



Tag der Mathematik 2014

Einzelwettbewerb

Aufgaben

Schulnummer	Schülernummer	Name, Vorname

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E1	E2	E3	E4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

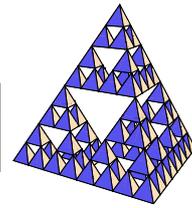




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe E1

Schulnr.	Schülernr.	Name, Vorname
----------	------------	---------------



Aufgabe E1

Für welche a und b ist die Gerade $g: 2x + 3y = a$ Tangente an die Parabel $y = bx^2$ im Punkt mit $x = 3$?

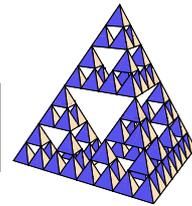




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe E2

Schulnr.	Schülernr.	Name, Vorname
----------	------------	---------------



Aufgabe E2

Wählen Sie in der Multiplikationstabelle zwei Zahlen in der Diagonalen aus (dies sind Quadratzahlen), z.B. 4 und 25, und dann die beiden Zahlen, die in der gleichen Zeile und Spalte stehen, also 10, 10.

Addieren Sie die beiden Quadrate, bilden Sie deren Differenz und addieren Sie die beiden anderen Zahlen:

- $a := 25 - 4 = 21$
- $b := 10 + 10 = 20$ und
- $c := 25 + 4 = 29$.

·	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

Dann sind a , b und c Pythagoräische Zahlen: $20^2 + 21^2 = 29^2$.

a) Wählen Sie 1 und 36 und berechnen Sie a , b und c .

Gilt auch diesmal $a^2 + b^2 = c^2$?

b) Welche zwei Quadratzahlen aus der Tabelle ergeben das Tripel

(i) (3, 4, 5) (ii) (5, 12, 13) (iii) (7, 24, 25)?

c) Welches Tripel a , b , c erhält man mit den Quadratzahlen p^2 und q^2 ?

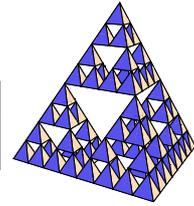




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe E3

Schulnr.	Schülernr.	Name, Vorname
----------	------------	---------------



Aufgabe E3

Untersuchen Sie $f(x) = x - \sin x$ für $-\pi < x < \pi$ auf Extremstellen.

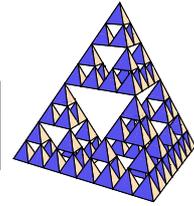




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe E4

Schulnr.	Schülernr.	Name, Vorname
----------	------------	---------------



Aufgabe E4

Sei

$$f(x) = \frac{2x}{3x+4}$$

Wie muss $g(x)$ gewählt werden, damit

$$f(g(x)) = x$$

gilt?



Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.
<http://www.f-m-b-j.de>





Tag der Mathematik 2014

Gruppenwettbewerb

Aufgaben

Schulnummer	Teamnummer	Name des Teammitglieds

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G1	G2	G3	G4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

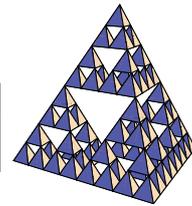




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe G1

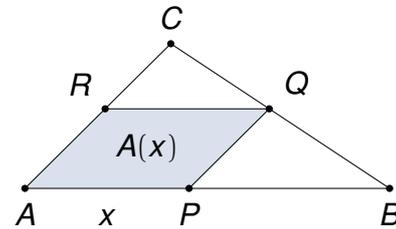
Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe G1

Im Dreieck ABC sei P auf AB . Für Q auf BC und R auf AC sei $PQ \parallel AC$ bzw. $RQ \parallel AB$.

Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit die Fläche $A(x)$ des Parallelogramms $APQR$ maximal wird?

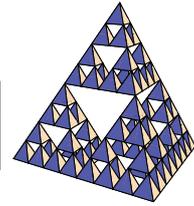




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe G2

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe G2

Gegeben sind die Parabeln $y = x^2$ und $y = -(x - 4)^2$. Gesucht ist die Gerade $y = mx + b$, $m \neq 0$, die Tangente an beide Parabeln ist.

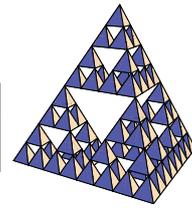




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe G3

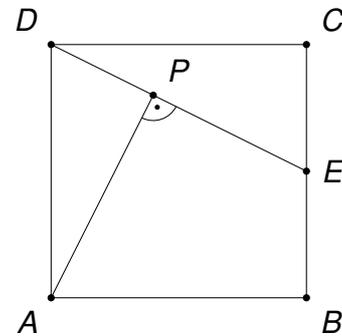
Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe G3

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Sei E der Mittelpunkt von BC und P der Fußpunkt des Lotes von A auf DE .

Zeigen Sie: $BP = AB$.

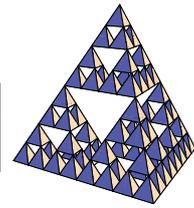




Tag der Mathematik 2014

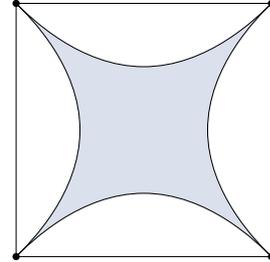
Aufgabe G4

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe G4

In einem Quadrat (Seitenlänge 1) ist ein Netz aufgespannt, das begrenzt wird von vier gleichen Parabelbögen durch die Ecken des Quadrats, das heißt die Bögen sind symmetrisch zu den Diagonalen des Quadrats. Berechnen Sie die Fläche des Netzes.





Tag der Mathematik 2014

Mathematische Hürden

Aufgaben

Schulnummer	Schülernummer	Name, Vorname

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	Σ
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	8	8	8	8	64
Erreichte Punktzahl									

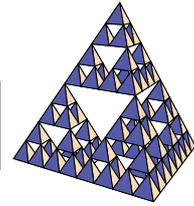




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H1

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe H1

Gegeben ist die Folge $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 1$.

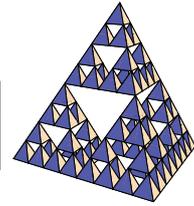
Berechnen Sie a_{2014} .





Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H2



Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------

Aufgabe H2

Im Koordinatensystem sei $F(0|1)$.

Wo liegen alle Punkte $P(x|y)$, die von F und der x -Achse den gleichen Abstand haben?

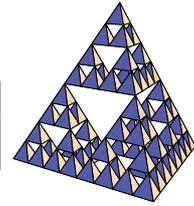




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H3

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------

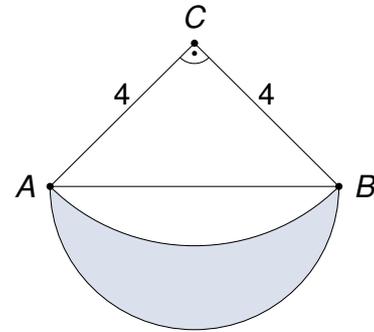


Aufgabe H3

In der Abbildung rechts ist $AC = BC = 4$ und $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Die eingefärbte Fläche wird begrenzt durch den Halbkreis über AB und den Viertelkreis um C durch A und B .

Wie groß ist die eingefärbte Fläche?

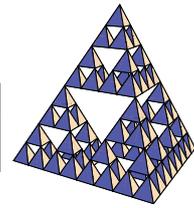




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H4

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe H4

Seien A und B die Flächen von zwei Dreiecken mit den Seiten 25, 25, 30 bzw. 25, 25, 40.

Berechnen Sie $\frac{A}{B}$.

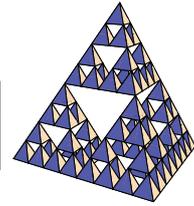




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H5

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe H5

Wie viele positive ganze Zahlen sind Teiler von 2014?

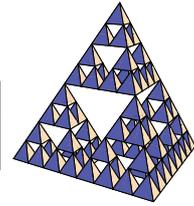
Hinweis: 53 ist ein Teiler.





Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H6



Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------

Aufgabe H6

Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} = 12.$$

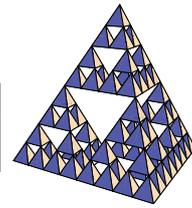




Tag der Mathematik 2014

Aufgabe H7

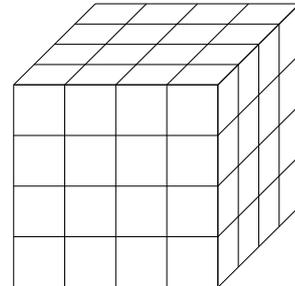
Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe H7

Die Abbildung zeigt einen großen Würfel, der aus $4^3 = 64$ kleinen Würfeln besteht.

