Tag der Mathematik 2009

Gruppenwettbewerb

Einzelwettbewerb

Mathematische Hürden

Lösungen

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.

Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

Aufgabe G1 (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

Welcher Punkt P des Funktionsgraphen liegt dem Koordinatenursprung am nächsten?

Lösung:

1.Möglichkeit

Für den Abstand d von $P(x \mid x^2 - 3x + 3)$ und $(0 \mid 0)$ gilt:

$$d^2 = x^2 + \left(x^2 - 3x + 3\right)^2 = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$$

Da mit d auch d^2 minimal wird, muss auch die Ableitung von d^2 null sein:
Aus $0 = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18 = 2\underbrace{\left(2x^2 - 7x + 9\right)}_{>0}(x - 1)$

folgt $x = 1$.

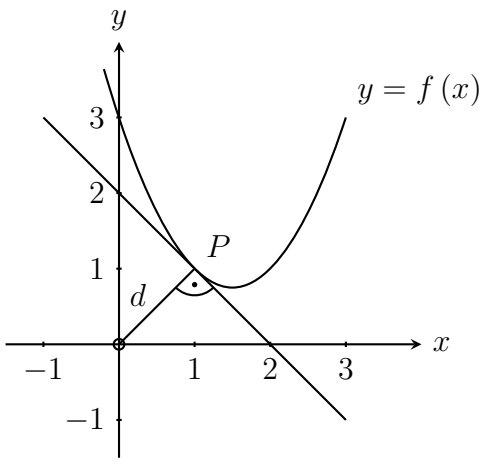
Da die zweite Ableitung $12x^2 - 36x + 32$ für $x = 1$ positiv ist, liegt ein Minimum vor.
Also ist $P(1 \mid 1)$ der gesuchte Punkt.

2.Möglichkeit

Die Steigung der Tangente im Punkt $P(x \mid x^2 - 3x + 3)$ ist $2x - 3$. Die Steigung der Geraden durch $(0 \mid 0)$ und P ist $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x}$.

Die beiden Geraden müssen senkrecht aufeinander stehen:

Aus $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \cdot (2x - 3) = -1$ folgt $2x^3 - 9x^2 + 16x - 9 = 0$.
Wegen $2x^3 - 9x^2 + 16x - 9 = \underbrace{\left(2x^2 - 7x + 9\right)}_{>0} \cdot (x - 1) = 0$ folgt $x = 1$ und $P(1 \mid 1)$.



Aufgabe G2 (8 Punkte)

Der Goldene Schnitt $\varphi := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1,618033989\ldots$
hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass der Kehrwert $\frac{1}{\varphi} = 0,618033989\ldots$
die gleichen Nachkommastellen hat.

Finden Sie eine andere Zahl $x > 1$ mit dieser Eigenschaft.

Lösung:

Sie x eine Zahl mit dieser Eigenschaft und sei n der ganzzahlige Teil von x.
Dann gilt $x - n = \frac{1}{x}$.

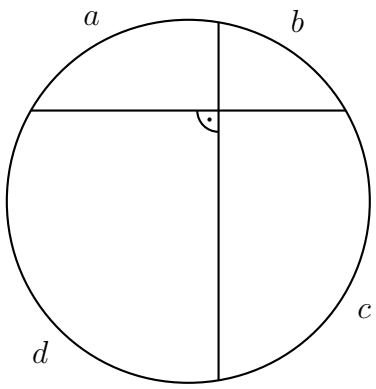
Hieraus folgt $x = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2+4}\right)$.

Für $n = 1$ erhält man den Goldenen Schnitt.

Für $n = 2$ ist $x = 1 + \sqrt{2}$ eine weitere Zahl mit der gesuchten Eigenschaft.

Aufgabe G3 (8 Punkte)

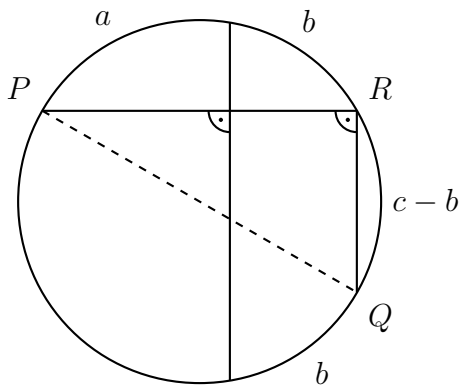
Ein Kreis werde durch zwei zueinander senkrechte Sehnen in vier Kreisbögen a, b, c und d geteilt.
Zeigen Sie: $a + c = b + d$.



