows aus dem Unternehmen enthält.
- $X = (X_{0,\omega}, \dots, X_{T,\omega})^T$ beschreibt den Vektor der Cash-Flows des Portfolios und hat die Form

$$X = \left(\sum_{i=1}^m \omega_i Z_{i,0}, \dots, \sum_{i=1}^m \omega_i Z_{i,T} \right) =: Z \cdot \omega, \text{ mit}$$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{1,0} & Z_{2,0} & \cdots & Z_{m,0} \\ Z_{1,1} & Z_{2,1} & \cdots & Z_{m,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1,T} & Z_{2,T} & \cdots & Z_{m,T} \end{pmatrix},$$

der Matrix mit den Cash-Flows der einzelnen Finanzinstrumente.

- $D = \text{diag}(e^{-\int_0^t r_u du})_{t=0}^T$ ist eine Matrix, welche die Diskontierungsfaktoren speichert. Dabei wird $e^{-\int_0^0 r_u du} := 1$ gesetzt.

In diesem Abschnitt wird im Folgenden $\chi = \mathbb{R}^m$ angenommen. Unter Verwendung dieser Variablen, lautet das Optimierungsproblem nun

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\|(CF - Z\omega)D\|^2] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases} \quad (2.1)$$

Um ein geeignetes Portfolio zu finden, wird nun ein guter Schätzer benötigt. Dazu ist es zunächst notwendig, eine ausreichend große Zahl $n \in \mathbb{N}$ von unabhängigen Stichproben (Szenarien) für die Verläufe der Cash-Flows zu haben. Da in dem Kapitalmarktmodell in Abschnitt 2.1 angenommen wurde, dass alle Unsicherheiten durch einen d -dimensionalen Markov-Prozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ beschrieben werden und alle Cash-Flows messbare Funktionen von diesen sind, werden Stichproben von $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ benötigt, mit welchen sich die zugehörigen Cash-Flows bestimmen lassen. Diese Stichproben von $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ werden hier mit Y^i für jede Stichprobe $i = 1, \dots, n$ bezeichnet.

Seien nun n derartige Szenarien gegeben, d.h. es gibt von $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ die Stichproben Y^1, \dots, Y^n , mit deren Hilfe sich für jedes Szenario die folgenden Werte bestimmen lassen:

- Die zugehörigen Zahlungsströme CF^1, \dots, CF^n von CF .
- Die Zahlungsströme Z_i^1, \dots, Z_i^n der betrachteten Finanzinstrumente $i \in \{1, \dots, m\}$ die alle linear unabhängig voneinander sind¹⁰. Dabei wird angenommen, dass $m < (T + 1)n$ ist.
- Der Numéraire B_t^1, \dots, B_t^n für alle Zeitpunkte $t \in \{0, \dots, T\}$, mit $B_t^j = e^{\int_0^t r_u^j du}$, wobei r_t^j die zu Szenario j zugehörige stetige Short-Rate zum Zeitpunkt t ist.

Nachfolgend werden zur Vereinfachung diese Bezeichnungen verwendet:

- $V = (V_i)_{i=1, \dots, (T+1)n} = (CF_0^1, CF_0^2, \dots, CF_0^n, CF_1^1, \dots, CF_T^n)^T$,
der Vektor der Cash-Flows der Verbindlichkeiten über alle Szenarien.

¹⁰Dies ist nur eine theoretische Annahme, damit die Matrix $M^T D^2 M$, welche für die Lösung benötigt wird, invertierbar ist. In der Praxis werden die einzelnen Finanzinstrumente korreliert sein. Dies führt aber nicht unbedingt dazu, dass die Matrix singulär wird. In diesem Fall kann entweder die Anzahl der Finanzinstrumente reduziert, oder statt der Inversen eine verallgemeinerte Inverse verwendet werden, was aber dazu führt, dass sich die Rechenzeit erhöht.

Beweis.

Der Beweis basiert auf (Hea05), wurde aber um die Diskontierung erweitert und wird deshalb ausführlicher behandelt.

Da die Zahlungsströme der ausgewählten Finanzinstrumente linear unabhängig sind, folgt, dass M vollen Rang besitzt, d.h. $\text{Rang}(M) = m$.

Es muss ein Schätzer gefunden werden, so dass folgender Erwartungswert minimiert wird:

$$\mathbb{E}_{\Omega} \|(CF - X) D\|^2 = \sum_{t=0}^T \mathbb{E}_{\Omega} \left[\left(CF_t - \sum_{j=1}^m (\omega_j Z_{j,t}) \right)^2 \left(\frac{1}{B_t} \right)^2 \right].$$

Wird nun ein einfacher Momentenschätzer verwendet¹¹, um den Erwartungswert davon zu schätzen, so gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{t=0}^T \left[\left(\left(CF_t^k - \sum_{j=1}^m (\omega_j Z_{j,t}^k) \right) e^{-\int_0^t r_u^k du} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{(T+1) \cdot n} \left[\left(\left(V_i - \sum_{j=1}^m (\omega_j M_{i,j}) \right) d_{i,i} \right)^2 \right] =: e(\omega), \end{aligned}$$

da $e^{-\int_0^t r_u^k du} = \frac{1}{B_t^k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $t \in 0, \dots, T$.

Daraus folgt, dass $e(\omega)$ eine quadratische Form bezüglich ω ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\left(\frac{\partial e(\omega)}{\partial \omega_l} \right)_{l=1}^m = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 e(\omega)}{\partial \omega_l \partial \omega_r} \right)_{l,r=1}^m > 0$ für $\omega = \hat{\omega}$ ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(\omega)}{\partial \omega_l} &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{(T+1) \cdot n} \left(V_i - \sum_{j=1}^m (\omega_j M_{i,j}) \right) d_{i,i}^2 (-M_{i,l}) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{(T+1) \cdot n} (d_{i,i}^2 V_i - d_{i,i}^2 M_{i,\vec{\omega}}) (-M_{i,l}) \\ &= \frac{-2}{n} \sum_{i=1}^{(T+1) \cdot n} M_{i,l} ((D^T D V)_i - (D^T D M \vec{\omega})_i) \\ &= \frac{-2}{n} M^T (D^T D V - D^T D M \omega)_l \\ &= \frac{-2}{n} (M^T D^T D V - M^T D^T D M \omega)_l \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$M_{i,\cdot} = (M_{i,1}, \dots, M_{i,m})$ bezeichnet dabei die i -te Zeile der Matrix M . Da diese Gleichung für alle $l \in \{1, \dots, m\}$ gelten muss, erhält man, unter Vernachlässigung

¹¹Es sei $\sum_{t=0}^T \left(CF_t - \sum_{j=1}^m (\omega_j Z_{j,t}) \right)^2 \frac{1}{B_t} := Y$ eine Zufallsvariable. Dann ist der Momentenschätzer $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ für den Erwartungswert von Y erwartungstreu, da $\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right] = \frac{n}{n} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y]$.

des Vorfaktors $\frac{-2}{n} \neq 0$, folgendes:

$$\begin{aligned} (M^T D^T D V - M^T D^T D M \omega) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\omega} &= (M^T D^T D M)^{-1} M^T D^T D V, \end{aligned}$$

wobei $M^T D^T D M$ invertierbar ist, da D eine Diagonalmatrix mit vollem Rang ist, da $\frac{1}{B_t^i} > 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ und alle Szenarien $i \in \{1, \dots, n\}$, sowie M nach Annahme ebenfalls vollen Rang besitzt. Da $D^T = D$ ist, ist $\hat{\omega}$ der gesuchte Schätzer.

Noch zu zeigen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 e(\omega)}{\partial \omega_l \partial \omega_r} \right)_{l,r=1}^m &> 0 \text{ für } \omega = \hat{\omega} \\ \left(\frac{\partial^2 e(\omega)}{\partial \omega_l \partial \omega_r} \right)_{l,r=1}^m &= \frac{2}{n} M^T D^T D M > 0, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e(\omega)}{\partial \omega_l \partial \omega_r} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial e(\omega)}{\partial \omega_l} \right)}{\omega_r} \\ &= \frac{-2 \partial (M^T D^T D V - M^T D^T D M \omega)_l}{n \partial \omega_r} = \frac{2}{n} (M^T D^T D M)_{l,r} \end{aligned}$$

und für alle $x \in \mathbb{R}^{(T+1)n}$ gilt $x^T M^T D^T D M x = \|DMx\|^2 > 0$, da DM vollen Rang hat und deswegen $DMx \neq 0$ für alle $x \neq 0$.¹²

q. e. d.

2.4 Match an den Barwert der Cash-Flows

In Abschnitt 2.3 war das Ziel, den Verlauf der Zahlungsströme möglichst exakt zu treffen. Dabei treten ein theoretisches und ein praktisches Problem auf.

Das theoretische Problem dabei ist, dass bei einem Verlaufs-Modell die Tatsache nur unzureichend berücksichtigt wird, dass Zusammenhänge zwischen den einzelnen Jahren existieren. Eine Ursache dafür sind sogenannte Managementregeln, mit denen diese Zusammenhänge absichtlich erzeugt werden. Beispielsweise wird eine gute Entwicklung des Kapitalmarktes in einem Jahr nicht sofort dazu führen, dass die Rendite für die Versicherten signifikant erhöht wird. Dies wird erst nach mehreren guten Jahren der Fall sein. Auf der anderen Seite wird eine schlechte Entwicklung in einem Jahr auch nicht sofort einen dauerhaften und signifikanten Rückgang der

¹²Hieraus folgt sofort die Invertierbarkeit von $M^T D^T D M$.

Rendite zur Folge haben. Das Versicherungsunternehmen versucht die Rendite zu glätten. Dazu stehen dem Versicherungsunternehmen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, wie z.B. die freie RfB. Diese Glättung hat zur Folge, dass Cash-Flows, die dieselben Ursachen haben, zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen. Um dieses Problem zu lösen, werden zusätzliche, pfadabhängige Instrumente benötigt. Kapitel 4.2.1 geht auf das Problem, dass bei den meisten Kapitalmarktinstrumenten keine solche Glättung existiert, näher ein.

Das praktische Problem in Abschnitt 2.3 ist, dass die Größe der Matrizen, die zur Bestimmung des replizierenden Portfolios benötigt wird, mit der Anzahl der Zeitschritte zunimmt und die Berechnungsdauer somit stark ansteigt.

Deswegen ist es sinnvoll zu überlegen, wie das Optimierungsproblem anders modelliert werden kann.

Der Ansatz, der in diesem Kapitel betrachtet wird, mag zunächst unzureichend erscheinen, er kann jedoch auch äußerst hilfreich sein. Es ist nun nicht mehr das Ziel zu jedem Zeitpunkt eine möglichst gute Approximation an die Zahlungsströme zu erreichen, sondern „nur“ den Barwert des Zahlungsstromes zu approximieren. Dieses Modell wird im Folgenden als *PV*-Modell bezeichnet. *PV* steht für *P*resent *V*alue und bedeutet Barwert.

Zunächst wird ein allgemeines Modell aufgestellt. Alle folgenden Ergebnisse gelten hierbei auch für beliebige Zahlungszeitpunkte.

Allgemeines Modell:

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- χ ist die Menge der zulässigen Portfolios mit $\chi \subset \mathbb{R}^m$.
- ω bezeichnet ein Portfolio, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \chi$.
- CF_t sei der Cash-Flow der Verpflichtungen V zur Zeit $t \geq 0$, und
- $X_{t,\omega}$ der Cash-Flow des replizierenden Portfolios ω zur Zeit $t \geq 0$.

Dann ist das Problem folgendermaßen definiert:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} \left[\nu \left(\sum_{t=0}^T (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r(u) du} \right) \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Ein Schätzer ω für diese Optimierungsaufgabe wird als replizierendes Portfolio *RP* bezeichnet. Der Unterschied zu Abschnitt 2.3 besteht darin, dass die Bewertungsfunktion ν nun außerhalb der Summe steht, woraus folgt, dass ν nicht mehr die Differenz der einzelnen Zahlungen, sondern die Differenz der Barwerte bewertet. Analog zu Abschnitt 2.3 wird $\nu = \|\cdot\|_2^2 =: \|\cdot\|^2$ gesetzt.

Für die Erwartungswertformel erhält man somit

$$\mathbb{E}_{\Omega} \left[\left\| \sum_{t=0}^T (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right\|^2 \right] = \mathbb{E}_{\Omega} \left[\left(\sum_{t=0}^T (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right)^2 \right]$$

und das Optimierungsproblem lässt sich wie folgt beschreiben:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} \left[\left(\sum_{t=0}^T (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \right)^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Die Formel in der Klammer lässt sich folgendermaßen auflösen:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^T (CF_t - X_{t,\omega}) e^{-\int_0^t r_u du} \\ &= \sum_{t=0}^T CF_t e^{-\int_0^t r_u du} - \sum_{t=0}^T X_{t,\omega} e^{-\int_0^t r_u du}. \end{aligned}$$

Es ist gut zu erkennen, dass beide Formeln Barwert-Formeln mit den zufälligen Zahlungen CF_t , bzw. $X_{t,\omega}$ und dem Diskontierungsfaktor $e^{-\int_0^t r_u du}$ sind.

Ein beliebtes Vorgehen in der Praxis ist es, alle Zahlungen, die zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ anfallen, mit dem risikolosen Zins aufzuzinsen, sodass eigentlich nur noch eine Zahlung am Ende des Zahlungszeitpunktes zu betrachten ist, von welcher den Barwert gebildet wird. Diese fiktive Zahlung wird als *Terminal Cash-Flow* bezeichnet¹³.

Definition 1 (Terminal Cash-Flow (TCF)).

Der Terminal Cash-Flow (kurz: TCF) eines Zahlungsstroms $a = (a_0, \dots, a_T)$ ist definiert durch:

$$a^{Term} = \sum_{t=0}^T a_t \frac{B_T}{B_t}, \text{ mit } B_t = e^{\int_0^t r_u du}$$

Ein Terminal Cash-Flow ist somit die Summe aller Zahlungen, aufgezinst auf den letzten Zahltag.

Zwei Zahlungsströme a und b werden als äquivalent bezeichnet, falls beide denselben TCF aufweisen¹⁴.

¹³Siehe (Aub07) und (Oea07).

¹⁴Siehe (Oea07).

Durch Umformung von $\sum_{t=0}^T CF_t e^{-\int_0^t r_u du}$ und analog für $\sum_{t=0}^T X_{t,\omega} e^{-\int_0^t r_u du}$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^T CF_t e^{-\int_0^t r_u du} &= \sum_{t=0}^T CF_t e^{-\int_0^t r_u du} \frac{e^{\int_0^T r_u du}}{e^{\int_0^T r_u du}} \\ &= \sum_{t=0}^T \left(CF_t \frac{B_T}{B_t} \right) e^{-\int_0^T r_u du} = CF^{Term} e^{-\int_0^T r_u du}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser TCF s lässt sich ein ähnliches Modell, das sogenannte TCF -Modell, aufstellen, welches auch in der Praxis häufig angewendet wird:

$$(OP_{TCF}) \begin{cases} \mathbb{E}_Q \left[(CF^{Term} - X_\omega^{Term})^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi, \end{cases}$$

wobei

$$CF^{Term} = \sum_{t=0}^T CF_t \frac{B_T}{B_t}$$

und

$$X_\omega^{Term} = \sum_{t=0}^T X_{t,\omega} \frac{B_T}{B_t} = Z^{Term}_\omega$$

die Terminal Cash-Flows von $(CF_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ bzw. $(X_{t,\omega})_{t \in \{0, \dots, T\}}$ beschreiben und

$$Z^{Term} = \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^T Z_{1,t} \frac{B_T}{B_t} \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^T Z_{m,t} \frac{B_T}{B_t} \end{pmatrix}^T$$

der Vektor mit den TCFs der m betrachteten Finanzinstrumente ist.

Das PV -Modell kann ähnlich zum TCF -Modell dargestellt werden, da der Barwert eines Zahlungsstromes unabhängig davon ist, ob dieser direkt oder über die Abdiskontierung des TCF s bestimmt wird. Somit lautet das PV -Optimierungsproblem nun

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_Q \left[\left((CF^{Term} - X_\omega^{Term}) e^{-\int_0^T r_u du} \right)^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Um gleichzeitig auch Ergebnisse für das TCF -Modell zu erhalten, wird im Folgenden zur Bestimmung des Barwertes eines Zahlungsstromes der Terminal Cash-Flow bestimmt.

Damit aber die Ergebnisse, welche sich unter Verwendung des TCF s ergeben, überhaupt aussagekräftig sind, ist noch sicherzustellen, dass sich die TCF s stochastisch so verhalten, wie die ursprünglich betrachteten Cash-Flows. Dies garantiert der folgende Satz aus (Oea07):

Satz 1.

Ein Cash-Flow $a = (a_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ und dessen zugehöriger TCF a^{Term} haben immer denselben Gegenwartswert, d.h. ihr stochastisches Verhalten ist identisch, also $V_s^a | \mathcal{F}_s = V_s^{a^{Term}} | \mathcal{F}_s \forall s \in 0, \dots, T$.

Dies liegt daran, dass der Zinssatz nicht den Wert verändert.

Beweis.

Dieser Beweis ist gültig, sowohl für „real-world“, als auch für risikoneutrale Szenarien, weshalb hier nicht zwischen den Maßen unterschieden wird. $\varphi(t)$ steht hier entweder für den Deflator („real-world“) bzw. den Diskont (risikoneutral).

B_t ist eine Finanzanlage, ein Geldmarktkonto, weswegen $\varphi(t)B_t$ ein Martingal unter der natürlichen Filtration und somit auch unter der Standardfiltration \mathcal{F}_t ist, also gilt

$$\mathbb{E}(\varphi(s)B_s | \mathcal{F}_t) = \varphi(t)B_t, \text{ für alle } s > t.$$

Zunächst wird ein Cash-Flow $(a_t)_{t \in [0, T]}$ betrachtet, welcher nur zum Zeitpunkt $t \leq T$ eine Auszahlung hat. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} a_t &= a_t \frac{B_t \varphi(t)}{B_t \varphi(t)} = a_t \frac{1}{B_t \varphi(t)} \mathbb{E}(B_T \varphi(T) | \mathcal{F}_t) \\ &= \varphi(t)^{-1} \mathbb{E}\left(a_t \frac{B_T}{B_t} \varphi(T) | \mathcal{F}_t\right) \\ &= \varphi(t)^{-1} \mathbb{E}(a^{Term} \varphi(T) | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Marktwert des Cash-Flows zur Zeit $t = 0$ bestimmen als:

$$\begin{aligned} V^{a_t} &= \mathbb{E}(a_t \varphi(t)) = \mathbb{E}(\varphi(t) \varphi(t)^{-1} \mathbb{E}(a^{Term} \varphi(T) | \mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}(a^{Term} \varphi(T)) = V^{a^{Term}} \end{aligned}$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass die Werte von a_t und a^{Term} über die Zeit identisch sind, d.h. dass für alle $0 \leq s \leq T$ gilt $(V_s^{a_t} | \mathcal{F}_s) = (V_s^{a^{Term}} | \mathcal{F}_s)$.

1. Fall: $s \leq t$

$$\begin{aligned} V_s^{a_t} | \mathcal{F}_s &= \varphi(s)^{-1} \mathbb{E}(\varphi(t) a_t | \mathcal{F}_s) = \varphi(s)^{-1} \mathbb{E}(\varphi(t) \varphi(t)^{-1} \mathbb{E}(a^{Term} \varphi(T) | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) \\ &= \varphi(s)^{-1} \mathbb{E}(\varphi(T) a^{Term} | \mathcal{F}_s) = V_s^{a^{Term}} | \mathcal{F}_s \end{aligned}$$

2. Fall: $s \geq t$

da a_t schon ausgezahlt wurde (auf das Geldmarktkonto), folgt, dass $V_s^{a_t} | \mathcal{F}_s = a_t \frac{B_s}{B_t}$

$$\begin{aligned} V_s^{a^{Term}} | \mathcal{F}_s &= \varphi(s)^{-1} \mathbb{E}(\varphi(T) a^{Term} | \mathcal{F}_s) = \varphi(s)^{-1} \mathbb{E}\left(a_t \frac{B_T}{B_t} \varphi(T) | \mathcal{F}_s\right) \\ &= \varphi(s)^{-1} \frac{a_t}{B_t} \mathbb{E}(\varphi(T) B_T | \mathcal{F}_s) = \varphi(s)^{-1} \frac{a_t}{B_t} B_s \varphi(s) \\ &= a_t \frac{B_s}{B_t} = V_s^{a_t} | \mathcal{F}_s. \end{aligned}$$

Betrachtet wird nun ein Cash-Flow $(a_t)_{t \in [0, T]}$ mit mehr als einem Auszahlungszeitpunkt. Durch die Linearität des bedingten Erwartungswertes folgt die Behauptung sofort.

q. e. d.

Gleiches gilt offensichtlich auch für den Barwert der Zahlungsströme. Nachdem dies sichergestellt ist, kann das Modell

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_Q \left[\|(CF^{Term} - Z^{Term} \omega) D\|^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi, \end{cases} \quad (2.2)$$

problemlos angewendet werden.

Für den Rest in diesem Abschnitt wird angenommen, dass $\chi = \mathbb{R}^m$ gilt.

Im Folgenden wird wieder ein Schätzer für das replizierende Portfolio gesucht. Der Schätzer kann hierbei auch direkt bestimmt werden. Dazu wird angenommen, dass von $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ $n \in \mathbb{N}$ Szenarien (Stichproben) Y^1, \dots, Y^n existieren, mit deren Hilfe sich für jedes Szenario folgende Werte bestimmen lassen:

- Die Zahlungsströme aus dem Versicherungsunternehmen CF^1, \dots, CF^n und die dazugehörigen TCF CF^{Term} .
- Die Zahlungsströme Z_i^1, \dots, Z_i^n der ausgewählten Finanzinstrumente, sowie die zugehörigen Terminal Cash-Flows Z_i^{Term} $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $m < n$, welche linear unabhängig voneinander sind¹⁵.

¹⁵Die ist wie in Abschnitt 2.3 nur eine theoretische Annahme, damit die Matrix $M_{TCF}^T D_{TCF}^2 M_{TCF}$ invertierbar ist. In der Praxis werden die einzelnen Finanzinstrumente korreliert sein. Dies führt aber nicht unbedingt dazu, dass die Matrix singulär wird. Falls die Matrix singulär sein sollte, kann entweder die Anzahl der Finanzinstrumente reduziert, oder statt der Inversen eine verallgemeinerte Inverse verwendet werden, was aber dazu führt, dass sich die Rechenzeit erhöht.

- Die Zinsen B_t^1, \dots, B_t^n für alle Zeitpunkte $t \in \{0, \dots, T\}$, mit $B_t^j = e^{\int_0^t r_u^j du}$, wobei r_t^j der zu Szenario $j \in \{0, \dots, T\}$ zugehörige stetige Zins zur Zeit t ist.

Bezeichnet wird mit

- $V_{TCF} = (V_i)_{i=1, \dots, n} = (CF^{Term,1}, CF^{Term,2}, \dots, CF^{Term,n})^T$ den Vektor der Terminal Cash-Flows der Verbindlichkeiten über alle Szenarien,
- $M_{TCF} = (M_{i,j})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ die TCF -Matrix aller betrachteten Finanzinstrumente über alle Szenarien,

$$M_{TCF} = \begin{pmatrix} Z_1^{Term,1} & Z_2^{Term,1} & \dots & Z_m^{Term,1} \\ Z_1^{Term,2} & Z_2^{Term,2} & \dots & Z_m^{Term,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1^{Term,n} & Z_2^{Term,n} & \dots & Z_m^{Term,n} \end{pmatrix},$$

und mit

- $D_{TCF} = (d_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$,

$$D_{TCF} = \begin{pmatrix} \frac{1}{B_T^1} & & & \\ & \frac{1}{B_T^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{B_T^n} \end{pmatrix}$$

die Diskontierungs-Matrix.

Der Schätzer $\hat{\omega}$ für die Gewichte ω des replizierenden Portfolios ist die Lösung des folgenden Optimierungsproblems, welches auf den n betrachteten Szenarien beruht:

$$(OP) \begin{cases} \|(V_{TCF} - M_{TCF}\omega) D_{TCF}\|^2 \rightarrow \min, \\ \omega \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Als Lösung $\hat{\omega}$ erhält man:

$$\hat{\omega} = (M_{TCF}^T D_{TCF}^2 M_{TCF})^{-1} M_{TCF}^T D_{TCF}^2 V.$$

Bewiesen wird dies analog zu Abschnitt 2.3, unter Beachtung, dass in diesem Fall nur eine Zahlung, nämlich der TCF zum Zeitpunkt T , d.h. nur ein Zahlungszeitpunkt statt $(T + 1)$ Zeitpunkte betrachtet wird. Damit folgt sofort die Behauptung.

In dem Modell aus Abschnitt 2.3, bei welchem versucht wurde, den gesamten Cash-Flow-Verlauf gut zu fitten, hatten die Matrizen M und D $(T + 1)n$ Zeilen, da für

jeden Cash-Flow-Zeitpunkt $0, \dots, T$ ein Wert benötigt wurde.

In diesem Modell haben die Matrizen M_{TCF} und D_{TCF} nur n Zeilen, der Datenumfang wurde somit um den Faktor $(T + 1)$ verringert. Dadurch lassen sich Berechnungen schneller durchführen, da die Rechenzeit mit zunehmender Dimension ansteigt.

Die Ergebnisse werden der Anforderung genügen, den Marktwert der Verpflichtungen schätzen zu können. Dies wird in Kapitel 4 gezeigt, in welchem einige Portfolios über diesen Ansatz bestimmt werden. Es wurde zwar darauf verzichtet, den Verlauf der Cash-Flows möglichst gut zu approximieren, aber nicht darauf, zu versuchen ein replizierendes Portfolio zu erstellen, dessen Marktwert sich möglichst so verhält wie der Marktwert der Versicherungsverbindlichkeiten. Dies garantiert Satz 1, da der Wert des replizierenden Portfolios - welches nach der *PV*-Methode bestimmt wurde - immer den selben Wert wie ein beliebiges replizierendes Portfolio mit demselben *PV* hat.¹⁶

Da allerdings weniger Informationen als im Verlaufs-Modell verwendet wurden, bedeutet das, dass ein replizierendes Portfolio, welches über die *PV*-Methode bestimmt wird, in der Regel weniger Informationen liefert, als ein Portfolio, welches den zeitlichen Verlauf der Cash-Flows berücksichtigt. Der Informationsverlust bezieht sich auf den Verlauf des Cash-Flows. Im Allgemeinen wird mit einem *PV*-Portfolio keine Aussagen über die Zukunft gemacht werden können, sondern nur über den aktuellen Zustand. Dies liegt daran, dass Zahlungen der Vergangenheit keinen Einfluss auf den Marktwert haben¹⁷. Es könnte beispielsweise sein, dass das replizierende Portfolio nur aus Finanzinstrumenten besteht, die nur eine sehr kurze Laufzeit haben. In naher Zukunft hätte dieses Portfolio einen Wert von 0, nicht aber die Versicherungsverbindlichkeiten. Vor der Erstellung des Portfolios muss deshalb genau überlegt werden, wofür das Portfolio verwendet werden soll.

2.5 Ein Bucket-Modell

Bei einem Bucket-Modell wird eine Unterteilung der Betrachtungsdauer in verschiedene Klassen vorgenommen, für welche separat ein Wert bestimmt wird. Eine solche Klasse wird als **Bucket** bezeichnet.

¹⁶Dies kann ein beliebiges replizierendes Portfolio sein, da der Barwert der beiden Portfolien identisch ist, wenn ihre *PV* (dies ist eine Zufallsvariable) fast sicher gleich sind. Dies folgt automatisch aus der arbitragefreiheit des zugrunde liegenden Kapitalmarktmodells und da nach Annahme es sich um einen risikoneutralen Raum handelt, wird der Marktwert durch $\mathbb{E}_\Omega \left[\sum_{t=0}^T X_t \frac{1}{B_t} \right]$ berechnet.

¹⁷Dies ist kein Widerspruch zu Satz 1, da in diesem Satz die Vergangenheit berücksichtigt wurde.

Falls das erste Modell zu restriktiv erscheint, da darin die Managementregeln, wie z.B. die Entscheidung über die Guthabensverzinsung der Versicherten, durch die replizierenden Portfolios nur unzureichend abgebildet werden können, aber dennoch gewünscht wird, dass sich der Verlauf der Cash-Flows aus dem Versicherungsunternehmen und dem des replizierenden Portfolios ähneln, kann auf dieses Zwischenmodell zurückgegriffen werden, welches beide vorherigen Modelle kombiniert.

Dazu wird eine disjunkte Zerlegung von $[0, T]$ in k Teilintervalle $I_b := [t_{b-1}, t_b)$, für $b \in \{1, \dots, k-1\}$ und $[t_{k-1}, t_k]$ erstellt, wobei $t_0 = 0$ und $t_k = T$ gesetzt wird. Die diskreten Zahlungszeitpunkte in Bucket $b \in \{1, \dots, k-1\}$ werden mit $0_b, 1_b, 2_b, \dots, T_b$, $b \in \{1, \dots, k-1\}$ bezeichnet. Die Anzahl der Zeitpunkte in Bucket b sei $n_b \forall b \in \{1, \dots, k-1\}$ um Verwechslungen mit T_b zu vermeiden.

Um die Abweichung zu messen, wird zusätzlich für jedes Intervall I_b eine Bewertungsfunktion ν_b mit den Eigenschaften $\nu_b(0) = 0$, $\nu_b \geq 0$ und $\nu_b(x)$ monoton wachsend für $|x| \nearrow$ für alle $b \in \{1, \dots, k\}$ ausgewählt.

Ziel ist es also, ein einziges replizierendes Portfolio zu erstellen, welches versucht, den Wert jedes einzelnen Buckets zu treffen. Dabei wird das Portfolio nur einmal zur Zeit $t = 0$ bestimmt. Damit kann das allgemeine Modell aufgestellt werden:

Allgemeines Modell:

Es bezeichnet

- χ die Menge der zulässigen Portfolios mit $\chi \subset \mathbb{R}^m$,
- ω ein Portfolio, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \chi$,
- CF_t den Cash-Flow der Verpflichtungen V zur Zeit $t \geq 0$, und
- $X_{t,\omega}$ den Cash-Flow eines Portfolios ω zur Zeit $t \geq 0$.

Dann sieht das Optimierungsproblem folgendermaßen aus:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} \left[\sum_{b=1}^k \nu_b \left(\sum_{t=0}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b,\omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du} \right) \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Des Weiteren wird ν_b als die quadrierten euklidischen Norm gewählt, also $\nu_b = \|\cdot\|_2^2 =: \|\cdot\|^2 \forall b \in \{1, \dots, k-1\}$.

Setzt man dies in den Erwartungswert ein, d.h.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\Omega} \left[\sum_{b=1}^k \left\| \sum_{t=0}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b,\omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du} \right\|^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\Omega} \left[\sum_{b=1}^k \left(\sum_{t=0}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b,\omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

gestaltet sich das Optimierungsproblem wie folgt:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_\Omega \left[\sum_{b=1}^k \left(\sum_{t=0}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b, \omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du} \right)^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Analog zu Abschnitt 2.4 kann $\sum_{t=1}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b, \omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du}$ für alle $b \in \{1, \dots, k\}$ in $\sum_{t=1}^{n_b} CF_{t_b} \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du}$ und $\sum_{t=1}^{n_b} X_{t_b, \omega} \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du}$ aufgeteilt und die jeweiligen Terminal Cash-Flows bestimmt werden. In diesem Fall wird der TCF nicht für das Laufzeitende bestimmt, sondern für das jeweilige Intervall-Ende T_b . Diese Terminal Cash-Flows (zur besseren Abgrenzung zu Abschnitt 2.4 als Bucket-Cash-Flow bezeichnet) werden mit CF^{Term_b} , bzw $X_\omega^{Term_b}$ bezeichnet, wobei sie sich folgendermaßen $\forall b \in \{1, \dots, k\}$ berechnen lassen:

$$CF^{Term_b} = \sum_{t=0}^{n_b} CF_{t_b} \frac{B_{T_b}}{B_{t_b}},$$

und analog für $X_\omega^{Term_b}$.