Wie viele dieser kleinen Würfel sind in der Abbildung sichtbar?

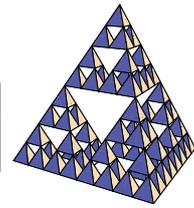




Tag der Mathematik 2014

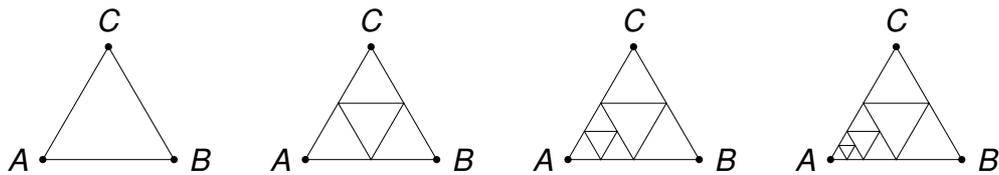
Aufgabe H8

Schulnr.	Teamnr.	Name eines Teammitglieds
----------	---------	--------------------------



Aufgabe H8

Die Abbildungen zeigen eine Folge gleichseitiger Dreiecke ABC , die durch Mittellinien in kleinere Dreiecke unterteilt werden.



Dabei wird immer das Dreieck mit der Ecke A durch seine Mittellinien in vier weitere Dreiecke zerteilt.

Aus wie vielen Dreiecken besteht die 10. Figur?

Hinweis: Die 3. Figur besteht aus sieben Dreiecken.



Tag der Mathematik 2015

Einzelwettbewerb

Aufgaben

Schulnummer	Schülernummer	Name, Vorname

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

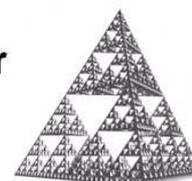
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E1	E2	E3	E4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					



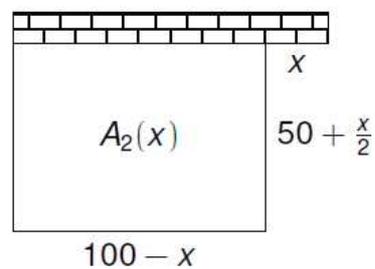
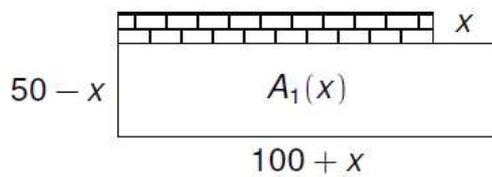
**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



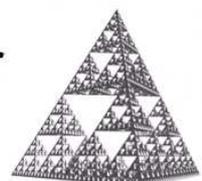
Aufgabe E1

Auf einer Wiese mit einer 100 m langen Steinmauer will Bauer Alfred mit 200 m Maschendraht eine rechteckige Weide einzäunen. Wie muss der Bauer – unter ganzer oder teilweiser Einbeziehung der Mauer – den Zaun errichten, damit eine möglichst große Weide zur Verfügung steht.



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



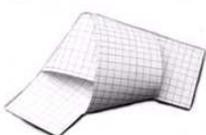
Aufgabe E2

In einer Keramikfabrik werden Fliesen als unbrauchbar ausgesondert, wenn sie sowohl einen Form- als auch einen Farbfehler aufweisen. Fliesen, die ausschließlich einen Farbfehler haben, können noch als 2. Wahl im Verkauf angeboten werden. (Farb- und Formfehler treten im Produktionsprozess unabhängig voneinander auf.)

Durchschnittlich sind 5% der Fliesen wegen Farb- und Formfehler unbrauchbar, während 20% als 2. Wahl verkauft werden.

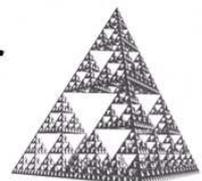
Wie viel Prozent der hergestellten Fliesen haben einen

- a) Farbfehler,
- b) Formfehler?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

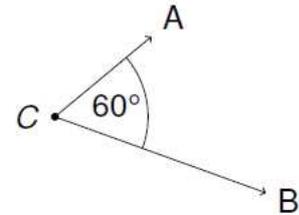
<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe E3

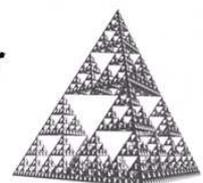
Zwei Schiffe *A* und *B* verlassen gleichzeitig den Hafen *C* mit den konstanten Geschwindigkeiten von 20 km/h bzw. 32 km/h. Der Winkel zwischen den Fahrtrouten beträgt 60° .

Wie weit sind die Schiffe nach 2,5 Stunden voneinander entfernt?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

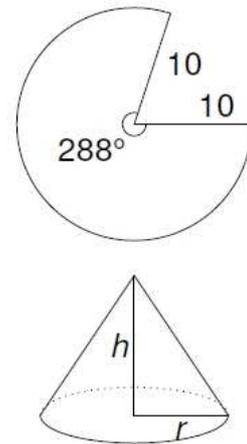
<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe E4

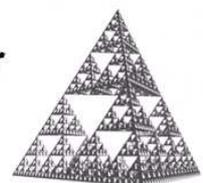
Aus einem Kreisabschnitt mit dem Radius 10 und dem Mittelpunktswinkel von 288° kann durch aneinander legen der geraden Teile ein Kegel gebildet werden.

Berechnen Sie den Radius r , die Höhe h sowie das Volumen V des Kegels.



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



Tag der Mathematik 2015

Gruppenwettbewerb

Aufgaben

Schulnummer	Teamnummer	Name eines Teammitgliedes

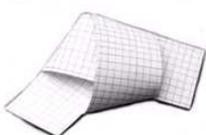
Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

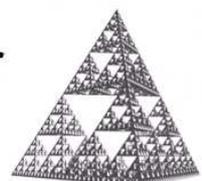
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G1	G2	G3	G4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

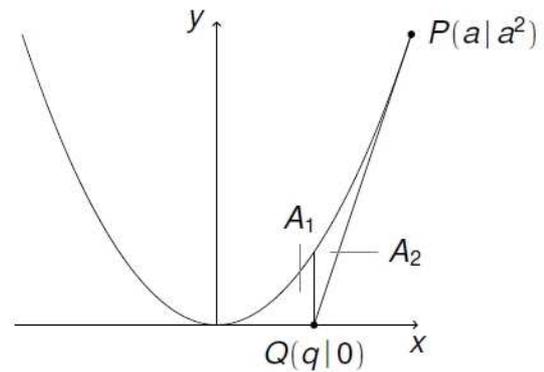
<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe G1

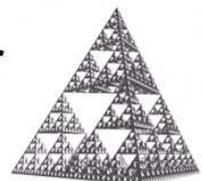
Im x - y -Koordinatensystem sei $P(a|a^2)$, $a > 0$, ein Punkt der Parabel $y = x^2$. Die Tangente in P schneide die x -Achse in $Q(q|0)$. Die Fläche zwischen der Parabel, der x -Achse und der Tangente wird durch $x = q$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.

Zeigen Sie $A_1 = A_2$.



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>

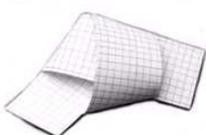
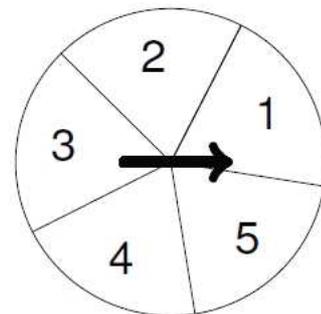


Aufgabe G2

Die Klasse 10 hat zum Schulfest ein Glücksrad gebaut um die Klassenkasse aufzufüllen. Der Spieler zahlt 1€ Einsatz und darf das Rad 3-mal drehen. Für jede 1 erhält er 1€.

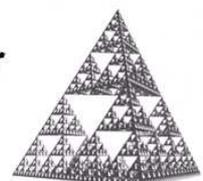
- Welchen Gewinn (Auszahlung – Einsatz) darf die Klasse pro Spiel erwarten?
- Die Auszahlung für 3 Einsen soll erhöht werden, dass das Spiel fair ist, das heißt der Gewinn soll Null sein.

Wie viel müsste für 3 Einsen ausgezahlt werden?