Lösung:

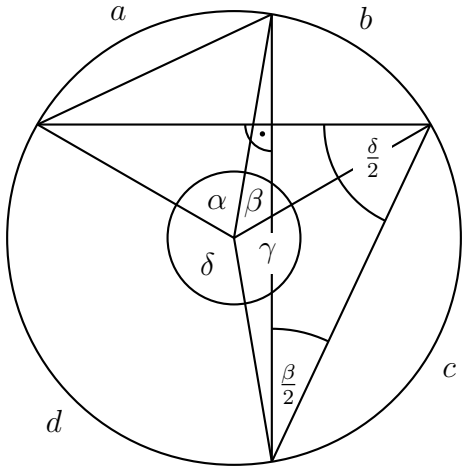
1.Möglichkeit

Verschiebt man eine Sehne parallel nach R, so ergibt sich das rechtwinklige Dreieck PQR. Da PQ Kreisdurchmesser ist, muss $a + b + (c - b) = a + c$ der halbe Kreisumfang sein.



2.Möglichkeit

Seien α, β, γ und δ die zu den Kreisbögen gehörenden Mittelpunktswinkel.
Aus $\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} = 90\,^\circ$
folgt $\beta + \delta = 180\,^\circ$ und somit $\alpha + \gamma = 180\,^\circ$.
Also sind $a + c$ und $b + d$ halbe Kreisumfänge.



Aufgabe G4 (8 Punkte)

Eine natürliche Zahl n erfüllt die folgenden Bedingungen (Stellen werden von links gezählt):

(1) n hat im Zweiersystem 10 Stellen.

(2) n hat im Fünfersystem 4 Stellen.

(3) Schreibt man n im Zehnersystem, so steht an der letzten Stelle die Ziffer 2.

(4) Schreibt man n im Dreiersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 1.

(5) Schreibt man n im Vierersystem, so steht an der zweiten Stelle die Ziffer 0.

Berechnen Sie n.

Lösung:

Aus (1): $2^9 \leq n \leq 2^{10} - 1$

und (2): $5^3 \leq n \leq 5^4 - 1$

folgt $512 \leq n \leq 624$.

Aus (3) folgt $n = 512 + 10 \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$.

Aus (4): $512 + 10 \cdot k - 2 \cdot 3^5 > 3^4$ folgt $10 \cdot k > 55$, also $k \geq 6$.

Aus (5): $512 + 10 \cdot k - 2 \cdot 4^4 < 4^3$ folgt $10 \cdot k < 64$, also $k \leq 6$.

Also ist $k = 6$ und

$$\begin{aligned} n &= 572 \\ &= (1000111100)_2 \\ &= (210012)_3 \\ &= (20330)_4 \\ &= (4242)_5 \end{aligned}$$

Aufgabe E1 (8 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$.
Für welche c hat f eine doppelte Nullstelle?

Hinweis: Wenn a eine doppelte Nullstelle von f ist, gilt $f(x) = (x-a)^2(x-b)$; dies ist gleichbedeutend mit $f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$.

Lösung:

1.Möglichkeit

Vergleicht man $(x-a)^2(x-b) = x^3 - (2a+b)x^2 + (2ab+a^2)x - a^2b$ mit $x^3 - x^2 - x + c$, so folgt $2a + b = 1$ und $2ab + a^2 = -1$. Hieraus folgt $3a^2 - 2a - 1 = 0$ und somit $a_1 = 1$ und $a_2 = -\frac{1}{3}$.
Mit $b_1 = 1 - 2a_1 = -1$ und $b_2 = 1 - 2a_2 = \frac{5}{3}$ folgt wegen $c = -a^2b$ entweder $c_1 = 1$ oder $c_2 = -\frac{5}{27}$.

