universität ulm

Vorlesungsskript

PHYS3200
Einführung in die Kern-, Teilchen- und Astrophysik
Bachelor Physik
Bachelor Wirtschaftsphysik
Master Lehramt für Gymnasium

Othmar Marti
Institut für Experimentelle Physik
Universität Ulm

veröffentlicht unter CC BY SA Lizenzinformationen

25. April 2022

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Astronomie erhebt aus diesen Finsternissen und aus dieser trüben Luft und lädt ein, in eine höhere, von strahlendem Licht erfüllte Region zu schauen.

Durch die Naturwissenschaft, in der Tat, kennen wir den Ursprung und die darauf folgenden Veränderungen aller Dinge, der belebten wie auch der unbelebten. Wir können das „Warum“ vieler Phänomene, die dem Volk als Wunder erscheinen, benennen.

Pier Paolo Vergerio 1370-1444, zitiert nach [Roe18]

Zweifel ist der Weisheit Anfang.

René Descartes, 1596-1650, französischer Mathematiker und Philosoph

Mit leerem Kopf nickt es sich leichter!

Zarko Petane, 1929-2014, slowenischer Schriftsteller

Mehr Erklärung bitte und weniger Verstehen! Mehr Neugier und weniger Einverständnis. Nicken bildet nicht.

Alexander Kissler, am 22. 9. 2014 in Deutschlandradio Kultur

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **17**
1.1. Lizenzinformationen . . . 17
1.2. Dank . . . 18
1.3. Vorschau auf den Inhalt . . . 18
1.3.1. Kernphysik . . . 18
1.3.2. Teilchenphysik . . . 19
1.3.3. Astrophysik . . . 19

I. Kernphysik **21**

2. Instrumente der Kern- und Teilchenphysik **23**
2.1. Teilchenbeschleuniger . . . 23
2.1.1. Relativistische Bewegung . . . 23
2.1.2. Wirkungsgrad bei ruhendem Target . . . 28
2.1.3. Funktionsweise . . . 30
2.1.4. Linearbeschleuniger . . . 31
2.1.5. Zyklotron . . . 33
2.1.6. Betatron . . . 35
2.1.7. Synchrotron . . . 36
2.1.7.1. Vertikale Stabilisierung . . . 37
2.1.7.2. Radiale Stabilisierung . . . 38
2.1.7.3. Starke Fokussierung . . . 38
2.1.7.4. Synchrotronschwingungen und Energiegewinn . . . 41
2.1.7.5. Steuerung der Magnetfelder . . . 42
2.1.8. Beispiele von Beschleunigern . . . 43
2.2. Detektoren . . . 44
2.2.1. Ionisationskammer . . . 44
2.2.2. Szintillatoren . . . 46
2.2.3. Halbleiterdetektoren . . . 48
2.2.4. Čerenkov-Detektoren . . . 48
2.2.5. Spurendetektoren . . . 50
2.2.5.1. Photoplatten . . . 51
2.2.5.2. Nebelkammern . . . 51
2.2.5.3. Blasenkammern . . . 51
2.2.5.4. Streamerkammern . . . 52
2.2.5.5. Mehrdraht-Funkenkammern . . . 52
2.2.5.6. Anwendung: Zerfall von Pionen . . . 53

3. Fermionen und Bosonen **55**
3.1. Spin und magnetisches Moment . . . 55

3.2. Dirac-Theorie . . . 58
3.2.1. Basiszustände in der zweiten Quantisierung . . . 61
3.2.2. Freie Teilchen . . . 62
3.2.3. Teilchen mit Wechselwirkungen . . . 63

4. Streuexperimente **65**
4.1. Röntgenstrahlung und Rayleigh-Streuung . . . 65
4.2. Streumethoden . . . 66
4.3. Stossprozesse . . . 71
4.3.1. Elektrodynamik und Vierervektoren . . . 71
4.3.2. Elektron-Elektron-Streuung . . . 72
4.3.3. Quantenmechanische Behandlung . . . 73
4.3.3.1. Differenzieller Streuquerschnitt . . . 73
4.3.3.2. Streuung im Coulomb-Potential . . . 74
4.3.3.3. Mehrere Streuzentren . . . 75
4.3.3.4. Hofstadter-Streuung . . . 76
4.3.3.5. Kohärente Überlagerung . . . 77
4.4. Compton-Effekt . . . 80
4.5. Paarbildung . . . 81