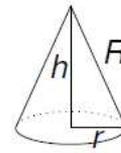
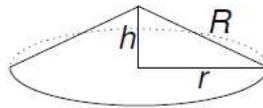
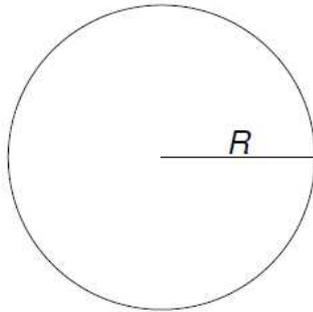


**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe G3



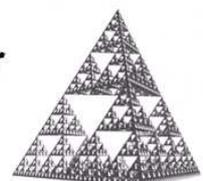
Ein kreisförmiges Papier wird längs eines Radius R aufgeschnitten. Daraus lassen sich dann Kegelmäntel mit unterschiedlichen Grundflächen und Höhen bilden. Seien V das Volumen, h die Höhe und r der Radius des Kegels.

- Bestimmen Sie $V(h)$.
- Wie müssen h und r gewählt werden, damit der Kegel maximales Volumen hat? Berechnen Sie für diesen Fall $\frac{r}{h}$.



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



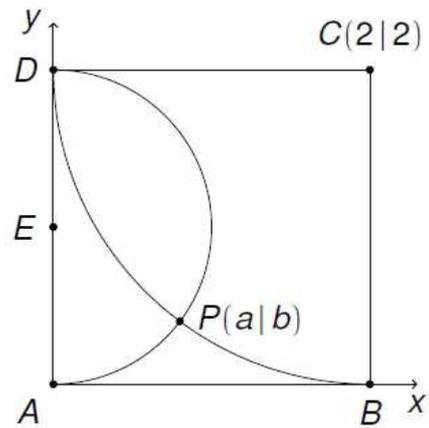
Aufgabe G4

Ein Quadrat $ABCD$ im x - y -Koordinatensystem hat die Ecken $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$.

Sei $P(a|b)$ der Schnittpunkt des Viertelkreises um C durch B und des Halbkreises über AD mit dem Mittelpunkt $E(0|1)$.

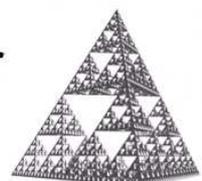
Zeigen Sie:

$$\frac{PB}{PA} = \sqrt{2}.$$



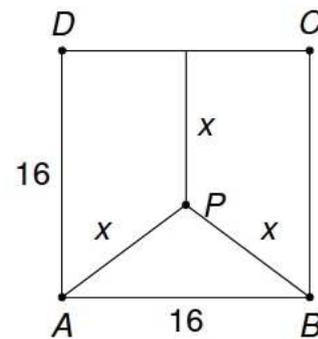
**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



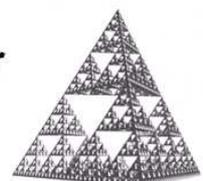
Aufgabe H1

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 16 hat ein Punkt P von A , B und dem Mittelpunkt von CD den gleichen Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.



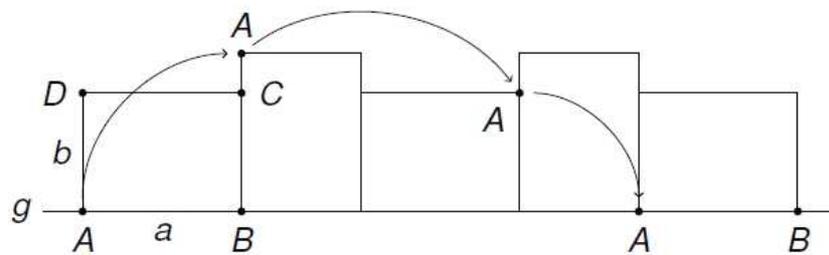
**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe H2

Ein Rechteck $ABCD$ mit $a = 4$ und $b = 3$ liegt mit der Seite AB auf einer Geraden g . Dann wird das Rechteck auf g so lange abgerollt, bis AB wieder auf g liegt.

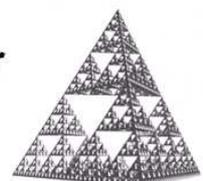


Wie lang ist der Weg, den A beim Abrollen zurücklegt?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe H3

Opa Alfred sagte an seinem Geburtstag:

„Heute bin ich in einem Zahlensystem (100) und in einem anderen (1000) Jahre alt geworden.“

Wie alt ist er geworden?

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet (101) im Fünfersystem

$$(101)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 26$$

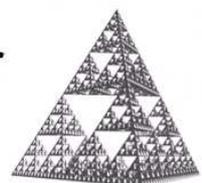
im Zehnersystem. Im Zweiersystem gilt

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11.$$



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>





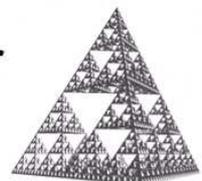
Aufgabe H4

In einem kugelförmigen Aquarium mit einem Radius von 18 cm ist das Wasser an der tiefsten Stelle 26 cm tief. Wie groß ist die Wasseroberfläche?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>





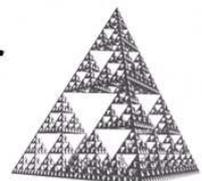
Aufgabe H5

Welches ist die letzte Ziffer von 3^{2015} ?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe H6

Palindrome sind natürliche Zahlen, die von vorn und von hinten gelesen gleich sind. Zum Beispiel sind 1331 ein vierstelliges und 46964 ein 5-stelliges Palindrom.

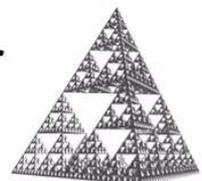
Wie viele Palindrome gibt es mit

- a) 4 Stellen,
- b) 5 Stellen?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

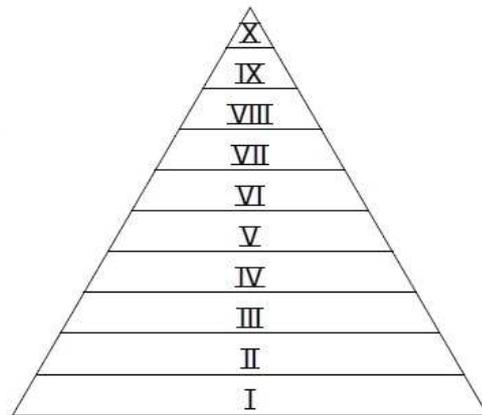
<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe H7

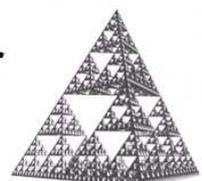
Eine Zielscheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks ist durch 9 äquidistante parallele Linien in 10 Sektoren (I bis X) unterteilt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die drei Bereiche X, VIII oder IV getroffen werden, und zwar unter der Annahme, dass die Zielscheibe immer und jeder Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

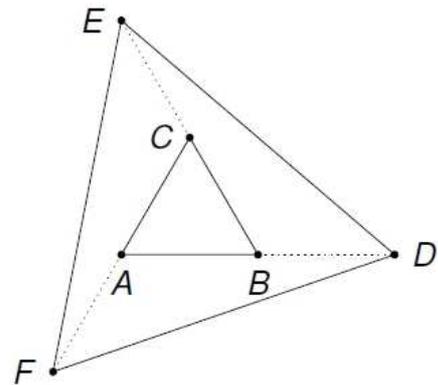
<http://www.f-m-b-j.de>



Aufgabe H8

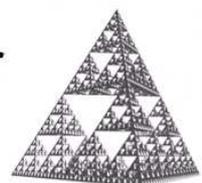
Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC . Das Dreieck DEF entsteht dadurch, dass A an B , B an C und C an A gespiegelt wird.

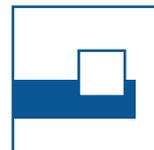
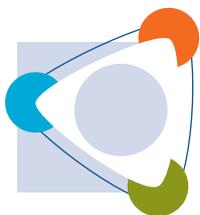
In welchem Verhältnis stehen die Flächen der Dreiecke DEF und ABC ?



**Verein zur Förderung mathematisch begabter
Jugendlicher e.V.**

<http://www.f-m-b-j.de>





Tag der Mathematik 2016

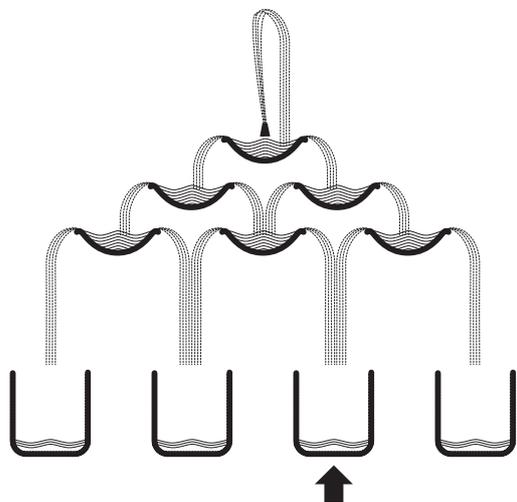
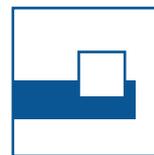
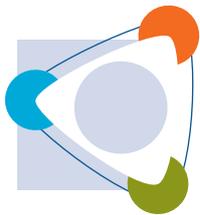
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!