Durch Umformung von

$$\sum_{t=0}^{n_b} (CF_{t_b} - X_{t_b, \omega}) \cdot e^{-\int_0^{t_b} r(u) du}$$

in

$$(CF^{Term_b} - X_\omega^{Term_b}) e^{-\int_0^{T_b} r_u du},$$

erhält man folgendes Optimierungsproblem:

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_\Omega \left[\sum_{b=1}^k \left((CF^{Term_b} - X_\omega^{Term_b}) \cdot e^{-\int_0^{T_b} r(u) du} \right)^2 \right] \rightarrow \min, \\ \omega \in \chi. \end{cases}$$

Wie sich leicht erkennen lässt, entspricht das Bucket-Modell einem Cash-Flow-Modell gemäß Abschnitt 2.3 mit den Auszahlungszeitpunkten T_b , $b \in \{1, \dots, k\}$. Somit wird das replizierende Portfolio - wenn n Szenarien betrachtet werden und $\chi = \mathbb{R}^m$ gesetzt wird - beschrieben durch:

$$\hat{\omega} = (M_B^T D_B^2 M_B)^{-1} M_B^T D_B^2 V_B,$$

wobei

- $V_B = (V_b)_{i=b, \dots, k \cdot n}$
 $= (CF^{Term_{1,1}}, CF^{Term_{1,2}}, \dots, CF^{Term_{1,n}}, CF^{Term_{2,1}}, \dots, CF^{Term_{k,n}})^T$
 der Vektor der Bucket-Cash-Flows der Verbindlichkeiten über alle Szenarien,

Wenn zusätzlich Nebenbedingungen berücksichtigt werden sollen, verändern sich die Optimierungsprobleme zu:

- **Cash-Flow-Modell**

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} [\|(CF - Z\omega)D\|^2] \rightarrow \min, \\ f(\omega) \leq 0, \\ g(\omega) = 0, \\ \omega \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

- **PV-Modell**

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} [\|(CF^{Term} - Z^{Term}\omega)D\|^2] \rightarrow \min, \\ f(\omega) \leq 0, \\ g(\omega) = 0, \\ \omega \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

mit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Sollen beispielsweise von der m -ten Finanzanlage mindestens 10 Anteile gehalten werden, dann wird eine Nebenbedingung vom Typ $f(\omega) \leq 0$ benötigt, wobei $f(\omega) = 10 - \omega$ wäre.

In einem anderen Fall, in dem z.B. der Wert des Portfolios den Wert $MV \in \mathbb{R}$ haben soll, bedarf es einer Nebenbedingung der Form $g(\omega) = 0$ mit $g(\omega) = \sum_{i=1}^m S_{i,0} - MV$.

Hier sollte beachtet werden, dass in den vorangegangenen Abschnitten, sofern keine Annahmen bezüglich χ vorlagen, angenommen wurde, dass $\omega \subset \mathbb{R}^m$ gilt. Deswegen wird angenommen, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq 0, g(x) = 0\} \subseteq \chi$$

gilt, was bedeutet, dass die Restriktionen, die zu $\chi \subset \mathbb{R}^m$ geführt haben, implizit schon Nebenbedingungen der obigen beiden Formen waren und deswegen statt mit χ mit \mathbb{R}^m fortgefahren wird.

Um eine Lösung des Optimierungsproblems zu erhalten, werden geeignete, aus der OR bekannte Optimierungsverfahren gewählt (z.B. falls f konvex, Aktive-Mengen-Verfahren oder ein Abstiegsverfahren)¹⁸.

Im Folgenden werden nur lineare Nebenbedingungen zu betrachten, die exakt getroffen werden sollen. In diesem Fall lautet das Problem dann:

¹⁸Siehe zum Beispiel (Alt02).

- **Cash-Flow-Modell**

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} [\|(CF - Z\omega)D\|^2] \rightarrow \min, \\ A\omega = b, \\ \omega \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

- **PV-Modell**

$$(OP) \begin{cases} \mathbb{E}_{\Omega} [\|(CF^{Term} - Z^{Term}\omega)D\|^2] \rightarrow \min, \\ A\omega = b, \\ \omega \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $b \in \mathbb{R}^l$ und

$$g(\omega) = A\omega - b$$

gilt. Wird eine Stichprobe von n Szenarien betrachtet, kann der Erwartungswert durch den Momentenschätzer ersetzt werden, wobei der Vorfaktor $\frac{1}{n}$ weggelassen wird, da dieser bei der Minimierung irrelevant ist:

- **Cash-Flow-Modell**

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{(T+1)n} \left[\left(\left(CF^i - \sum_{j=1}^m (\omega_j M_{i,j}) \right) d_{i,i} \right)^2 \right] \\ &= \|(V - M\omega)D\|^2 = (V - M\omega)^T D^T D (V - M\omega) \\ &= V^T D D V - 2V^T D D M \omega + \omega^T M^T D D M \omega \\ &= \omega^T Q \omega + c\omega + d \rightarrow \min \\ &\Leftrightarrow \\ &F(\omega) := \omega^T Q \omega + c\omega \rightarrow \min. \end{aligned}$$

- **PV-Modell**

Die hier verwendeten Matrizen werden eigentlich mit M_{TCF} , D_{TCF} und V_{TCF} bezeichnet. Im Folgenden werden hierfür jedoch die Bezeichnungen M , D und V verwendet.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\left(\left(CF^{Term,i} - \sum_{j=1}^m (\omega_j M_{i,j}) \right) d_{i,i} \right)^2 \right] \\ &= \|(V - M\omega)D\|^2 = (V - M\omega)^T D^T D (V - M\omega) \\ &= V^T D D V - 2V^T D D M \omega + \omega^T M^T D D M \omega \\ &= \omega^T Q \omega + c\omega + d \rightarrow \min \\ &\Leftrightarrow \\ &F(\omega) := \omega^T Q \omega + c\omega \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Dabei ist $Q = M^T D^2 M$, $c = -2V^T D^2 M$ und $d = V^T D^2 V$. Wird $h \in \mathbb{N}$ auf $(T + 1) \cdot n$ im Falle des Cash-Flow-Modelles, bzw. auf n im Falle des PV -Modells gesetzt, so kann im Folgenden mit einem gemeinsamen Modell fortgefahren werden, wenn berücksichtigt wird, dass $M \in \mathbb{R}^{h \times m}$ und $D \in \mathbb{R}^{h \times h}$ ist:

$$(OP) \begin{cases} F(\omega) = \omega^T Q \omega + c \omega \rightarrow \min, \\ A \omega = b, \\ \omega \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Dies ist ein quadratisches Optimierungsproblem. Nun wird Q betrachtet. Allgemein kann festgehalten werden, dass Q symmetrisch ist, da

$$\begin{aligned} Q^T &= (M^T D^2 M)^T = (M^T D^T D M)^T \\ &= M^T D^T (D^T)^T (M^T)^T = M^T D^T D M = M^T D^2 M = Q. \end{aligned}$$

Q ist außerdem positiv semi-definit, da für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned} x^T Q x &= x^T (M^T D^2 M) x \\ &= x^T (M^T D^T D M) x = \|DMx\|_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

für $DMx \in \mathbb{R}^h$. Somit gilt es ein quadratisches Optimierungsproblem zu lösen. Dieses Problem ist lösbar, wenn eine der zwei Bedingungen gilt¹⁹:

1. $F(\omega) = \omega^T Q \omega + c \omega$ ist auf dem zulässigen Bereich nach unten beschränkt.
2. M hat vollen Rang, woraus folgt, dass Q symmetrisch positiv definit ist²⁰. In diesem Fall ist das Minimum auch eindeutig.

Es wird wie in den vorangegangenen Abschnitten davon ausgegangen, dass M vollen Rang hat und somit $Q = M^T D^2 M$ invertierbar ist. Es existiert somit ein eindeutiges Minimum.

Aus der Analysis ist bekannt, dass dies mit Lagrange-Multiplikatoren gelöst werden kann, vorausgesetzt es gilt $\{\omega | A\omega = b\} \neq \emptyset$. Die Lagrange-Funktion ist definiert als:

$$L(\omega, \lambda) = F(\omega) + \lambda^T (A\omega - b),$$

¹⁹Für beide Bedingungen gilt, dass ein lokales Minimum auf dem zulässigen Bereich zugleich auch ein globales Minimum auf dem zulässigen Bereich ist. Siehe z.B. auch (Alt02) Kapitel 6.1.

²⁰Da M vollen Rang besitzt, ist Q invertierbar, und somit alle Eigenwerte von Q ungleich null. Da Q zumindest positiv semi-definit ist, sind alle Eigenwerte auch echt größer null.

mit $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Das Minimum kann durch Differentiation bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \omega} L(\omega, \lambda) &= 2Q\omega + c + \lambda^T A = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\omega, \lambda) &= A\omega - b = 0.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$$

gilt. Hieraus kann die Lösung bestimmt werden, falls diese neue Matrix invertierbar ist. Es muss beachtet werden, dass nur ω allein und nicht (ω, λ) die Gewichte für das replizierende Portfolio darstellt. Im Allgemeinen wird diese Matrix nicht mehr invertierbar sein, insbesondere dann nicht, wenn die Anzahl der Nebenbedingungen größer ist als die Anzahl der Szenarien. In diesen Fällen muss überlegt werden, wie trotzdem eine Lösung bestimmt werden kann. Es könnten z.B. überflüssige Nebenbedingungen weggelassen werden.

Kapitel 3

Der Prozess

Nachdem die verschiedenen Modelle aufgestellt wurden, wird im Folgenden ein Prozess analysiert, mit welchem ein replizierendes Portfolio erstellt werden kann.

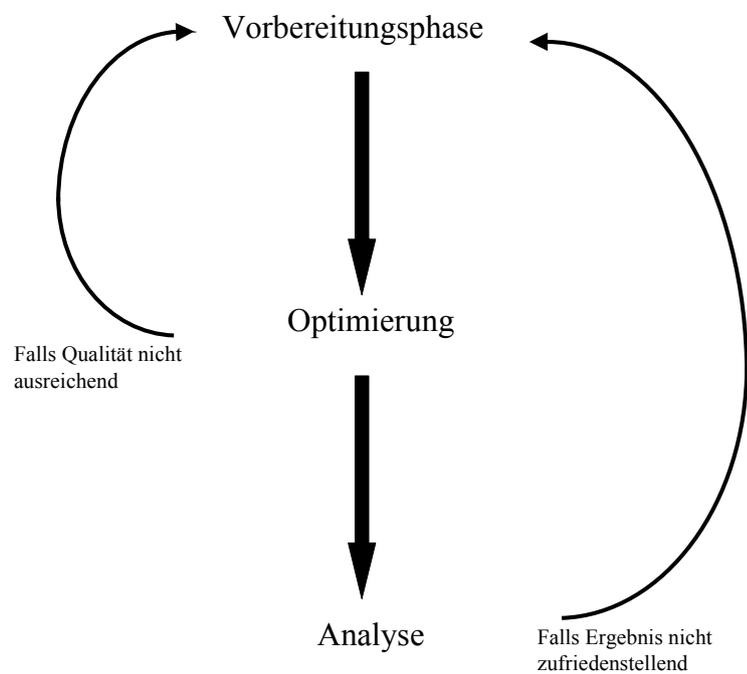


Abbildung 3.1: 3 Stufen des Prozesses.

3.1 Die Vorbereitungsphase

Die Vorbereitungsphase ist von großer Bedeutung für die Qualität des replizierenden Portfolios, da hier die Entscheidungen getroffen werden, die für den gesamten Prozess gültig sind.

Zu Beginn der Vorbereitungsphase wird entschieden, welche Ziele verfolgt werden sollen. Ein Ziel könnte beispielsweise sein, mit dem replizierenden Portfolio Extremquantile wie den Value-at-Risk zu schätzen, welcher für die Kalkulation des tatsächlichen Risikokapitals gemäß Solvency II erforderlich sein kann. Das replizierende Portfolio könnte auch dazu eingesetzt werden, die Sensitivitäten der Verpflichtungen zu bestimmen. Denkbar wären beispielsweise die Veränderung des Marktwertes der Verpflichtungen bei einem Shift der Zinskurve um 100 Basispunkte nach oben oder nach unten. Diese Ziele müssen genau identifiziert werden, um ein Modell zu finden, welches dazu geeignet ist, ein Portfolio zu bestimmen, mit dem diese Ziele erreicht werden können.

Im Folgenden wird auf einige Entscheidungen eingegangen, die in der Vorbereitungsphase getroffen werden sollten, um möglichst gute Ergebnisse zu erhalten.

1. Modellauswahl:

Es ist von essentieller Bedeutung, dass das richtige Modell verwendet wird. Wie in Kapitel 4 zu sehen sein wird, ist die Anwendung eines Verlaufsmodells viel komplizierter, als die eines Modells, welches nur auf Barwerten beruht. Für ein TCF-Modell werden also auch weniger Informationen benötigt.

Zum einen wird bei der Modellauswahl entschieden, ob die Replikation mit Hilfe eines Cash-Flows- oder anderem Modell erstellt werden soll und zum anderen, ob die Bewertung mit Hilfe von Deflatoren oder in einer risikoneutralen Umgebung durchzuführen ist.

Ist es von Interesse, dass das replizierende Portfolio auch die Marktwerte mehrerer Zeitpunkte treffen soll, so ist es sinnvoll zu versuchen, den Zahlungsverlauf möglichst gut zu replizieren. Ansonsten besteht die Gefahr, dass zu viele kurz- oder langfristige Anlagen in dem Portfolio gehalten werden und der Marktwert über die Zeit nicht gut getroffen werden kann. Dies verdeutlicht Abbildung 3.2, in der mögliche Entwicklungen der Marktwerte von möglichen replizierenden Portfolios, die über das TCF-Modell bestimmt wurden, mit den Versicherungsverpflichtungen über die Zeit verglichen werden. „Liab“ steht für die Versicherungsverpflichtungen, „RP kurz“ für ein Portfolio, welches aus nur kurzläufigen Anlagen besteht und „RP lang“ steht für ein Portfolio, das aus primär langfristigen Anlagen besteht. Da das TCF-Modell den Verlauf der Cash-Flows nicht

berücksichtigt, können solche Probleme auftreten. Deswegen ist es sinnvoll ein Modell zu verwenden, welches die gestellten Anforderungen erfüllen kann.

Wird z.B. ein Portfolio betrachtet, welches zwar den Marktwert des heutigen Versicherungsbestandes exakt trifft und auch die Barwerte der einzelnen Szenarien gut approximieren kann, aber dessen Anlagen Laufzeiten haben, die so kurzfristig sind, dass sie schon nach dem ersten Bewertungszeitpunkt abgelaufen sind, so hat dieses replizierende Portfolio nach diesem Zeitpunkt nur noch den Wert „0“, da keine Zahlungen mehr stattfinden. Andererseits hat ein Portfolio mit rein langfristigen Verpflichtungen gegen Ende des Planungshorizontes noch viele Anlagen im Bestand, so dass in Extremsituationen der Marktwert von dem der Versicherungsverbindlichkeiten massiv abweichen kann.

Als Beispiel kann ein Geldmarktkonto mit 10-jähriger Laufzeit betrachtet werden. Da die Barwerte im TCF-Modell betrachtet werden, kann diese „Verbindlichkeit“ mit einem Geldmarktkonto von einer Laufzeit von nur einem Jahr repliziert werden. Dies liegt daran, dass der Barwert eines Geldmarktkontos zu $t = 0$ unabhängig von der Laufzeit ist. Dieses replizierende Portfolio hätte nach einem Jahr keinen Marktwert mehr, da es keine Cash-Flows mehr produziert.

Darüber hinaus sollte überlegt werden, ab welchem Zeitpunkt die Zahlungsströme getroffen werden sollten. Für Solvency II ist es notwendig, dass Aussagen über den Marktwert in einem Jahr gemacht werden können. Dazu dürfen aber die Zahlungen im Zeitraum $[0,1)$ nicht berücksichtigt werden, da sie keinen Einfluss auf die Marktwert zum Zeitpunkt $t = 1$ haben. Wird dabei als Nebenbedingung gefordert, dass der Marktwert der Verpflichtungen zum Zeitpunkt $t = 0$ auch getroffen werden soll, muss entschieden werden, wie die Zahlungen in der Zeit $[0,1)$ behandelt werden sollen. Eine mögliche Überlegung ist zum Beispiel, dass diese Zahlungen ebenfalls für die Bewertung in $t = 0$ vernachlässigt werden.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle zielen in erster Linie darauf ab, ein replizierendes Portfolio zu bestimmen, welches sich stochastisch möglichst so verhält, wie die Versicherungsverpflichtungen. Da damit Aussagen über den Marktwert getroffen werden sollen, wird überprüft, ob der Marktwert von Versicherungsverpflichtungen und replizierendem Portfolio übereinstimmen. Dazu bedarf es einer möglichst hohen Korrelation zwischen beiden Zufallsgrößen. Der Vorteil einer hohen Korrelation besteht darin, dass beide Marktwerte zu beliebigen vorgegebenen Szenarien vergleichbar sind.

Ein anderer Ansatz könnte sein, Portfolios zu verwenden, welche nur die Verteilung der Versicherungsverpflichtungen treffen, ohne eine hohe Korrelation zwischen Verpflichtungen und replizierendem Portfolio zu erzielen, da die Ver-

teilung stets besser getroffen wird, als die Barwerte zu jedem Szenario. Für eine graphische Erläuterung sei hierbei auf Abbildung 4.9 auf Seite 75 verwiesen. Ein möglicher Vorteil wäre die bessere Abdeckung der Risiken. Der schwerwiegende Nachteil dieser Vorgehensweise ist der, dass mit dem Portfolio nur Aussagen über Quantile, nicht aber über einzelne Szenarien gemacht werden können.

2. Die Wahl der Szenarien:

Es wird eine ausreichend große Anzahl an Szenarien erstellt um eine möglichst gute Approximation zu erhalten. Die Szenarien müssen Informationen enthalten, mit denen sich sowohl die Preise/Zahlungen der Finanzinstrumente, als auch die der Verpflichtungen bestimmen lassen. Dabei ist zu bedenken, dass die Berechnungszeit mit der Anzahl der Szenarien und Zeitschritte, die betrachtet werden, zunimmt. Wie im Kapitel 4 gezeigt werden wird, verbessert sich in diesem sehr einfachen Beispiel die Qualität des replizierenden Portfolio nur geringfügig, wenn die Zahl der Szenarien stark erhöht wird. Dies muss für praktische Anwendungen nicht unbedingt gelten, da die Zahlungsströme realer Versicherungsverpflichtungen viel komplexer sind, als in diesem Beispiel angenommen wird. Somit wird auch eine weitaus größere Anzahl an Finanzinstrumenten benötigt, um den Bestand replizieren zu können. Da aber mehr Szenarien als Finanzinstrumente benötigt werden, um geeignete Portfolios zu erhalten, wird auch die Anzahl der Szenarien zunehmen. Für jedes Szenario müssen die Zahlungsströme/Marktwerte sowohl für die Verbindlichkeiten als auch für jedes der ausgewählten Finanzinstrumente bestimmt werden.

Werden nur Extremszenarien betrachtet, dann werden eigentlich nur diejenigen Szenarien benötigt, welche als besonders schlecht bewertet werden. Solche Szenarien können auf zwei Wegen erzeugt werden.

Entweder werden solche Szenarien von Hand bestimmt und dann versucht daran das Portfolio zu justieren. Das Problem hierbei ist aber, dass die Szenarien nicht mehr mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\text{Anzahl Szenarien}}$ eintreten, weswegen die Qualität der darüber bestimmten Replikationsportfolios sehr unterschiedlich sein kann.

Die andere Möglichkeit besteht darin, dass die Verteilung der Versicherungsverpflichtungen unter der Nebenbedingung, dass die Verpflichtungen eine bestimmte Grenze überschreiten - also $V|V \geq x$ - bestimmt werden. Dazu wird eine ausreichend große Zahl an Szenarien für V erzeugt und anschließend diejenigen Szenarien ausgewählt, welche die Nebenbedingung erfüllen. Dadurch werden Stichproben erzeugt, die unabhängig und identisch mit der bedingten Verteilung $V|V \geq x$ verteilt sind.

3. Die Wahl der Bewertungsfunktions:

Die Wahl der Bewertungsfunktion ν ist sehr wichtig. Wenn zum Beispiel extreme Quantile im Mittelpunkt stehen, aber eine möglichst gute Approximation an die Verbindlichkeiten erreicht werden soll und deswegen keine Szenarienauswahl wie im vorherigen Punkt getroffen werden kann, können mit Hilfe einer speziellen Bewertungsfunktion die Extremszenarien höher als die restlichen Szenarien gewichtet werden.

4. Auswahl der Finanzinstrumente:

Es sollten geeignete Finanzinstrumente für die Replikation ausgewählt werden. Dazu sollten die Garantien und pfadabhängigen Einflüsse auf den Cash-Flow/Marktwert analysiert werden, um eine geeignete Auswahl treffen zu können. Werden viele Finanzinstrumente ausgewählt, dann nimmt die Rechenzeit stark zu. Zudem besteht die Gefahr, dass mit dem Replikationsportfolio nicht die Struktur der Versicherungsverpflichtungen abgebildet werden kann. Dies liegt daran, dass, falls die Anzahl der Instrumente in der Größenordnung (Zeitpunkte \cdot Anzahl der Szenarien) liegt, eine fast perfekte Replikation möglich ist, unabhängig davon, welche Instrumente betrachtet werden. In anderen, neuen Szenarien wird meist kaum eine Ähnlichkeit mehr zwischen Portfolio und Verpflichtungen erkennbar sein.

Zunächst wird auf einige Einflussgrößen auf den Marktwert der Versicherungsverpflichtungen eingegangen.

Zu den Einflüssen, die sich auf den Marktwert der Versicherungsverpflichtungen auswirken können, zählt offensichtlich der **Versicherungsvertrag**. In einem solchen Vertrag werdem dem Versicherungsnehmer einige Optionen und Garantien eingeräumt, wie Mindestverzinsung, Rückkaufswert bei Storno, Beitragsfreistellung und vieles mehr. Um diese Faktoren besser zu verstehen und um sie für die Wahl der Finanzinstrumente interpretieren zu können, werden ein paar Faktoren im Anschluss kurz erläutert. Darüber hinaus gibt es **Managementregeln**, also Entscheidungen die vom Management getroffen werden, die nichts mit den Verträgen per se zu tun haben. Verzeichnet ein Versicherungsunternehmen in einem Jahr eine gute Kapitalmarktentwicklung, so wird die Rendite der Versicherungsnehmer nicht unmittelbar angehoben, da versucht wird, die Rendite über die Jahre zu glätten. Erst mehrere Jahre erfreulicher Kapitalmarktentwicklung werden in der Regel dazu führen, dass die Rendite signifikant erhöht wird. Das Gleiche gilt entsprechend für schlechte Kapitalmarktentwicklungen.

Ebenso gibt es **äußere Einflüsse**, etwa Gesetzesänderungen, die aber im All-

gemeinen nicht handhabbar sind.

Im Folgenden wird auf einfache Garantien und Optionen eines Versicherungsvertrags eingegangen. Dabei werden Finanzinstrumente betrachtet, die geeignet sind, diese Optionen und Garantien in einem Replikationsportfolio abzubilden.

Wenn davon ausgegangen wird, dass schon zum Abschluss des Versicherungsvertrags alle zukünftigen Auszahlungen bekannt sind, lässt sich dieser Zahlungsstrom über **Zero-Coupon-Bonds** mit entsprechenden Laufzeiten abbilden, da Zero-Coupon-Bonds zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft im Allgemeinen einen Betrag der Höhe „1“ auszahlen. In der Realität wird es aber nicht der Fall sein, dass die zukünftigen Auszahlungen deterministisch sind, da entweder die Auszahlungszeitpunkte oder die Höhe der Zahlungen unbekannt sind.

Mindestverzinsung

Die Mindestverzinsung garantiert dem Versicherungsnehmer, dass das Guthaben seines Vertrages jährlich mit einem Mindestzinssatz verzinst wird. Erwirtschaftet das Versicherungsunternehmen eine niedrigere Rendite, so muss die Differenz aus Eigenkapital oder eigenkapital-ähnlichem Fremdkapital¹ finanziert werden. Diese Garantie entspricht einer **Put-Option** auf die erwirtschaftete Rendite, als Formel

$$(i_{gar} - i_{erw})^+,$$

wobei i_{gar} den garantierten Mindestzins und i_{erw} die vom Versicherungsunternehmen erwirtschaftete Rendite beschreibt.

Da bei Versicherungsunternehmen der größte Teil der Aktivseite der Bilanz aus festverzinslichen Anlagen besteht, ist das Zinsänderungsrisiko von großer Bedeutung. Um sich gegen fallende Zinsen abzusichern, gibt es verschiedene Optionen, wovon drei dieser Instrumente hier vorgestellt werden²:

(a) (Zins-)Swaps

Ein Swap ist ein Kontrakt, bei dem ein Tausch von Finanzgütern zwischen den Vertragspartnern im Vordergrund steht. Bei einem Zinsswap kann zum Beispiel ein fixer Zins gegen einen variablen Zinssatz getauscht werden. Im Regelfall wird nur die Differenz des Betrages gezahlt. Soll alles über Zinsswaps abgesichert werden, wird die Möglichkeit vergeben, an steigenden Zinsen partizipieren zu können.

¹z.B. freie RfB

²Für weitere Informationen, siehe z.B. (Irl03).

(b) Swaptions

Um von steigenden Zinsen zu profitieren gibt es die sogenannten „Swaptions“. Dabei handelt es sich um eine Option, sich zu einem bestimmten Zeitpunkt (europäische Option) oder in einem bestimmten Zeitraum (amerikanische Option) entscheiden zu können, in einen Zinsswap einzusteigen. Dadurch kann an steigenden Zinsen partizipiert werden.

(c) Floorlet

Ein Floorlet ist eine Option, um sich gegen sinkende Zinsen abzusichern. Dabei werden bei Abschluss eines solchen Instruments zwei Zinssätze bestimmt, meist ein variabler und ein fixer Zinssatz. Liegt in dem bei Abschluss bestimmten Zeitraum $[T, S]$, $0 \leq T < S$ die variable Verzinsung unterhalb des fixen Zinssatz, wird der Differenzbetrag ausgezahlt. Als variabler Zinssatz wird dabei häufig der LIBOR verwendet.

Rückkaufswert

Falls angenommen wird, dass ein finanzrationaler Entscheider seiner Versicherung als Investmentvehikel ansieht, so wird er seinen Vertrag stornieren, sobald er meint, dass er mit dem Rückkaufswert mehr erwirtschaften kann, als die Versicherung. Dies entspricht also einer Put-Option auf die Versicherung. Da das Versicherungsunternehmen die Rendite über ihre Finanzanlagen erwirtschaftet, sollten auch Put-Optionen auf Aktien berücksichtigt werden, da ein Versicherer nicht alles in sichere Anlagen investiert. Dabei ist zu berücksichtigen, dass jederzeit storniert werden kann, und somit nicht nur europäische Optionen, sondern auch Optionen mit anderen Ausübungszeitpunkten, wie z.B. amerikanische Optionen, betrachtet werden sollten.³

Darüber hinaus sollten noch weitere, auch exotische Finanzinstrumente in Betracht gezogen werden, um solche pfadabhängigen eingebetteten Optionen besser handhaben zu können.

Ebenso sollten verschiedene Laufzeiten berücksichtigt werden.

Ein weiterer Grund um weitere Finanzinstrumente einzubeziehen ist, dass damit die Replikation nicht schlechter gemacht werden kann, da für $\chi_1 \subset \chi_2$, wobei χ_i eine Menge von Portfolien mit $i \in \{1, 2\}$, gilt:

$$\min_{X \in \chi_1} \|Y - MV_X\| \geq \min_{X \in \chi_2} \|Y - MV_X\|,$$

wobei MV_X der Marktwert von Portfolio X ist.

³vgl. (Oea07)

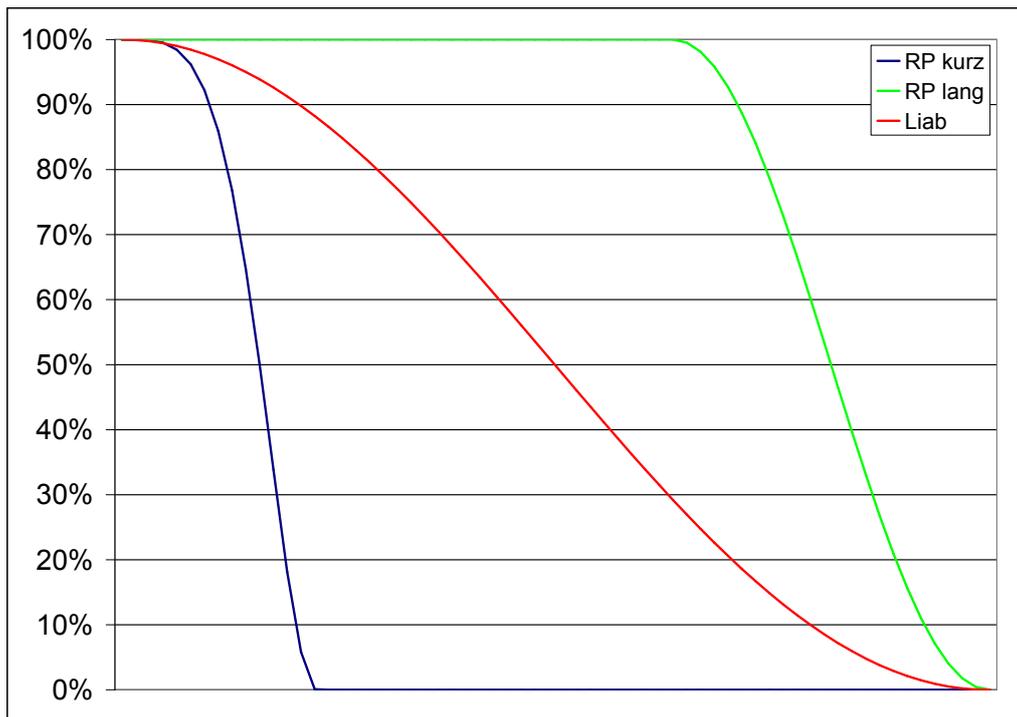


Abbildung 3.2: Mögliche Entwicklung der Marktwerte über die Zeit im Vergleich von möglichen replizierenden Portfolios.

3.2 Die Optimierungsphase

In der Optimierungsphase wird eine leicht zu bestimmenden Prüfregel hergeleitet, um die Qualität des Ergebnisses zu testen, beispielsweise sollte R^2 , die quadrierte Korrelation, mindestens 99.95% betragen.

Eventuell soll erreicht werden, dass das replizierende Portfolio bestimmte Eigenschaften hat. Dazu können Nebenbedingungen, wie z.B. die exakte Wiedergabe des heutigen Marktwertes oder die Übereinstimmung der Cash-Flows im sicherheitsäquivalenten Szenario, eingeführt werden. Diese Nebenbedingungen müssen in der Optimierungsphase bestimmt werden, da deren Bestimmung im Regelfall unabhängig von Szenarien und verwendetem Modell sind.

Im Anschluss daran wird die eigentliche Optimierung durchgeführt.

Wurde ein replizierendes Portfolio bestimmt, so wird die Qualität der Lösung über die Prüfregel bestimmt. Genügt das Ergebnis nicht den Anforderungen, so müssen beispielsweise Änderungen am Modell vorgenommen werden, oder andere Finanzinstrumente für die Replikation in Betracht gezogen werden. Um diese Änderungen vorzunehmen, wird wieder bei der Startphase angeknüpft.