5. Wechselwirkung von Teilchen mit Materie **85**
5.1. Photoeffekt . . . 85
5.2. Verluste in Materie . . . 85
5.3. Neutronen . . . 86

6. Atome und Kerne **89**
6.1. Atomkerne . . . 89
6.1.1. Begriffe . . . 89
6.1.2. Rutherfords Atommodell . . . 89
6.1.3. Bestimmung des Kernradius . . . 90
6.1.4. Ladungsverteilung im Kern . . . 94
6.1.4.1. Iterative Methoden . . . 95
6.1.5. Beugung an Kernen . . . 95
6.1.5.1. Alternative Methoden . . . 97
6.2. Isospin-Formalismus . . . 97
6.2.1. Pauli-Prinzip . . . 99
6.3. Parität . . . 100
6.4. Nukleon-Nukleon-Streuung . . . 101
6.4.1. Spinabhängigkeit . . . 103
6.4.2. Ladungsabhängigkeit . . . 104
6.5. Kernmodelle . . . 105
6.5.1. Massendichteverteilung und Masse . . . 105
6.5.2. Bausteine . . . 106
6.5.3. Tröpfchenmodell . . . 107
6.5.3.1. Bethe-Weizsäcker-Gleichung . . . 109
6.5.3.2. Gesamtmasse von Kernen und Atomen . . . 110
6.5.4. Einteilchenmodelle . . . 110
6.5.4.1. Würfelförmiges Kastenpotential . . . 110
6.5.4.2. Fermigas-Modell . . . 112

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

6.5.4.3. Sphärisches Kastenpotential . . . 114
6.5.4.4. Harmonischer Oszillator . . . 116
6.5.4.5. Schalenmodell . . . 116
6.5.5. Mehrteilchenmodelle . . . 123
6.5.6. Vergleich der Kernmodelle . . . 124
6.5.7. Bindungsenergien . . . 124
6.5.8. Rotation und Schwingung von Kernen . . . 127
6.5.9. Drehimpuls, Spin, Statistik . . . 131
6.5.9.1. Kerndrehimpulse . . . 131
6.5.9.2. Rabi-Methode . . . 132
6.5.9.3. Magnetische Momente von Nukleonen . . . 133
6.5.10. Momente von Kernen . . . 135
6.5.10.1. Resonanz-Spektroskopie, kernmagnetische Momente 136
6.5.10.2. Elektrisches Dipolmoment . . . 137
6.5.10.3. Elektrisches Quadrupolmoment . . . 137
6.5.10.4. Isotopeneffekt in der optischen Spektroskopie . . . 138
6.5.11. Kollektive Anregungen . . . 138
6.6. Kernkräfte und Kernmodelle . . . 138
6.6.1. Deuteron . . . 138
6.6.1.1. Abschätzung des n-p-Abstandes . . . 139
6.6.2. Mesonen-Austauschmodell . . . 140

7. Radioaktiver Zerfall **143**
7.1. Stabilitätskriterien . . . 145
7.1.1. Mattauch'sche Isobarenregeln . . . 145
7.2. Zerfallsgesetze . . . 146
7.2.1. Statistik der Zerfälle . . . 146
7.2.2. Natürlich vorkommende radioaktive Kerne . . . 148
7.2.3. Goldene Regel und Lebensdauer . . . 148

8. Radioaktive Strahlung **153**
8.1. Strahlenquellen und Strahlungsarten . . . 153
8.1.1. alpha-Strahlung . . . 153
8.1.1.1. Geiger-Nuttall-Geraden bei alpha-Strahlern . . . 155
8.1.2. gamma-Strahlung . . . 160
8.1.2.1. Multipol-Übergänge . . . 161
8.1.2.2. Innere Konversion . . . 165
8.1.2.3. Innere Paarbildung . . . 165
8.1.3. Isomere . . . 166
8.1.4. beta-Strahlung . . . 167
8.1.4.1. Doppelzerfälle . . . 167
8.1.4.2. beta-Zerfall und Positronenemission . . . 170
8.1.4.3. Fermi-Theorie des beta-Zerfalls . . . 172
8.1.4.4. K-Einfang . . . 174
8.1.4.5. Energiebilanzen und Zerfallstypen . . . 175
8.1.5. Zerfallsketten . . . 176