Der römische Brunnen

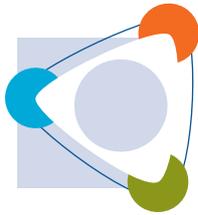
Aufsteigt der Strahl und fallend gießt
Er voll der Marmorschale Rund,
Die, sich verschleiern, überfließt
In einer zweiten Schale Grund;
Die zweite gibt, sie wird zu reich,
Der dritten wallend ihre Flut,
Und jede nimmt und gibt zugleich
Und strömt und ruht.

— Conrad Ferdinand Meyer

Aufgabe G1

Die oberste Schale eines römischen Brunnens wird pro Minute mit 1000 Liter Wasser gespeist. Aus jeder Schale fließen links $\frac{4}{5}$ und rechts $\frac{1}{5}$ des Wassers in eine darunter liegende Schale.

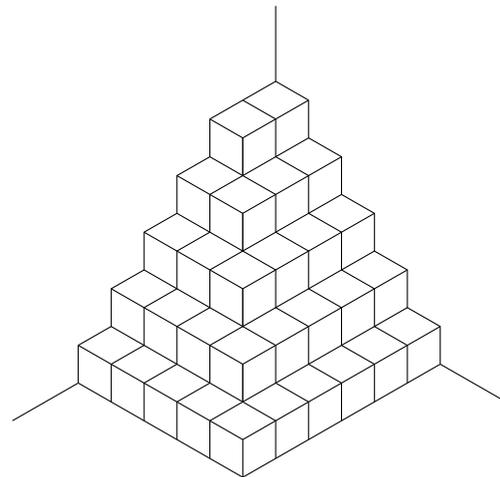
Wie lange dauert es, bis in das durch den Pfeil markierte Becken 1000 Liter geflossen sind?

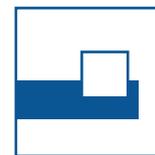
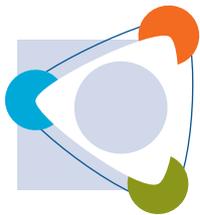


Aufgabe G2

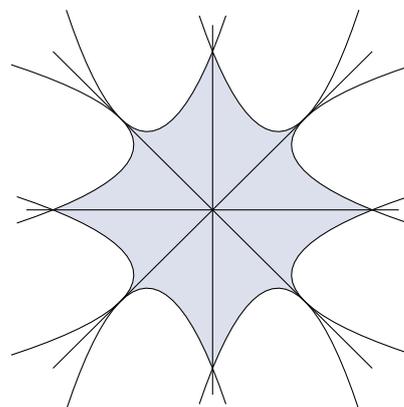
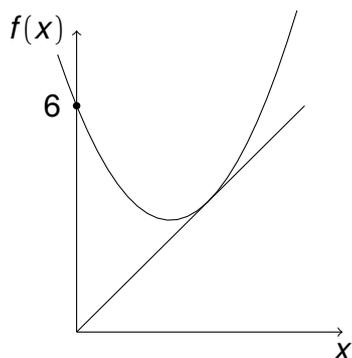
In einer Zimmerecke sind mehrere Lagen von Würfeln aufgestapelt. Die Abbildung zeigt diese Würfelpyramide. Nicht alle Würfel sind sichtbar.

- Aus wie vielen Würfeln besteht die Pyramide?
- Die sichtbaren Flächen der Würfel werden rot lackiert. Wie viele Würfel haben 0, 1, 2 bzw. 3 rote Flächen?
- Ein Würfel wird zufällig ausgewählt und dann gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p , eine rote Fläche zu erhalten?





Aufgabe G3



- a) Gegeben ist die Parabel

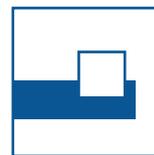
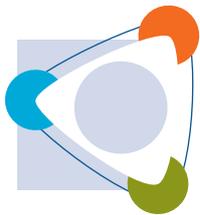
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + 6, \quad a > 0.$$

Für welches a berührt die Parabel die 1. Winkelhalbierende?

Berechnen Sie auch die Koordinaten des Berührungspunktes.

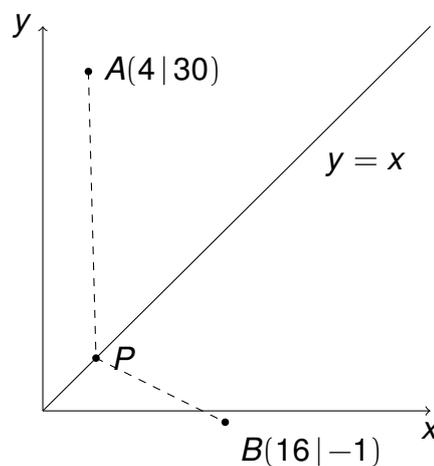
- b) Diese Parabel wird mehrfach an den Winkelhalbierenden und den Koordinatenachsen gespiegelt (vgl. Abbildung).

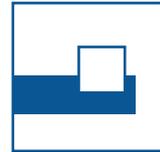
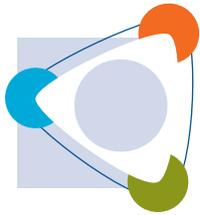
Wie groß ist die eingefärbte Fläche?



Aufgabe G4

Welche Punkte P der Geraden $y = x$ haben von $A(4 | 30)$ die doppelte Entfernung wie von $B(16 | -1)$?



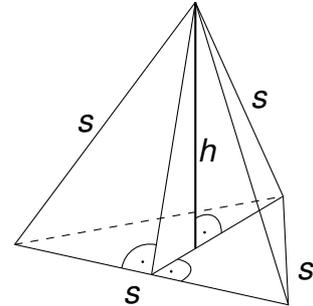


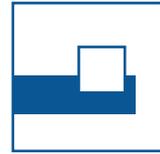
Aufgabe E1

Gegeben ist ein Tetraeder mit der Kantenlänge s .

Berechnen Sie

- die Höhe h und
- das Volumen V des Tetraeders.



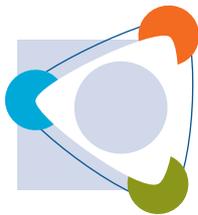


Aufgabe E2

Ein zuerst leeres Becken mit einem Fassungsvermögen von 100 hl wird über einen konstanten Zufluss in $8\frac{3}{4}$ Stunden gefüllt.

Das Entleeren über einen Auslauf dauert 11 Stunden, dabei wird eine konstante Ausflussgeschwindigkeit vorausgesetzt.

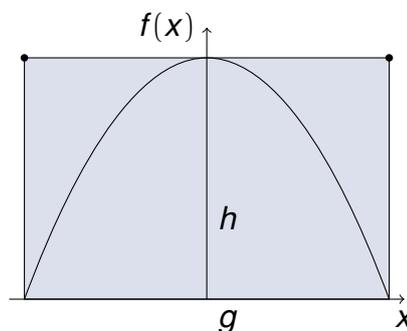
Wie lange dauert es, bis das Becken gefüllt ist, wenn der Auslauf geöffnet ist?

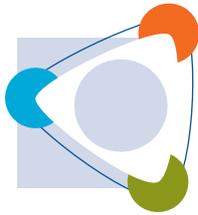


Aufgabe E3

Gegeben ist die Parabel $f(x) = -ax^2 + b$ mit $a, b > 0$.

Zeigen Sie, dass die Fläche zwischen Parabel und x -Achse $\frac{2}{3}$ der Fläche des Rechtecks mit der Grundseite g und der Höhe h ist (vgl. Abbildung).

