Wintersemester 2019/2020

**Begabtenseminar**

**Gipfel und Nordwände der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade**

# Hausaufgaben

**Trigonometrie**

Löse die folgenden (Un)Gleichungen oder Systeme und beweise die folgenden Aussagen:

1. $3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$
2. $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = \sqrt{3}$
3. $\sqrt{3}\cos(x) + \cot^2(x) = \dfrac{\sin^3(x) + 1}{\sin^2(x)}$
4. Beweise folgende Identität:
$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$
5. Zeige, dass falls $\alpha, \beta, \gamma$ Winkelmaße in einem Dreieck sind gilt, dass
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$
6. Berechne die folgenden Summen:
   (a) $\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(7\alpha) + \cdots + \cos((2n+1)\alpha)$
   (b) $\tan(\alpha) + \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$
7. Beweise, dass die Gleichung
$$(\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x))\sin(4x) = 2$$
keine Lösung besitzt.
8. Beweise, dass
$$\sin^2(x)\cos^2(x) \leq \frac{1}{4}$$
9. Finde

(a) $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

(b) $\cos(2\,\mathrm{arccot}\,(-2))$

10. $1+\cos(2x) \geq \cos(x)(1+|1-2\cos(x)|)$

11. $\sqrt{\frac{1}{2}-\cos(2x)} \geq \sin(x)-\cos(x)$

12. $\sin(x) < |\cos(x)|$

13. Für welche $a$ hat die Ungleichung

$$\tan^2(\cos(\sqrt{4\pi^2-x^2})) - 4a\tan(\cos(\sqrt{4\pi^2-x^2})) + 2 + 2a \leq 0$$

eine endliche Anzahl von Lösungen? Finde diese Lösungen.

14. Für welche $a$ hat die Gleichung

$$(\arcsin(x))^3 + (\arccos(x))^3 = a$$

eine eindeutige Lösung?

15. Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\int_0^\alpha \cos(x+\alpha^2)dx = \sin(\alpha),$$

welche im Intervall $[2,3]$ liegen.

16. $\tan^2(x)\tan^2(3x) = 1$

17. $\sin^4(x)+\cos^4(x) = \frac{5}{8}$

18. $\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\cos(x)} = 2\sqrt{2}$

19. $\tan(x)\tan\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

20. $2\tan(2x)+\tan(3x) = \tan(5x)$

21. $2\cos(x) = \sqrt{2+\sin(3x)}$

22. Für welche $a$ besitzt die Gleichung

$$\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)} = a$$

Lösungen?

23. Finde alle $p$, für welche die Gleichung

$$\sin(x) + p\cos(x) = 2p$$

Lösungen besitzt.

24. $\begin{cases} \tan(x)\tan(2y) = 1, \\ \sqrt{3}\sin(2x) - 3\cos(2y) = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2\sin(x)\sin(y) = \cos(2x) + \cos(2y), \\ 2\cos(x)\sin(y) = \cos(2x) - \cos(2y) \end{cases}$

26. $\begin{cases} \sin(x) + \sin(z) = \sqrt{2}\cos(y), \\ \cos(x) + \cos(z) = \sqrt{2}\sin(y), \\ \cos(2y) + \cos(2z) = \sin(2x) \end{cases}$

27. $\begin{cases} \sin(x) + \tan(y) = 0, \\ \sin^2(x) + \tan^2(y) = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \sqrt{\sin(x)}\cos(y) = 0, \\ 2\sin^2(x) - \cos(2y) - 2 = 0 \end{cases}$

# Lösungen

1. $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2. $\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

3. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n$

6. (a) $\frac{\cos((n+2)\alpha)\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$

   (b) $\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-2\cot(2\alpha)$

9. (a) $-\frac{1}{8}$

   (b) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

10. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2\pi n,$
    $\frac{\pi}{2}+2\pi n\leq x\leq\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

11. $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+2\pi n,$
    $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{7\pi}{8}+2\pi n\leq x\leq-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

12. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

13. $a=\frac{\tan^2(1)+2}{2(2\tan(1)-1)}\ :\ x=0, x=\pm 2\pi$
    $a=-\frac{1}{2}:\ x=\pm\sqrt{3\pi^2\pm 2\pi\arccos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(\arccos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$

14. $a=\frac{\pi^3}{32},\ \frac{\pi^3}{8}<a\leq\frac{7\pi^3}{8}$

15. $\sqrt{3\pi},\ \frac{\sqrt{1+8\pi}-1}{2}$

16. $\frac{\pi(1+2n)}{8},\ \frac{\pi(1+2n)}{4},\ n\in\mathbb{Z}$

17. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

18. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

19. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2-n}\right),\ n\neq -1,0,\ n\in\mathbb{Z}$

20. $\pi n,\ \frac{\pi(1+2n)}{16},\ n\in\mathbb{Z}$

21. $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ -\arcsin\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

22. $|a|\leq 1$

23. $|p|\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

24. $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}+\pi m, (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}\right),\ m,n\in\mathbb{Z}$

25. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, (-1)^{m+n+1}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{12}}{4}+\pi n\right)\right),$
$\left(\pi m, (-1)^m\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right),$
$\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi m, (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ m,n\in\mathbb{Z}$

26. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \pi(2n+m), \dfrac{3\pi}{4}+\pi(2p+m)\right),$
$\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \dfrac{\pi}{2}+\pi(2n+m), \dfrac{\pi}{4}+\pi(2p+m)\right),$
$\left(-\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\pi m}{2}, \dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\pi\left(2n-\dfrac{m}{2}\right), -\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\pi\left(2p+\dfrac{m}{2}\right)\right),$
$m,n,p\in\mathbb{Z}$

27. $\left((-1)^n\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+\pi n, \pm\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi m\right),\ m,n\in\mathbb{Z}$

28. $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \dfrac{\pi}{2}+\pi m\right),\ m,n\in\mathbb{Z}$