Das R^2 -Bestimmtheitsmaß

Mit R^2 wird der Schätzer für die quadrierte Korrelation ρ^2 zwischen den Barwerten⁴ der Cash-Flows der Versicherungsverpflichtungen und der Cash-Flows des replizierenden Portfolios bezeichnet. Diese Barwerte werden im Folgenden mit PV bezeichnet, wobei PV_V den zufälligen Barwert der Versicherungsverpflichtungen und PV_{RP} den zufälligen Barwert des replizierenden Portfolios kennzeichnet. Dieses Bestimmtheitsmaß ist am weitesten verbreitet, wenn es darum geht die Qualität des replizierenden Portfolios zu überprüfen.⁵ Die quadrierte Korrelation ρ^2 ist definiert als:

$$\rho^2(PV_V, PV_{RP}) = \frac{Cov_{\mathbb{Q}}(PV_V, PV_{RP})^2}{Var_{\mathbb{Q}}(PV_V)Var_{\mathbb{Q}}(PV_{RP})},$$

wobei \mathbb{Q} das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet, Allgemein gilt, dass $\rho^2 \in [0, 1]$. Ein kleiner Wert für ρ^2 bedeutet, dass die Korrelation nur gering ist, je näher ρ^2 an 1 ist, desto besser ist die Korrelation. Dabei bedeutet ein ρ^2 von 1, dass es sich um einen linearen Zusammenhang handelt. Eine hohe Korrelation impliziert zudem auch eine gute Replikation, da bei einer Replikation versucht wird, die Abweichung von replizierendem Portfolio zu den Versicherungsverpflichtungen zu minimieren und somit auch die Barwerte in einer ähnlichen Größenordnung sein sollten. Obige Formel für ρ^2 kann in der Form nicht einfach angewendet werden, da die Varianzen und die Kovarianz unbekannt sind. Es wird ein Schätzer benötigt, der auf den verwendeten Szenarien basiert. Dazu wird angenommen, dass n Szenarien betrachtet werden. Dann ist eine Formel für R^2 gegeben durch⁶:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\widehat{Cov}_{\mathbb{Q}}(PV_V, PV_{RP})^2}{\widehat{Var}_{\mathbb{Q}}(PV_V)\widehat{Var}_{\mathbb{Q}}(PV_{RP})} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n (PV_V^i - P\bar{V}_V)(PV_{RP}^i - P\bar{V}_{RP}))^2}{\sum_{i=1}^n (PV_V^i - P\bar{V}_V)^2 \sum_{i=1}^n (PV_{RP}^i - P\bar{V}_{RP})^2} \end{aligned}$$

mit $P\bar{V}_x^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n PV_x^i$, PV_x^i die i -te Stichprobe von PV_x , $x \in \{V, RP\}$. Die Schätzer für die Kovarianz und die Varianz lauten

$$\widehat{Cov}_{\mathbb{Q}}(PV_V, PV_{RP}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (PV_V^i - P\bar{V}_V)(PV_{RP}^i - P\bar{V}_{RP}) \text{ und}$$

$$\widehat{Var}_{\mathbb{Q}}(PV_x) = \widehat{Cov}_{\mathbb{Q}}(PV_x, PV_x), \quad x \in \{V, RP\}.$$

Dabei bezeichnen PV_V^i , bzw. PV_{RP}^i die szenarienbasierten Barwerte des Zahlungsstromes der Versicherungsverpflichtungen, bzw. des replizierenden Portfolios.

⁴Diese Barwerte sind szenarioabhängig und somit Zufallsvariablen.

⁵Siehe zum Beispiel bei (Oea07).

⁶Siehe (Sch04) S. 168.

Dieses Maß ist eng mit dem PV -Modell aus Kapitel 2.4 verknüpft. Wird dabei berücksichtigt, dass $\frac{CF^{Term,i}}{B_T^i} = PV_V^i$ und $\frac{\sum_{j=1}^m Z_j^{Term,i}}{B_T^i} = PV_{RP}^i$ gilt, so entspricht dies eigentlich einer multiplen linearen Regression, dessen Bestimmtheitsmaß auch gegeben ist durch⁷:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (PV_V^i - PV_{RP}^i)^2}{\sum_{i=1}^n \left(PV_V^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n PV_V^i \right)^2} \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\left(CF^{Term,i} - \sum_{j=1}^m Z_j^{Term,i} \omega_j \right) \frac{1}{B_T^i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(PV_V^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n PV_V^i \right)^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\sum_{i=1}^n (PV_V^i - PV_{RP}^i)^2$ der einzige Teil von R^2 , in welchem das replizierende Portfolio in Erscheinung tritt. Dieser Teil gleicht der Funktion, die minimiert werden soll. Somit wird in diesem Fall über die Minimierung von $\sum_{i=1}^n (PV_V^i - PV_{RP}^i)^2$ eine Maximierung von R^2 erreicht. Deswegen wird es für dieses Modell tendenziell bessere Ergebnisse für R^2 geben, als in anderen Modellen.

3.3 Die Analyse

Bei der Analyse des replizierenden Portfolios können verschiedene Methoden angewendet werden, beispielsweise

- Überprüfen, ob die Qualität des replizierenden Portfolios unter neuen unbekanntem Szenarien erhalten bleibt. (Out-of-sample Tests)
- Sensitivitäten von Verpflichtungen und replizierendem Portfolio werden miteinander verglichen. Beispielsweise kann die Veränderung des Marktwertes betrachtet werden, wenn die Eingangszinskurve um +100 Basispunkte geshiftet wird.
- Analyse in Schockszenarien.
- Graphische Analysen, wie Quantil- und Scatterplots.

Falls das Ergebnis dieser detaillierteren Analyse nicht dem gewünschten Ergebnis entspricht, wird das gesamte Vorgehen unter anderen Annahmen, z.B. durch eine andere Auswahl von Finanzinstrumenten oder Verwendung eines anderen Modelles, wiederholt.

⁷Siehe (Hea05) S. 596

Bei der Analyse des replizierenden Portfolios ist es wichtig zu berücksichtigen, dass die Anlagestrategie nicht basierend auf den replizierenden Portfolios getroffen werden darf, denn die Versicherungsverpflichtungen werden von den Assets beeinflusst, d.h. wenn die aktuellen Finanzanlagen durch das replizierende Portfolio ersetzt werden würde, würde es andere Auszahlungen geben und das RP würde das nicht abbilden können. Es müsste somit ein neues Portfolio bestimmt werden, usw. Es ist aber nicht klar, dass die Folge der so bestimmten replizierenden Portfolios konvergiert. Somit sind replizierende Portfolios nicht zum Hedging innerhalb der Bilanz geeignet. Dies macht es insofern kompliziert ein geeignetes Portfolio aus einfachen Finanzinstrumenten zu finden, da diese in den meisten Fällen nur einzelne separate Risiken abdecken können. Vereinigte Risiken sind somit schwerer abzudecken, was die Möglichkeiten eines solchen Portfolios eingrenzt.

Kapitel 4

Ein einfaches Beispiel

In diesem Kapitel wird ein einfaches Beispiel aufgestellt um die Theorie zu veranschaulichen, die in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellt wurde.

Ziel ist es, ein Verständnis für die Struktur des replizierenden Portfolios zu erhalten. Um dieses zu erlangen wird zunächst ein reiner Sparvertrag repliziert um anschließend schrittweise Garantien hinzuzufügen. Zum Schluss wird eine Kapitallebensversicherung mit Sterblichkeit, Storno und einer pauschalen Überschussbeteiligung von 90% betrachtet.

Wir nehmen an, dass das Kapitalmarktmodell, welches in diesem Kapitel betrachtet wird, nur ein Risiko kennt: das Zinsrisiko. Zur Modellierung der Zinsen wird das Modell von Vasicek¹ verwendet, das zur Klasse der Short-Rate-Modelle zählt. Der Ausdruck Short-Rate bezeichnet einen stetigen Zins, welcher als derjenige Zins betrachtet werden kann, der in einem infinitesimal-kleinen Zeitintervall verdient wird. Das Modell kann mit der folgenden stochastischen Differentialgleichung (SDE) beschrieben werden:

$$dr_t = k[\theta - r_t] dt + \sigma dW_t, \quad (4.1)$$

wobei $k > 0$, $\theta > 0$ und $\sigma > 0$ Konstanten sind und W_t eine Brownsche Bewegung repräsentiert. Die Definition einer Brownschen Bewegung findet sich zum Beispiel in (Irl03) Kap. 7. Der Faktor θ beschreibt hierbei die Mean Reversion². Der Faktor k beschreibt die Geschwindigkeit derselben und σ die Standardabweichung des stochastischen Prozesses.

¹Siehe (BS04) S. 168 ff.

²Falls $r_t < \theta$ ist, dann wird der deterministische Vorfaktor positiv und die Zinsen steigen tendentiell, analog für den Fall, dass $r_t > \theta$ fällt der Zins tendentiell.

Folgende Formel ist die Lösung der SDE für den Zins in t ³:

$$r_t = e^{-kt}r_0 + (1 - e^{-kt})\theta + \sigma \int_0^t e^{ku} dW_u, \text{ sowie}$$

$$r_t = e^{-k(t-s)}r_s + (1 - e^{-k(t-s)})\theta + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u, \forall 0 \leq s < t.$$

Nach (Shr04) S. 149 gilt, dass das Itô-Integral

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW_u \sim N\left(0, \int_0^t (\Delta(u))^2 du\right).$$

Wird $\sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW_u$ durch Substitution von $u = v + s$ auf die Form von $I(t)$ zurückgeführt, wobei $\Delta(u) = \sigma e^{k(t-s-u)}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\sigma \int_s^t e^{k(t-u)} dW_u \right] &= \int_0^{t-s} \sigma^2 e^{-2k(t-s-u)} du \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2k(t-s)}}{2k} \end{aligned}$$

Damit kann nun die Short-Rate über folgende Formel simuliert werden:

$$r_{t+\Delta t} = e^{-k\Delta t}r_t + (1 - e^{-k\Delta t})\theta + \sqrt{\sigma^2 \frac{(1 - e^{-2k\Delta t})}{2k}} \epsilon_t,$$

mit

- ϵ_t eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und
- Δt die Intervall-Länge, die zur Kalibrierung verwendet wurde.

Parameter	Wert
k	0,1577
$\tilde{\theta}$	0,0549
σ	0,0089
λ	-0,2304
r_0	0,0123
Δt	1

Tabelle 4.1: „real-world“-Parameter für das Modell nach J. Barbarin und P. Devolder.

Aufgrund der Normalverteilung können in diesem Modell negative Zinsen auftreten. Um nun Szenarien für die Short-Rate zu erstellen, werden Schätzer für k , θ und σ benötigt. Δt ergibt sich aus der Kalibrierung der Daten, die verwendet wurden, um

³(BS04) S. 169f.

die Schätzer zu erhalten. Anstatt eine Kalibrierung der Parameter durchzuführen, werden hierfür die Parameter für einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß aus (BD05) verwendet, da auch das Vasicek-Modell zu dieser Art zählt⁴. Diese Parameter können Tabelle 4.1 entnommen werden. Der Parameter λ wird dabei als Marktpreis des Risikos bezeichnet. Bei dem Übergang von der realen Welt in das risikoneutrale Modell wird dW_t durch $dW_t + \lambda dt$ ersetzt. Dies ist eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß \mathcal{Q} . Wird das risikoneutrale Modell auf die SDE 4.1 zurückgeführt, verändert sich nur θ , das aus folgender Gleichung erhalten wird: $\theta = \tilde{\theta} - \frac{\lambda\sigma}{k}$. Da $r_0 = 0,0123$ sehr niedrig ist, wird dieser Wert durch 4% ersetzt. Welche Werte für die Parameter des risikoneutralen Modells verwendet werden, können Tabelle 4.2 entnommen werden.

Parameter	Wert
k	0,1577
θ	0,0679
σ	0,0089
r_0	0,0400
Δt	1

Tabelle 4.2: Parameter für das Vasicek-Modell.

Bisher wurde immer nur die Short-Rate betrachtet, nun wird jedoch der Jahreszins benötigt, was bedeutet, dass

$$\int_{t-1}^t r_s ds$$

berechnet werden muss. Bei (BS04) S. 170f wird gezeigt, dass dieser Ausdruck wie folgt umformuliert werden kann:

$$\int_{t-1}^t r_s ds = \frac{1 - e^k}{k} r_{t-1} + \left(1 - \frac{1 - e^{-k}}{k}\right) \theta + \sigma \int_{t-1}^t \frac{1 - e^{k(t-u)}}{k} dW_u.$$

Hierbei ist

$$\sigma \int_{t-1}^t \frac{1 - e^{k(t-u)}}{k} dW_u$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und

Varianz $\frac{\sigma^2}{2k^3} (2k - 3 + 4e^{-k} + e^{-2k})$. Die Berechnung erfolgt analog zu der Berechnung bei r_t . Somit kann $\int_t^{t+1} r_s ds$ folgendermaßen simuliert werden:

$$\int_t^{t+1} r_s ds = \frac{1 - e^k}{k} r_t + \left(1 - \frac{1 - e^{-k}}{k}\right) \theta + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2k^3} (2k - 3 + 4e^{-k} + e^{-2k})} \epsilon_t,$$

⁴Siehe (Irl03) S. 287.

wobei ϵ_t eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. $\int_{t-1}^t r_s ds$ hängt von r_{t-1} ab, was bedeutet, dass beide Zufallsvariablen simuliert werden müssen um den benötigten Zinssatz zu erhalten. Werden die beide Formel betrachtet,

$$r_t = e^{-k}r_{t-1} + (1 - e^{-k})\theta + \sigma \int_{t-1}^t e^{-k(t-u)}dW_u,$$

$$\int_{t-1}^t r_s ds = \frac{1 - e^{-k}}{k}r_{t-1} + \left(1 - \frac{1 - e^{-k}}{k}\right)\theta + \sigma \int_{t-1}^t \frac{1 - e^{-k(t-u)}}{k}dW_u.$$

fällt auf, dass die Zufallsvariablen miteinander korreliert sind, da sowohl r_t , als auch $\int_{t-1}^t r_s ds$ von derselben Brownschen Bewegung abhängen. Hier ergibt sich die Kovarianz beider Zufallsterme als⁵:

$$\begin{aligned} Cov\left(\sigma \int_{t-1}^t \frac{1 - e^{-k(t-u)}}{k}dW_u, \sigma \int_{t-1}^t e^{-k(t-u)}dW_u\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{k} \int_{t-1}^t (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k})^2. \end{aligned}$$

Da zur Simulation einer einjährigen Spot-Rate auch die Short-Rate benötigt wird, besteht jedes Szenario aus einer zweidimensionalen Stichprobe. Es ist somit notwendig zu wissen, wie korrelierte Zufallsvariablen erzeugt werden.

Für eine n-dimensionale standardnormalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(0, I_n)$, mit I_n der n-dimensionalen Einheitsmatrix, und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt⁶

$$AX \sim N(0, AA^T).$$

Es muss also eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ bestimmt werden, für die AA^T die Kovarianzmatrix darstellt. A wird zum Beispiel über die Cholesky-Zerlegung bestimmt. Für eine Kovarianzmatrix

$$\Sigma = AA^T = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix},$$

für die auf Grund der Symmetrie der Kovarianz $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2}$ gilt, ist A hierbei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_{1,1}} & 0 \\ \frac{\alpha_{2,1}}{\sqrt{\alpha_{1,1}}} & \sqrt{\alpha_{2,2} - \frac{\alpha_{2,1}^2}{\alpha_{1,1}}} \end{pmatrix}.$$

⁵Für diese quadratische Kovarianz siehe (Irl03) S. 288.

⁶Siehe (DH04) S. 207.

In unserem Beispiel erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2 1 - e^{-2k}}{2k} & \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k})^2 \\ \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k})^2 & \frac{\sigma^2}{2k^3} (2k - 3 + 4e^{-k} + e^{-2k}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6,79345 \cdot 10^{-5} & 3,38970 \cdot 10^{-5} \\ 3,38970 \cdot 10^{-5} & 2,34979 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 8,242239 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 4,112600 \cdot 10^{-3} & 2,566020 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Mit diesem Ergebnis ist es nun möglich Szenarien zu erzeugen. Für einen Zeitpunkt t gilt dann:

$$\begin{pmatrix} r_t \\ \int_{t-1}^t r_s ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-k} r_{t-1} + (1 - e^{-k}) \theta \\ \frac{1 - e^{-k}}{k} r_{t-1} + \left(1 - \frac{1 - e^{-k}}{k}\right) \theta \end{pmatrix} + AX,$$

dabei ist $X \sim N(0, I_2)$ und kann über 2 unabhängige Stichproben einer Standardnormalverteilung bestimmt werden. Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf der empirischen Quantile der Spot-Rates $\int_{t-1}^t r_s ds \quad \forall t \in \{1, \dots, 10\}$, welcher 10.000 Szenarien zugrunde liegen.

4.1 Einfache Verträge

In diesem Abschnitt wird basierend auf den Cash-Flow Modellen mit der Methodik, welche in Kapitel 2.2 aufgebaut wurde, die Replikation von einfachen Optionen betrachtet. Dies bedeutet, dass für ν die quadrierte euklidische Norm angenommen wird und ein replizierendes Portfolio somit ohne Optimierungsalgorithmen bestimmt werden kann. Des Weiteren werden keine Nebenbedingungen berücksichtigt. Zur Herleitung des replizierenden Portfolios werden 100 Szenarien betrachtet, welche für alle Beispiele, die auf den Cash-Flow Modellen basieren, identisch sind, um die Vergleichbarkeit der einzelnen Beispiele zu gewährleisten.

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass das Unternehmen seinen Verpflichtungen nachkommt und auch in 10 Jahren noch existiert.

4.1.1 Sparvertrag und deterministische Auszahlung

Wir beginnen unsere Analyse mit einem einfachen Sparvertrag mit einer Laufzeit von 10 Jahren. Die Verzinsung wird jährlich über den risikolosen Zins berechnet. Für ein

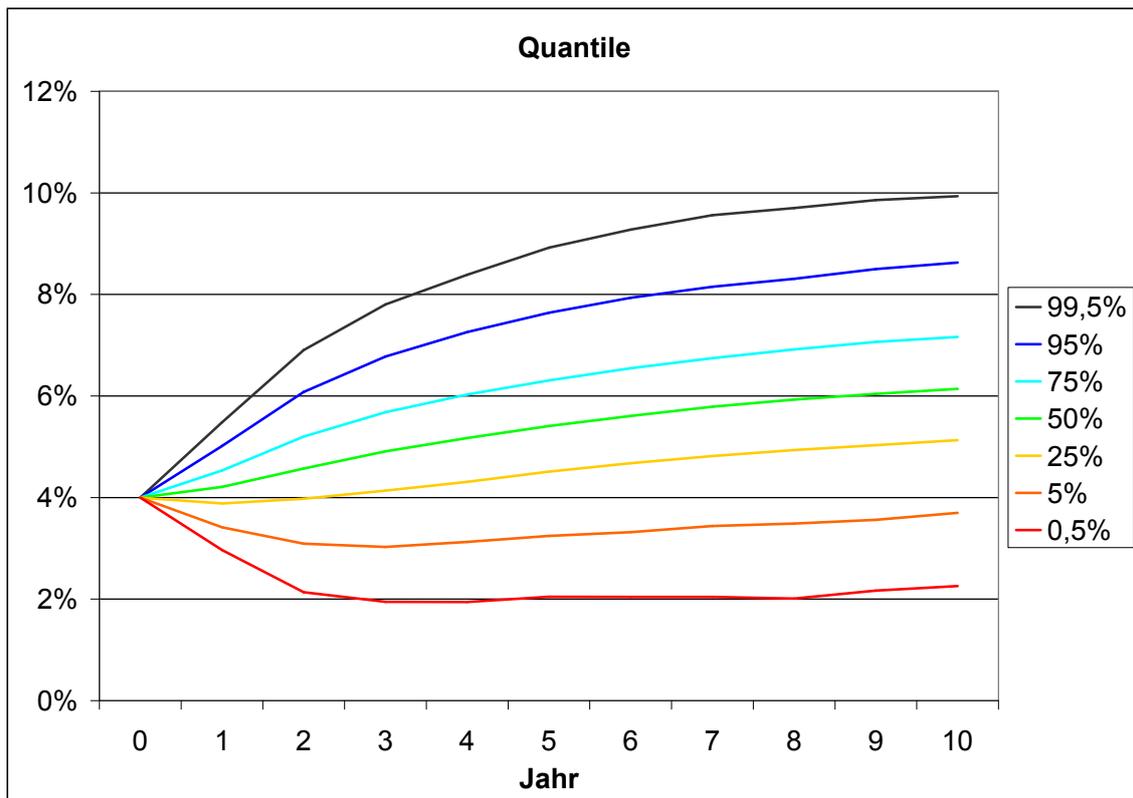


Abbildung 4.1: Quantile von $\int_{t-1}^t r_s ds$ für $t \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Jahr $t \in \{1, \dots, 10\}$ ergibt sich die Verzinsung als

$$e^{\int_{t-1}^t r_s ds}.$$

Falls nicht anders angegeben wird dieser Zins im Folgenden als *risikoloser* Zins bezeichnet. Mit Hilfe der 100 Stichproben von $\int_{t-1}^t r_s ds$ kann die Verzinsung des Sparvertrages in jedem Szenario berechnet werden. Die Auszahlung erfolgt dabei jeweils zum Laufzeitende und beinhaltet den Einmalbeitrag, welcher bei Laufzeitbeginn zu entrichten ist, inklusive der angesammelten Zinsen. Die Zinserträge der Jahre $1, \dots, 9$ werden ebenfalls mitverzinst und bei Laufzeitende ausbezahlt. Dabei wird der Barwert und nicht der Verlauf der Cash-Flows betrachtet, da nur zum Laufzeitende eine Auszahlung stattfindet. Als einfaches Finanzinstrument wird nur ein Geldmarktkonto verwendet. Der Barwert des Geldmarktkontos ist für jedes Szenario identisch 1, da die Auszahlung zur Zeitpunkt T

$$CF_{T,G} = e^{\int_0^T r_t dt}$$

mit dem Zins abdiskontiert wird, der auch erwirtschaftet wird, d.h. es gilt

$$BW_G = \frac{e^{\int_0^T r_t dt}}{e^{\int_0^T r_s ds}} = 1.$$

Das replizierende Portfolio, welches aus einem Geldmarktkonto besteht, in welches der gesamte Einmalbeitrag investiert wird, trifft in jedem Szenario den Wert des Sparvertrages exakt, es handelt sich hierbei um eine perfekte Replikation. Der Sparvertrag entspricht demnach einem Geldmarktkonto, denn schließlich wurde der Sparvertrag genau wie ein Geldmarktkonto gestaltet, dessen Laufzeit 10 Jahre beträgt:

- Der eingezahlte Betrag wird mit dem risikolosen Zins verzinst.
- Es gibt keine Garantien oder Optionen. Es darf insbesondere nicht gekündigt werden.

Als nächstes wird ein Sparvertrag betrachtet, der nicht mit dem risikolosen Zins verzinst wird, sondern mit einem festen Zinssatz. Es kann beispielsweise angenommen werden, dass ein Sparvertrag abgeschlossen werden kann, der für die nächsten 10 Jahre eine jährliche Verzinsung von $i = 20\%$ p.a. garantiert. Dieser Zinssatz ist zwar sehr unrealistisch, wird aber als Erläuterung in Abschnitt 4.1.2 noch benötigt. Es wird davon ausgegangen, dass der Vertrag nicht gekündigt werden kann und das gesamte Guthaben mit Zinsen und Zinseszinsen zum Laufzeitende ausgezahlt wird.

Werden 1.000 Euro als Einmalbeitrag (EB) eingezahlt, zahlt der Sparvertrag (SV) in 10 Jahren

$$CF_{T,SV} = EB \cdot (1 + i)^{10} = 1.000 \cdot (1,2)^{10} = 6.191,74 \text{ Euro}$$

aus. Der heutige Wert BW_{SV} des Sparvertrages kann aber nicht sicher angegeben werden, denn dieser berechnet sich als

$$BW_{SV} = \frac{6.191,74}{e^{\int_0^{10} r_t dt}} \text{ Euro.}$$

Der Diskontierungsfaktor ist zufällig und der Sparvertrag hat deshalb in jedem Szenario einen anderen Barwert. Aus diesem Grund werden neben dem Geldmarktkonto, welches einen deterministischen Barwert aufweist, auch Zero-Coupon-Bonds verwendet.

Der Barwert eines Zero-Coupon-Bonds, welcher zum Zeitpunkt T zu einer Auszahlung der Höhe 1 führt, beträgt:

$$BW_{ZCB} = \frac{1}{e^{\int_0^T r_t dt}},$$

und ist daher von den jeweiligen Szenarien abhängig. Nach (BS04) S. 107f ist die Bewertungsformel für den Preis $P(t, T)$ eines Zero-Coupon-Bonds zur Zeit $t \geq 0$ mit Auszahlung in $T > t$ gegeben durch

$$P(t, T) = \exp \left\{ -\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} r_t - \left((T-t) - \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \right) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) \right\}$$

$$- \left(\frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \right)^2 \frac{\sigma^2}{4k} \Bigg\}.$$

Insgesamt setzt sich der Bestand des Unternehmens, welches diesen Sparvertrag angeboten hat, aus 1.000 derartiger Verträge zusammen. Jeder Vertrag hat die selben Eigenschaften:

- Die Laufzeit sei 10 Jahre.
- Der Einmalbeitrag, der in $t = 0$ gezahlt wird, beträgt 1.000 Euro.
- Der Zinssatz liegt bei 20%.

Abbildung 4.2 zeigt die Barwerte des Sparvertrages über die 100 Szenarien, welche für die Replikation verwendet werden.

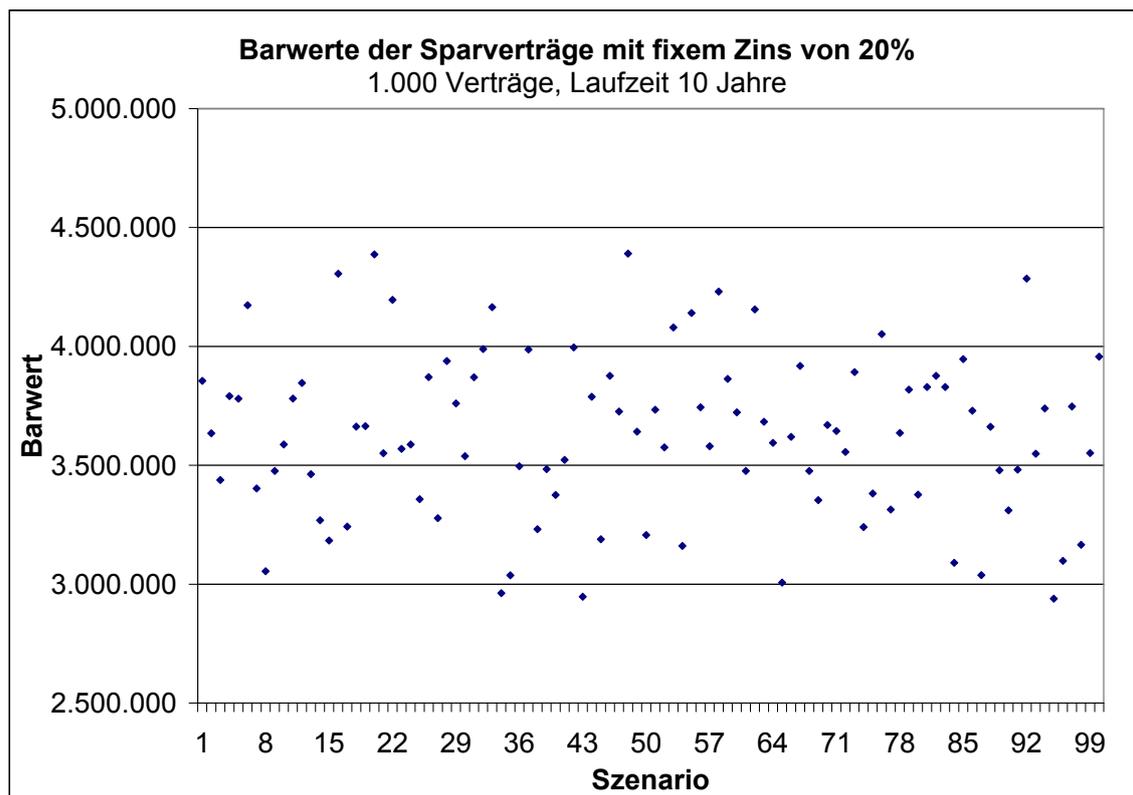


Abbildung 4.2: Barwerte des Bestandes von Sparverträgen mit fixem Zinssatz von 20% über 100 Szenarien.

Zur Replikation werden ein Geldmarktkonto und Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren verwendet. Das Ergebnis ist eine exakte Replikation mit

Zero-Coupon-Bonds. Die Ursache hierfür liegt in der Auszahlung, die nur bei Laufzeitende auftritt und deren Höhe gleich der Anzahl der Verträge multipliziert mit der Auszahlung $CF_{T,SV}$, also $1.000 \cdot CF_{T,SV} = 1.000 \cdot (1,2)^{10} \cdot 1.000 = 6.191.736,42$ und somit garantiert ist. Ein Zero-Coupon-Bond mit der Laufzeit t zahlt zum Zeitpunkt t genau 1 Euro aus. Deswegen besteht das replizierende Portfolio aus genau 6.191.736,42 Anteilen Zero-Coupon-Bonds mit einer Laufzeit von 10 Jahren.

4.1.2 Garantieverzinsung

Im Folgenden wird ein Sparvertrag mit einem garantierten Zinssatz r betrachtet. Das bedeutet, dass der Vertrag immer mit dem risikolosen Zins verzinst wird, so lange dieser nicht unter den Garantiezins fällt. In diesem Falle wird für die Verzinsung des Guthabens der Garantiezins verwendet. Die Auszahlungsstruktur für einen solchen Sparvertrag (SVG) gegen Einmalbeitrag (EB) von 1.000 Euro lautet:

$$CF_{T,SVG} = 1.000 \prod_{t=1}^{10} \max \left(e^{\int_{t-1}^t r_u du}; 1 + r \right).$$

Um eine realistische Mindestverzinsung zu wählen, die auch für die folgenden Beispiel beibehalten werden kann, wird die durchschnittliche Garantieverzinsung eines Lebensversicherers gewählt. Diese liegt bei einigen Versicherungen bei etwa 3,5%⁷. Eine Analyse der 100 Szenarien, die für die Replikation verwendet werden, ergibt, dass 26 Szenarien in mindestens einem Jahr einen risikolosen Zins aufweisen, der niedriger als 3,5% ist. Der betrachtete Bestand besteht aus 1.000 identischen Verträgen mit Einmalbeiträgen von jeweils 1.000 Euro und einer Laufzeit von 10 Jahren. Abbildung 4.3 stellt den jeweiligen Barwert der einzelnen Szenarios dar. Die Szenarien, deren Barwerte über 1 Mio. Euro liegen, weisen in mindestens einem Jahr einen risikolosen Zins von unter 3,5% auf.

Die Bedeutung einer derartigen Garantie wird in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Im zweiten Jahr wird nur ein Zins von 1,0% und im 8. Jahr einen Zins von 2,0% beobachtet. In den anderen Jahren liegt der Zins jeweils zwischen 4,3% und 7,0%.

Für die Replizierung soll weiterhin das *PV*-Modell betrachtet werden, da keine unterjährigen Zahlungen auftreten. Als mögliche Anlagen stehen ein Geldmarktkonto und Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren zur Verfügung.

Die Gewichte des replizierenden Portfolios können Tabelle 4.3 entnommen werden. Abbildung 4.5 zeigt, dass die Replikation nicht exakt ist. Wäre die Qualität der Replikation gut, dann würden sich die Barwerte nahezu gleichen. Bei einer perfekten

⁷Siehe beispielsweise (All05) Seite 34.