2.Möglichkeit

Aus $0 = f'(a) = 3a^2 - 2a - 1 = (a-1)(3a+1)$
folgt $a = 1$ oder $a = -\frac{1}{3}$.

Aus $0 = f(1) = -1 + c$ folgt $c = 1$.

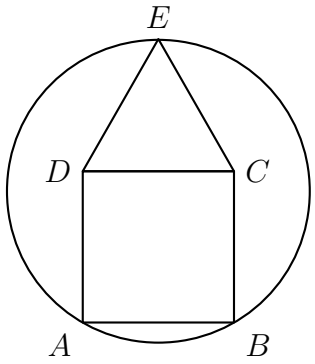
Aus $0 = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27} + c$ folgt $c = -\frac{5}{27}$.

$$\text{Also ist } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$$
$$\text{oder } f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{5}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2\left(x - \frac{5}{3}\right)$$

Aufgabe E2 (8 Punkte)

Gegeben ist das Einheitsquadrat $ABCD$ und das gleichseitige Dreieck DCE.

Berechnen Sie den Radius r des Kreises durch A, B und E.



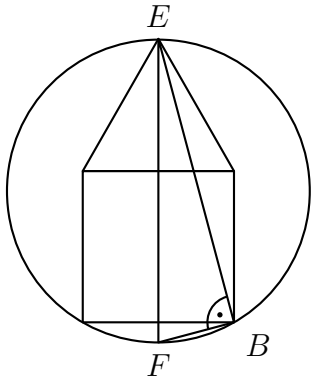
Lösung:

1.Möglichkeit

EF ist ein Kreisdurchmesser.
Damit ist das Dreieck EFB rechtwinklig mit

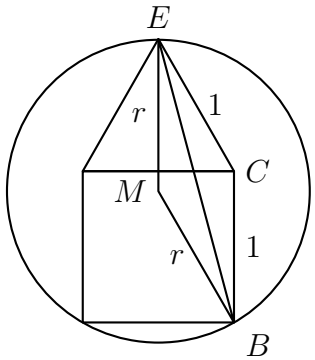
$$EB^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}\ .$$

Aus dem Kathetensatz $2 + \sqrt{3} = 2r \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
bzw. dem Höhensatz $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2r - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
folgt $r = 1$.



2.Möglichkeit

Sei M der Kreismittelpunkt.
Wegen $\sphericalangle ECB = 60\,° + 90\,° = 150\,°$
sind im gleichschenkligen Dreieck EBC die Basiswinkel $15\,°$.
Wegen $\sphericalangle MEB = \frac{1}{2} \cdot 60\,° - \sphericalangle BEC = 15\,°$ sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke BCE und BEM kongruent und somit gilt $r = 1$.



Aufgabe E3 (8 Punkte)

Zeichnen Sie in der x-y-Ebene alle Punkte $(x \,|\, y)$ für die gilt:

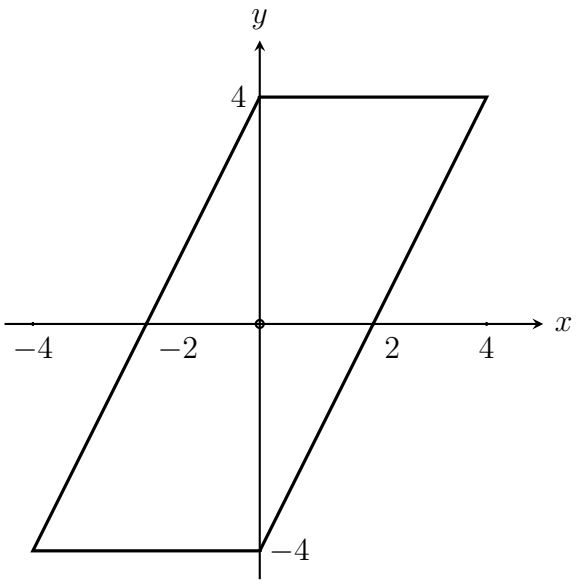
$$|x| + |x - y| = 4 \ .$$

Lösung:

Mit $(x \,|\, y)$ gehört auch $(-x \,|\, -y)$ zur gesuchten Menge, also ist sie punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
Es genügt also, die Punktmenge für die Halbebene $x \geq 0$ zu bestimmen.