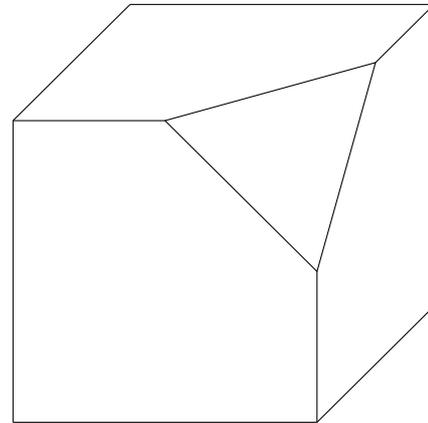


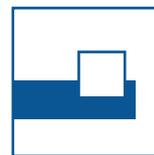
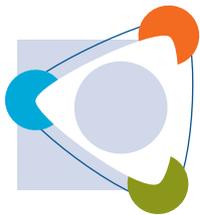


Aufgabe E4

Von einem Würfel (Kantenlänge 2) werden die acht Ecken so abgeschnitten, dass die Schnittebene durch die Mitten benachbarter Kanten geht. In der Abbildung ist eine Ecke abgeschnitten.

- Wie viele Flächen (f), Kanten (k) und Ecken (e) hat der Körper?
- Berechnen Sie seine Oberfläche O und sein Volumen V .

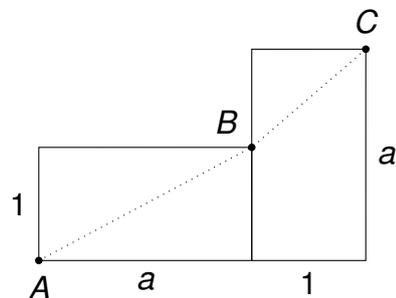


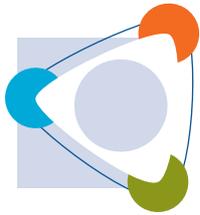


Aufgabe H1

Zwei $1 \times a$ Rechtecke werden wie abgebildet aneinander gelegt.

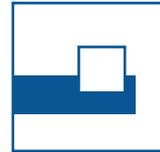
Wie muss a gewählt werden, damit A , B und C kollinear sind, d.h. damit A , B und C auf einer Geraden liegen?





Tag der Mathematik 2016

Aufgabe H2



Aufgabe H2

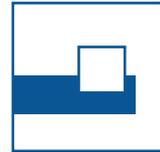
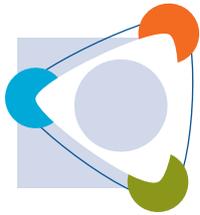
Schreibt man die natürlichen Zahlen hintereinander, so entsteht die Folge der Ziffern

1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,0,1,1,1,2,1,3,1,4,1,5,...

An der 19. Stelle steht dann die Ziffer 4.

↑
19. Stelle

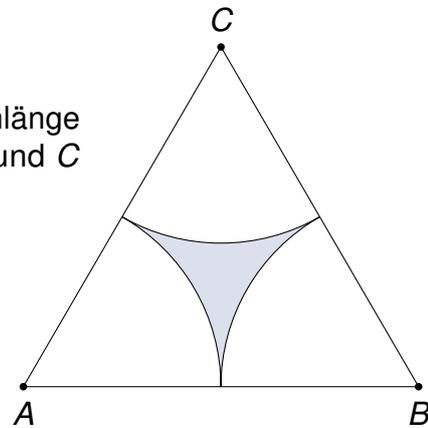
Welche Ziffer steht an der 2016. Stelle?

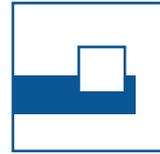
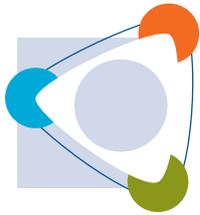


Aufgabe H3

In einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge $4a$ begrenzen Kreisbögen (Radius $2a$) um A , B und C das eingefärbte Gebiet.

Berechnen Sie dessen Fläche.



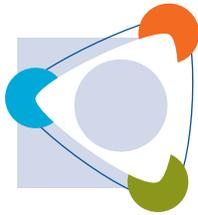


Aufgabe H4

Im alten Ägypten wurden Brüche als Summe von Stammbrüchen geschrieben, d.h. Brüche mit dem Zähler 1.

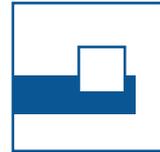
Zum Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Schreiben Sie $\frac{3}{11}$ als Summe von zwei Stammbrüchen.



Tag der Mathematik 2016

Aufgabe H5

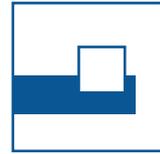
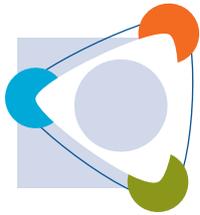


Aufgabe H5

Bei der Addition von vier gleichen zweistelligen Zahlen steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern.

Bestimmen Sie H , E und A .

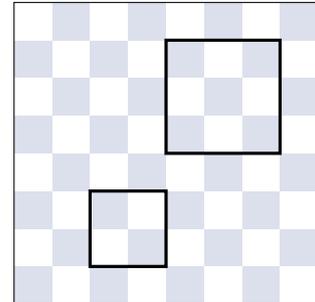
$$\begin{array}{r} HE \\ HE \\ HE \\ + HE \\ \hline AH \end{array}$$

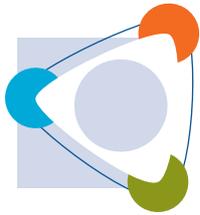


Aufgabe H6

Wie viele Quadrate kann man auf dem Schachbrett entdecken?

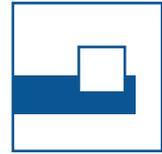
Ein 3×3 und 2×2 Quadrat sind beispielhaft eingezeichnet.





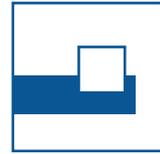
Tag der Mathematik 2016

Aufgabe H7



Aufgabe H7

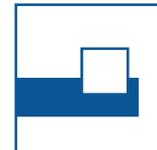
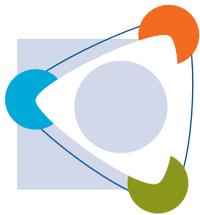
Wie viele Teiler hat 2016?



Aufgabe H8

Gegeben sind fünf Geraden und zwei Kreise in der Ebene.

Wie groß ist die maximale Anzahl der Schnittpunkte?



Tag der Mathematik 2017

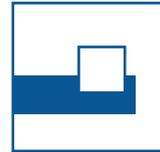
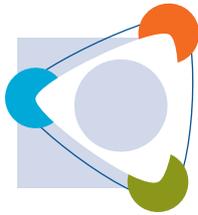
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!



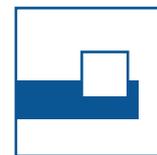
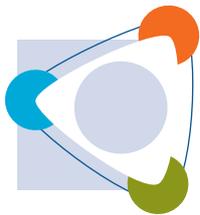
Aufgabe G1

Eine Urne enthält blaue und rote Kugeln.

Vor der Ziehung ist die Wahrscheinlichkeit eine blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{4}$.

Nach der Ziehung einer blauen Kugel ist die Wahrscheinlichkeit eine weitere blaue Kugel zu ziehen $\frac{1}{5}$.

Wie viele rote Kugeln sind in der Urne?

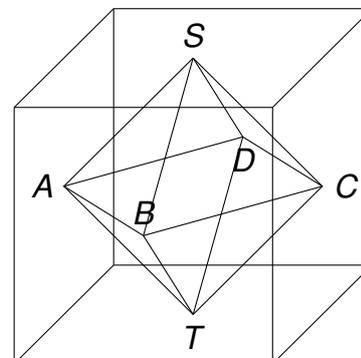


Aufgabe G2

Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, so erhält man ein Oktaeder mit den Ecken A, B, C, D, S und T .

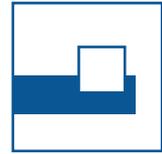
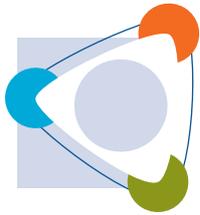
In einem Koordinatensystem sind vier Eckpunkte des Oktaeders

$$A(13 \mid -5 \mid 3), B(11 \mid 3 \mid 1), C(5 \mid 3 \mid 7), S(13 \mid 1 \mid 9)$$



Berechnen Sie

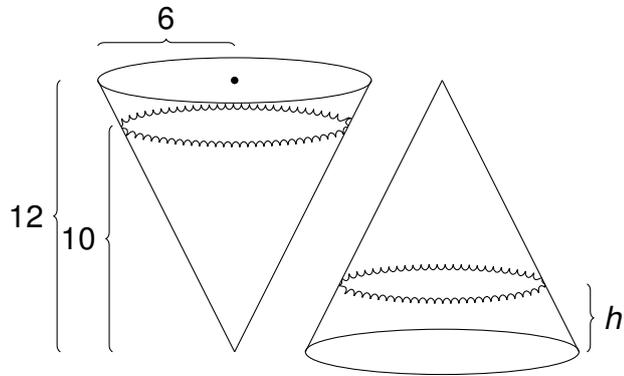
- die Länge der Würfelkante,
- die Oberfläche des Oktaeders,
- die Koordinaten von D und T .