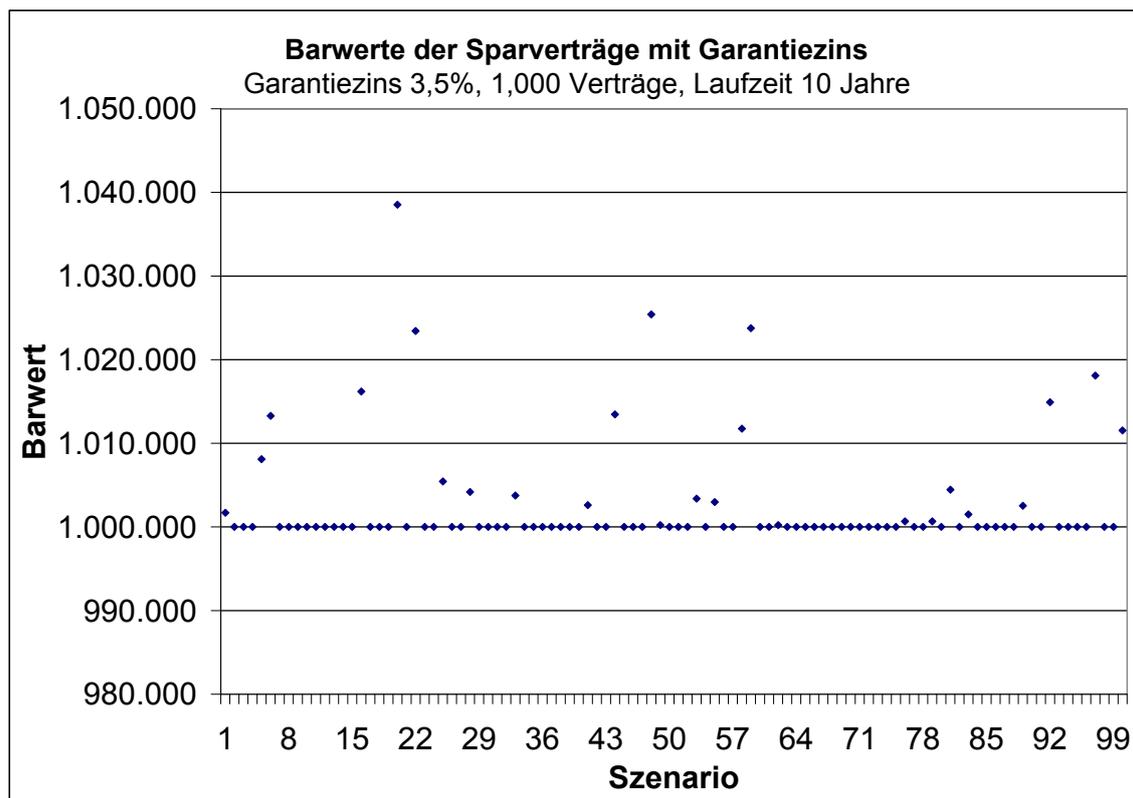


Abbildung 4.3: Barwerte des Sparvertrages mit Garantiezins 3,5% über 100 Szenarien.

Replikation wären sie sogar identisch. Mit Hilfe der Größe R^2 wird deutlich, dass dieses Portfolio ungeeignet ist, da R^2 nur einen Wert von etwa 39,55% aufweist.

Die Ursache, weshalb das Portfolio nicht als Replikationsportfolio geeignet ist, ist der Garantiezins. Anders als in dem vorangegangenen Beispiel⁸ liegt der Garantiezins nur in manchen Szenarien und nur zu einigen Zeitpunkten über dem risikolosen Zinssatz. Also hat die Garantie in manchen Szenarien keinen Wert, im Gegensatz zu den Zero-Coupon-Bonds. Es fehlt somit eine Anlage, die gegen fallende Zinsen absichert. Eine solche Anlage ist beispielsweise ein Floor. Ein Floor ist die Summe verschiedener Floorlets. Ein Floorlet zahlt am Ende einer Periode $[t_1, t_2]$ die Differenz zwischen einem garantierten Zins r und einem variablen Zinssatz, welcher in der Periode $[t_1, t_2]$ erwirtschaftet wurde. Da hier nur einjährige Zeitintervalle betrachtet werden, ist es naheliegend t_2 als Zeitpunkt $t \in \{1, \dots, 10\}$ und $t_1 = t - 1$ zu wählen. Diese Floorlets (FL) lassen sich nach (Irl03) S. 280ff durch folgende Auszahlung zur Zeit t definieren,

⁸In diesem Beispiel wurde von einer fixen Verzinsung von 20% ausgegangen. Diese lag permanent über dem risikolosen Zins und hätte somit auch ein Garantiezins sein können.

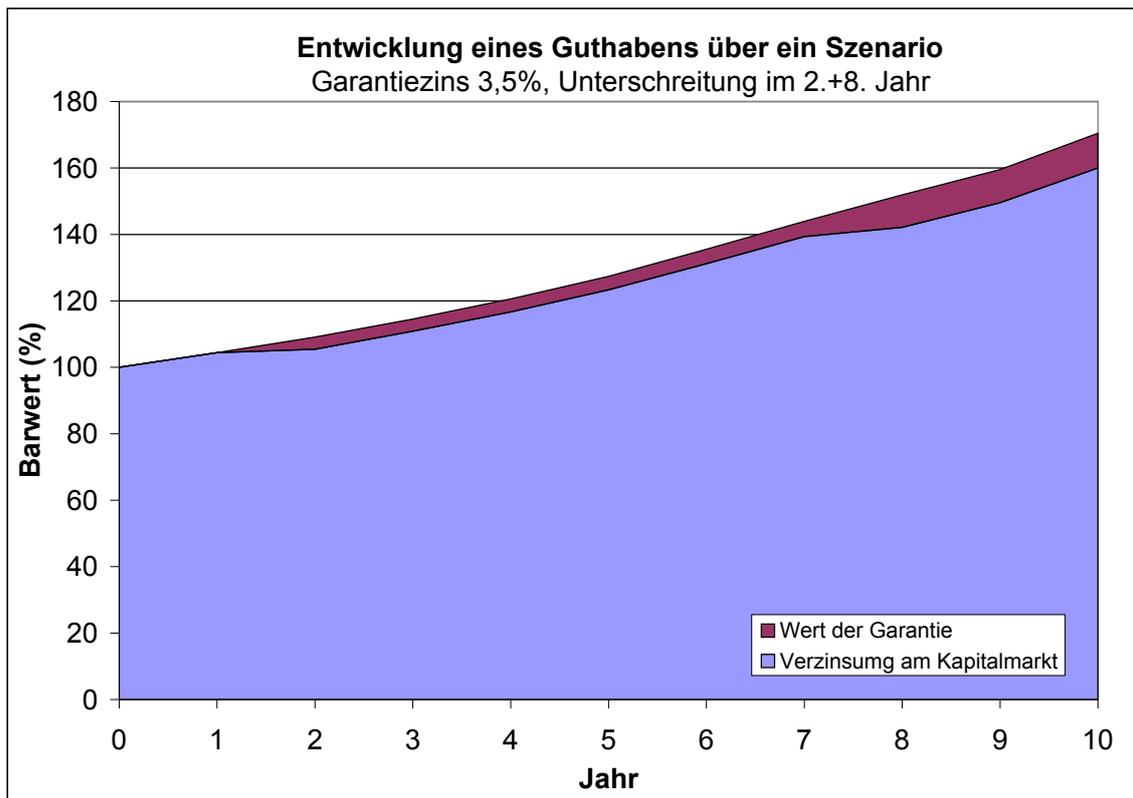


Abbildung 4.4: Mögliche Entwicklung eines Guthabens über die Zeit unter Berücksichtigung eines Garantiezinses von 3,5%.

als:

$$CF_{t,FL} = (r - L(t-1, t))^+,$$

mit

$$L(t-1, t) = \frac{1}{P(t-1, t)} - 1.$$

Zum Zeitpunkt $t-1$ ist somit bekannt, wie hoch die Auszahlung zum Zeitpunkt t sein wird.

Dieses Floorlet kann zum Zeitpunkt $\tau < t-1$ mit folgender Formel bewertet werden⁹:

$$P_{Floor}(\tau, t, r) = (1+r) \left[P(\tau, t) \phi(h) - \frac{1}{1+r} P(\tau, t-1) \phi(h - \sigma_p) \right],$$

mit ϕ der Dichte einer Standardnormalverteilung, $P(\tau, t)$ dem Preis eines Zero-

⁹In (BM06) S. 37 wird gezeigt, dass dieses Floorlet das $(1+r)$ -fache eines Calls auf den Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Start in $t-1$ und Auszahlung zum Zeitpunkt t ist. Die Bewertung eines solchen Calls findet sich in (Jam89).

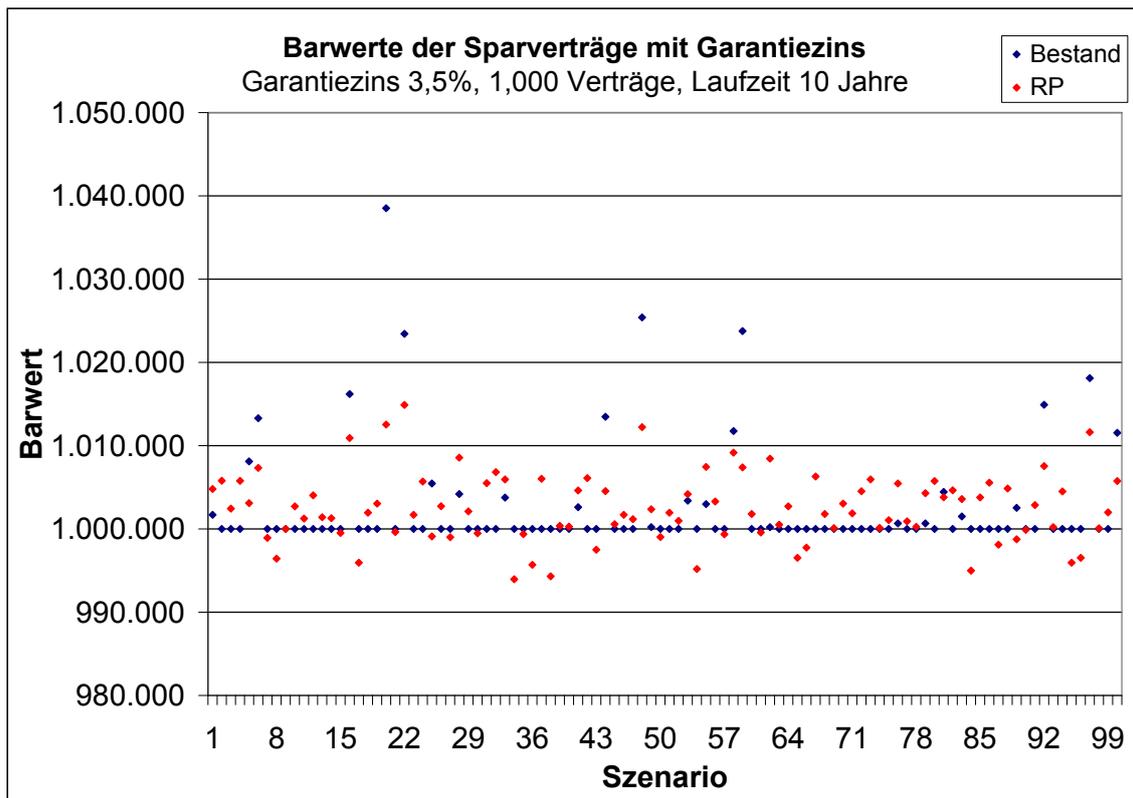


Abbildung 4.5: Barwerte des Bestandes aus 1.000 Sparverträgen mit Garantiezins von 3,5% (Bestand) über 100 Szenarien im Vergleich mit dem replizierenden Portfolio (RP).

Coupon-Bonds gemäß der Bewertungsformel auf Seite 47 sowie

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(\tau, t)(1+r)}{P(\tau, t-1)} + \frac{1}{2} \sigma_p,$$

$$\sigma_p = \nu(\tau, t-1) B(t-1, t),$$

$$B(t_1, t_2) = \frac{1 - e^{-k(t_2-t_1)}}{k} \text{ und}$$

$$\nu(t_1, t_2)^2 = \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2k(t_2-t_1)})}{2k}.$$

Wird nun das replizierende Portfolio, wobei zusätzlich Floorlets auf $r = 3,5\%$ mit der Laufzeiten von 1 bis 10 Jahre berücksichtigt werden, bestimmt, dann ergeben sich die Gewichte aus Tabelle 4.4.

Die Replikationsqualität ist mit $R^2 = 92,08\%$ nun deutlich besser. Somit hat sich die Verwendung der Floorlets positiv ausgewirkt. Die Qualität ist aber erheblich schlechter, als in den Beispielen zuvor. Das Problem liegt in der Auszahlungsstruktur der Floorlets. Da zum Zeitpunkt $t-1$ bekannt ist, wie hoch die Auszahlung zum Zeitpunkt t sein wird, ist die Auszahlung unabhängig von dem risikolosen Zinssatz

Geldmarktkonto		ZCB
Euro	Laufzeit	Anteile
1.213.114,87	1	-437.696,46
	2	340.016,65
	3	-302.065,13
	4	-16.359,81
	5	544.958,76
	6	-778.754,27
	7	744.640,23
	8	-606.301,94
	9	497.657,08
	10	-181.048,21

Tabelle 4.3: RP: Garantiezins von 3,5%.

$\exp\left(\int_{t-1}^t r_s ds\right)$ in der Periode $[t-1, t]$. Aufgrund der Abhängigkeit der Verzinsung des Sparguthabens von diesem risikolosen Zinssatz, kann das Floorlet diese Garantie nicht exakt abbilden. Es fehlt somit eine Anlage, die nicht nur gegen fallende Zinsen absichert, sondern auch nur dann eine Auszahlung aufweist, wenn der Garantiezins über dem risikolosen Zins liegt. Es wird also ein modifiziertes Floorlet mit folgender Auszahlungsstruktur benötigt:

$$CF_{t,FL} = \left(1 + r - e^{\int_{t-1}^t r_t dt}\right)^+.$$

Da dieses Floorlet von der stochastischen Zinsentwicklung in $[t-1, t]$ abhängt, wird dieses Instrument mit $Floor_S$ bezeichnet, um es besser vom zuvor verwendeten Floorlet abzugrenzen. Klar ist, dass mit einem $Floor_S$ hier genauere Aussagen über die Verbindlichkeiten getroffen werden können, als mit einem Floorlet, da ein $Floor_S$ im Gegensatz zu einem Floorlet den risikolosen Zins bis zum Auszahlungszeitpunkt berücksichtigt. Da uns für diese Anlage keine explizite Bewertungsformel bekannt ist, wird dieses Instrument jedoch nur dazu verwendet, die Struktur der Verbindlichkeiten zu erklären, nicht aber in den Beispielen, bei denen der Wert der Anlage relevant ist. Der Grund hierfür ist, dass die Verbindlichkeiten mit Instrumenten bewertet werden sollen, die im Vasicek-Modell eine explizite Bewertungsformel besitzen, um eine aufwendigere Monte-Carlo-Simulation zu vermeiden. Deswegen wird später wieder auf das bewertbare Floorlet zurückgegriffen.

Wird für die Bestimmung des replizierenden Portfolios nun der $Floor_S$ herangezogen, so werden die in Tabelle 4.5 gelisteten Werte erhalten.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
865.681,08	1	178.412,90	0,00
	2	-98.412,90	701.158,18
	3	140.414,50	2.773.873,54
	4	-211.713,62	1.414.927,10
	5	258.968,57	1.162.253,72
	6	-168.885,03	729.908,86
	7	112.652,70	3.974.313,04
	8	7.619,80	-1.163.236,09
	9	-339.377,63	1.560.058,76
	10	266.256,56	2.086.411,94

Tabelle 4.4: RP: Garantiezins von 3,5%. Zusätzlich wurden Floorlets mit fixem Zins von 3,5% berücksichtigt.

Die Replizierung ist hat sich im Vergleich zu den Floorlets weiter verbessert, aber noch nicht exakt. R^2 liefert einen Wert von 99,98%. Bei einem Vergleich der Barwerte würden kaum Unterschiede erkennbar sein, aber selbst Rundungsfehler können diese Abweichung nicht erklären. Vergleicht man die Veränderung der Zusammensetzung des Portfolios von Tabelle 4.4 zu Tabelle 4.5, so fällt auf, dass die Gewichte der Zero-Coupon-Bonds weniger schwanken und im Betrag viel kleiner geworden sind. Das liegt daran, dass die Zahlung aus dem Bestand $CF_{T,SVG}$ keinen deterministischen Bestandteil enthält. Bei einer exakten Replikation werden die Zero-Coupon-Bonds somit nicht berücksichtigt. Die Gewichte der Floor $_S$ s sind im Gegensatz zu den Gewichten der Floorlets alle in derselben Größenordnung.

Der Grund, warum die Replikation nicht exakt ist, ist der, dass die Guthabensverzinsung nicht fix ist. Somit kann zu $t-1$ nicht genau gesagt werden, wie viel Geld zu t vorhanden ist. Fällt der Zins unter den Garantiezins, wird eine bestimmte Anzahl Floor $_S$ s benötigt, um die Differenz zum Mindestzinsertrag zu kompensieren. Diese Höhe der Differenz ist unbekannt, da das Guthaben unbekannt ist und somit auch die Anzahl der Floor $_S$ s. Die Ursache ist also der Zinseszinsseffekt.

Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen wird folgender Vertrag konstruiert:

Das in $t=0$ eingezahlte Kapital wird immer mit 3,5% Garantiezins verzinst. Wird eine höhere Verzinsung erwirtschaftet, so wird der Anteil, welcher über dem Garantiezins von 3,5% liegt auf ein zusätzliches Konto eingezahlt, auf welches nur der risikolose Zins und nicht der Garantiezins gewährt wird. Die Auszahlung des Spar-

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S zu 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
1.005.154,60	1	-5.020,99	1.013.834,86
	2	3.235,04	1.055.192,34
	3	-8.761,60	1.074.437,52
	4	10.517,34	1.117.067,47
	5	-6.773,98	1.088.268,88
	6	322,04	1.245.385,66
	7	-794,84	1.355.174,82
	8	1.133,06	1.140.512,68
	9	2.858,36	1.394.469,66
	10	-2.168,56	1.540.196,18

Tabelle 4.5: RP: Garantiezins von 3,5%. Zusätzlich wurden Floor_Ss mit fixem Zins von 3,5% berücksichtigt.

vertrages mit dieser eingeschränkten Garantie $CF_{T,SVuG}$ ist von der Gestalt:

$$1.000 \cdot 1,035^{10} + \sum_{k=1}^{10} 1.000 \cdot 1,035^{k-1} \max\left(e^{\int_{t-1}^t r_u du} - 1,035; 0\right) \prod_{t=k+1}^{10} e^{\int_{t-1}^t r_u du}.$$

Somit ist heute schon bekannt, wie viele Floor_Ss in den zukünftigen Jahren benötigt werden. Die Barwerte im Vergleich zu vorherigem Beispiel unterscheiden sich nicht viel, aber in diesem Fall kann ein solcher Bestand mit 1.000 Verträgen exakt abgebildet werden. Das Portfolio ist in Tabelle 4.6 abgebildet.

Es ist bemerkenswert, dass die Gewichte der Floor_Ss von einem Jahr zum nächsten um 3,5%, also um den Garantiezins steigen. Dies kann mit dem Zinseszinsseffekt begründet werden, da der zugrunde liegende Betrag jährlich um 3,5% ansteigt. Damit wurde gezeigt, dass diese „unechte Garantie“ über die Floor_Ss abgedeckt werden kann.

4.2 Zusätzliche Einflussfaktoren

4.2.1 Storno

Bei den bisherigen Berechnungen wurden keine weiteren Einflussfaktoren wie Storno oder Sterblichkeit berücksichtigt. Diese sollen nun im Folgenden schrittweise einge-

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S zu 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
1.000.000,00	1	0,00	1.000.000,00
	2	0,00	1.035.000,00
	3	0,00	1.071.225,00
	4	0,00	1.108.717,88
	5	0,00	1.147.523,00
	6	0,00	1.187.686,31
	7	0,00	1.229.255,33
	8	0,00	1.272.279,26
	9	0,00	1.316.809,04
	10	0,00	1.362.897,35

Tabelle 4.6: RP: Eingeschränkter Garantiezins.

führt werden.

Zunächst wird die Option eingeführt, dass der Besitzer des Vertrages diesen zu jedem beliebigen Zeitpunkt zum nächsten Jahrestag der Police kündigen kann. Als Auszahlung erhält er das gesamte Guthaben, welches für diesen Vertrag bis zum Jahrestag angesammelt wurde. Dazu wird angenommen, dass der Grund der vorzeitigen Kündigung nicht unbedingt finanzrationaler Art sein muss, sondern dass die Kunden aus vielen diversen Gründen stornieren, z.B. wenn sich ein Kunde in Geldnöten befindet, oder wenn er sich einen lang gehegten Wunsch erfüllen möchte. Deswegen wird angenommen, dass das Stornoverhalten unabhängig vom Kapitalmarkt ist und dieses Risiko somit nicht am Kapitalmarkt abbildbar ist. Es wird von einem deterministischen Storno ausgegangen.

Es wird angenommen, dass der betrachtete Bestand sich aus 1.000 identischen Verträgen zusammensetzt. Jeder Vertrag hat folgende Eigenschaften:

- Er garantiert eine Mindestverzinsung von 3,5%.
- Bei Storno erhält der Kunde zum Jahrestag der Police das angesammelte Guthaben in vollem Umfang ohne Stornoabzüge ausbezahlt.
- Die Laufzeit beträgt 10 Jahre.
- Es wird eine einmalige Einzahlung in Höhe von 1.000 Euro zum Startpunkt der Police getätigt.

- Die Verzinsung ist identisch zum letzten Beispiel. Der Garantiezins wird folglich nicht auf das gesamte Guthaben angewendet, so dass ohne Storno eine perfekte Replikation mit Hilfe von Geldmarktkonto, Zero-Coupon-Bonds und Floors möglich ist. Diese Annahme wird getroffen, um den Einfluss des deterministischen Stornos besser analysieren zu können.

Für den Bestand gelten folgende Eigenschaften:

- Alle Verträge werden zum Zeitpunkt $t = 0$ abgeschlossen.
- Es gibt kein Neugeschäft, d.h. das betrachtete Unternehmen hat nach 10 Jahren keine Verträge mehr im Bestand.
- Der Bestand setzt sich ausschließlich aus diesen 1.000 betrachteten Verträgen zusammen.
- Jedes Jahr storniert genau ein bestimmter Prozentsatz der Kunden seinen Vertrag, wodurch auch Auszahlungen vor Laufzeitende erfolgen.¹⁰

Nun muss für das Storno ein Prozentsatz bestimmt werden, mit dem gerechnet werden soll. Die durchschnittlichen Stornoquoten der Jahre 2000-2006 können dem Newsletter (Mon08) auf Seite 9 entnommen werden. In diesen Jahren lag die durchschnittliche Stornoquote bei Lebensversicherungen zwischen 4,5% und 5,0%. Deshalb nehmen wir eine deterministische Stornoquote von 5,0% an, die auf die Anzahl der zu Beginn des betrachteten Jahres t noch laufenden Verträge AV_t angewendet wird. Für die Anzahl der Stornofälle AS_t im Zeitraum $[t, t+1)$ gilt somit folgende Formel:

$$AS_t = 5,0\% \cdot AV_t.$$

Da es jedes Jahr eine Auszahlung gibt, wird nun anstatt des PV -Modells das Verlaufs-Modell verwendet, denn mit dem PV -Modell kann nicht unbedingt der Verlauf der Zahlungsströme getroffen werden. Somit liefert ein replizierendes Portfolio, welches mit dem Verlaufs-Modell erstellt wurde, mehr Informationen über die Verbindlichkeiten, als ein Portfolio, welches auf einem PV -Modell basiert. Zunächst werden folgende Assets für die Replikation verwendet:

- Geldmarktkonto: Dabei wird das Geldmarktkonto in insgesamt 10 Konten unterteilt, von denen jedes in einem anderen Jahr seinen Wert vollständig auszahlt. Das ist insofern sinnvoll, da es in jedem Jahr eine Auszahlung gibt.

¹⁰Es ist also möglich, dass eine nicht ganzzahlige Anzahl an Verträgen betrachtet wird.

Würde nur ein Geldmarktkonto verwendet werden, so könnte dieses nur für die Approximation der Auszahlung in einem einzigen Jahr herangezogen werden. Aus Abschnitt 4.1 ist bekannt, dass ein Geldmarktkonto die variable Höhe einer Auszahlung abdeckt.

- Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren.
- Floor_Ss mit Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren: Diese sind nötig, um den Anteil des Garantiezinses abzubilden.

Das Ergebnis der Replikation ist ein Portfolio, dessen Gewichte Tabelle 4.7 entnommen werden können. In Abbildung 4.6 ist zu sehen, dass dieses Portfolio nicht gut ist. R^2 liefert bei dieser Replikation nur 41,23%. Um zu analysieren, warum diese Replikation so schlecht ist, führen wir zunächst eine Replikation mit Hilfe des PV -Modells durch.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S zu 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
50.000,00	1	0,00	50.000,00
46.874,78	2	687,37	50.410,18
44.154,47	3	1.130,19	58.202,11
42.097,45	4	953,72	92.177,43
39.389,54	5	1.749,86	87.934,38
37.257,24	6	2.003,44	42.566,46
35.648,07	7	1.657,33	73.001,90
33.934,27	8	1.573,05	142.859,65
32.085,51	9	1.853,41	23.434,76
611.873,61	10	33.708,63	779.635,63

Tabelle 4.7: RP: Verlaufs-Modell für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.

Die Annahmen um das replizierende Portfolio unter der Verwendung des PV -Modells zu berechnen, sind die selben wie zuvor, unter Berücksichtigung folgender Änderungen:

- Verwendung des PV -Modells anstatt eines Verlaufmodells.
- Anstatt 10 Geldmarktkonten mit verschiedenen Zahlungszeitpunkten wird nun wieder nur von einem Geldmarktkonto ausgegangen, da jedes dieser Geldmarktkonten den gleichen Barwert 1 aufweist.

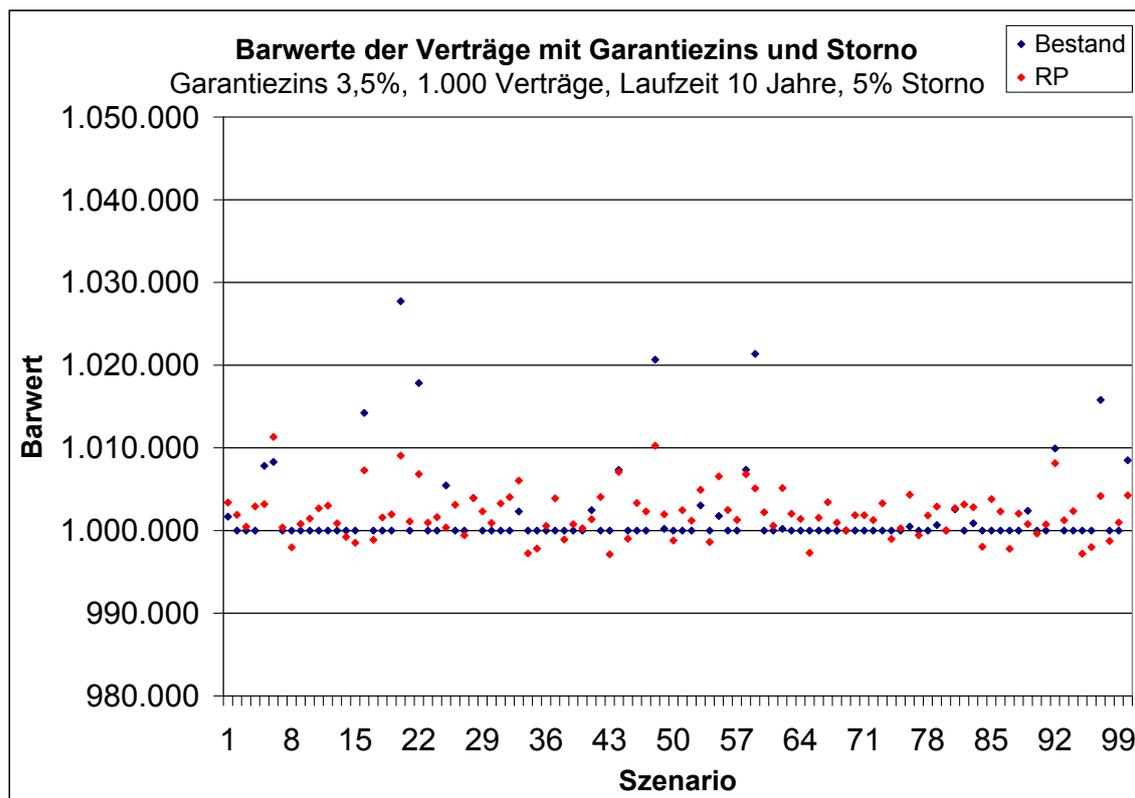


Abbildung 4.6: Vergleich der Barwerte von einem Bestand mit 1.000 Verträgen mit Storno mit dem replizierenden Portfolio.

Tabelle 4.8 gibt die Gewichte dieser Replikation wieder. Bei dieser Replikation stimmen die Barwerte für jedes Szenario mit den Barwerten der Zahlungen des Unternehmens exakt übereinstimmen. $R^2 = 1$ bestätigt dies auch. Es wird nun untersucht, woran es liegt, dass die selben Instrumente bei zwei verschiedenen Modellen zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen kommen, zumal in diesem Fall eine perfekte Replikation erreicht wurde, d.h. die Anlagen, welche betrachtet wurden, für die Replikation geeignet sind.

Bei dem Ergebnis, welches das *PV*-Modell liefert, fällt auf, dass das replizierenden Portfolio keine Zero-Coupon-Bonds enthält. Da ein Geldmarktkonto den Garantiefall nicht abdecken kann, wird diese Aufgabe vollständig von den Floor_S s übernommen. Da im *PV*-Modell die Zeitpunkte der Zahlung nicht von Bedeutung sind, ist es irrelevant, wann die Zahlung stattfindet.

Das Storno ist die Ursache dafür, dass sich die Gewichte zu denjenigen in Tabelle 4.6 unterscheiden und die Replikation dennoch perfekt ist. Storniert ein Kunde seinen Vertrag, verliert er auch die Garantie, dass sein Guthaben mit mindestens 3,5% verzinst wird. Dadurch nimmt die Garantie ab, die das Unternehmen übernommen hat und somit muss das Unternehmen auch dementsprechend weniger Floor_S s hal-

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S zu 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
1.000.000,00	1	0,00	1.000.000,00
	2	0,00	983.250,00
	3	0,00	966.780,56
	4	0,00	950.586,99
	5	0,00	934.664,66
	6	0,00	919.009,02
	7	0,00	903.615,62
	8	0,00	888.480,06
	9	0,00	873.598,02
	10	0,00	858.965,25

Tabelle 4.8: RP: *PV*-Modell für einen Bestand mit eingeschränktem Garantiezins und Storno-Option.

ten. Hierbei beträgt die jährliche Stornoquote 5%. Somit können die Gewichte der Floor_Ss über die Formel $AV_0 \cdot EB \cdot (1+i)^t \cdot (1-0,05)^t = 1.000.000 \cdot (0,95 \cdot 1,035)^t$ für jeden Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, 10\}$ von Hand berechnet werden. Es ist somit gezeigt, dass die Gewichte der Floor_Ss durch den Zeitpunkt, die Stornoquote und den Garantiezins bestimmt werden.

Wird noch einmal das Verlaufsmodell betrachtet, fällt auf dass eine wesentliche Komponente vergessen wurde: die Zeit. Wie gerade gesehen, werden die Gewichte der Floor_Ss auch von der Zeit beeinflusst. Im Verlaufsmodell wurde diese Komponente jedoch vernachlässigt, da die Anlagen nur zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Auszahlung besitzen. Da im Verlaufsmodell versucht wird, die Zahlungen des Bestandes in einem Jahr t durch die Zahlungen der Finanzinstrumente in demselben Jahr t abzubilden, kann ein Floor_S, welcher im Jahr t ausläuft, nur diejenigen Kunden berücksichtigen, die im selben Jahr auch stornieren und somit eine Zahlung verursachen. Die übrigen Kunden, welche nicht im Jahr t stornieren, werden dabei nicht berücksichtigt, obwohl sie ebenfalls vom Garantiezins profitieren. In dem Jahr, in welchem sie ihre Zahlung erhalten, wird aber der Floor_S, welcher im Jahr t ausgelaufen und eine Auszahlung generiert hat, nicht berücksichtigt. An dieser Stelle fehlt dann dieser Betrag.