9. Mensch und Strahlung **179**
9.1. Wechselwirkung von Strahlung und Gewebe . . . 182
9.1.1. Dosimeter . . . 182
9.1.1.1. Füllhalter-Dosimeter . . . 182
9.1.1.2. Elektronisches Dosimeter . . . 183
9.1.2. Jod . . . 184
9.1.3. PET: Positronen-Emissions-Tomographie . . . 185
9.2. Regulierungen . . . 185
9.3. Anwendungen . . . 186
9.3.1. Suche nach Spurenelementen . . . 186
9.3.2. Altersbestimmung . . . 187
9.3.2.1. C-14-Methode . . . 187
9.3.2.2. Alter von Gesteinen . . . 188

10. Kernreaktionen **189**
10.1. Grundlagen . . . 189
10.1.1. Kategorien von Kernreaktionen . . . 191
10.1.1.1. Inelastische Streuung . . . 191
10.1.1.2. Reaktive Streuung . . . 192
10.1.1.3. Induzierte Spaltung . . . 192
10.2. Stossinduzierte Kernspaltung . . . 193
10.2.1. Stossinduzierte Spaltung leichter Kerne . . . 194
10.2.2. Stossinduzierte Kernreaktionen mit alpha-Teilchen . . . 194
10.2.2.1. (alpha,p)-Reaktion . . . 194
10.2.2.2. (alpha,n)-Reaktion . . . 195
10.2.3. Stossinduzierte Radioaktivität . . . 196
10.2.3.1. (n,gamma)-Reaktionen . . . 196
10.2.3.2. Aktivierung und Aktivität . . . 196
10.2.4. Schwelle . . . 197
10.2.5. Abweichung von Kugelgestalt: Bethe-Weizsäcker-Modell . . . 200
10.2.6. Reaktionsquerschnitt . . . 202
10.2.7. Massenverteilung der Spaltprodukte . . . 202
10.2.8. Energieausbeute . . . 203
10.3. Erhaltungssätze . . . 203
10.3.1. Paritätserhaltung . . . 204

11. Kernenergie **207**
11.1. Kernspaltung . . . 207
11.1.1. Wie viel Uran braucht es? . . . 212
11.1.2. Steuerung durch verzögerte Neutronen . . . 214
11.1.3. Reaktoren . . . 214
11.2. Kernfusion . . . 219
11.2.1. Fusionsreaktoren . . . 220
11.2.1.1. Magnetfelder in einem Tokamak . . . 222
11.2.2. Weitere Konzepte für Fusionsreaktoren . . . 224
11.2.3. Roadmap für Fusionsreaktoren . . . 224
11.2.4. Transurane . . . 225
11.3. Das Abfallproblem . . . 225

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

II. Teilchenphysik 229

12. Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung 231
12.1. Photon . . . 232
12.2. Elektron . . . 233
12.3. Feynman-Diagramme . . . 234
12.4. Zweite Quantisierung, Fortsetzung . . . 237
12.5. Virtuelle Teilchen . . . 241
12.6. Rechnen mit Feynman-Diagrammen . . . 243
12.7. Weitere Leptonenfamilien . . . 246
12.7.1. Myonen . . . 246
12.7.2. Tau . . . 247
12.7.3. Symmetrien der Leptonenfamilien . . . 247