Fallunterscheidung:
Aus $x \geq y$ folgt $x + x - y = 4$, also $2x - y = 4$.
Aus $x < y$ folgt $x - (x - y) = 4$, also $y = 4$.

Die gesuchte Menge besteht also aus vier Strecken, die ein Parallelogramm bilden.



Aufgabe H1 (3 Punkte)

Ein Buch hat 250 Seiten.

a) Wie viele Ziffern braucht man, um die Seiten von 1 bis 250 durchzunummerieren?

b) Wie oft kommt dabei die Ziffer 2 vor?

Lösung:

a) Man zählt die Ziffern für einstellige, zweistellige und dreistellige Seitenzahlen:

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 151 \cdot 3 = 642$$

b) Man zählt, wie oft die 2 an der 1., 2. und 3. Stelle der Seitenzahlen vorkommt:

Hunderter	$200, 201, \ldots, 205$	51
Zehner	$20, 21, \ldots, 29$	$10 \cdot 3$
Einer	$2, 12, 22, 32, 42, \ldots, 92$	$10 + 10 + 5$

Summe 106

Aufgabe H2 (3 Punkte)

Es werden n kleine Metallkugeln mit 3 mm Durchmesser geschmolzen und daraus eine Kugel mit einem Durchmesser von ungefähr 10 mm geformt.

Wie groß ist n?

Lösung:

Aus

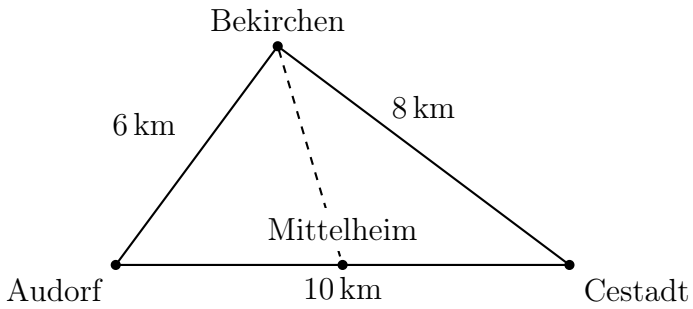
$$n \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \approx \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^3$$

folgt

$$n \approx \frac{1000}{27} = 37\frac{1}{27} \approx 37$$

Aufgabe H3 (3 Punkte)

Familie Meyer plant eine Wanderung von Audorf über Bekirchen nach Cestadt und zurück nach Audorf (siehe Abb.), d.h. der Rundweg wäre
$6\,\text{km} + 8\,\text{km} + 10\,\text{km} = 24\,\text{km}$ lang.



Nachdem die Familie in Bekirchen ankam, waren die Kinder schon recht müde und die Wetterverhältnisse so ungünstig, dass die Familie beschloss, die Rundwanderung abzukürzen, und zwar über einen Wanderpfad nach Mittelheim, das genau zwischen Audorf und Cestadt liegt.

Wie viele Kilometer ist die Familie Meyer gewandert?

Lösung:

Wegen $6^2 + 8^2 = 10^2$ verläuft der Rundwanderweg längs eines rechtwinkligen Dreiecks. Also ist Mittelheim von Bekirchen und von Audorf jeweils 5 km entfernt. Also war die verkürzte Wanderung $6\,\text{km} + 2 \cdot 5\,\text{km} = 16\,\text{km}$ lang.

Aufgabe H4 (3 Punkte)

Ein Auto mit fünf Reifen (vier Straßenreifen und einem Ersatzreifen) fährt 30 000 km. Alle fünf Reifen sollen gleichmäßig abgefahren werden.

Wie viele Kilometer wird jeder Reifen gefahren?

Lösung:

Die Reifen seien von 1 bis 5 durchnummeriert.
Dann werden folgende mögliche Kombinationen jeweils gleich lang gefahren:
$1234, 2345, 3451, 4512, 5123$.