Dieses Phänomen wäre auch im vorangegangenen Beispiel ohne Storno aufgetreten, falls das Verlaufs-Modell anstatt des *PV*-Modells verwendet worden wäre, da auch in diesem Fall ein Garantiezins berücksichtigt wurde.

Es gilt nun zu überlegen, wie jeder Floor_S auch die zukünftigen Zahlungsströme

berücksichtigt. Dazu wird ein Floor_S betrachtet, der zwar zu einem Zeitpunkt t eine Zahlung hat, dieser Betrag aber sofort auf ein Geldmarktkonto eingezahlt wird. Dieses wird zu einem späteren Zeitpunkt $s > t$ aufgelöst um die Differenz zu den Zahlungsverpflichtungen zum Zeitpunkt s auszugleichen. Der Wert dieser neuen "künstlichen" Anlage mit Zahlung eines Floor_S auf ein Geldmarktkonto zum Zeitpunkt t und Auszahlung zum Zeitpunkt $s > t$ entspricht genau dem Wert eines Floor_S s mit Laufzeit t :

$$\begin{aligned} \text{Wert der künstlichen Anlage} &= \mathbb{E}_Q \left[(0,035 - (e^{\int_{t-1}^t r_u du} - 1))^+ \cdot e^{\int_t^s r_u du} e^{-\int_0^s r_u du} \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[(0,035 - (e^{\int_{t-1}^t r_u du} - 1))^+ \cdot e^{-\int_0^t r_u du} \right] \\ &= \text{Wert eines } \text{Floor}_S \end{aligned}$$

Dieses Instrument wird im Folgenden als *Floor_S mit Laufzeit t und Aufschiebsfrist s - t* bezeichnet. Ein Floor_S mit Laufzeit t und Aufschiebsfrist 0 bezeichnet einen gewöhnlichen Floor_S mit Laufzeit t .

Nun wird die Replikation ein weiteres Mal mit dem Verlaufs-Modell durchgeführt, wobei auch diese neuen Anlagen berücksichtigt werden. Tabelle 4.9 gibt die Gewichte des replizierenden Portfolios wieder.

Werden die Gewichte aller Floor_S s mit Laufzeit t und Aufschiebsfrist k für $k = 0, \dots, 10 - t$ aufaddiert, so sind dies die Gewichte für die Floor_S s mit Laufzeit t aus Tabelle 4.8. Dasselbe gilt für die Summe der Geldmarktkonten. Das liegt daran, dass die Replikation perfekt ist. Denn die Barwerte der Floor_S s mit gleicher Laufzeiten t , aber unterschiedlichen Aufschiebsfristen sind identisch zu dem Barwert eines Floor_S mit Laufzeit t . Dasselbe gilt analog für das Geldmarktkonto. Falls nun ein replizierendes Portfolio mit dem *PV*-Modell bestimmt werden soll, muss diese Replikation auch exakt sein, da das *PV*-Modell, unter Verwendung derselben Instrumente immer mindestens genauso gute Ergebnisse liefert wie das Verlaufsmodell. Da aber nach Annahme das replizierende Portfolio eindeutig ist, müssen die Gewichte der Floor_S s mit Laufzeit t gleich der Summe der Gewichte der Floor_S s mit Laufzeit t und Aufschiebsfrist $s \in \{0, \dots, T - t\}$ sein. Somit ist - zumindest für dieses Beispiel und unter diesen Annahmen - Storno perfekt replizierbar. Wird statt der deterministischen Stornoquote ein pfadabhängiges oder stochastisches Stornoverhalten angenommen, so gelten diese Ergebnisse nicht mehr.

Im Grunde wurde mit den Floor_S s genauso verfahren, wie bei der Aufteilung des Geldmarktkontos im obigen Verlaufs-Modell, da jeder Floor_S in einzelne Gruppen unterteilt wurde, um damit die Auswirkungen der Garantien bestmöglich abzubilden. Mit diesem Ansatz ist es somit möglich, den Nachteil des Verlaufsmodelles, d.h. die unzureichende Berücksichtigung pfadabhängiger Zahlungen, abzuschwächen.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,5%			
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile			
50.000,00	1	0,00	50.000,00			
47.500,00	2	0,00	49.162,50			
45.125,00	3	0,00	48.339,03			
42.868,75	4	0,00	47.529,35			
40.725,31	5	0,00	46.733,23			
38.689,05	6	0,00	45.950,45			
36.754,59	7	0,00	45.180,78			
34.916,86	8	0,00	44.424,00			
33.171,02	9	0,00	43.679,90			
630.249,41	10	0,00	858.965,25			

		Floor _S 3,5%				
Aufschubsfrist	Laufzeit	1	2	3	4	5
1		47.500,00	45.125,00	42.868,75	40.725,31	38.689,05
2		46.704,37	44.369,16	42.150,70	40.043,16	38.041,01
3		45.922,08	43.625,97	41.444,67	39.372,44	37.403,82
4		45.152,88	42.895,24	40.750,48	38.712,95	36.777,30
5		44.396,57	42.176,74	40.067,91	38.064,51	723.225,69
6		43.652,93	41.470,28	39.396,77	748.538,59	
7		42.921,74	40.775,65	774.737,44		
8		42.202,80	801.853,25			
9		829.918,12				

Aufschubsfrist	Laufzeit	6	7	8	9
1		36.754,59	34.916,86	33.171,02	630.249,41
2		36.138,96	34.332,01	652.308,14	
3		35.533,63	675.138,92		
4		698.768,79			

Tabelle 4.9: RP: Verlaufs-Modell für einen Bestand mit eingeschränktem Garantiezins und Storno-Option.

Als nächstes soll untersucht werden, ob das Storno auch dann keine Auswirkungen auf die Replikationsqualität hat, wenn die Garantie auf das gesamte Guthaben gewährt wird. Um einen Vergleich zu dem replizierenden Portfolio aus Tabelle 4.5 herzustellen, wird wiederum das *PV*-Modell mit denselben Anlagen¹¹ verwendet. Die Gewichte der Optimierung sind in Tabelle 4.10 aufgeführt. Auffallend ist, dass die Gewichte der Floor_S s positiv und in etwa der Größenordnung von Tabelle 4.5 sind und dass somit auch diese Garantie überwiegend von Floor_S s abgedeckt wird. Die Position der Zero-Coupon-Bonds lässt sich nicht über die Struktur des Bestandes erklären und resultiert allein aus der Optimierung. Die Replikationsqualität ist mit $R^2 = 99.98\%$ auch etwa so groß, wie in dem Fall, in dem das Storno nicht betrachtet wurde. Im Übrigen steigt die Qualität des replizierenden Portfolios mit zunehmender Stornoquote, was daran liegt, dass im Fall, dass ein Kunde storniert, kein Garantiezins mehr gewährt werden muss. Aufgrund dessen werden im Beispiel mit Storno auch weniger Floor_S s benötigt, als im Fall ohne Storno. Deswegen kann auch in diesem Fall davon ausgegangen werden, dass diese Art der Modellierung des Stornos keine relevante Auswirkung auf die Qualität der Replikation hat. Wird statt der deterministischen Stornoquote ein pfadabhängiges oder stochastisches Stornoverhalten angenommen, so gelten diese Ergebnisse nicht mehr, wie wir in Abschnitt 4.2.4 sehen werden.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
1.003.401,26	1	-3.304,64	1.009.122,82
	2	1.962,53	996.240,70
	3	-5.510,17	968.278,25
	4	6.723,67	958.574,29
	5	-4.265,86	900.460,00
	6	96,22	964.186,37
	7	-405,00	991.833,71
	8	559,02	795.141,06
	9	1.982,96	926.056,08
	10	-1.431,89	971.511,87

Tabelle 4.10: RP: *PV*-Modell für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.

Interessant ist zudem zu sehen, dass die Replikationsqualität wegen des Stornos auch

¹¹Verwendet werden ein Geldmarktkonto, Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeiten von 1 bis 10 Jahre, sowie Floor_S s auf den Garantiezins und Laufzeiten von 1 bis 10 Jahren.

dann kaum abnimmt, wenn statt Floorlets zu 3,5% verwendet werden. Die Gewichte für diese Replikation sind in Tabelle 4.11 abgebildet. Die Replikationsqualität ging unter Berücksichtigung des Stornos von 92,08% geringfügig auf 91,73% zurück. Das Storno beeinflusst die Replikationsqualität folglich in diesem Beispiel nur minimal.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
878.338,46	1	159.657,49	0,00
	2	-88.663,51	751.445,56
	3	127.926,04	2.549.346,14
	4	-165.987,28	1.201.820,08
	5	187.348,54	944.077,96
	6	-134.683,70	588.662,39
	7	101.299,59	3.057.557,81
	8	1.900,48	-951.299,32
	9	-258.820,86	1.047.731,53
	10	200.977,67	1.291.337,38

Tabelle 4.11: RP: *PV*-Modell mit Floorlets für einen Bestand mit Garantiezins und Storno-Option.

4.2.2 Sterblichkeit

Als nächstes wird die Sterblichkeit in das Modell eingeführt und ein einfaches Lebensversicherungsprodukt, die gemischt Versicherung, betrachtet.

Das betrachtete Unternehmen verfüge über einen Bestand von 1.000 identischen Verträgen, deren Laufzeiten gleichzeitig in $t = 0$ beginnen. Ein solcher Vertrag habe folgende Merkmale:

- Die Prämienzahlung erfolgt gegen einen Einmalbeitrag zu $t = 0$ in Höhe von 1.000 Euro.
- Die Laufzeit betrage 10 Jahre.
- Bei vorzeitiger Vertragsbeendigung wird der auszahlende Betrag erst am Ende des laufenden Jahres ausbezahlt. Die in der Zeit erwirtschafteten Erträge werden dem Kunden gutgeschrieben.

- Falls der Versicherungsnehmer stirbt, bekommt er die Todesfall-Leistung und zusätzlich seinen Anteil an den Überschüssen.
 - Falls der Versicherungsnehmer den Vertrag kündigt, erhält er zusätzlich zu der Deckungsrückstellung seinen Überschussanteil. Der Risikobeitrag für das Jahr der Kündigung muss vom Versicherungsnehmer voll bezahlt werden.
- Bei Laufzeitende erhält der Versicherungsnehmer seine Versicherungssumme sowie die angesparten Überschüsse.
 - Die Versicherungssumme und die Todesfall-Leistung sind gleich hoch.
 - Der Garantiezins betrage 3,5% und wird auf das gesamte Kapital gewährt, d.h. auch auf eventuelle Überschüsse.

In diesem Beispiel werden keine Kosten berücksichtigt.

Im Folgenden wird von deterministischen Storno und deterministischer Sterblichkeit ausgegangen.

Als Sterbetafel wird die DAV 2008 T-Tafel 1. Ordnung verwendet. Es wird angenommen, dass alle Personen männlich und 65 Jahre alt sind. Die verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 4.12 für die jeweiligen Vertragsjahre aufgelistet.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- l_t bezeichnet die Anzahl der Lebenden nach t Jahren.
- d_t steht für die Anzahl der Personen, die in der Zeit $[t - 1, t)$ gestorben sind.
- p_t ist die Wahrscheinlichkeit einer Person den Zeitraum $[t, t + 1)$ zu überleben, unter der Bedingung, dass sie Zeitpunkt t lebt.
- q_t ist entsprechend die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in dem Zeitraum $[t, t + 1)$ stirbt, unter der Bedingung, dass sie Zeitpunkt t lebt.

Darüber hinaus werden in diesem Abschnitt folgende Bezeichnungen verwendet:

U_t Die Höhe der Summe der Überschussbeteiligung für einen Vertrag in Jahr t
 DR_t die Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt t ,
 r der Garantiezins,
 r_t die Short-Rate im Zeitpunkt t ,
 VS die Versicherungssumme,

sowie

AV_t die Anzahl der Verträge zu Beginn des Jahres t ,
 AT_t die Anzahl der Todesfälle im Zeitraum $[t, t+1)$ und
 AS_t die Anzahl der Stornofälle im Zeitraum $[t, t+1)$.

Die Anzahl der Verträge wird auf folgende Art und Weise fortgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 AT_t &= AV_t \cdot q_t, \\
 AS_t &= AV_t \cdot s_t, \text{ und} \\
 AV_{t+1} &= AV_t - AT_t - AS_t = AV_t(1 - q_t - s_t).
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet s_t die Wahrscheinlichkeit einen Vertrag im Jahr t zu stornieren. Dabei wird die Stornowahrscheinlichkeit, ebenso wie die Sterbewahrscheinlichkeit auf die Anzahl der Verträge zu Beginn des Jahres t angewandt. Es wird somit die Stornoquote der Personen betrachtet, die im Zeitraum $[t, t+1)$ nicht sterben und zum Zeitpunkt t noch leben:

$$s_t = P(\text{Person lebt zu Zeitpunkt } t \text{ und storniert in Jahr } t | \text{Person überlebt Jahr } t).$$

Dadurch ist gewährleistet, dass in jedem Jahr t $(1 - q_t - s_t) \geq 0$ ist und somit keine negative Anzahl an Verträgen auftreten kann.

Es wird weiterhin angenommen, dass $s_t \equiv 5\% \quad \forall t \in \{0, \dots, 9\}$ beträgt.

Jahr	l_t	d_t	p_t	q_t
0	1000,00000			
1	981,16800	18,83200	0,98117	0,01883
2	959,87273	21,29527	0,97830	0,02170
3	935,86055	24,01218	0,97498	0,02502
4	908,96579	26,89476	0,97126	0,02874
5	879,13172	29,83408	0,96718	0,03282
6	846,41131	32,72040	0,96278	0,03722
7	810,96361	35,44771	0,95812	0,04188
8	773,17514	37,78847	0,95340	0,04660
9	733,60326	39,57188	0,94882	0,05118
10	692,44078	41,16248	0,94389	0,05611

Tabelle 4.12: Die Sterbetafel, basierend auf der DAV 2008 T-Tafel 1.Ordnung.

Da eine gemische Lebensversicherung betrachtet wird, lässt sich die Versicherungssumme (VS) mit folgender Formel berechnen:

$$VS = \frac{1}{EB} \left(\sum_{t=0}^9 {}_t p_0 q_t v^{t+1} + {}_{10} p_0 v^{10} \right),$$

hierbei bezeichnet v den Diskont, in diesem Fall

$$v = \frac{1}{1 + 0,035},$$

da mit dem Garantiezins von 3,5% gerechnet wird. EB steht für den Einmalbeitrag, der zu Vertragsbeginn geleistet wird und

$${}_t p_0 = \prod_{k=0}^{t-1} p_k,$$

die Wahrscheinlichkeit die Zeit $[0, x)$ zu überleben, wobei ${}_0 p_0 = 1$ gesetzt wird. Die Versicherungssumme beträgt bei einem Garantiezins von 3,5% und einem Einmalbeitrag von 1.000 Euro 1.350,32 Euro.

Die anfallenden Überschüsse werden als verzinsliche Ansammlung auf einem separaten Konto verwahrt und werden ebenso mit mindestens dem Garantiezinsen verzinst. Somit ist die Entwicklung der Deckungsrückstellung deterministisch und kann mit folgender Formel für jedes Jahr $t \in \{0, 1, \dots, 9\}$ bestimmt werden:

$$DR_t = VS \left(\sum_{k=t}^9 {}_{k-t} p_t q_k v^{k-t+1} + {}_{10-t} p_t v^{10-t} \right).$$

Dabei bezeichnet

$${}_{k-t} p_t = \prod_{j=t}^{k-1} p_j,$$

die Wahrscheinlichkeit einer Person die Zeit $[t, k)$ zu überleben, unter der Bedingung, dass diese zum Zeitpunkt t noch lebt. Hier wird ${}_0 p_t = 1$ gesetzt. Die Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt t lässt sich in einen Risikoanteil

$$RA_t = VS \sum_{k=t}^9 {}_{k-t} p_t q_k v^{k-t+1},$$

welcher der Deckungsrückstellung einer reinen Todesfall-Versicherung entspricht, und in einen Sparanteil

$$SA_t = VS {}_{10-t} p_t v^{10-t},$$

welcher der Deckungsrückstellung einer reinen Erlebensfall-Versicherung entspricht, zerlegen.

Den Verlauf der Deckungsrückstellung bei einem Garantiezins von 3,5% kann in Tabelle 4.13 nachgelesen werden. Dabei steht Jahr "0" für den Versicherungsbeginn und Jahr "10" für das Versicherungsende. Angegeben sind die Werte der Deckungsrückstellung nach k Jahren, $k \in \{0, \dots, 10\}$. Graphisch wird dies von Bild 4.7 dargestellt. Der sehr hohe Risikoanteil ist dem relativ hohen Startalter von 65 Jahren geschuldet.

Jahr	Deckungsrückstellung	Sparanteil	Risikoanteil
0	1.000,00	662,85	337,15
1	1.028,95	699,22	329,73
2	1.058,63	739,75	318,88
3	1.089,15	785,28	303,87
4	1.120,67	836,81	283,85
5	1.153,43	895,50	257,94
6	1.187,75	962,67	225,08
7	1.224,03	1.039,91	184,12
8	1.262,80	1.128,91	133,88
9	1.304,66	1.231,45	73,20
10	1.350,32	1.350,32	0,00

Tabelle 4.13: Die Entwicklung der Deckungsrückstellung in Euro.

Darüber hinaus kann die Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt t in einen Sterblichkeitsblock SB_t und in einen Garantiezinsblock GZB_t aufgeteilt werden, wenn berücksichtigt wird, dass ${}_{10-t}p_t = 1 - {}_{10-t}q_t$ gilt.

$$\begin{aligned}
 DR_t &= RA_t + SA_t = VS \sum_{k=t}^9 {}_{k-t}p_t q_k v^{k-t+1} + (1 - {}_{10-t}q_t) VS v^{10-t} \\
 &= VS \left(\sum_{k=t}^9 {}_{k-t}p_t q_k v^{k-t+1} - {}_{10-t}q_t v^{10-t} \right) + VS v^{10-t} \\
 &= SB_t + GZB_t,
 \end{aligned}$$

mit

$$SB_t = VS \left(\sum_{k=t}^9 {}_{k-t}p_t q_k v^{k-t+1} - {}_{10-t}q_t v^{10-t} \right),$$

und

$$GZB_t = VS v^{10-t}$$

Der Garantiezinsblock wird jährlich mit dem Garantiezins verzinst und entwickelt sich somit unabhängig von der Sterblichkeit. Der Sterblichkeitsblock nimmt jährlich

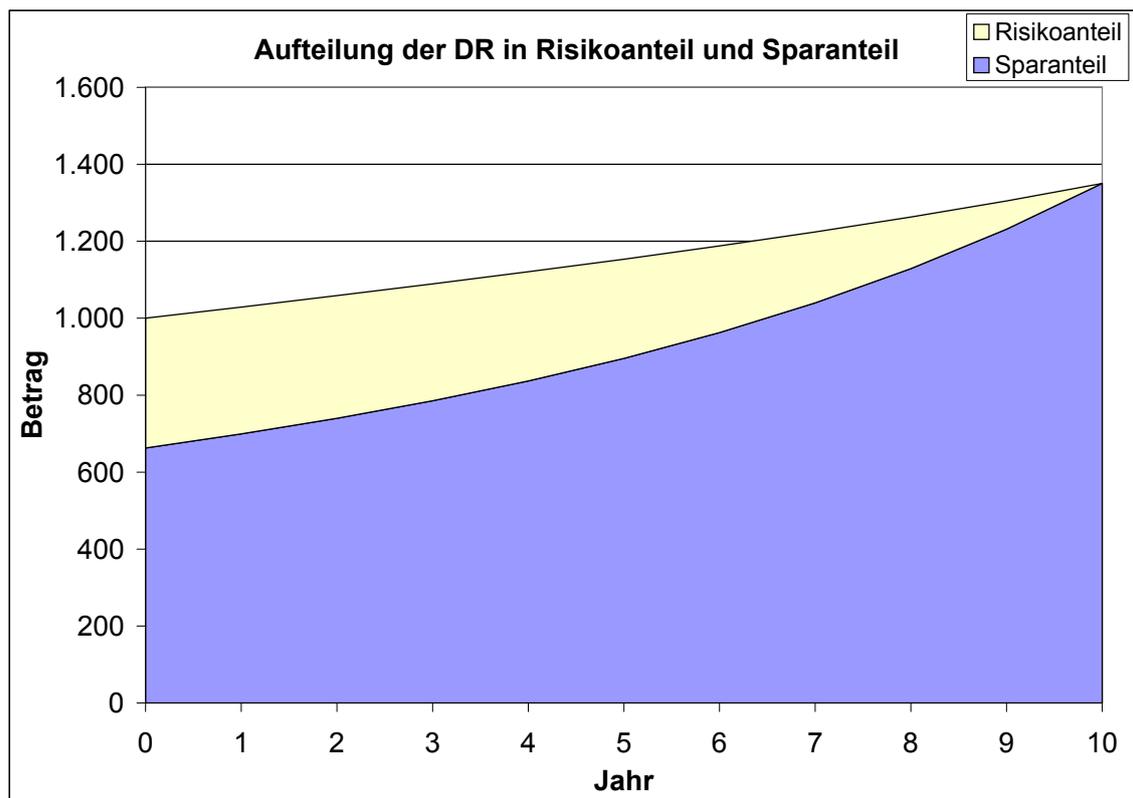


Abbildung 4.7: Entwicklung der Deckungsrückstellung mit Unterteilung in Sparanteil und Risikoanteil.

ab, da er dazu benötigt wird, die erwarteten Auszahlungen der Todesfall-Leistungen im Bestand zu decken.

Nun wird auf die Berechnung der Überschüsse und Zahlungsströme eingegangen. In diesem Beispiel wird von einer Überschussbeteiligung von 100% ausgegangen. Erst in Abschnitt 4.2.3 wird eine Überschussbeteiligung auf Zinserträge von 90% verwendet.

Betrachtet wird nun die Höhe der jährlichen Zahlungen. Dazu wird zwischen Stornoleistung im Stornofall und der Todesfall-Leistung im Todesfall unterschieden. Storniert ein Kunde im Jahr $t \in \{0, \dots, 9\}$, so erhält er am Ende des laufenden Jahres folgenden Betrag:

$$SL_{t+1} = DR_t + U_t + E_t - \Delta SB_t,$$

mit

- E_t der Anteil der Zinserträge pro Vertrag im Jahr t , und
- ΔSB_t die Veränderung des Sterblichkeitsblocks im Jahr t .

Stirbt ein Versicherungsnehmer im Zeitraum $[t, t + 1]$, so erhalten seine Hinterbliebenen diesen Betrag:

$$VL_{t+1} = VS + U_t + E_t - DR_t \cdot r.$$

Bei der Versicherungsleistung VL_{t+1} muss der garantierte Ertrag $DR_t \cdot r$ in Jahr t abgezogen werden, da dieser Ertrag in E_t enthalten ist, aber schon in VS abgegolten ist¹².

Da jede Zahlung nachschüssig zum Ende des Jahres t stattfindet, wird als Index $t + 1$ statt t verwendet.

Um SL_{t+1} und VL_{t+1} berechnen zu können, müssen E_t und ΔSB_t bestimmt werden. Dafür wird folgende Situation betrachtet:

Zu Beginn des Jahres t ist das Kapital K_t mit

$$K_t = (DR_t + U_t) \cdot AV_t$$

vorhanden. Dieses Kapital wird mit dem Maximum aus Garantiezins und risikolosem Zins in Jahr t verzinst. Somit belaufen sich die Zinserträge ZE_t auf

$$ZE_t = K_t \cdot \max\left(r; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1\right).$$

Damit beträgt der Ertrag pro Einzelvertrag

$$E_t = \frac{ZE_t}{AV_t} = (DR_t + U_t) \max\left(r; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1\right).$$

Zur Berechnung von ΔSB_t muss beachtet werden, dass ΔSB_t den Differenzbetrag von Deckungsrückstellung und Versicherungssumme ausgleichen soll. Dabei ist zu berücksichtigen, dass DR_t in Jahr t einen Ertrag erwirtschaftet, welcher diese Differenz verringert. Da sich die Versicherungssumme VS nicht verändert, weil die Überschüsse separat verwaltet werden, hängt die Entwicklung der Deckungsrückstellung nur vom Garantiezins ab. Somit kann diese Differenz über die Formel

$$\Delta SB_t = \frac{AT_t}{AV_t - AT_t} (VS - DR_t(1 + r))$$

angegeben werden. In dieser Formel werden die Todesfälle von der Vertragsanzahl abgezogen, da es unerheblich ist, ob die gestorbenen Kunden einen Beitrag zur Begleichung der Differenz beitragen, da in diesem Fall der Differenzbetrag steigen würde,

¹²Zur Erklärung: Falls $U_t = 0$ ist und der Garantiezins greift, so würde nur die Versicherungssumme ausgezahlt werden, obwohl E_t gerade der Garantiertrag $DR_t \cdot r$ ist. Deswegen muss $DR_t \cdot r$ abgezogen werden.

aber durch mehr Verträge geteilt werden müsste¹³.

Andererseits leistet jeder Kunde denselben Anteil um die Differenz auszugleichen, somit gilt ebenfalls

$$\Delta SB_t = SB_t v^{-1} - SB_{t+1} = VS \sum_{k=t}^9 p_t q_k v^{k-t+1} v^{-1} - VS \sum_{k=t+1}^9 p_{t+1} q_k v^{k-t}.$$

Um fortfahren zu können, wird eine Formel für die Überschüsse benötigt. Da die Entwicklung der Deckungsrückstellung deterministisch ist und die Überschüsse separat verwaltet werden, kann das Guthaben am Ende des Jahres t ($ZE_t + K_t$) in zwei Blöcke unterteilt werden: In einen Deckungsrückstellungsblock und in einen Überschussblock. Der Deckungsrückstellungsblock beträgt am Ende des Jahres t $AV_t \cdot DR_t(1+r)$. Darin ist der aktuelle Wert der garantierten Leistungen enthalten. Die Ansprüche der Kunden an dem Überschussblock, welcher für die nicht-stornierenden, nicht-sterbenden Kunden den Wert U_{t+1} hat, sind gleich hoch, d.h.

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= \frac{1}{AV_T} (ZE_t + K_t - DR_t(1+r)AV_t) \\ &= (DR_t + U_t) \cdot \max\left(1+r; e^{\int_t^{t+1} r_u du}\right) - DR_t(1+r) \\ &= (DR_t + U_t) \cdot \max\left(0; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 - r\right) + U_t(1+r). \end{aligned}$$

Wird diese Formel in SL_{t+1} eingesetzt und berücksichtigt, dass $DR_t = SB_t + GZB_t$ gilt, so folgt:

$$\begin{aligned} SL_{t+1} &= SB_t + GZB_t + U_t + (SB_t + GZB_t + U_t) \max\left(r; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1\right) \\ &\quad - SB_t(1+r) + SB_{t+1} \\ &= SB_t(1+r) + GZB_t(1+r) + (DR_t + U_t) \max\left(0; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 - r\right) \\ &\quad + U_t - SB_t(1+r) + SB_{t+1} \\ &= SB_{t+1} + GZB_{t+1} + U_{t+1} \\ &= DR_{t+1} + U_{t+1}, \end{aligned}$$

und bei VL_{t+1}

$$\begin{aligned} VL_{t+1} &= VS + U_t + (SB_t + GZB_t + U_t) \max\left(r; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1\right) - DR_t \cdot r \\ &= VS + (DR_t + U_t) \max\left(0; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 - r\right) + U_t \\ &= VS + U_{t+1}. \end{aligned}$$

¹³In diesem Fall würde gelten:

$$\begin{aligned} \Delta SB_t &= \frac{AT_t}{AV_T} (VS - DR_t(1+r) - \Delta SB_t) \\ \Leftrightarrow \Delta SB_t (AV_t - AT_t) &= AT_t (VS - DR_t(1+r)). \end{aligned}$$

Somit ist die Höhe der Auszahlung im Jahr $t \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$SL_{t+1} \cdot AS_t + VL_{t+1} \cdot AT_t.$$

Nun kann dieser Bestand repliziert werden. Dazu wird zunächst das Verlaufsmodell angewendet. Zur Replikation werden Geldmarktkonto, Zero-Coupon-Bonds und Floor_Ss mit verschiedenen Aufschiebszeiten verwendet.

Tabelle 4.14 enthält die entsprechenden Gewichte. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in den unteren beiden Tabelln die Spalten die Aufschiebsdauern bezeichnen. Somit befindet sich in Spalte s mit Laufzeit t das Gewicht für einen Floor_S mit Laufzeit t Jahren und Aufschiebsdauer von s weiteren Jahren. Die Auszahlung erfolgt somit nach $t + s$ Jahren.

In Abbildung 4.8 werden die Barwerte je Szenario abgebildet. Die Tatsache, dass in den meisten Szenarien der Barwert der Zahlungsströme 1.000.000 Euro beträgt, ist darin begründet, dass in denjenigen Szenarien, in denen der risikolose Zins zu keinem Zeitpunkt unter den Garantiezins fällt, nur so viel Geld ausgezahlt wird, wie am Kapitalmarkt erwirtschaftet wurde. Die Garantie greift also in diesen Szenarien zu keinem Zeitpunkt.

Die Gewichte der Zero-Coupon-Bonds werden mit der Länge der Laufzeit tendentiell geringer. Dies liegt daran, dass der deterministische Anteil der Cash-Flows mit der Zeit abnimmt. Der deterministische Anteil der Zahlung besteht hierbei nur aus der Differenz zwischen der auszuzahlenden Versicherungssumme und der Deckungsrückstellung, multipliziert mit der Anzahl der Sterbenden in Jahr t , die im Laufe der Zeit abnimmt, also $AT_t \cdot (VS - DR_t(1 + r))$. Die Schwankungen in den Gewichten sind darauf zurückzuführen, dass die Replikation nicht perfekt ist. Insbesondere lässt das Gewicht des Zero-Coupon-Bonds im Jahr 10 darauf schließen, dass die Zahlung im letzten Betrachtungsjahr nicht gut approximiert werden konnte. Der Grund dafür liegt in der Auszahlung im letzten Jahr. Diese enthält neben den Todesfall- und Storno-Leistungen auch die Erlebensfall-Leistungen und ist somit sehr viel größer als in den anderen Jahren. Dadurch ist die Auswirkung der unzureichend abgebildeten Garantie entsprechend größer.

Die Replikationsqualität ist mit 99,46% sehr gut, aber im Vergleich zum letzten Beispiel, bei welchem keine Sterblichkeit betrachtet wurde, etwas schlechter. Dies kann aber auch an der Auswahl der Szenarien liegen und sich bei einem anderen Szenariensatz umdrehen.

Wird die Auszahlung im Stornofall SL_{t+1} betrachtet, kann diese umgestellt werden und es gilt

$$SL_{t+1} = (DR_t + U_t) \max \left(1 + r; e^{\int_t^{t+1} r_u du} \right) - \Delta SB_t.$$

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,5%		
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile		
68.832,00	1	5.635,48	68.832,00		
66.505,10	2	5.336,85	69.146,57		
64.345,11	3	4.932,57	69.500,36		
62.242,57	4	4.406,60	71.611,92		
60.111,67	5	3.736,45	72.504,01		
57.883,08	6	2.923,76	74.364,56		
55.491,08	7	2.015,61	68.038,95		
52.821,52	8	1.044,66	63.838,69		
49.864,68	9	11,44	75.338,54		
442.047,73	10	-9.471,13	696.544,13		

Aufschubsfrist Laufzeit	Floor _S 3,5%				
	1	2	3	4	5
1	66.078,97	63.100,92	60.210,51	57.788,95	55.248,11
2	66.638,10	63.869,09	60.364,21	56.863,15	53.435,57
3	65.430,52	62.687,87	60.961,23	57.447,02	55.703,05
4	69.231,63	65.525,88	62.343,81	56.766,30	52.773,49
5	69.797,44	69.785,43	65.607,59	62.298,19	520.493,76
6	73.139,72	68.869,54	64.162,80	557.243,01	
7	68.012,32	66.788,80	628.948,79		
8	54.415,27	430.252,91			
9	669.121,20				

Aufschubsfrist Laufzeit	6	7	8	9
1	52.126,51	47.497,63	42.916,75	366.913,37
2	50.417,62	47.856,39	431.990,89	
3	51.315,81	453.537,05		
4	448.793,51			

Tabelle 4.14: RP: Verlaufsmodell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.