13. Starke Wechselwirkung 251
13.1. Hadronen . . . 251
13.1.1. Pion . . . 251
13.1.2. Delta und rho . . . 253
13.1.3. Isospin, Baryonenzahl und Ladung . . . 254
13.2. Symmetrien . . . 256
13.2.1. Lie-Gruppen und -Algebren . . . 256
13.2.1.1. Darstellung einer Gruppe . . . 256
13.2.1.2. Definition einer Lie-Algebra . . . 257
13.2.1.3. Lie-Algebren und Darstellungen . . . 259
13.2.1.4. Isomorphismen . . . 260
13.2.1.5. Isomorphismen: unendlichdim. Funktionenraum . . . 261
13.2.2. Translationen . . . 261
13.2.3. Drehimpulse in 3 D - nicht Abelsche Lie-Gruppen . . . 262
13.2.4. Spinvektoren (magnetisches Moment) und Spinzustand . . . 265
13.2.5. Mesonen . . . 266
13.3. Quarks . . . 266
13.3.1. Experimentelle Hinweise . . . 268
13.3.2. Hadronen und Quarks . . . 269
13.3.3. Warum gibt es drei Quarks? . . . 272
13.3.3.1. Spin . . . 272
13.3.4. Austauschteilchen . . . 275
13.3.5. Charm . . . 276
13.3.6. Quarks und Farbladungen . . . 278
13.4. Quarkfamilien und -eigenschaften . . . 279

14. Schwache Wechselwirkung 283
14.1. Parität . . . 284
14.1.1. Definition . . . 286
14.1.1.1. Beispiel elektrisches Dipolmoment . . . 287
14.1.2. Messung . . . 288
14.1.3. Universalprinzip bei der Umwandlung von Teilchen . . . 290
14.2. Ladungskonjugation (C-Symmetrie) . . . 291
14.3. CP-Symmetrie . . . 291
14.4. Zeitumkehr (T-Symmetrie) . . . 292

14.5. CPT-Symmetrie . . . 294
14.5.1. K0-Mesonen . . . 294
14.6. G-Symmetrie . . . 297
14.7. Angabe des Symmetriezustandes . . . 298
14.8. Antimaterie . . . 298
14.9. Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung . . . 299
14.9.1. beta-Zerfall und Streuung von Neutrinos . . . 301
14.9.2. Reelle W- und Z-Bosonen . . . 302

15. Standardmodell **305**
15.1. Quarks und Leptonen . . . 308
15.2. Higgs-Feld . . . 310
15.3. Fazit der Teilchenphysik . . . 313

III. Astrophysik **319**

16. Astronomische Beobachtungen **321**
16.1. Geräte . . . 321
16.1.1. Teleskope . . . 321
16.1.1.1. Optische Teleskope . . . 321
16.1.1.2. Radioteleskope . . . 329
16.1.1.3. Röntgenteleskope . . . 331
16.1.1.4. Auflösung eines einzelnen Teleskopes . . . 334
16.1.1.5. Auflösung interferometrisch gekoppelter Teleskope . 336
16.1.1.6. Aberration . . . 338
16.1.2. Spektrometer . . . 339
16.1.2.1. Gitterspektrometer . . . 339
16.1.2.2. Échelle-Spektrometer . . . 346
16.1.3. Interferometer . . . 347
16.1.3.1. Mach-Zehnder-Interferometer . . . 347
16.1.3.2. Michelson-Interferometer . . . 348
16.1.3.3. Sagnac-Interferometer . . . 351
16.1.3.4. Fabry-Perot-Interferometer . . . 353
16.1.3.5. Michelson-Sterninterferometer . . . 361
16.1.3.6. Hanbury Brown und Twiss-Interferometer . . . 362
16.1.3.7. Interferometer als Spektrometer . . . 363
16.2. Koordinatensysteme . . . 365
16.2.1. Horizontsystem . . . 366
16.2.2. Äquatorsystem . . . 366
16.2.3. Ekliptikales System . . . 367
16.2.4. Galaktisches System . . . 367
16.2.5. Galaktozentrisches System . . . 368
16.2.6. Längenmasse in der Astrophysik . . . 368
16.2.6.1. Astronomische Einheit . . . 368
16.2.6.2. Lichtjahr . . . 369
16.2.6.3. Parsec . . . 369

