



**Begabenseminar
Gipfel und Nordwände der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur
Mathe-Olympia**

Hausaufgaben

Algebraische, Exponentielle und logarithmische (Un)Gleichungen

Löse die folgenden (Un)Gleichungen oder Systeme:

1. $\sqrt{9 - 5x} = \sqrt{3 - x} + \frac{6}{\sqrt{3 - x}}$

2. $4\sqrt{x + 2} = |x + 1| + 4$

3. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 1$

4. $|x^2 + 3x + 2| + 4x + 10 = 0$

5.
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2|x - 1| + 3|y + 2| = 17 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} y\sqrt{y} + \sqrt{y} = 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} \\ x = y + 3 \end{cases}$$

8. $(x^2 - 18x + 77)\sqrt{10 - x} \geq 0$

9. $2x - 17 < \sqrt{81 - x^2}$

10. $\frac{(2 - x^2)(x - 3)^3}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} \geq 0$

11. $\sqrt{3x - 4} + \sqrt{2x - 13} > \sqrt{13 - 2x}$

12. $\left|x - \frac{4}{x} - 2\right| \geq 1$

13. Für welche a hat das folgende System mindestens eine Lösung?

$$\begin{cases} ax - 1 \leq 0 \\ x - 4a \geq 0 \end{cases}$$

14. Für welches x erreicht die Funktion $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ ihr Minimum? Berechne $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.
15. $\sqrt{\left(\frac{x+1}{3-2x}\right)^2} > 1$
16. $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$
17. $\frac{2}{2-x} + \frac{3}{2+x} \geq \frac{4x}{4-x^2}$
18. Beweise $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$ für alle $x, y, z > 0$.
19. $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$
20. Für welches a hat $\log_{x-1}(x+a) = \frac{1}{2}$ eine einzige Lösung?
21. $1 - \log_9(x+1)^2 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$
22. $\log_{x+a} x \leq \log_a x^2$ für $a \neq 1, a > 0$.
23. $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$
24. $\log_{10} \sqrt{x-5} + \log_{10} \sqrt{2x-3} + 1 = \log_{10} 30$
25. $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x - 5)^{\log_3 2}$
26. $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$ für $a \in (0, 1)$
27. Finde die Summe der Lösungen von
- $$x + 1 = 2 \log_2(2^x + 3) - 2 \log_4(1983 - 2^{-x}).$$
28. $\sqrt{4 \log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$
29. $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[4]{27^{2x-1}}$
30. $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$
31. $(x^2 + x + 1)^x < 1$
32. $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$
33.
$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2 \\ -(\log_x(0, 2))^3 + y = 1 \end{cases}$$
34. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24-x^2-2x}{14}\right) > 1$

Lösungen

1. $x = -3$
2. $x = -1; 7$
3. $x \in [1, 2]$
4. $x = -3; -4$
5. $(x, y) = (3, 2); (\frac{13}{5}, \frac{11}{5})$
6. $(x, y) = (2, 3); (\frac{23}{4}, -\frac{9}{2})$
7. $(x, y) = (4, 1)$
8. $x \in (-\infty, 7); x = 10$
9. $x \in [-9, \frac{34 + 2\sqrt{29}}{5}]$
10. $x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup (-1, \sqrt{2}] \cup [3, 4)$
11. $x = \frac{13}{2}$
12. $x \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}] \cup [-1, 0) \cup (0, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}) \cup [4, \infty)$
13. $a \in (-\infty, \frac{1}{2})$
14. $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$
15. $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 4)$
16. $x \in (-2, -1] \cup [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
17. $x \in (-2, 2) \cup (2, \infty)$
- 18.
19. $x = \frac{6}{10}$
20. $a < -1; a = -\frac{3}{4}$
21. $x = -7; -2; 1$
22.
$$\begin{cases} x > 1 & \text{für } a > 1 \\ x \in (0, \sqrt{a} - a) \cup (1 - a, 1] & \text{für } a \in (0, 1) \end{cases}$$
23. $x = 2$
24. $x = 6$
25. $x = -2 - \sqrt{10}$
26. $x = 2$
27. $\log_2 11$
28. $x = 8$
29. $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (4, \infty)$
30. $x \in (2 - \sqrt{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{13}{4}, 2 + \sqrt{2})$
31. $x \in (-\infty, -1)$
32. $x \in (0, 2 - \log_2 3) \cup (1, \infty)$
33. $(x, y) = (5, 0); (\frac{1}{5}, 2)$
34. $x \in (-3, 1) \cup (3, 4)$