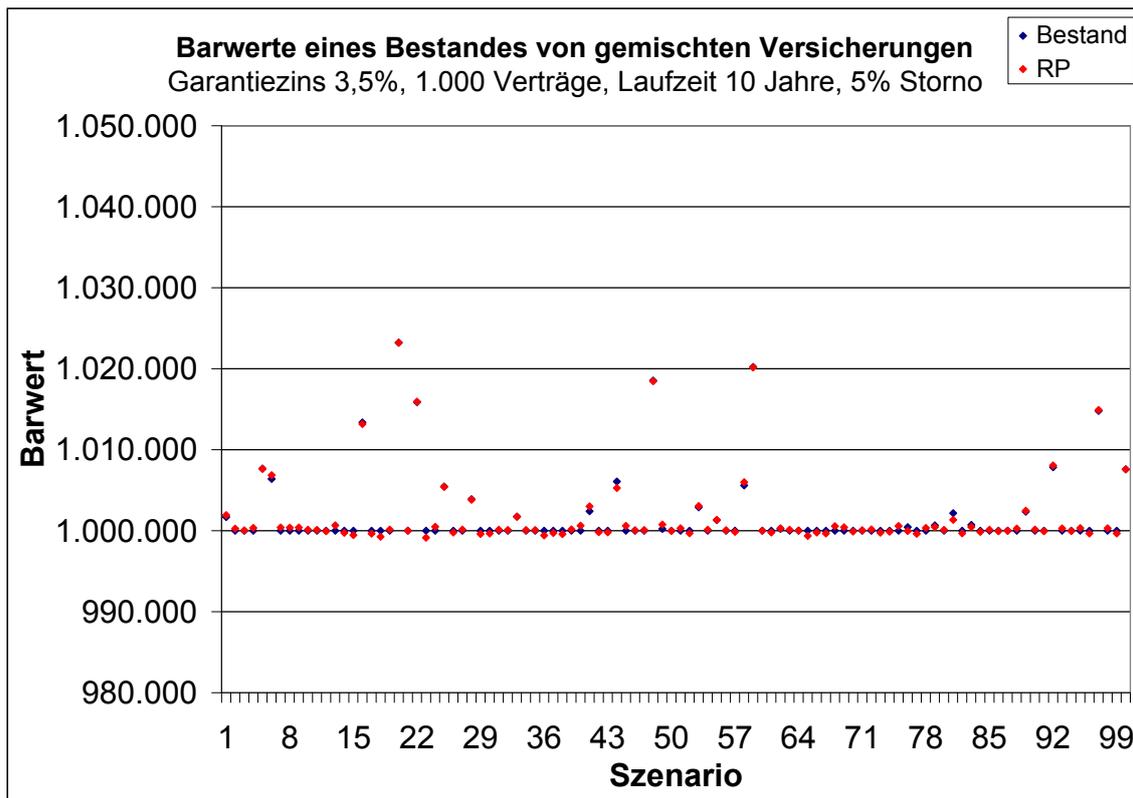


Abbildung 4.8: Vergleich der Barwerte von einem Bestand mit 1.000 Verträgen mit dem replizierenden Portfolio.

Der erste Teil dieser Formel kann nicht exakt repliziert werden, da die Floors den Zinseszinsseffekt nur unzureichend abbilden können, wie in einem früherem Beispiel festgestellt wurde. Da ΔSB_t nur von der Sterblichkeit und dem Garantiezins abhängt, was beides als deterministisch angenommen wurde, ist dieser Wert auch deterministisch und ist somit mit Zero-Coupon-Bonds replizierbar.

Die Auszahlung im Todesfall beträgt

$$VL_{t+1} = VS + U_t \max\left(1 + r; e^{\int_t^{t+1} r_u du}\right) + DR_t \max\left(0; e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 - r\right),$$

wobei ebenfalls nur der Garantiezins unzureichend abgebildet wird. Somit hat die Einführung von deterministischen Sterblichkeiten theoretisch keinen Einfluss auf die Qualität der Replikation.

Im Folgenden wird das Ergebnis analysiert.

Hierfür wird zunächst ein Scatterplot sowie ein Quantilplot über die 100 Szenarien betrachtet. Diese sind in Abbildung 4.9 zu finden. Bei einem Scatterplot werden die Barwerte des Bestandes gegen die Barwerte des replizierenden Portfolios je Szenario abgetragen. Bei einer perfekten Replikation würden somit alle Punkte auf der Winkelhalbierenden liegen. Die Abweichungen betragen im Schnitt etwa 254,06 Euro

und im maximalen Fall 864,86 Euro, was einer Abweichung von 0,09% entspricht. In einem Quantilplot werden die Quantile der empirischen Verteilungen der Verpflichtungen und des replizierenden Portfolios gegeneinander abgetragen. Dabei beträgt die durchschnittliche Abweichung etwa 223,20 Euro und die maximale Abweichung wie bereits auch im Scatterplot 864,86 Euro. Der Unterschied zwischen beiden Grafiken ist somit sehr gering. Dies kann mit der hohen Replikationsqualität und der Tatsache, dass in den meisten Szenarien der Barwert der Verpflichtungen bei 1 Mio. Euro liegt, begründet werden.

Die Abweichungen fallen für dieses Beispiel relativ gering aus, da die Einflüsse auf die Zahlungsströme genau untersucht wurden und auch die Formeln für die Cash-Flows der Verpflichtungen bekannt sind. Die maximale relative Abweichung des Werts des replizierenden Portfolios von dem des Bestands beträgt in diesen 100 Szenarien nur knapp 0,09%. Obwohl nur wenige verschiedene Arten von Finanzinstrumenten für die Replikation verwendet wurden, scheint das Portfolio relativ gut zu sein. In der Praxis wird diese Qualität der Replikation jedoch nicht ausreichen, um qualitativ hochwertige Aussagen treffen zu können, da eine Anzahl von 100 Szenarien zu niedrig ist um die komplexe Struktur der Versicherungsverpflichtungen komplett zu erfassen.

Als nächstes wird dieses Resultat mit dem Ergebnis des *PV*-Modelles verglichen. Tabelle 4.15 enthält dazu die Gewichte des replizierenden Portfolios gemäß der *PV*-Methode. Die Replikationsqualität ist mit 99,989% nahezu perfekt. Die Ähnlichkeiten zum replizierenden Portfolio des Verlaufsmodelles sind zwar vorhanden, aber geringer, als auf den ersten Blick zu erkennen ist. Die aufsummierten Gewichte des replizierenden Portfolios, welches mit dem Verlaufsmodell bestimmt wurde, können der Tabelle 4.16 entnommen werden¹⁴. Das Geldmarktkonto und die *Floors* sind zwar auch positiv und in derselben Größenordnung, aber die Beträge schwanken um bis zu 12,52% (*Floor_S* mit einjähriger Laufzeit). Die *Zero-Coupon-Bonds* haben zum Teil unterschiedliche Vorzeichen und ihr Betrag unterscheidet sich teilweise um weit mehr als das 100-fache. Die Ursache liegt in der Replikation, die in beiden Fällen nicht perfekt ist und somit die Gewichte so gewählt werden, dass die Abweichungen über die betrachteten Szenarien minimal werden. Dies hat insbesondere bei den Gewichten der *Zero-Coupon-Bonds* große Auswirkungen, da der Anteil, welcher über die *Zero-Coupon-Bonds* abgedeckt wird, sehr gering ist. Das wirft die Frage auf, wie sich die Gewichte verändern, wenn andere Szenarien oder mehr Szenarien betrachtet werden. Eventuell konvergiert das Portfolio gegen einen Grenzwert. Das wird erst im nächsten Abschnitt untersucht, in dem von einer Überschussbeteiligung von 90%

¹⁴Für diesen Vergleich wurden die *Floors* mit gleicher Laufzeit, aber unterschiedlicher Auszahlungsfrist zusammengezählt. Analoges gilt für das Geldmarktkonto.

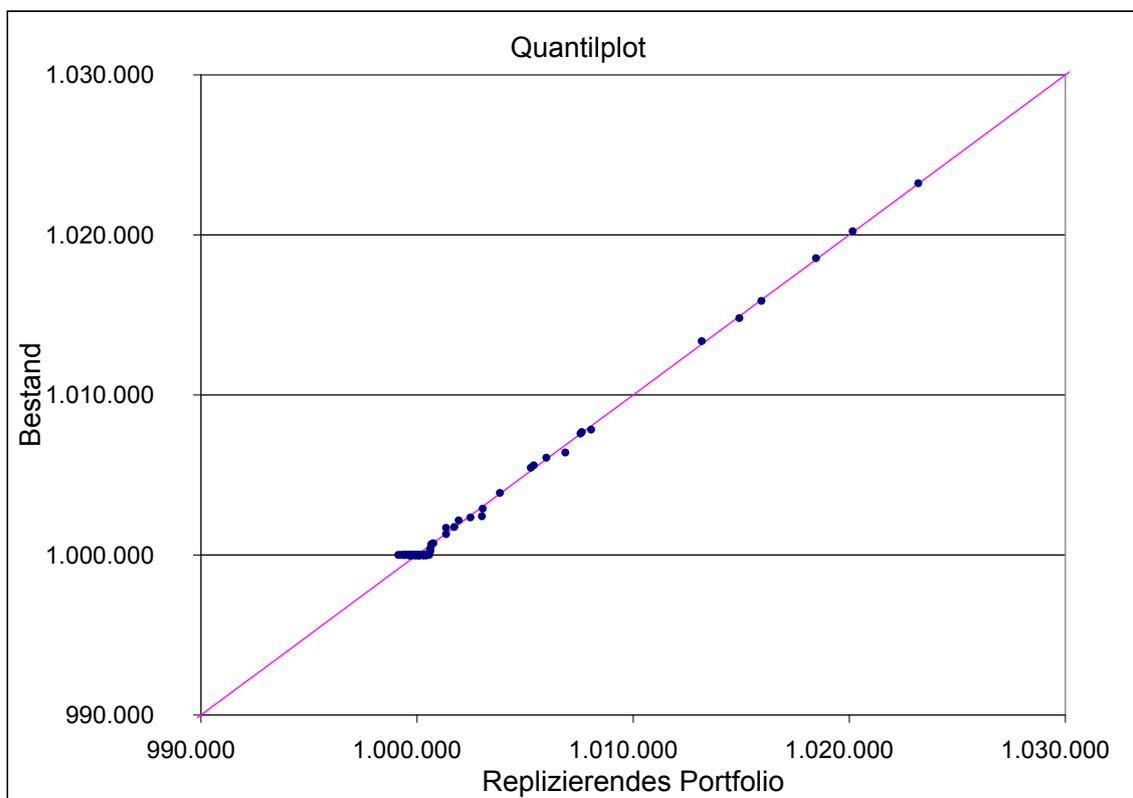
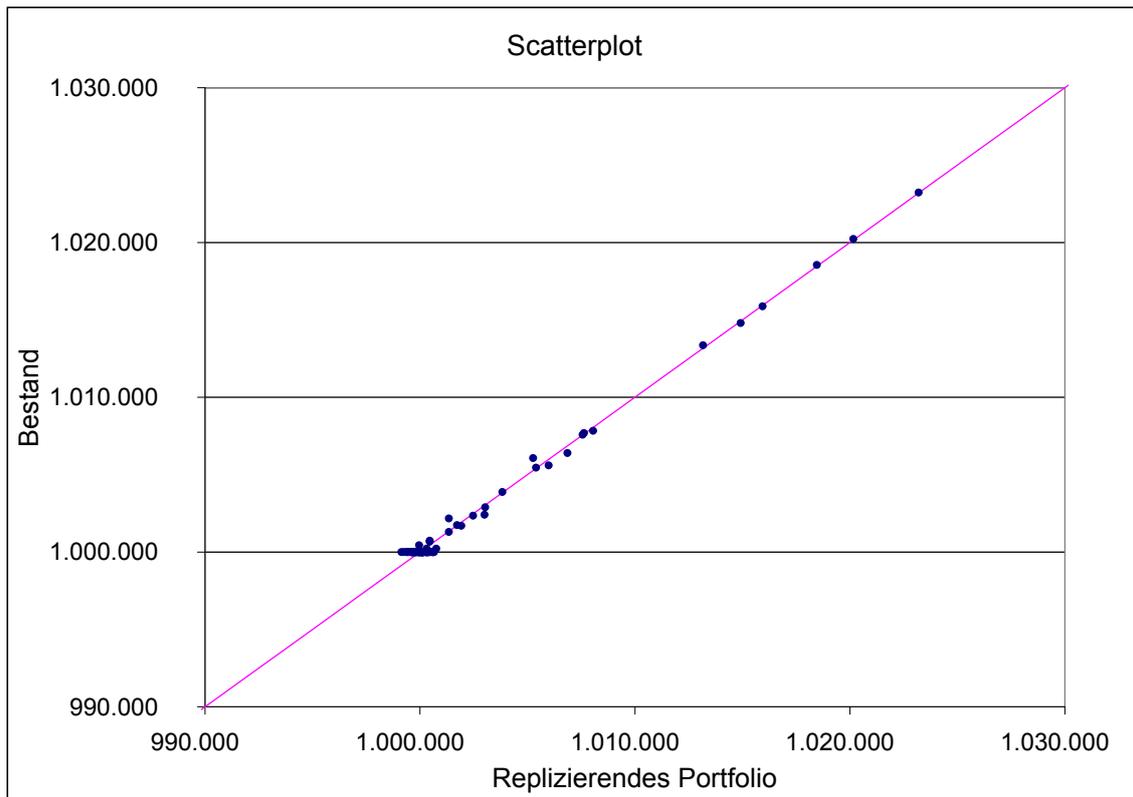


Abbildung 4.9: Ein Scatter- und ein Quantilplot für die Replikation eines Bestandes von 1.000 gemischten Versicherungsverträgen mit 100%-iger Überschussbeteiligung.

ausgegangen wird.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,5%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
1.002.536,38	1	-2.456,27	1.006.814,14
	2	1.328,87	967.518,65
	3	-3.900,97	915.706,81
	4	4.846,88	878.785,61
	5	-3.017,63	803.890,46
	6	-23,36	818.713,24
	7	-208,94	802.575,08
	8	274,20	610.605,81
	9	1.545,75	678.899,68
	10	-1.063,55	673.372,03

Tabelle 4.15: RP: *PV*-Modell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.

Die Analyse hat bis hierhin gezeigt, dass das Portfolio, welches mit Hilfe des Verlaufsmodells erstellt wurde, für die verwendeten Szenarien eine relativ gute Approximation darstellt. Es soll nun untersucht werden, wie sich das replizierende Portfolio¹⁵ in anderen Szenarien verhält, z.B. in Extremszenarien.

Als Erstes wird das replizierende Portfolio einem "Out-of-Sample" Test unterzogen. Dazu werden 100 weitere Szenarien generiert, die für die Replikation nicht verwendet wurden. Anschließend wird untersucht, wie sich das Portfolio in diesen Szenarien im Vergleich zum Bestand verhält. Bei diesem Vergleich beträgt die quadrierte Korrelation R^2 99,62%. Da dieses Ergebnis sehr gut ist, liegt die Vermutung nahe, dass das replizierende Portfolio die Verteilung der Barwerte der Verpflichtungen gut abbildet. Abbildung 4.10 veranschaulicht den Vergleich im "Out-of-Sample" Test.

Bevor dazu übergegangen wird, mit einer Überschussbeteiligung von 90% zu rechnen, werden noch zwei Extremszenarien betrachtet:

1. Im ersten Szenario wird angenommen, dass die Verzinsung des Kapitals in jedem Jahr nur 1% p.a. beträgt.
2. Im zweiten Szenario wird angenommen, dass die Verzinsung in jedem Jahr 10% p.a. beträgt.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,5\$
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
980.144,54	1	5.635,48	880.713,72
	2	5.336,85	900.581,59
	3	4.932,57	876.582,90
	4	4.406,60	827.046,54
	5	3.736,45	860.486,42
	6	2.923,76	837.779,63
	7	2.015,61	831.788,86
	8	1.044,66	548.506,87
	9	11,44	744.459,74
	10	-9.471,13	696.544,13

Tabelle 4.16: RP: Aufsummierte Gewichte des Portfolios gemäß dem Verlaufsmodell für gemischte Lebensversicherung und Überschussbeteiligung von 100%.

Ein Vergleich der Barwerte in Tabelle 4.17 zeigt, dass die Replikation für das Extremszenario mit einer Verzinsung von 1%p.a. sehr gut ist. Die größte jährliche relative Abweichung beträgt gerade 0,15% im 7. Jahr. Die relative Abweichung aller Zahlungsströme beträgt knapp 0,03%. Das andere Extremszenario mit einem jährlichen Zinssatz von 10%p.a. zeigt einen jährlich zunehmenden Fehler an. Im 10. Jahr beträgt die relative Abweichung etwa 0,28% und insgesamt knapp 0,17%, also ebenfalls eine sehr gute Approximation der Verpflichtungen.

4.2.3 Reduzierte Überschussbeteiligung

In Abschnitt 4.2.2 wurde nur der Fall betrachtet, dass der Versicherungsnehmer die gesamten Zinserträge erhält, die Überschussbeteiligung also 100% beträgt. Das ist nicht realistisch, da auch Teile der Erträge an die Eigentümer des Versicherungsunternehmens gehen. Deswegen wird dem Kunden nicht der komplette Zinsertrag zugeteilt, sondern nur ein Teil davon. Diese Überschussbeteiligung wird nun gemäß der Mindestzuführungsverordnung angepasst und auf 90% reduziert¹⁵. Da keine Kosten betrachtet werden, erhält der Versicherungsnehmer keinen Ertrag aus einem möglichen Kostenüberschuss. Ebenso entstehen keine technischen Überschüsse, da von einer sicheren, deterministischen Sterblichkeit gemäß der Sterbetafel 4.12 ausgegangen

¹⁵Das replizierende Portfolio gemäß dem Verlaufsmodell.

¹⁶Siehe hierzu (BaF08).

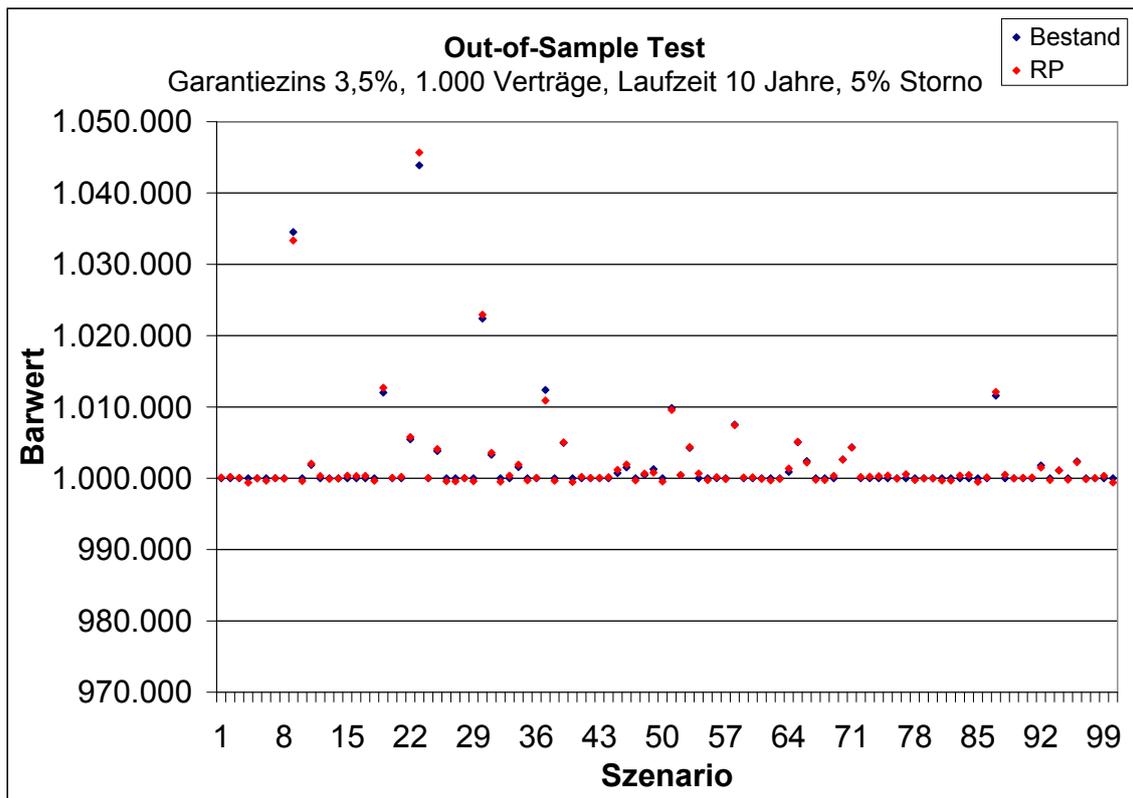


Abbildung 4.10: Out-of-Sample Test für den Bestand der gemischten Lebensversicherungen mit Überschussbeteiligung von 100%.

wird. Bei der Mindestzuführungsverordnung ist zu beachten, dass die Überschussbeteiligungsquote auf die gesamten Kapitalerträge und nicht nur auf die Erträge die über der Garantieverzinsung liegen, angewendet wird. Dadurch verändern sich die Zinserträge zu

$$ZE_t = K_t \cdot \max \left(r; \gamma \left(e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 \right) \right),$$

wobei $\gamma \in [0, 1]$ die Überschussbeteiligung der Versicherungsnehmer ist. In diesem Beispiel gilt $\gamma \equiv 0,9$. Damit kann U_{t+1} analog zum Abschnitt 4.2.2 bestimmt werden:

$$U_{t+1} = (DR_t + U_t) \cdot \max \left(0; \gamma \left(e^{\int_t^{t+1} r_u du} - 1 \right) - r \right) + U_t(1 + r)$$

Somit kann SL_{t+1} und VL_{t+1} analog hergeleitet werden¹⁷ zu

$$SL_{t+1} = DR_{t+1} + U_{t+1}$$

und

$$VL_{t+1} = VS + U_{t+1}.$$

¹⁷Die Herleitung ist identisch zu derjenigen auf Seite 70.

Jahr	Extremszenario: 1%		Extremszenario: 10%	
	Bestand	RP	Bestand	RP
1	76.115,45	76.115,45	73.955,17	73.955,17
2	75.069,28	75.067,01	70.923,72	70.915,72
3	74.028,89	74.014,05	68.072,51	68.051,02
4	72.870,20	72.840,95	65.290,98	65.252,34
5	71.480,88	71.485,55	62.488,27	62.431,71
6	69.782,45	69.863,55	59.607,01	59.533,47
7	67.728,96	67.831,62	56.616,86	56.525,40
8	65.193,40	65.155,23	53.419,11	53.308,86
9	62.144,27	62.152,05	49.991,59	49.869,53
10	555.868,11	556.092,63	439.634,79	438.396,20

Tabelle 4.17: Die Barwerte der Auszahlungen je Jahr für zwei Extremszenarien.

Abbildung 4.11 vergleicht die Entwicklung des Guthabens mit den unterschiedlichen Überschussbeteiligungen. Die Differenz zeigt den Verlust an, den ein Versicherungsnehmer erleidet, wenn die Überschussbeteiligung von 100% auf 90% gesenkt wird. Es muss nun geklärt werden, ob sich diese Differenz bei der Replikation abbilden lässt.

Zu Beginn wird das replizierende Portfolio mit Hilfe des Verlaufs-Modelles erstellt, bevor auf das *PV*-Modell umgestiegen wird um mit Hilfe von diesem die Qualität des replizierenden Portfolios zu analysieren.

In der Tabelle 4.18 sind die Gewichte des replizierenden Portfolios gemäß dem Verlaufs-Modell angegeben. Die Replikationsqualität ist mit $R^2 = 98,98\%$ schlechter als bei der 100%igen Überschussbeteiligung (99,46%), so dass davon auszugehen ist, dass die Überschussbeteiligung von 90% mit den verwendeten Instrumenten nicht exakt abgebildet werden kann. Im Vergleich zum vorherigen Beispiel fällt aber auf, dass sich die Gewichte weg vom Geldmarktkonto hin zu den Zero-Coupon-Bonds verschoben haben. Dies bedeutet, dass die sicheren Zahlungen an Bedeutung gewinnen. Begründet wird dies durch die Reduktion des zufälligen Überschusses. Aufgrund dieser Reduktion muss weniger Kapital in das Geldmarktkonto investiert werden.

Darüber hinaus schwanken die Gewichte der unterschiedlichen Floors sehr stark, im Gegensatz zu Tabelle 4.14. Dies lässt darauf schließen, dass die ausgewählten Floors nicht optimal sind.

In Abbildung 4.12 wird die Verzinsung des Kapitals für die Fälle untersucht, dass die Überschussbeteiligung 90% bzw. 100% beträgt. Die rote Linie gibt die Verzinsung einer gemischten Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 100%

Geldmarktkonto		ZCB Floor _S zu 3,5%	
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
54.625,37	1	20.175,54	98.122,23
55.905,96	2	16.321,55	103.596,14
55.371,27	3	14.283,41	93.196,78
53.785,07	4	13.294,27	80.190,57
51.951,33	5	12.393,97	116.748,59
49.937,43	6	11.444,41	79.282,04
47.691,71	7	10.495,21	47.650,31
45.159,68	8	9.521,68	138.047,49
42.421,36	9	8.399,50	102.707,91
374.187,51	10	68.453,06	833.092,71

Aufschubsfrist Laufzeit	Floor _S 3,5%				
	1	2	3	4	5
1	101.802,21	101.077,84	96.670,76	91.941,28	86.247,17
2	108.604,53	110.423,64	108.702,19	110.794,00	105.060,42
3	95.951,92	90.718,43	81.369,57	75.121,92	57.154,03
4	72.623,83	73.341,09	71.782,91	80.600,56	76.290,27
5	133.257,26	161.159,50	161.017,14	146.087,67	1.273.648,85
6	98.328,58	92.325,72	85.457,25	748.074,66	
7	15.966,23	23.384,13	226.817,93		
8	127.668,50	1.048.742,01			
9	1.049.504,66				

Aufschubsfrist Laufzeit	6	7	8	9
	1	82.622,31	76.981,02	70.975,87
2	100.858,37	95.106,27	819.850,05	
3	51.459,38	476.763,60		
4	675.941,42			

Tabelle 4.18: RP: Verlaufsmodell für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.

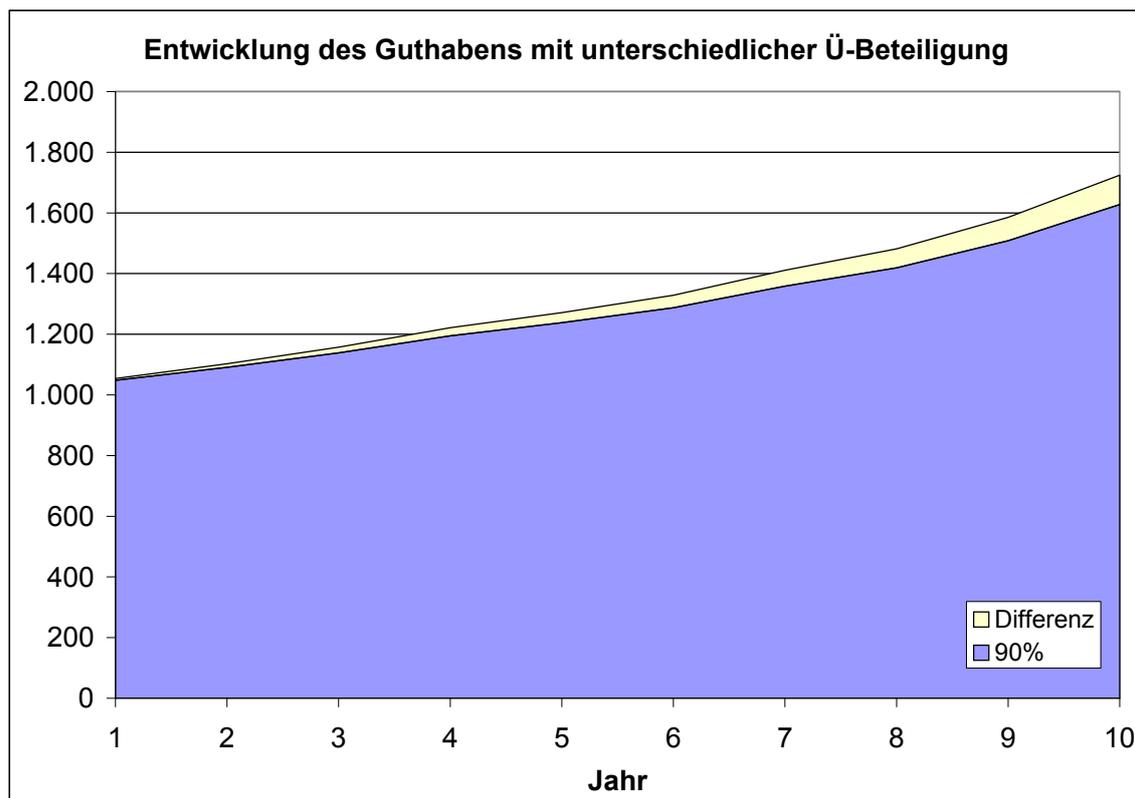


Abbildung 4.11: Vergleich der Entwicklung der Deckungsrückstellung und der Überschüsse in einem Beispielszenario mit unterschiedlichen Überschussbeteiligungen.

wieder, wobei der kritische Punkt, bei dem die Rendite von 3,5% zum ersten Mal überschritten wird, bei 3,5% liegt. Die grüne Linie zeigt den Verlauf der Rendite einer gemischten Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%. Der kritische Punkt, bei dem die Verzinsung die 3,5%-Marke überschreitet, liegt bei $3,5\%/0,9 = 3,8\bar{8}\%$, da die Überschüsse nicht komplett ausbezahlt werden. Die Steigung der Rendite fällt geringer aus, als bei der 100%-igen Überschussbeteiligung. Somit kann man schließen, dass die Minderung der Überschussbeteiligung dazu geführt hat, dass die Rendite erst bei einer risikolosen Verzinsung von 3,8 $\bar{8}\%$ den Garantiezinssatz übersteigt. Aus diesem Grund wird nun der Bezugzins des Floor_S von 3,5% auf 3,8 $\bar{8}\%$ angehoben und untersucht, ob sich das Ergebnis dadurch verbessert.

Die Tabelle 4.19 enthält die Gewichte des replizierenden Portfolios, das statt Floor_S zu 3,5%, Floor_S zu 3,8 $\bar{8}\%$ verwendet. Die Replikationsqualität von 99,93% ist viel besser als zuvor (98,98%) und noch besser als bei einer Überschussbeteiligung von 100% (99,46%). Der Grund dafür ist, dass der Einfluss der Überschüsse verringert wurde und die deterministischen Zahlungen an Bedeutung gewonnen haben. Dies kann daran erkannt werden, dass die Gewichte der Zero-Coupon-Bonds im Vergleich

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S zu 3,8%			
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile			
61.948,82	1	12.518,66	61.948,72			
59.578,17	2	12.276,54	62.013,42			
57.351,99	3	11.967,15	62.038,76			
55.179,24	4	11.557,69	62.998,38			
52.991,80	5	11.008,76	62.604,88			
50.720,37	6	10.326,61	64.700,84			
48.324,71	7	9.527,71	60.187,51			
45.715,03	8	8.614,63	54.126,16			
42.909,55	9	7.541,20	65.748,42			
378.137,34	10	61.009,35	600.076,70			

		Floor _S 3,8%				
Aufschubsfrist	Laufzeit	1	2	3	4	5
1	59.381,62	56.878,75	54.621,14 52.372,21 49.990,91			
2	59.590,54	56.911,08	53.982,58 51.031,03 48.221,94			
3	58.814,92	55.837,37	53.146,87 49.569,98 47.804,04			
4	60.913,65	58.504,51	56.170,08 51.248,63 46.284,33			
5	58.087,66	55.213,11	49.912,28 44.020,63 321.889,81			
6	62.625,47	57.976,97	53.026,10 462.805,06			
7	61.314,38	64.111,11	618.213,21			
8	38.544,32	295.258,19				
9	565.481,50					

Aufschubsfrist	Laufzeit	6	7	8	9
1	47.414,48	43.681,73	39.900,00 340.330,74		
2	45.868,36	44.107,88	400.410,43		
3	45.496,77	393.242,23			
4	409.081,03				

Tabelle 4.19: RP: Verlaufsmodell mit Floor_S zu 3,8% für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.