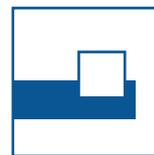
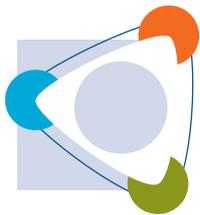


Aufgabe G3

Ein Kegel mit der Höhe 12 cm und dem Grundkreisradius 6 cm steht auf der Spitze und wird teilweise mit Wasser gefüllt, das 10 cm hoch steht.

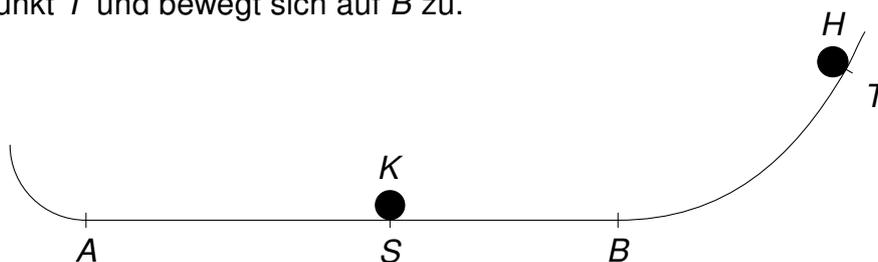
Wie hoch steht das Wasser, wenn der Kegel umgedreht wird?





Aufgabe G4

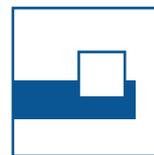
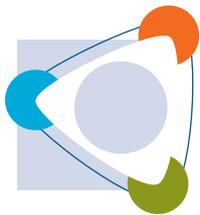
Zwei Kugeln K und H bewegen sich reibungsfrei auf einer Kugelbahn, die zwischen A und B waagrecht verläuft. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist K im Punkt S , der die Strecke AB im Verhältnis $4 : 3$ teilt. Zum gleichen Zeitpunkt ist H im Punkt T und bewegt sich auf B zu.



Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit $1,5 \text{ m/s}$ nach rechts, dann stößt sie mit der Kugel H in B zusammen.

Bewegt sich die Kugel K in S mit der Geschwindigkeit $1,5 \text{ m/s}$ nach links, dann stoßen K und H in A zusammen.

Welche Geschwindigkeit hat die Kugel H beim Zusammenprall?

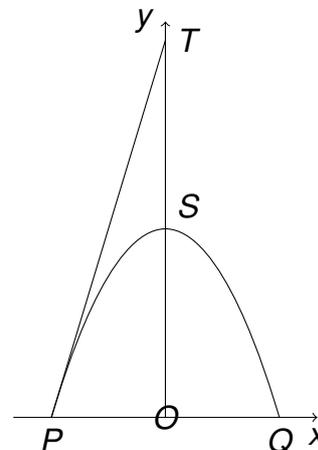


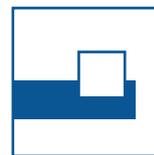
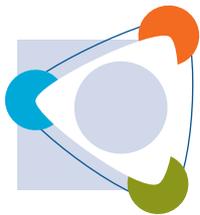
Aufgabe E1

Die Parabel $f(x) = -ax^2 + c$, $a > 0$, $c > 0$, habe den Scheitel S sowie die Nullstellen P und Q .

Die Tangente in P schneide die y -Achse in T .

Berechnen Sie $\frac{OS}{ST}$.

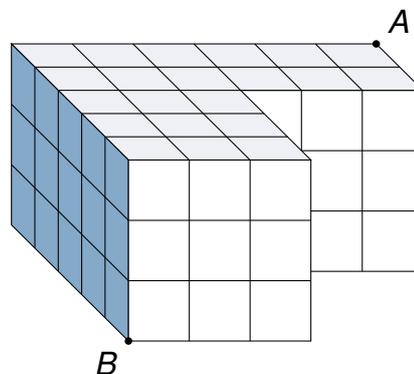




Aufgabe E2

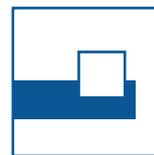
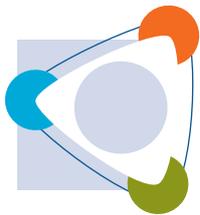
Ein L-förmiger Block wird wie abgebildet aus 63 weißen Einheitswürfeln gebildet.

- Wie groß ist die Oberfläche?
- Welchen Abstand haben A und B ?
- Bei dem L-förmigen Block wird die ganze Oberfläche rot angestrichen.



Wie viele der 63 Würfel haben genau

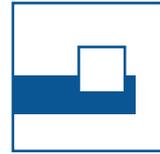
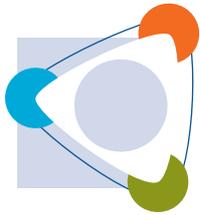
- eine rote Fläche,
 - zwei rote Flächen,
 - drei rote Flächen?
- (iv) Wie viele Würfel haben keine rote Fläche?



Aufgabe E3

Bestimmen Sie u so, dass die Summe der Kehrwerte der Lösungen der quadratischen Gleichung maximal wird.

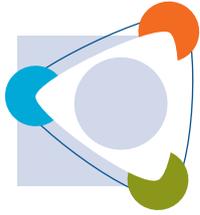
$$u^2x^2 + (u - 3)x + \frac{1}{u + 1} = 0.$$



Aufgabe E4

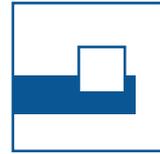
a) Zeigen Sie $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

b) Für welche x gilt $\log_4(x^2 + 2x - 8) = \log_2 x$?



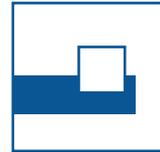
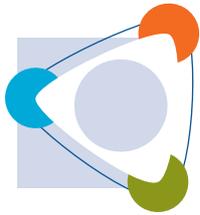
Tag der Mathematik 2017

Aufgabe H1



Aufgabe H1

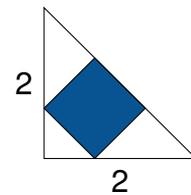
Welches ist die letzte Ziffer von 2017^{2017} ?



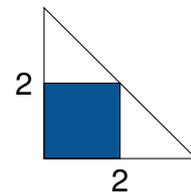
Aufgabe H2

In ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge 2) wird ein Quadrat so einbeschrieben, dass

a) eine Seite auf der Hypotenuse liegt,

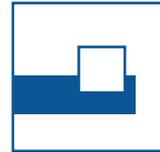
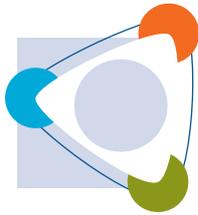


b) zwei Seiten auf den Katheten liegen.



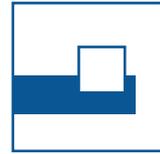
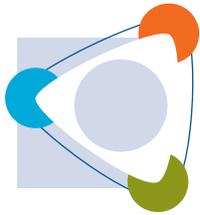
Welches Quadrat hat die größere Fläche?

Berechnen Sie beide Flächen!



Aufgabe H3

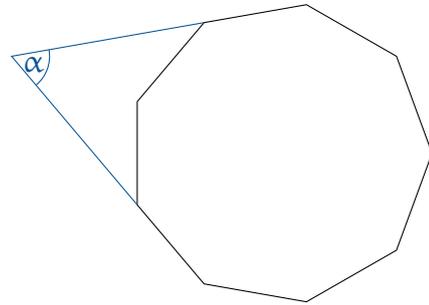
Für welche ganzen Zahlen n ist $\frac{6}{n+2}$ eine ganze Zahl?

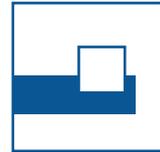
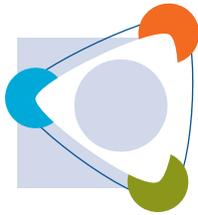


Aufgabe H4

Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck.

Wie groß ist der Winkel α ?





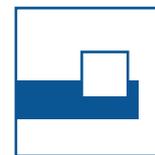
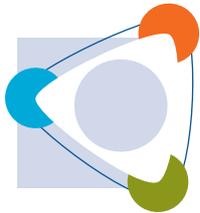
Aufgabe H5

Venedig liegt auf der geografischen Breite von 45° .

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Stadt bei der Erdrotation?