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.3. Störeinflüsse . . . 370
16.3.1. Seeing . . . 370
16.3.2. Guide Stars . . . 371
16.3.3. Brechung in der Atmosphäre . . . 371
16.4. Distanzmessung mit optischen Methoden . . . 372
16.4.1. Triangulation . . . 372
16.4.2. Magnituden . . . 373
16.5. Spektroskopische Distanzmessung . . . 375
16.5.1. Cepheiden . . . 375
16.5.2. Supernovae Typ Ia . . . 377
16.5.3. Doppelsterne . . . 378
16.5.4. Rotverschiebung . . . 379

17. Himmelsmechanik und unser Sonnensystem 381
17.1. Geschichte . . . 381
17.1.1. Die Griechen . . . 381
17.1.2. Kopernikus . . . 384
17.1.3. Kepler . . . 385
17.1.4. Newton . . . 386
17.2. Virialtheorem . . . 388
17.3. Keplersche Gesetze: Bestimmung der Zentralmasse . . . 390
17.3.1. Umlaufszeiten . . . 392
17.3.2. Massenbestimmung des Zentralkörpers . . . 392
17.4. Erdähnliche Planeten und ihre Umgebung . . . 394
17.4.1. Merkur . . . 394
17.4.2. Venus . . . 396
17.4.3. Erde . . . 397
17.4.3.1. Schwankungen der Bahnparameter der Erde . . . 398
17.4.3.2. Energieflüsse in der Atmosphäre, Treibhauseffekt . 400
17.4.3.3. Temperaturverteilung in der Atmosphäre . . . 404
17.4.3.4. Erdinneres . . . 406
17.4.3.5. Erdmagnetfeld . . . 407
17.4.3.6. Auswirkung von Einschlägen von Himmelskörpern . 409
17.4.3.7. Mond . . . 411
17.4.4. Mars . . . 411
17.5. Riesenplaneten und ihre Umgebung . . . 414
17.5.1. Jupiter . . . 415
17.5.1.1. Jupitermonde . . . 415
17.5.2. Saturn . . . 417
17.5.2.1. Ringe . . . 417
17.5.2.2. Monde . . . 417
17.5.3. Uranus . . . 418
17.5.4. Neptun . . . 419
17.6. Kleinere Objekte . . . 420
17.6.1. Planetoiden . . . 421
17.6.1.1. Pluto . . . 422
17.6.1.2. Eris . . . 424
17.6.1.3. Haumea . . . 424

17.6.1.4. Makemake . . . 425
17.6.1.5. Objekte des Kuipergürtels . . . 425
17.6.2. Asteroiden . . . 426
17.6.2.1. Asteroidengürtel . . . 426
17.6.3. Kometen . . . 427

18. Sonne **429**
18.1. Experimentelle Beobachtungen . . . 429
18.1.1. Sonnenflecken . . . 430
18.1.2. Magnetfelder der Sonne . . . 436
18.1.3. Seismik der Sonne . . . 444
18.2. Modelle . . . 448
18.2.1. Naives Modell des Energiehaushalts . . . 448
18.2.2. Realistischeres Modell des Energiehaushalts . . . 450
18.2.3. Radiale Struktur der Sonne . . . 451
18.2.4. Äussere Sonnenatmosphäre . . . 453
18.2.5. Energiequellen und nukleare Prozesse . . . 457
18.2.5.1. pp-Prozesse . . . 457
18.2.5.2. Triple-Alpha-Prozess . . . 458
18.2.5.3. CNO-Prozess . . . 459
18.2.5.4. Entstehung der Elemente . . . 460

19. Allgemeine Relativitätstheorie **463**
19.1. Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld . . . 463
19.2. Rotverschiebung im Gravitationsfeld . . . 465
19.3. Schwarzschildlösung . . . 467
19.3.1. Schwarze Löcher . . . 470
19.4. Gravitationslinse . . . 473
19.5. Gravitationswellendetektoren . . . 476