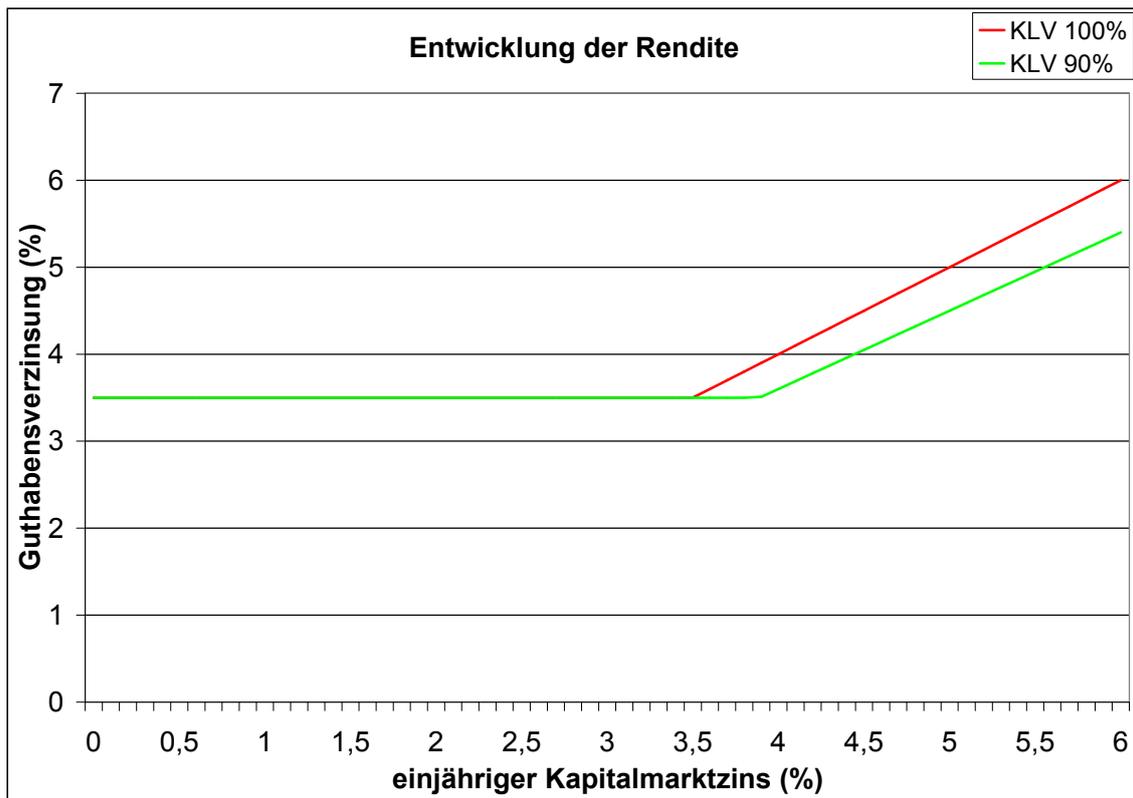


Abbildung 4.12: Vergleich der Verzinsung des Kapitals des Bestandes in Abhängigkeit des risikolosen Zinssatzes.

zur 100%-igen Überschussbeteiligung zugenommen haben¹⁸.

Bei einer Replikation des Bestandes mit Hilfe des *PV*-Modells ergibt sich R^2 zu 99,98%, also nur unwesentlich besser als die Replikationsqualität des Verlaufsmodells. Die Gewichte des Portfolios befinden sich in Tabelle 4.20.

Obwohl die Replikation in diesem Beispiel sehr gut ist, stellt sich die Frage, wie der Bestand exakt repliziert werden könnte. Eine perfekte Replikation wäre dann möglich, wenn zusätzlich Instrumente verwendet werden, die das Problem des Zinseszins-effektes, welcher momentan nicht exakt abgebildet werden kann¹⁹, beheben würden. Das Problem bei diesen Instrumenten ist einerseits die fehlende Bewertungsformel - es handelt sich hierbei um ganz spezielle Produkte, die auf genau dieses Problem zugeschnitten sind. Andererseits würden für alle Zeiträume $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, $t_1 \in \{0, \dots, 9\}$ und $t_2 \in \{1, \dots, 10\}$ separate Instrumente benötigt. Es müssten viele zusätzliche In-

¹⁸Würde die Überschussbeteiligung auf 0% reduziert, so würde das gesamte Kapital stets mit dem Garantiezins verzinst, was nach einem anfänglichen Beispiel perfekt mit Zero-Coupon-Bonds repliziert wird.

¹⁹Siehe hierzu S. 53ff.

Geldmarktkonto		ZCB	Floor _S 3,8%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
868.073,15	1	7.504,94	849.524,66
	2	12.197,84	856.577,21
	3	4.245,54	775.294,51
	4	17.544,73	779.451,61
	5	-12.229,70	578.939,94
	6	19.528,65	676.220,98
	7	4.686,84	775.582,08
	8	9.987,75	452.442,98
	9	19.062,48	576.599,44
	10	57.778,87	620.477,30

Tabelle 4.20: RP: *PV*-Modell für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.

strumente berücksichtigt werden, was gegen die Idee der replizierenden Portfolios spricht, die Verpflichtungen mit möglichst wenigen, bewertbaren Instrumenten zu replizieren.

Die Beispiele hatten bisher primär die Aufgabe, die Struktur der Cash-Flows abzubilden. Diese Analyse ist hiermit abgeschlossen. Im Folgenden wird der Fokus auf den Wert der Finanzinstrumente gelegt. Dazu werden nur noch solche Finanzinstrumente betrachtet, die über geschlossene Formeln bewertet werden können. Dies hat den Vorteil, dass zu ihrer Bewertung keine aufwendige Simulation benötigt wird, was den Aufwand zur Bewertung des Portfolios unter veränderten Kapitalmarktbedingungen reduziert. Dies hat aber auch zur Folge, dass statt der Floor_Ss die Floorlets verwendet werden, welche die Garantieverzinsung schlechter abbilden können. Demzufolge wird auch die Qualität der Replikation abnehmen.

Wird das replizierende Portfolio zum einen mit dem Verlaufsmodell erstellt, die Gewichte sind in Tabelle 4.21, so liegt R^2 bei 96,82%. Im *PV*-Modell beträgt $R^2 = 97,51\%$, nur unwesentlich besser, als im Verlaufsmodell. Die zugehörigen Gewichte befinden sich in Tabelle 4.22.

Die Barwerte von *PV*-Modell und Verlaufsmodell werden mit dem Bestand in Bild 4.13 verglichen. Das *PV*-Modell approximiert die Barwerte der Verpflichtungen in den meisten Szenarien besser als das Verlaufsmodell. Durch die Verwendung des *PV*-Modells reduziert sich die Rechenzeit im Vergleich zum Verlaufsmodell. Bei diesem kleinen Bestand sind die Unterschiede nur marginal, spielt aber bei sehr großen

Laufzeit	Geldmarktkonto	ZCB	Floorlet 3, $\bar{8}\%$	
	Euro	Anteile	Anteile	
1	48,866.57	26,190.74	0.00	
2	54,476.45	17,884.50	59,187.98	
3	54,729.57	15,017.46	86,612.95	
4	54,180.47	12,797.25	145,177.64	
5	52,102.43	12,185.36	72,676.36	
6	50,208.70	11,054.28	91,595.08	
7	47,895.25	10,176.35	74,924.71	
8	45,243.14	9,373.29	64,365.67	
9	42,474.39	8,298.64	82,755.19	
10	374,028.38	68,563.43	1,063,904.37	

Aufschubsfrist Laufzeit	Floorlet 3, $\bar{8}\%$			
	1	2	3	4
2	55,066.21	60,848.82	64,164.93	59,347.89
3	84,872.55	68,257.70	69,993.88	60,268.60
4	87,360.20	105,370.45	92,724.46	91,253.94
5	39,008.51	58,709.05	49,777.05	51,494.62
6	77,377.67	70,912.51	70,105.68	672,651.18
7	60,233.03	47,654.91	261,233.14	
8	26,712.49	290,921.31		
9	726,937.27			

Aufschubsfrist Laufzeit	5	6	7	8
	2	59,291.92	52,282.87	48,635.76
3	55,977.61	52,279.02	348,074.56	
4	76,823.39	724,955.18		
5	557,792.22			

Tabelle 4.21: RP: Verlaufsmodell mit Floorlets für die gemischte Lebensversicherung mit einer Überschussbeteiligung von 90%.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3, $\bar{8}\%$
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
629.605,71	1	300.225,64	0,00
	2	-47.228,94	841.293,58
	3	38.631,92	1.179.080,78
	4	-45.289,40	1.392.172,79
	5	113.839,50	847.195,27
	6	-80.034,02	1.050.399,13
	7	20.519,40	930.822,49
	8	64.975,79	-85.576,77
	9	-205.195,63	898.283,81
	10	231.326,03	599.151,29

Tabelle 4.22: RP: *PV*-Modell mit Floorlets für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.

Beständen, die eine lange Laufzeit haben eine Rolle. Aufgrund dessen wird bei der weiteren Analyse des replizierenden Portfolios das *PV*-Modell verwendet.

Zu Beginn der Analyse werden ein Scatterplot und ein Quantilplot vom Resultat des *PV*-Modells in Abbildung 4.14 betrachtet. Im Scatterplot ist sehr gut ersichtlich, wie sich die Punkte um die Diagonale herum ausrichten. Die maximale Abweichung im Scatterplot liegt bei 5.732,81 Euro oder 0,58% und im Durchschnitt bei 1.294,62 Euro. Die maximale Abweichung beträgt im Quantilplot 3.388,64 Euro oder 0,36% und die durchschnittliche 589,03 Euro. Das bedeutet, dass die Verteilung durch das replizierende Portfolio sehr viel besser approximiert wird, als der Scatterplot vermuten lässt. Um aber verlässliche Aussagen in Bezug auf bestimmte Kapitalmarktsituationen treffen zu können, ist es notwendig, dass auch im Scatterplot die Punkte möglichst nahe an der Diagonalen liegen.

Im Folgenden wird dieses Portfolio analysiert, inwiefern es dazu geeignet ist, zustandsbasierte Aussagen zu machen.

Zunächst einmal wird mit dem replizierenden Portfolio ein Out-of-Sample Test an 100 neuen Szenarien durchgeführt. Dabei beträgt $R^2 = 95,21\%$, also etwas schlechter als in den Originalszenarien, aber es lässt erahnen, dass das Portfolio gut gewählt wurde. Die bestätigt auch Abbildung 4.15, in welchem die Barwerte je Szenario abgebildet sind. Extremszenarien werden vorwiegend nicht exakt getroffen. Das bedeutet zwar, dass wahrscheinlich Aussagen über Extremsituationen nicht akkurat genug gemacht werden können, aber da die meisten Szenarien gut getroffen wurden, können mit

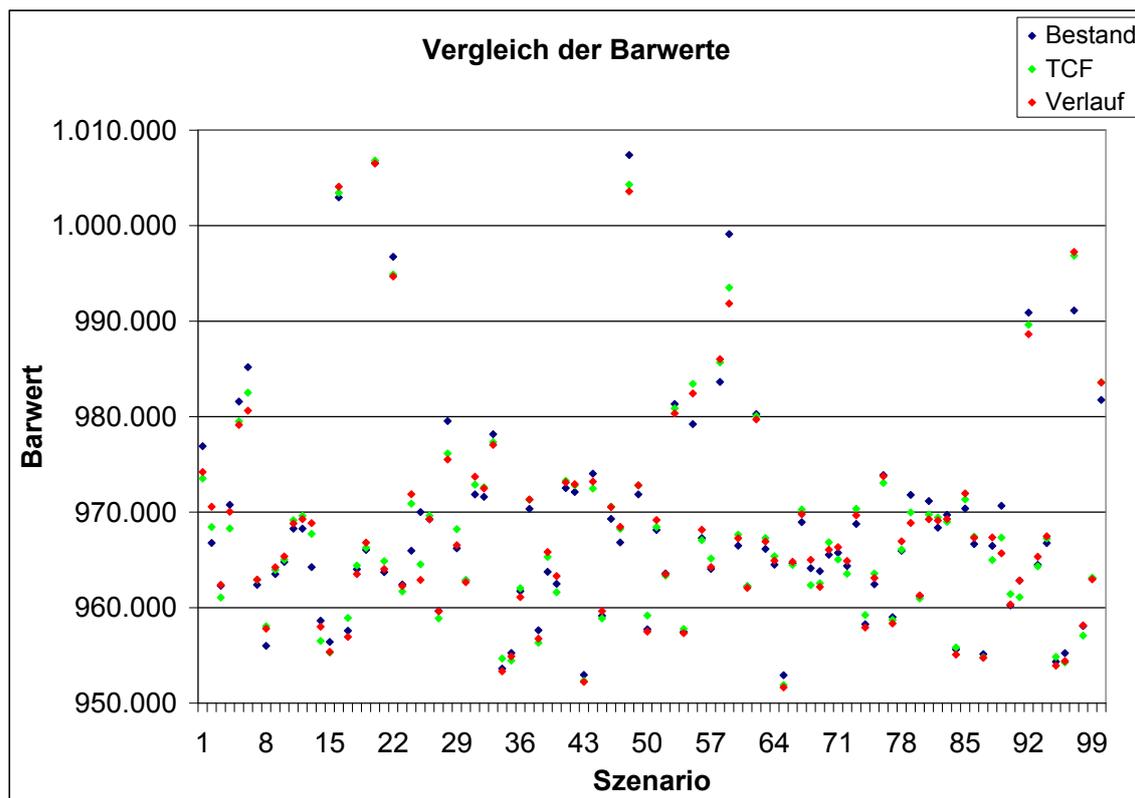


Abbildung 4.13: Vergleich der Barwerte der replizierenden Portfolios mit Floorlets, bestimmt mit PV - bzw. Verlaufs-Modell mit dem Bestand über die 100 Szenarien.

diesem Portfolio im Normalfall hinreichend gute Aussagen über die aktuelle Situation gemacht werden.

Als nächstes wird das Verhalten des replizierenden Portfolios in Extremszenarien untersucht. Dazu werden die folgenden Szenarien betrachtet:

1. Die jährliche Verzinsung des Kapitals beträgt in jedem Jahr nur 1% p.a.
2. Die jährliche Verzinsung beträgt in jedem Jahr 10% p.a.

Die Tabelle 4.23 enthält die entsprechenden Barwerte. Das Extremszenario mit risikolosem Zins von 1%p.a. wird nur unzureichend abgebildet, da der Barwert der Zahlung um gut 3,6% überschätzt wird. Im Gegensatz dazu wird im anderen Szenario der Barwert nur um 0,9% unterschätzt. Das bedeutet, dass in dem Fall, dass das Risiko stark fallender Zinsen abgebildet werden soll, andere Finanzinstrumente zusätzlich in Betracht gezogen werden müssen²⁰.

²⁰Ein solches Finanzinstrument wäre beispielsweise der Floor_S , welcher aber nicht mit einer geschlossenen Formel bewertet werden konnte.

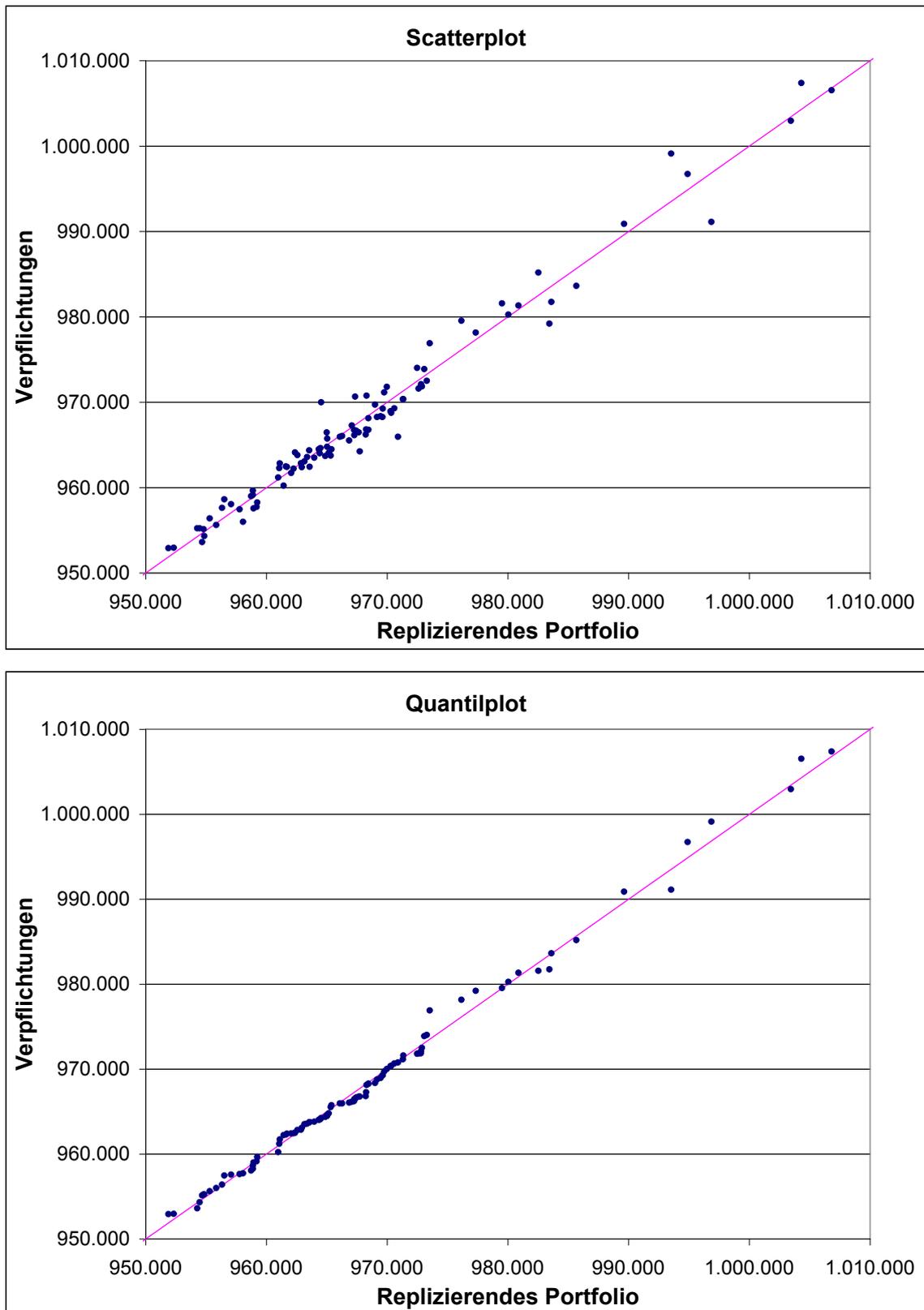


Abbildung 4.14: Scatter- und Quantilplot für die Replikation des Bestandes mit 90% Überschussbeteiligung im *PV*-Modell.

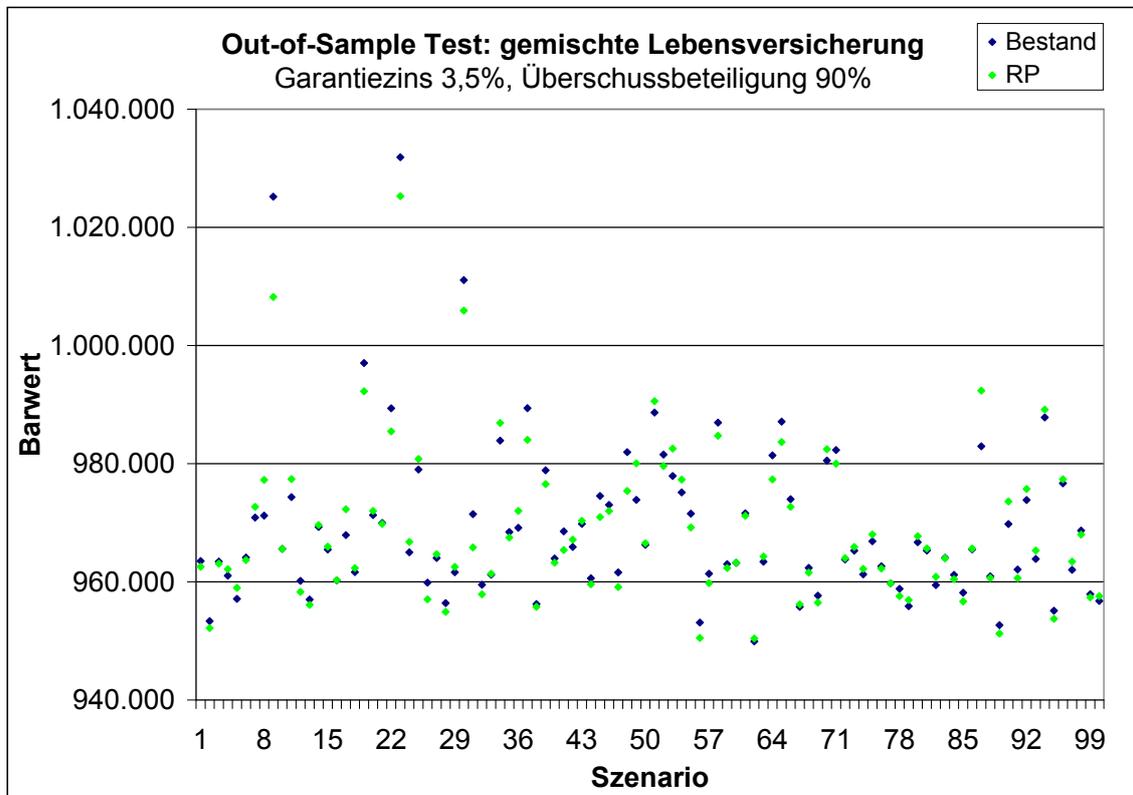


Abbildung 4.15: Out-of-Sample Test für den Bestand der gemischten Kapitallebensversicherung und Überschussbeteiligung von 90%.

	RP	Bestand
1%	1.233.665,97	1.190.281,90
10%	930.110,25	938.338,76

Tabelle 4.23: Die Barwerte des replizierenden Portfolios (RP) im Vergleich zu den Barwerten der Verbindlichkeiten (Bestand).

Bis hierhin wurden jeweils nur 100 Szenarien betrachtet. Nun wird untersucht, wie sich das replizierende Portfolio verändert, wenn statt 100 Szenarien, 1.000 oder noch mehr Szenarien für die Replikation verwendet werden. In Tabellen 4.24 und 4.25

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,8%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
761.299,47	1	104.240,64	0,00
	2	12.122,71	942.377,05
	3	33.041,25	939.667,26
	4	-44.439,14	1.048.068,39
	5	60.026,01	891.426,32
	6	-18.802,24	986.689,93
	7	18.930,52	761.066,60
	8	38.767,67	909.227,27
	9	-50.211,25	858.090,17
	10	103.679,83	881.619,42

Tabelle 4.24: RP: *PV*-Modell mit Floorlets und 1.000 Szenarien für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.

sind die Gewichte von replizierenden Portfolios, die mit 1.000, bzw. 10.000 Szenarien erstellt wurden. Die Replikationsqualität nach R^2 beträgt bei 1.000 Szenarien 98,06% und bei den 10.000 Szenarien sogar 98,11%. Gemein haben somit alle drei Portfolios die gute Replikationsqualität von über 95%. Die Gewichte variieren aber insbesondere bei den Zero-Coupon-Bonds sehr stark. So ist der relative Unterschied bei den Gewichten von Geldmarktkonto und Floorlets zwischen den replizierenden Portfolios, die mit 1.000, bzw. 10.000 Szenarien erstellt wurden in der Regel kleiner als zwischen den Portfolios, die mit 100 bzw. 1.000 Szenarien erstellt wurden. Bei den Zero-Coupon-Bonds ist eine solche Tendenz nicht auszumachen. Darüber hinaus unterscheiden sich die Größen der Gewichte sehr stark. Dies liegt aber daran, dass - wie früher festgestellt wurde - die Gewichte der Zero-Coupon-Bonds nicht sehr groß sind und bei diesen die relativen Schwankungen somit größer sind, als bei den Floorlets und dem Geldmarktkonto, bei denen sehr große Gewichte zu beobachten sind. Abgesehen von dieser Schwankung ist somit keine Konvergenz erkennbar, aber eine abschließende Aussage lässt sich nicht machen.

Abbildung 4.16 ist ein Scatterplot zu dem replizierenden Portfolio, welches mit Hilfe von 10.000 Szenarien bestimmt wurde. Obwohl die Replikationsqualität sehr gut ist, ist zu erkennen, dass bei großen Barwerten der Verpflichtungen, die Barwerte des replizierenden Portfolios relativ große Abweichungen aufweisen. Die größte Ab-

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,8%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
768.771,29	1	89.907,42	0,00
	2	19.728,08	842.102,71
	3	8.071,00	1.020.135,14
	4	11.307,76	949.794,58
	5	15.351,19	882.041,13
	6	8.193,13	903.960,63
	7	-4.673,02	819.341,74
	8	47.951,76	784.198,69
	9	-45.697,16	753.930,59
	10	99.689,29	908.176,85

Tabelle 4.25: RP: *PV*-Modell mit Floorlets und 10.000 Szenarien für gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90%.

weichung beträgt etwa 20.000 Euro. Im Durchschnitt liegt die Abweichung nur bei 1.276,47 Euro.

Als nächstes wird bei der Replikation eine Nebenbedingungen berücksichtigt. Es wird gefordert, dass der Wert des replizierenden Portfolios in $t = 0$ dem Marktwert der Verpflichtungen entspricht. Der Marktwert der Verpflichtungen wird als Durchschnitt über 10.000 Szenarien bestimmt und beträgt 969.625,45 Euro. Die Marktwerte der verwendeten Finanzinstrumente (Geldmarktkonto, Zero-Coupon-Bonds und Floorlets) werden über die jeweilige Bewertungsformeln bestimmt²¹. Die Berechnungen basieren weiterhin auf dem *PV*-Modell, so dass das Optimierungsproblem folgende Gestalt hat:

$$(P) \begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(CF^{Term,i} - \sum_{j=1}^m Z_j^{Term,i} \omega_j \right) \frac{1}{B_t^i} \rightarrow \min, \\ A\omega = b, \end{cases}$$

wobei

$$A = (S_1, \dots, S_m)$$

die Marktwerte der Finanzanlagen zum Zeitpunkt 0 sind und b der Wert des Bestandes, also 969.625,45 Euro. Wird das replizierende Portfolio mit $n = 100$ Szenarien bestimmt, so werden die Gewichte aus Tabelle 4.26 als Lösung erhalten.

²¹Die Bewertungsformel des Zero-Coupon-Bond befindet sich auf Seite 47, die des Floorlet auf Seite 56. Der Marktwert des Geldmarktkontos entspricht jeweils dem Euro-Betrag, welches in das Geldmarktkonto investiert ist.

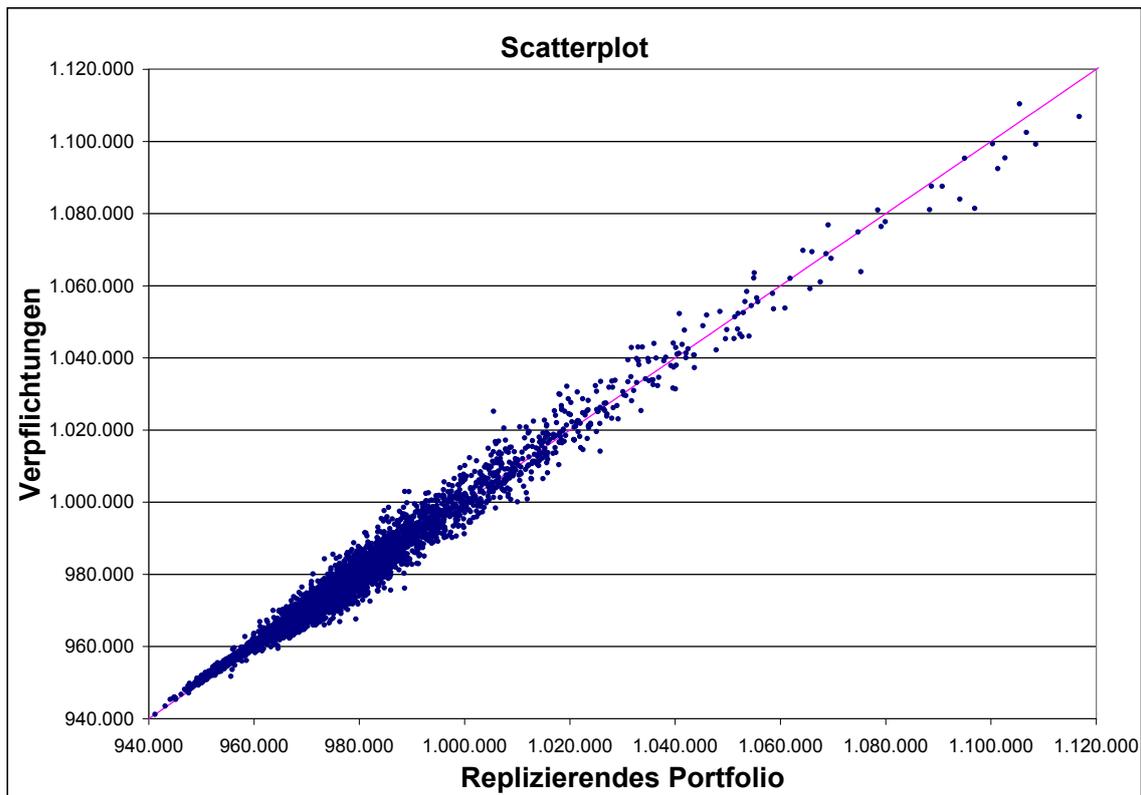


Abbildung 4.16: Scatterplot zum Vergleich der Verpflichtungen mit dem replizierenden Portfolio, welches mit Hilfe von 10.000 Szenarien erstellt wurde.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3, $\bar{8}\%$
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
602.117,65	1	318.436,87	0,00
	2	-19.786,32	808.555,80
	3	20.777,66	1.163.530,27
	4	-80.472,04	1.014.432,77
	5	199.584,17	1.019.446,64
	6	-124.591,07	1.115.244,27
	7	-2.742,83	900.074,29
	8	73.693,20	-238.060,35
	9	-204.700,95	948.514,82
	10	239.846,00	423.049,62

Tabelle 4.26: RP: Gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90% und der Nebenbedingung, den Marktwert zu $t = 0$ zu treffen.

	Marktwert	-100bp (%)	+100bp (%)	2σ (%)
Bestand	969.625,45	983.527,60	963.105,75	979.302,30
RP_{100}	969.125,81	981.446,78	961.158,09	991.484,23
	-0,05%	-0,21%	-0,20%	1,24%
$RP_{1,000}$	969.565,67	981.080,09	962.254,55	993.069,68
	-0,01%	-0,25%	-0,09%	1,41%
$RP_{10,000}$	969.487,57	980.717,00	962.268,03	992.038,36
	-0,01%	-0,29%	-0,09%	1,30%
RP_{NB}	969.625,45	982.029,96	961.712,08	992.768,78
	0,00%	-0,15%	-0,14%	1,38%
RP_{Floor_S}	969,549.06	983,399.07	963,262.87	983,937.86
	-0.01%	-0.01%	0.02%	0.47%

Tabelle 4.27: Marktwerte und Sensitivitäten im Vergleich.