Hinweis:

Rechnen Sie mit einem Erdradius von $R = 2000\pi$ [km], $\pi^2 = 10$ und $\sqrt{2} = 1,4$.

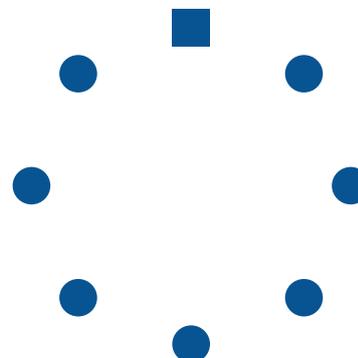


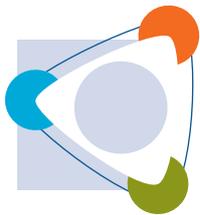
Aufgabe H6

In einem Garten liegen eine quadratische und sieben runde Steinplatten kreisförmig im Gras.

Minnie steht auf der quadratischen Platte und wirft eine Münze. Bei „Kopf“ hüpft sie im Uhrzeigersinn eine Platte weiter, bei „Zahl“ hüpft sie eine Platte entgegen dem Uhrzeigersinn.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht sie nach 8-maligem Münzwurf und Hüpfen wieder auf der quadratischen Platte?



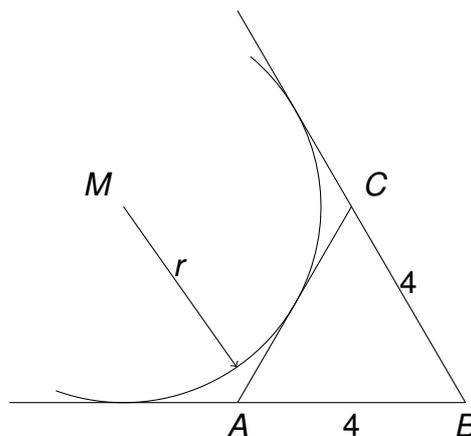


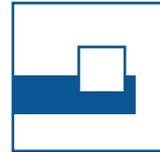
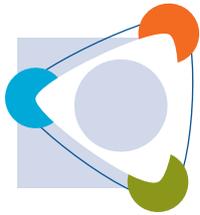
Aufgabe H7

Ein gleichseitiges Dreieck ABC habe die Seitenlänge 4 cm.

Verlängert man zwei der Seiten, lässt sich ein Kreis finden, der sowohl an den verlängerten Seiten des Dreiecks als auch an der verbleibenden Dreieckseite anliegt.

Wie groß ist der Kreisradius?



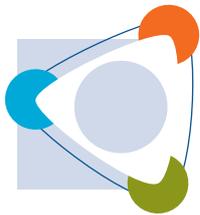


Aufgabe H8

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der beiden folgenden Geraden?

$$628x + 372y = 5512$$

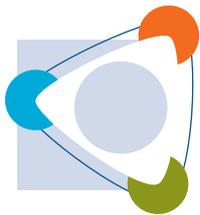
$$372x + 628y = 4488$$



Tag der Mathematik 2018

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

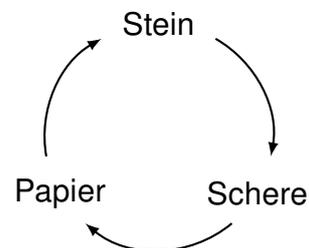
Aufgaben



Aufgabe G1

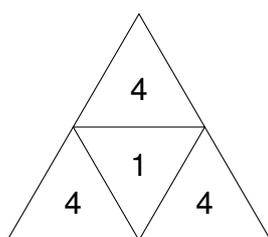
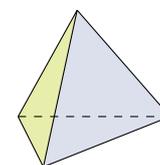
Für reelle Zahlen ist die Relation „... ist kleiner als ...“ transitiv, d.h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Das Spiel „Stein-Papier-Schere“ ist ein Beispiel für eine nicht transitive Relation. In der Abbildung bedeutet der Pfeil „... schlägt ...“.

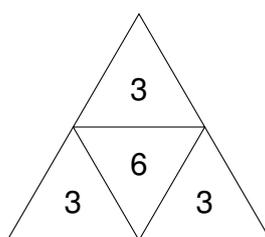


Statt einen 6-seitigen Spielwürfel zu werfen, kann man auch einen 4-seitigen Tetraeder werfen.

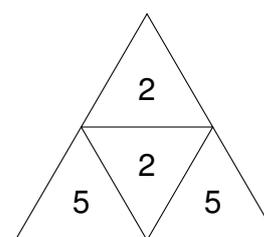
Untersuchen Sie, ob bei den folgenden drei „Tetraeder-Würfeln“ die Relation „... schlägt ...“ bzw. „... ist stärker als ...“ transitiv ist.



A

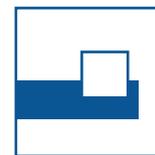
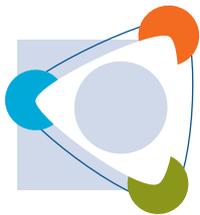


B



C

- Wählen Sie jeweils zwei Würfel aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , mit der einer der Würfel gewinnt.
- Welcher „Tetraeder-Würfel“ ist der stärkste, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

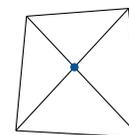


Aufgabe G2

- a) Ein Viereck hat 2 Diagonalen, ein Fünfeck 5 und ein Sechseck 9.

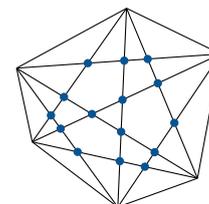
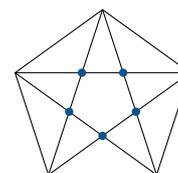
Sei $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen in einem n -Eck, also $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ und $d(6) = 9$.

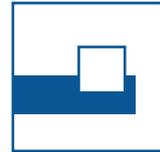
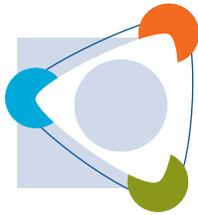
Für welches n gilt $d(n) = 104$?



- b) In einem Viereck gibt es nur einen Diagonalschnittpunkt, beim Fünfeck sind es 5 und beim Sechseck sind es maximal 15, wenn nicht 3 Diagonalen durch einen Punkt gehen. In diesem Fall müsste dieser Schnittpunkt 3-fach gezählt werden.

Sei $s(n)$ die maximale Anzahl von Diagonalschnittpunkten in einem konvexen n -Eck, also $s(4) = 1$, $s(5) = 5$ und $s(6) = 15$. Für welches n -Eck gilt $s(n) = 210$?





Aufgabe G3

In einem Koordinatensystem sei S die Menge aller Punkte $(x | y)$ für die gilt $|2x - 1| + |2x + 1| + \frac{4|y|}{\sqrt{3}} = 4$.

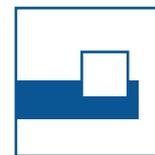
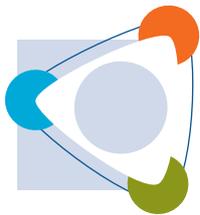
a) Zeigen Sie, dass S symmetrisch zu den Koordinatenachsen ist.

b) Bestimmen Sie S im 1. Quadranten, und zwar in den Intervallen

(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

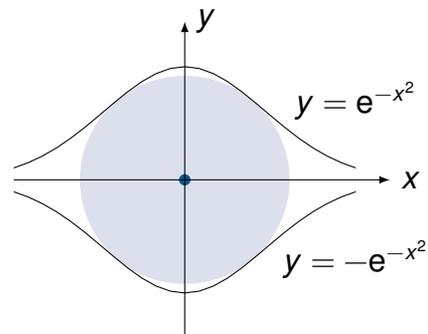
(iii) $x > 1$.

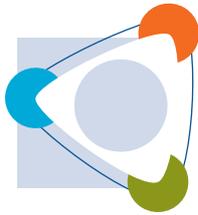


Aufgabe G4

Berechnen Sie die Fläche des größten Kreises, der zwischen die beiden Glockenkurven $y = \pm e^{-x^2}$ passt.

Hinweis: Die Ableitung von $y = e^{-ax^2}$ ist $y' = -2ax \cdot e^{-ax^2}$.

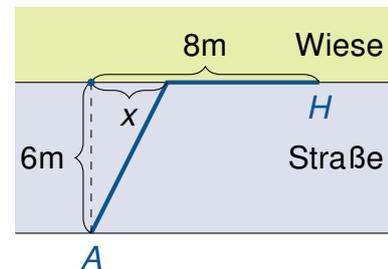




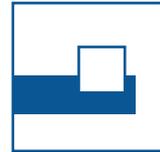
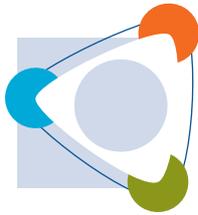
Aufgabe E1

Ein Glasfaserkabel soll von einer Anschlussstelle A zu einem Haus H verlegt werden.