Reifen:	1	2	3	4	5
6000 km	x	x	x	x	
6000 km		x	x	x	x
6000 km	x		x	x	x
6000 km	x	x		x	x
6000 km	x	x	x		x

Jeder Reifen kommt viermal auf die Straße, also fährt jeder 24 000 km.

Aufgabe H5 (3 Punkte)

Der Bruch $\frac{37}{13}$ kann in der Form $2+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$ geschrieben werden.

Berechnen Sie a, b und c.

Lösung:

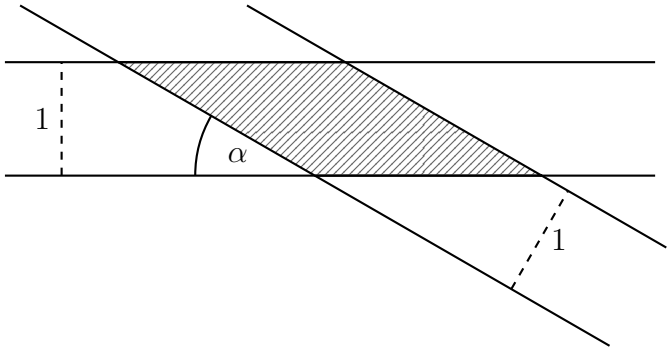
Aus $\frac{37}{13}=2+\frac{11}{13}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}$

folgt $a=1, b=5$ und $c=2$.

Aufgabe H6 (3 Punkte)

Zwei Streifen der Breite 1 überschneiden sich in einem Winkel α.

Wie groß ist die Fläche der Überlappung im Abhängigkeit von α?



Lösung:

Die gemeinsame Fläche ist eine Raute mit der Höhe 1 und der Seitenlänge $\frac{1}{\sin\alpha}$. Also ist die Fläche $\frac{1}{\sin\alpha}$.

Aufgabe H7 (3 Punkte)

Für $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt $f(3) = f(5) = 0$ und $f'(6) = 12$.

Berechnen Sie a, b und c.

Lösung:

1.Möglichkeit

Es gilt $f(3) = 9a + 3b + c = 0, f(5) = 25a + 5b + c = 0$ und $f'(6) = 12a + b = 12$.
Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $16a + 2b = 0$.
Hieraus folgt $a = 3, b = 24, c = 45$.

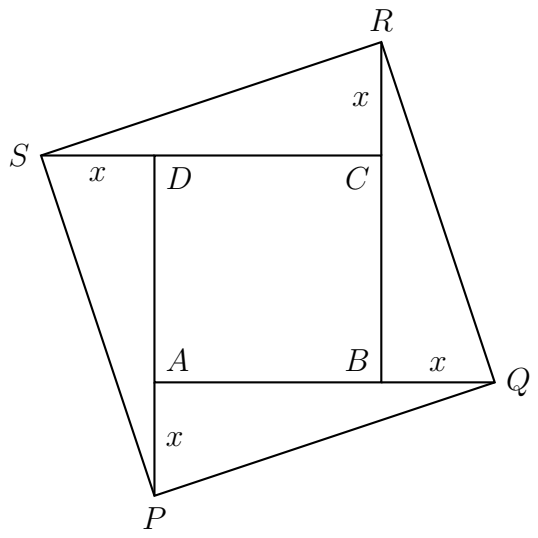
2.Möglichkeit

Aus $f(x) = a(x-3)(x-5) = a(x^2 - 8x + 15)$ folgt $b = 8a$ und $c = 15a$.

Aus $f'(x) = a(2x - 8) = 12$ für $x = 6$ folgt $a = 3$ und somit $b = 24, c = 45$.

Aufgabe H8 (3 Punkte)

Um welche Strecke x müssen die Seiten des Einheitsquadrates $ABCD$ verlängert werden, damit die Fläche des Quadrates $PQRS$ doppelt so groß ist wie die von $ABCD$?



Lösung:

Es gilt $PQ^2 = x^2 + (1+x)^2 = 2$ und $\frac{1}{2}x\,(x+1) = \frac{1}{4}$.

Beide Gleichungen führen auf $x^2 + x - \dfrac{1}{2} = 0$ und es folgt (wegen $x > 0$)

$x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 0,37.$