Die quadrierte Korrelation R^2 liefert als Wert 97,39%. Dieser Wert ist fast genau so gut, wie wenn keine Nebenbedingung verwendet wird. Der Grund dafür ist, dass der Marktwert des Replikationsportfolio, welches ohne diese Nebenbedingung erstellt wurde, schon fast dem Marktwert der Verpflichtungen entspricht. Die Marktwerte der jeweiligen Replikationsportfolios sind in Tabelle 4.27 abgebildet. Der Index bezieht sich darauf, wie das Portfolio bestimmt wurde²². Zusätzlich sind die relativen Abweichungen zum Marktwert des Bestands angegeben.

Zusätzlich zu den Marktwerten können der Tabelle 4.27 auch die Sensitivitäten des jeweiligen Portfolios bezüglich Volatilität und Zinsshifts entnommen werden. Für die Berechnung der Sensitivitäten des Marktwertes des Bestands wurden Monte-Carlo-Simulationen mit den veränderten Kapitalmarktparametern durchgeführt. Die Bestimmung der Marktwerte der replizierenden Portfolios²³ basiert auf den geschlossenen Formeln, weshalb hierfür keine Simulation notwendig ist. Der Zinsshift wird dabei auf den Eingangszinssatz r_0 angewendet. Somit beträgt der Startzins r_0 bei einem Zinsshift von -100 Basispunkten 3,0% bzw. bei einem Zinsshift von +100bp 5,0%. Alle vorliegenden Portfolios approximieren den Marktwert der Verpflichtungen unter den unterschiedlichen Kapitalmarktbedingungen besser, als die jeweilige Replikationsqualität suggerieren würde. Der Grund dafür sind die Sensitivitäten der

²²Beispielsweise steht 100 dafür, dass dieses Portfolio mit 100 Szenarien bestimmt wurde, bzw. *NB* steht dafür, dass es mit der Nebenbedingung berechnet wurde.

²³Abgesehen von Portfolio RP_{Floor_S} , da für einen *Floor_S* keine geschlossene Bewertungsformel existiert.

Versicherungsverpflichtungen, die weniger als 14.000 Euro betragen. Der Zinsshift von +100bp wurde von den Portfolios am besten getroffen. Die Ursache hierfür ist dadurch begründet, dass die Garantien in diesem Fall weniger wert sind und somit der Einfluss der Floorlets, welche die Garantieverzinsung des Kapitals nicht so gut wie die Floorlets abzubilden vermögen, reduziert wird. Deren Einfluss wirkt sich am stärksten auf das Szenario mit der doppelten Volatilität aus, da der Wert eines Floorlets mit steigender Unsicherheit stark zunimmt und dadurch auch die Bedeutung der Garantien. In Abbildung 4.17 wird deutlich dass die Zins-Sensitivitäten der Verpflichtungen nicht linear verlaufen. Dieser Effekt wird von den replizierenden Portfolios zwar berücksichtigt, fällt aber schwächer aus. Dargestellt wird dieser Effekt in der Grafik beispielhaft durch das Portfolio, welches unter der Nebenbedingung, den Marktwert der Verpflichtungen zu treffen, erstellt wurde.

Allgemein betrachtet sind kaum Unterschiede zwischen der Qualität der replizierenden Portfolios zu erkennen, so dass davon ausgegangen werden kann, dass sich die Replikationsqualität nicht wesentlich verbessert, wenn mehr Szenarien als notwendig verwendet werden. Dies bedeutet auch, dass, obwohl die Gewichte zwischen den einzelnen Portfolios stark schwanken, der Marktwert sehr ähnlich bleibt²⁴. Es ist aber nicht klar, wie groß die minimale Szenarienzahl sein sollte, die notwendig ist, um ein geeignetes Portfolio erstellen zu können. Diese Zahl hängt sicher von der Komplexität der Versicherungsverpflichtungen ab.

Sollen auch diese Sensitivitäten von einem replizierenden Portfolio exakt getroffen werden, so muss dies in den Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Dies erscheint aus zweierlei Gründen jedoch wenig sinnvoll:

1. Es müssten vier Nebenbedingungen berücksichtigt werden, was den zulässigen Bereich, aus welchem das replizierende Portfolio ausgewählt werden kann, stark einschränkt. Somit muss mit einer schlechteren Qualität des Portfolios unter den zur Replikation verwendeten Szenarien gerechnet werden. Dadurch können auch die Aussagen in Extremsituationen schlechter werden.
2. Werden diese Sensitivitäten als Nebenbedingung verwendet, so können diese nicht für die Bewertung des Portfolios verwendet werden. Für die Analyse werden also weitere Sensitivitäten benötigt, was einen zusätzlichen Zeitaufwand bedeutet.

Tabelle 4.28 enthält die Gewichte des replizierenden Portfolios, welches die Marktwerte in den verschiedenen Kapitalmarktzuständen $\pm 100\text{bp}$ und 2σ exakt trifft.

²⁴Diese Erkenntnis kann auch auf die verwendeten Szenarien angewendet werden. Die Gewichte werden sich zwar unterscheiden, wenn andere Szenarien als hier verwendet werden, der Marktwert wird dennoch sehr ähnlich sein.

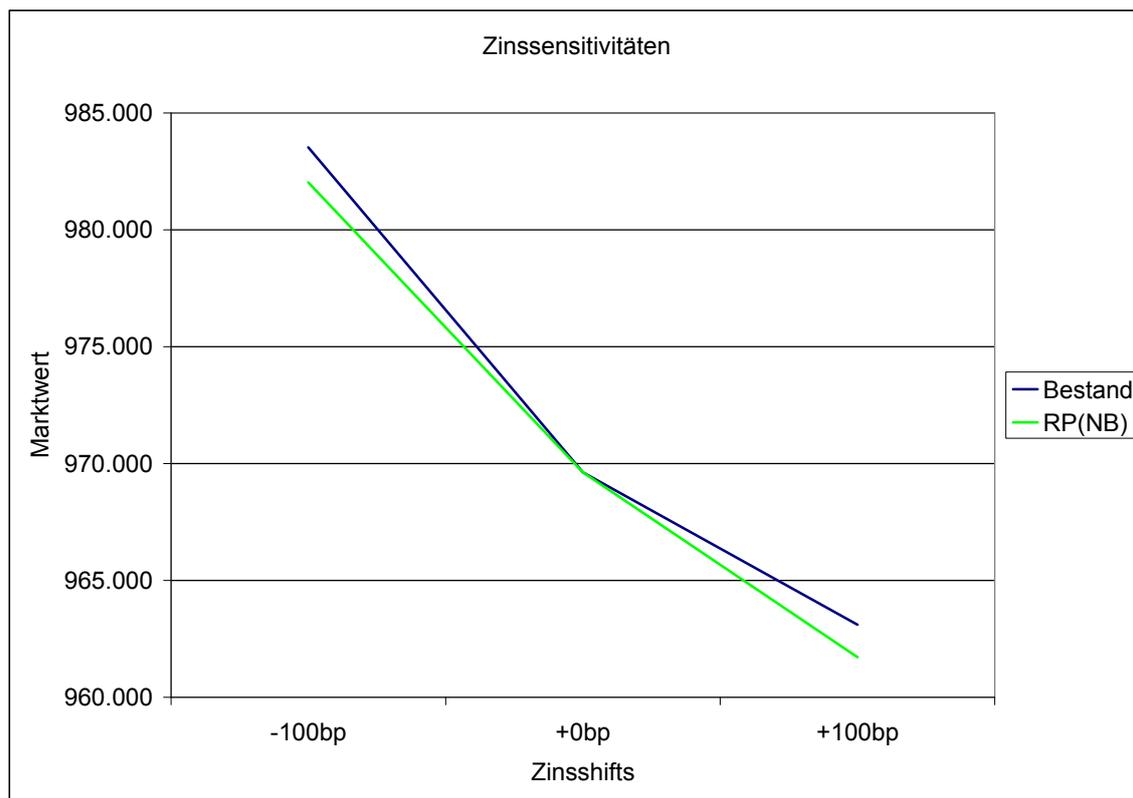


Abbildung 4.17: Die Zinssensitivitäten der Versicherungsverpflichtungen im Vergleich mit den Sensitivitäten eines replizierenden Portfolios.

Die Replikationsqualität beträgt aber nur 84,02%, weshalb dieses Portfolio praktisch nicht dazu geeignet ist, operativ eingesetzt zu werden.

Interessant ist auch der Vergleich der Sensitivitäten mit dem Portfolio, welches die Floor_Ss beinhaltet. Wie in Tabelle 4.27 zu sehen ist, werden die Sensitivitäten wesentlich besser getroffen als von den anderen betrachteten Portfolios. Die Floor_Ss wurden hierbei über Monte-Carlo-Simulationen bewertet.

4.2.4 Pfadabhängiges Storno

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Blick auf zinsabhängiges Stornoverhalten geworfen, da bisher nur von einer konstanten jährlichen Stornoquote von 5% ausgegangen wurde. Die Quote von 5% entspricht zwar dem Marktdurchschnitt der letzten Jahre, würde jedoch im Fall einer signifikanten Veränderung des aktuellen Zinsniveaus nicht das Verhalten der Versicherungsnehmer widerspiegeln.

Ein rational handelnder Versicherungsnehmer würde seinen Vertrag wahrscheinlich nicht kündigen, wenn der risikolose Zins unter die Mindestverzinsung fällt, weswegen

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3, $\bar{8}\%$
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
753.871,04	1	342.733,41	0,00
	2	-230.298,40	2.638.708,24
	3	45.142,45	1.696.893,99
	4	-288.520,52	668.059,01
	5	639.859,71	120.020,82
	6	-621.552,59	551.953,58
	7	461.352,68	1.574.565,97
	8	-437.999,69	-2.212.119,02
	9	256.064,27	876.395,49
	10	103.477,31	-3.134.507,06

Tabelle 4.28: RP: Gemischte Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung von 90% und den Nebenbedingungen, die Sensitivitäten zu treffen.

angenommen wird, dass die Stornoquote in diesen Jahren auf 0% sinkt. Im anderen Extremfall, d.h. wenn der risikolose Zins stark anstiege, würde die Anzahl an Kündigungen zunehmen, da dem Versicherungsvertrag nur 90% der erwirtschafteten Erträge zugeteilt werden. Deshalb wird angenommen, dass sich in den Jahren, in denen der risikolose Zins über 7,0% p.a. liegt, die Anzahl an Kündigen verdoppelt und somit zu einer Stornoquote von 10% führt.

In der Praxis ist es nicht ungewöhnlich, das Storno pfadabhängig zu modellieren.

In Tabelle 4.29 sind die Gewichte des replizierenden Portfolios enthalten, welches mit Hilfe des Verlaufsmodells bestimmt wurde. Die Replikationsqualität gemäß R^2 beträgt dabei nur 63,21%. Wird stattdessen das PV -Modell angewendet, so liefert R^2 einen Wert von 97,86%, was in etwa der Höhe der Replikationsqualität im Fall eines zinsunabhängig modellierten Stornos entspricht²⁵. In Abbildung 4.18 werden die Barwerte beider replizierenden Portfolios mit den Barwerten der Verpflichtungen verglichen. Dabei wird deutlich, dass dieses zinsabhängige Storno die Replikation der Barwerte der Verpflichtungen im PV -Modell kaum beeinflusst. Es beeinflusst aber die jährlichen Zahlungen so sehr, dass die betrachteten Finanzinstrumente nicht dazu geeignet sind, das zinsabhängige Storno im Verlaufsmodell abzubilden.

²⁵In diesem Fall betrug die Replikationsqualität im PV -Modell 97,51%.

Laufzeit	Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,8%	
	Euro		Anteile	Anteile	
1	1.412.598,58	-1.398.792,50		0,00	
2	293.634,30	-244.636,58		-2.591.434,22	
3	157.993,42	-104.889,43		-3.283.889,72	
4	51.141,51	16.688,75		-3.899.617,33	
5	77.958,03	-21.580,52		-4.219.113,07	
6	54.679,25	4.706,32		-3.158.555,83	
7	47.169,78	11.340,14		-2.154.173,77	
8	50.827,41	475,51		-1.796.210,56	
9	49.684,38	-5.048,56		-2.530.871,36	
10	352.472,68	107.621,37		2.613.158,28	

Aufschubsfrist Laufzeit	Floorlet 3,8%			
	1	2	3	4
2	885.091,79	155.801,17	1.008,62	647.506,80
3	-1.580.417,26	1.569.112,59	-294.198,84	1.910.731,11
4	3.746.558,54	2.835.193,30	-189.788,63	-93.995,40
5	-337.235,16	-1.239.105,92	1.191.669,58	835.046,51
6	734.867,01	1.086.078,86	706.248,74	4.437.278,70
7	-779.804,78	79.324,72	-425.554,93	
8	-114.396,70	5.065.532,33		
9	5.268.167,71			

Aufschubsfrist Laufzeit	5	6	7	8
	2	371.513,36	677.241,31	746.600,93
3	300.625,61	513.091,17	2.746.140,24	
4	272.825,22	2.170.752,60		
5,00	6.370.593,46			

Tabelle 4.29: RP: Verlaufmodell für das zinsabhängige Storno.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,8%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
683,307.19	1	237,862.83	0.00
	2	-47,737.93	684,883.86
	3	43,700.39	1,005,169.51
	4	-48,332.82	1,303,888.54
	5	119,472.36	851,726.81
	6	-70,883.76	1,145,456.66
	7	8,532.70	701,917.39
	8	76,857.61	216,956.52
	9	-222,087.27	919,923.03
	10	238,977.72	652,644.26

Tabelle 4.30: RP: PV-Modell für das zinsabhängige Storno.

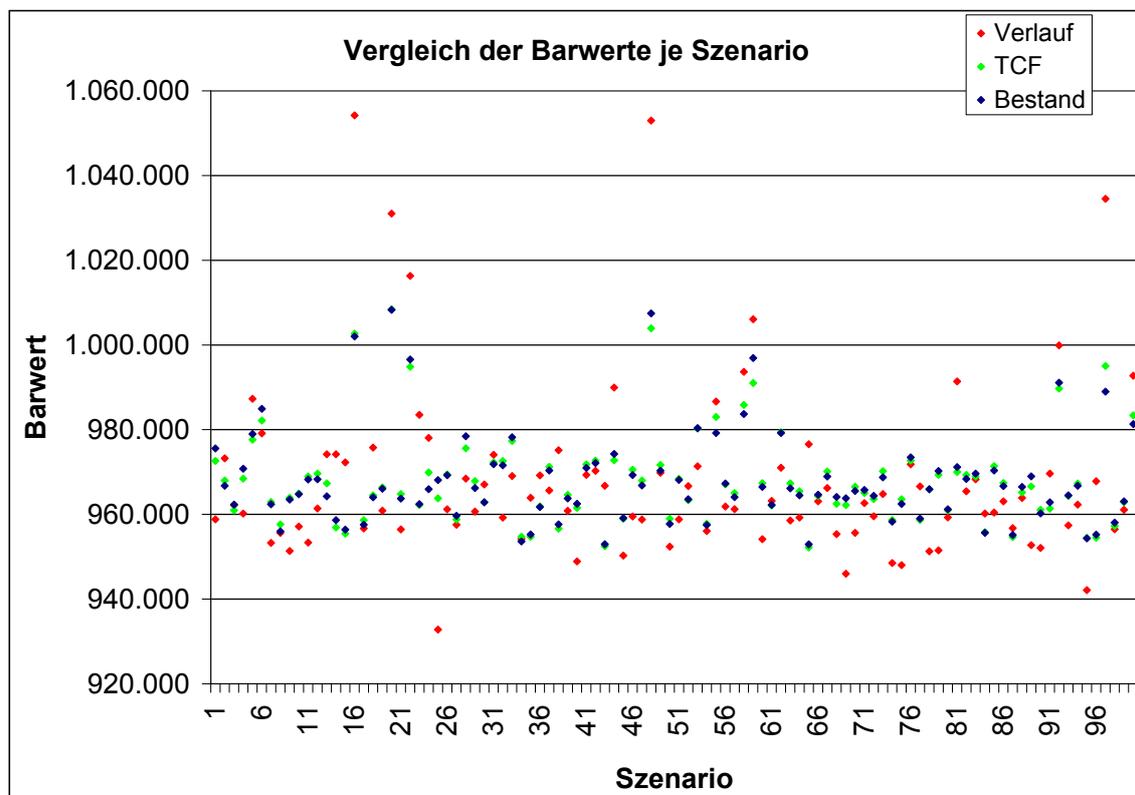


Abbildung 4.18: Portfolios im Vergleich mit einem Versicherungsbestand unter Berücksichtigung eines zinsabhängigen Stornos.

4.3 Vereinigung von Beständen

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie ein replizierendes Portfolio zu bestimmen ist, wenn $k \in \mathbb{N}$ verschiedene Bestände vereinigt werden sollen. In diesem Beispiel wird von einer deterministischen Stornoquote von 5% ausgegangen.

Zunächst muss geklärt werden, wie dieses Optimierungsproblem gelöst werden kann. Dazu gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: Es wird entweder die Summe der einzelnen Optimierungsprobleme betrachtet, d.h.

$$(OP) \begin{cases} \sum_{j=1}^k \left\| \left(V_{TCF,j} - \frac{1}{k} M_{TCF} \omega \right) D_{TCF} \right\|^2 \rightarrow \min \\ \omega \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

oder die Summe der Zahlungsströme, d.h.

$$(OP) \begin{cases} \left\| \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} - Z \omega \right) D_{TCF} \right\|^2 \rightarrow \min \\ \omega \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Der Faktor $\frac{1}{k}$ ist ein Gewichtungsfaktor, der jeden Teilbestand gleich gewichtet und $V_{TCF,j}$ bezeichnet den Vektor der Terminal Cash-Flows der Verbindlichkeiten über alle Szenarien für den Teilbestand $j \in \{1, \dots, k\}$. Die Lösungen sind für beide Fälle identisch:

$$\left(Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} Z \right)^{-1} Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} \right)$$

Die Bestimmung der Lösungen ergibt sich wie folgt:

Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \left\| \left(V_{TCF,j} - \frac{1}{k} M_{TCF} \omega \right) D_{TCF} \right\|^2 \rightarrow \min \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \sum_{j=1}^k \left\| \left(V_{TCF,j} - \frac{1}{k} M_{TCF} \omega \right) D_{TCF} \right\|^2}{\partial \omega} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{k} Z^T D_{TCF}^T \sum_{j=1}^k \left(V_{TCF,j} - \frac{1}{k} M_{TCF} \omega \right) D_{TCF} = 0 \\ \Leftrightarrow & \omega = \left(Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} Z \right)^{-1} Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} \right), \end{aligned}$$

und im zweiten

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} - Z\omega \right) D_{TCF} \right\|^2 \rightarrow \min \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial \left\| \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} - Z\omega \right) D_{TCF} \right\|^2}{\partial \omega} = 0 \\
& \Leftrightarrow 2Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} - Z\omega \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \omega = (Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} Z)^{-1} Z^T D_{TCF}^T D_{TCF} \left(\sum_{j=1}^k V_{TCF,j} \right).
\end{aligned}$$

Es wurde das *PV*-Modell verwendet, um eine bestmögliche Approximation der Barwerte zu erhalten. Beide Vorgehensweisen lassen sich analog auch auf die anderen Modelle übertragen.

Als nächstes wird die Vereinigung zweier Bestände betrachtet.

Der Bestand aus Abschnitt 4.2.3 bildet den ersten Bestand. Da Lebensversicherungsunternehmen Verträge mit verschiedenen Garantiezinsen und Laufzeiten in ihrem Bestand haben, wird sich der zweite Bestand vom ersten Bestand durch den Garantiezins und die Laufzeit unterscheiden. Für den zweiten Bestand wird ein Garantiezins von 2,75%, sowie eine Laufzeit von 5 Jahren angenommen. Dieser Bestand setzt sich ebenfalls aus 1.000 Verträgen zusammen. Die Gewichte der replizierenden Portfolios für die Einzelbestände finden sich in den Tabellen 4.22 und 4.31. Für die Replikation des zweiten Bestandes wurden Floorlets mit einem fixen Zinssatz von $2,75/0,9 = 3,05\%$ verwendet. Die Replikationsqualität beträgt gemäß $R^2 = 99,33\%$. Da beide Replikationen nicht perfekt sind, kann nun gezeigt werden, dass bei der Vereinigung mehrerer Bestände Probleme auftreten können. Würden die Replikationsportfolios den Bestand exakt abbilden, so wäre die Addition der replizierenden Portfolios das replizierende Portfolio für den gemeinsamen Bestand. Dies ist ansonsten nicht zwingend der Fall. Die Qualität der aufaddierten Portfolios kann sehr deutlich von der Qualität des neu bestimmten Portfolios abweichen.

Wird nun das replizierende Portfolio für den gemeinsamen Bestand über die Addition der Gewichte aus den Tabellen 4.31 und 4.22 bestimmt, so beträgt die Replikationsqualität $R^2 = 98,41\%$. Dies ist eigentlich ein sehr guter Wert. Wird aber das replizierende Portfolio neu berechnet, so liefert R^2 den Wert 99,03%. Die Gewichte dieses Portfolios können der Tabelle 4.32) entnommen werden. Dieser Unterschied könnte noch sehr viel größer werden, wenn die Replikationsqualität der Einzelportfolios noch schlechter wäre.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,05%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile
869.739,45	1	24.948,17	0,00
	2	-7.954,61	552.202,22
	3	38.436,35	3.293.215,92
	4	-18.192,63	-947.114,44
	5	95.700,27	1.120.954,96

Tabelle 4.31: RP: Gemischte Lebensversicherung einem Garantiezins von 2,75%.

Geldmarktkonto		ZCB	Floorlet 3,8%	Floorlet 3,05%
Euro	Laufzeit	Anteile	Anteile	Anteile
1.528.938,41	1	253.852,50	0,00	0,00
	2	16.505,17	477.112,23	3.798.375,64
	3	32.769,70	982.172,41	5.069.588,62
	4	-34.909,52	2.015.573,66	-77.008.309,44
	5	181.377,89	1.656.618,79	-585.231,68
	6	-85.919,33	550.525,75	
	7	66.502,45	1.159.572,28	
	8	-13.817,50	-136.517,55	
	9	-62.611,51	931.962,39	
	10	138.701,63	836.136,56	

Tabelle 4.32: RP: Vereinigung zweier Bestände.

In der Grafik 4.19 werden die Barwerte der beiden Portfolios und des gemeinsamen Bestandes für jedes der 100 Szenarien abgebildet. "RP" steht dabei für das neu bestimmte replizierende Portfolio und "Addition" für die Addition der replizierenden Portfolios der Einzelbestände. Die Barwerte des addierten Portfolios zeigen meistens einen größeren Abstand zu dem Wert des Bestandes auf, als das neu bestimmte Portfolio. Insbesondere in den Szenarien, in denen der Barwert der Verpflichtungen besonders groß ist, kann dieser Wert durch das addierte Portfolio nur schlecht approximiert werden. Dabei handelt es sich um diejenigen Szenarien, in denen der Garantiezins häufig über dem risikolosen Zins liegt. In diesen Szenarien wirkt sich der Einfluss des nicht exakt abbildbaren Zinseszinseseffektes stärker auf die Qualität des replizierenden Portfolios aus, als in den anderen Szenarien. Dies führt dann bei der Addition der Portfolios dazu, dass die Aussagen schlechter werden. Es ist somit ratsam, ein neues Portfolio zu bestimmen.

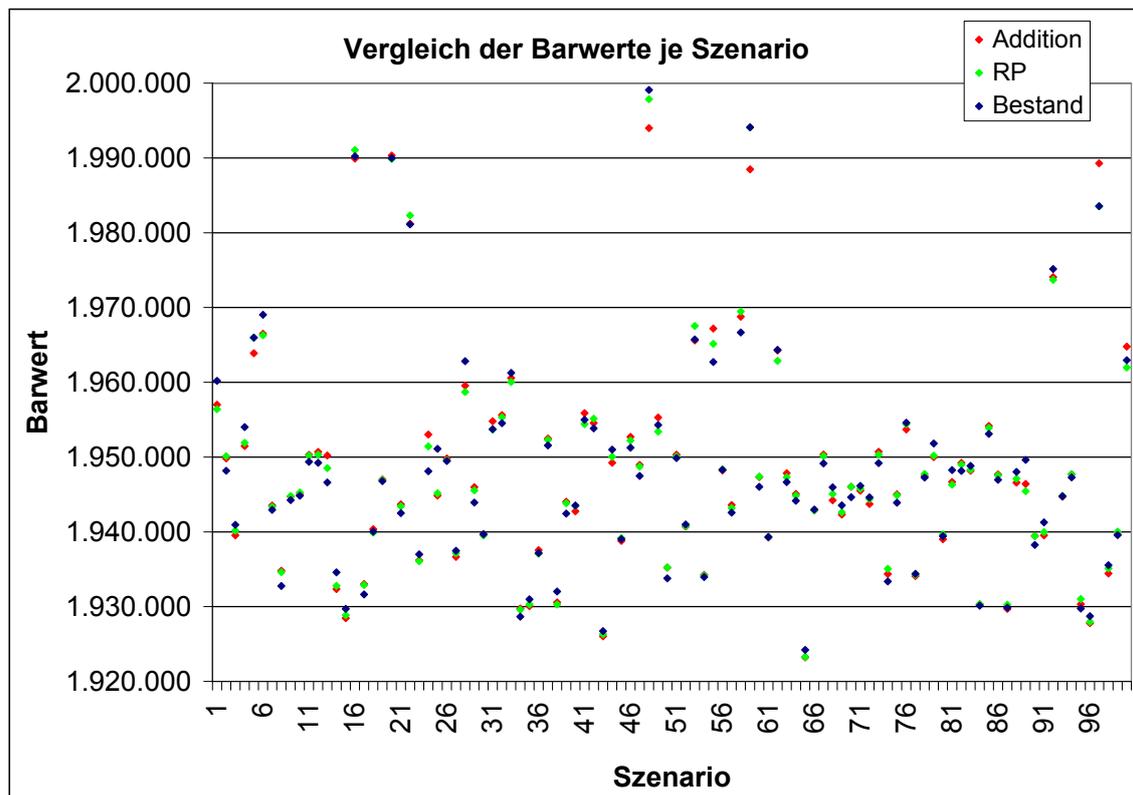


Abbildung 4.19: Vergleich zweier Portfolios mit der Summe zweier Bestände.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Theorie der replizierenden Portfolios auf Verpflichtungen der Lebensversicherung angewendet werden kann.

Zu diesem Zweck werden Cash-Flow-Modelle aufgestellt, wovon drei verschiedene Arten betrachtet werden. Aus der Klasse der Cash-Flow-Modelle werden außer dem Verlaufsmodell, bei dem die Cash-Flows zu jedem Zeitpunkt repliziert werden, auch das *PV*-Modell vorgestellt, bei dem der Barwert der Versicherungsverpflichtung repliziert wird. Zusätzlich wird eine Kombination dieser zwei Modelle, das sogenannte Bucket-Modell, betrachtet.

Zur Veranschaulichung und zur Analyse der unterschiedlichen Effekte werden diese Modelle schließlich in einem konkreten Beispiel eingesetzt. Hierbei werden die Auswirkungen einiger ausgewählten Optionen und Garantien auf die Cash-Flows der Verpflichtungen in einem Kapitalmarktmodell, das nur Zinsrisiken modelliert, analysiert. Für die Replizierung werden Instrumente betrachtet, welche für die Abbildung dieser Auswirkungen geeignet sind. Es wird zudem gezeigt, dass in unserem Beispiel eine relativ kleine Zahl an Szenarien benötigt wird um ein geeignetes replizierendes Portfolio zu bestimmen, sofern geeignete Instrumente in der Vorbereitungsphase ausgewählt wurden.

Somit können mit akzeptablem Aufwand replizierende Portfolios aufgestellt werden, die in den meisten Kapitalmarktzuständen eine gute Approximation der tatsächlichen Verbindlichkeiten darstellen.

Replizierende Portfolios sind ein geeignetes Werkzeug, um den Aufwand der Bewertung von Versicherungsverpflichtungen so weit zu reduzieren, dass diese sogar für tagesaktuelle Bewertungen herangezogen werden können.

Allerdings besteht ein großes Problem darin, dass mit Kapitalmarktinstrumenten Nicht-Kapitalmarktrisiken nur unzureichend abgebildet werden können.

In letzter Zeit wurden von Banken vereinzelt Survivor-Bonds angeboten, die das Sterblichkeitsrisiko abdecken sollen. Dies ist ein Zeichen dafür, dass in naher Zukunft die Einbeziehung des Sterblichkeitsrisikos in die Replikation ermöglicht werden könnte. Zusätzlich sollte an dieser Stelle erwähnt werden, dass es nicht möglich ist, eine ausreichende Replikationsqualität zu erreichen, wenn nur Kapitalmarktinstrumente verwendet werden, die explizit bewertet werden können. Es werden deswegen häufig auch nicht explizit bewertbare Instrumente eingesetzt. Diese Instrumente müssen notwendigerweise über Monte-Carlo-Simulationen bewertet werden. Im Allgemeinen wird die Bewertung dieser Instrumente dennoch schneller sein, als eine Neubewertung des Bestandes, da die Bewertung eines gesamten Versicherungsbestandes sehr zeitaufwendig ist.

Des Weiteren sind replizierende Portfolios nicht für ein Hedging innerhalb der Bilanz geeignet, da die Aktivseite der Bilanz die Versicherungsverpflichtungen beeinflusst.

Falls die Replikationsqualität nicht ausreichen sollte um damit das replizierende Portfolio allein als Approximation verwenden zu können, existiert die Möglichkeit, das replizierende Portfolio als Kontrollvariable einzusetzen, da die Korrelation zwischen den Verpflichtungen und dem replizierenden Portfolio positiv ist. Hierdurch kann die Varianz bei den Monte-Carlo-Simulationen signifikant reduziert werden, so dass für eine ausreichend gute Bewertung der Verpflichtungen weniger Simulationen benötigt werden.

In dieser Arbeit wird nur auf die Replikation von Versicherungsverpflichtungen eingegangen, es gibt jedoch noch viele weitere Anwendungsgebiete für replizierende Portfolios. Als ein mögliches Anwendungsgebiet sei hier der MCEV genannt.

Literaturverzeichnis

- [All05] ALLIANZ: *Allianz Lebensversicherungs-Aktiengesellschaft Geschäftsbericht 2005*. Allianz, 2005.
- [Alt02] ALT, WALTER: *Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2002.
- [Aub07] AUBRY, OLIVER: *ALM in der Lebensversicherung*. AXA, 2007. *Insurance: Mathematics and Economics* 37 (2005) 297-323.
- [BaF08] BAFIN: *Verordnung über die Mindestbeitragsrückerstattung in der Lebensversicherung (Mindestzuführungsverordnung)*. Bundesgesetzblatt 2008, Teil I Nr. 14 vom 11. April 2008, 2008.
- [BD05] BARBARIN, JEROME und PIERRE DEVOLDER: *Risk measure and fair valuation of an investment guarantee in life insurance*. Elsevier, 2005. *Insurance: Mathematics and Economics* 37 (2005) 297-323.
- [BK04] BINGHAM, NICHOLAS H. und RÜDIGER KIESEL: *Risk-neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer, 2004.
- [BM06] BRIGO, DAMIANO und FABIO MERCURIO: *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006.
- [BS04] BRANGER, NICOLE und CHRISTIAN SCHLAG: *Zinsderivate: Modelle und Bewertung*. Springer, 2004.
- [DH04] DEHLING, HEROLD und BEATE HAUPT: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer, 2004.
- [Hea05] HARTUNG, JOACHIM und ET AL.: *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg, 2005.
- [Irl03] IRLE, ALBRECHT: *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner, 2003.

- [Jam89] JAMSHIDAN, FARSHIDAN: *An exact bond option pricing formula*. Journal of Finance, 1989. Journal of Finance, 44, März 1989, Seite 205-209.
- [Mon08] MONEY, FOCUS: *Im Härtetest: neue leben*. Focus Money Versicherungsprofi 01/2008, 2008.
- [Oea07] OECHSLIN, JOACHIM und ET AL.: *Replicating embedded options in life insurance policies*. Life & Pensions Magazine, February, 2007.
- [Sch04] SCHARNBACHER, KURT: *Statistik im Betrieb: Lehrbuch mit praktischen Beispielen*. Gabler Verlag, 2004.
- [Shr04] SHREVE, STEVEN E.: *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous time models*. Springer, 2004.