Die Verlegung unter der Straße kostet 130€/m , unter der Wiese 50€/m .



- a) Wie teuer ist die Verlegung
 - (i) nur unter der Straße, d.h. direkt von A nach H ?
 - (ii) 6m unter der Straße und 8m unter der Wiese?
- b) Wie muss x gewählt werden (siehe Abb.), damit die Kosten $K(x)$ möglichst gering sind?

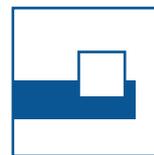
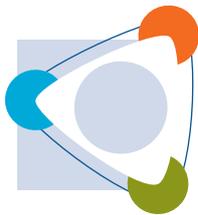


Aufgabe E2

Untersuchen Sie ob folgende Terme rational oder irrational sind:

$$\text{a) } r = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \quad \text{b) } s = \sqrt[3]{25+5\sqrt{20}} + \sqrt[3]{25-5\sqrt{20}}$$

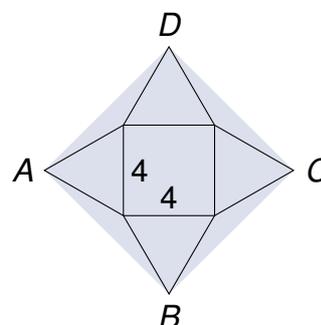
Hinweis: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$



Aufgabe E3

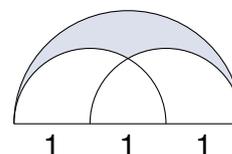
- a) Über den vier Seiten eines Quadrates (Seitenlänge 4) werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet.

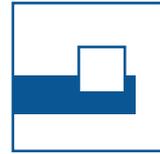
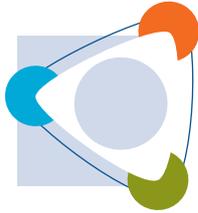
Berechnen Sie die Fläche des Vierecks $ABCD$.



- b) Zwei Halbkreise mit Radius 1 und ein Halbkreis mit Radius 1,5 begrenzen das in der Abbildung schraffierte Gebiet.

Berechnen Sie dessen Fläche.





Aufgabe E4

Eine gute Fee hatte eine Tochter namens Libussa. Diese war nicht nur sehr klug, sondern auch wunderschön, so dass sie viele Freier hatte, die um ihre Hand anhielten. Unter den vielen Freiern kamen vier in die engere Wahl, und zwar sollten sie einen Test bestehen. Den klügsten Freier wollte sie dann zum Gemahl nehmen. Libussa stellte folgende Aufgabe:

Hier in meinem Korb befinden sich Nüsse.

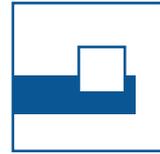
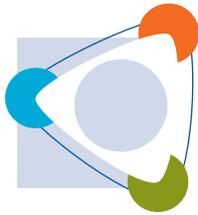
Der Erste von euch erhält zwei Drittel der Nüsse und eine mehr.

Der Zweite erhält von den verbliebenen Nüssen die Hälfte und eine weitere Nuss.

Der Dritte erhält von den verbliebenen Nüssen ebenfalls die Hälfte und eine weitere Nuss.

Der Letzte erhält von den restlichen Nüssen die Hälfte und drei Nüsse. Dann ist der Korb leer.

Sagt mir, wie viele Nüsse zu Beginn im Korb waren.



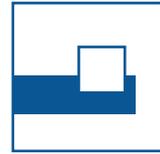
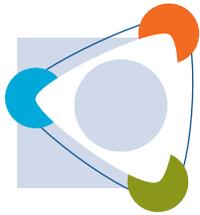
Aufgabe H1

Bei einer Folge a_1, a_2, a_3, \dots ist $a_1 = 7^2 = 49$.

Für das nächste Glied der Folge nimmt man die Quersumme von 49, addiert 1 und quadriert diese Zahl, also $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 14^2 = 196$.

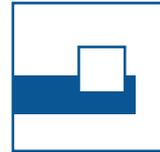
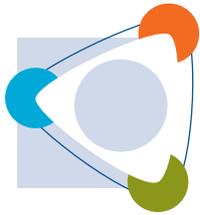
Somit ist $a_3 = (1 + 9 + 6 + 1)^2 = 17^2 = 289$.

Welche Zahl steht an der 2018. Stelle? Berechnen Sie a_{2018} .



Aufgabe H2

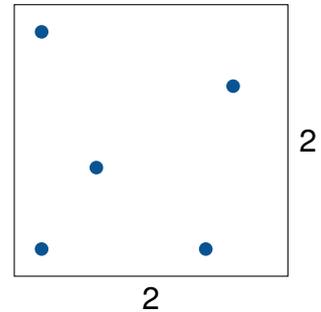
Für welches x gilt $\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 9^3 \cdot 27^4 = (3\sqrt{3})^x$?

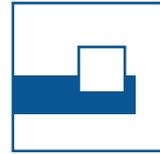
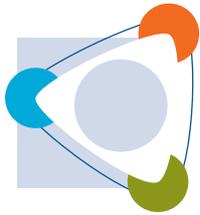


Aufgabe H3

Im Inneren eines Quadrats (Seitenlänge 2) werden zufällig fünf Punkte ausgewählt und ihre Abstände berechnet.

Zeigen Sie, dass mindestens zwei Punkte einen Abstand kleiner $\sqrt{2}$ haben.



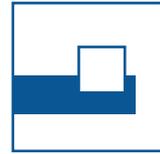
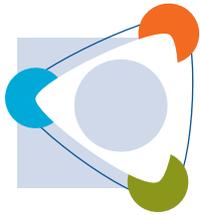


Aufgabe H4

Ein normales Buch wird zufällig aufgeschlagen.

Das Produkt der beiden sichtbaren Seitenzahlen ist 156.

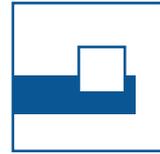
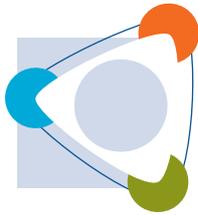
Welche Seitenzahlen sind es?



Aufgabe H5

Für welche x gilt

$$\log x^3 + 2 \log \sqrt{5} + \log \frac{1}{x^2} = \log \frac{5}{x} + \log 5x?$$

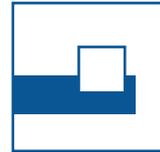
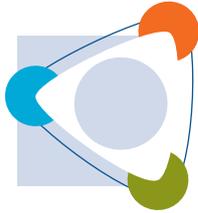


Aufgabe H6

Drei gleich schwere Steine, deren spezifische Gewichte (Dichte) sich wie $3 : 5 : 6$ verhalten, haben zusammen ein Volumen von 525cm^3 .

Berechnen Sie die Volumen der einzelnen Steine.

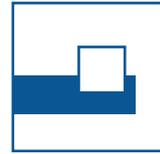
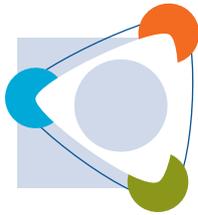
Hinweis: $\text{Masse} = \text{Volumen} \cdot \text{spez. Gewicht}$



Aufgabe H7

Aus einer Gruppe von drei Männern (M) und zwei Frauen (F) werden drei Personen zufällig für einen 3-er Ausschuss ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p , dass beide Frauen in dem Ausschuss sind?



Aufgabe H8

In der Fußball-Bundesliga mehren sich die Stimmen, dass anstelle des Videobeweises besser ein zweiter, gleichberechtigter Schiedsrichter eingesetzt werden sollte.

Im Folgenden werden drei Annahmen gemacht:

- (i) Beide Schiedsrichter treffen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die „richtige“ Entscheidung.
- (ii) Sind beide bei der Beurteilung einer Spielsituation der gleichen Meinung, so gilt diese.
- (iii) Sind die beiden jedoch unterschiedlicher Meinung, werfen sie eine symmetrische Münze und entscheiden dadurch, welche Meinung „richtig“ ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Verfahren die „richtige“ Entscheidung getroffen wird.

Hinweis: Bei allen Entscheidungen zu Regelverstößen handele es sich um ja/nein-Entscheidungen, wie z.B. Foul/kein Foul oder Abseits/kein Abseits.