20. Milchstrasse und ihre Sterne **479**
20.1. Sternentwicklung . . . 479
20.1.1. Masse und Leuchtkraft . . . 479
20.1.2. Sternspektren und Klassifikation von Sternen . . . 480
20.1.3. Geburt von Sternen . . . 487
20.1.3.1. Drehimpuls . . . 490
20.1.4. Hauptreihe . . . 491
20.1.4.1. Hertzsprung-Russell-Diagramm . . . 492
20.1.4.2. Lebensdauer von Sternen . . . 494
20.1.4.3. Hauptreihenentwicklung . . . 495
20.1.4.4. Nachhauptreihenentwicklung . . . 498
20.1.5. Veränderliche Sterne . . . 499
20.1.6. Massive Sterne . . . 500
20.1.6.1. Novae . . . 502
20.1.7. Überreste von Sternen . . . 506
20.1.7.1. Weisse Zwerge . . . 506
20.1.7.2. Neutronensterne . . . 509
20.1.7.3. Pulsare . . . 511

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

20.2. Planetensysteme und Exoplaneten . . . 512
20.2.1. Bildung von Planetensystemen . . . 513
20.2.2. Methode der radialen Geschwindigkeitsvariation . . . 518
20.2.3. Abschattung . . . 520
20.2.4. Micro-Lensing . . . 521
20.2.5. Direkte Abbildung . . . 523
20.2.6. Astrometrie . . . 524
20.2.7. Einordnung der mehr als 4000 bekannten Exoplaneten . . . 524
20.2.8. Atmosphäre von Exoplaneten . . . 525
20.3. Binärsysteme . . . 526
20.3.1. Visuelle Doppelsterne . . . 527
20.3.2. Astrometrische Doppelsterne . . . 527
20.3.3. Spektroskopische Doppelsterne . . . 528
20.3.4. Photometrische Doppelsterne . . . 528
20.4. Struktur der Milchstrasse . . . 529
20.4.1. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis . . . 530
20.4.2. Oort'sche Gleichung und Oort'sche Konstanten . . . 531
20.4.3. Spiralarme . . . 533
20.4.4. Kugelsternhaufen . . . 538
20.4.5. Schwarzes Loch im Zentrum . . . 539
20.4.6. Geschwindigkeit der Sterne . . . 541
20.4.6.1. Dunkle Materie . . . 544

21. Universum **547**
21.1. Beobachtungen . . . 547
21.1.1. Olbers' Paradox . . . 547
21.1.2. Unmöglichkeit eines statischen Universums . . . 549
21.1.3. Isotropie der Fluchtbewegung . . . 550
21.2. Hubble-Gesetz . . . 551
21.2.1. Distanzangaben ferner Objekte . . . 551
21.3. Struktur . . . 552
21.3.1. Objekte . . . 552
21.3.1.1. Galaxien . . . 553
21.3.2. Gekrümmter Raum . . . 557
21.3.2.1. Grenzwerte . . . 559
21.3.3. Quasare . . . 560
21.3.4. Aktive Galaxien . . . 562
21.3.5. Galaxienhaufen . . . 564
21.3.6. Dunkle Materie . . . 567
21.3.7. Dunkle Energie . . . 567
21.4. Kosmologie . . . 569
21.4.1. Big-Bang-Theorie . . . 569
21.4.2. Anfangsgrösse des Universums . . . 570
21.4.3. Das frühe Universum . . . 575

A. Literaturhinweise **581**

B. Weitere physikalische Methoden und Begriffe **583**
B.1. Streuung . . . 583
B.1.1. Berechnung . . . 583
B.2. Namen der Bänder nach Fraunhofer . . . 586

C. Mathematische Sätze **589**
C.1. Rechnen mit Vektoren . . . 589
C.1.1. Produkte mit Vektoren . . . 589
C.1.2. Ableiten von Vektoren . . . 590
C.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern . . . 591
C.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern . . . 591
C.2. Vektorsätze . . . 592
C.2.1. Satz von Gauss . . . 592
C.2.2. Satz von Green . . . 593
C.2.3. Satz von Stokes . . . 593
C.3. Typen von Zahlen, Vektoren und mehr . . . 593
C.3.1. Skalare . . . 594
C.3.2. Vektoren . . . 594
C.3.3. Pseudoskalare . . . 594
C.3.4. Tensoren und Pseudotensoren . . . 594
C.4. Distributionen . . . 595
C.4.1. Binomialdistribution . . . 595
C.4.2. Poisson-Distribution . . . 595
C.5. Sphärische Trigonometrie . . . 596
C.5.1. Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen . . . 596
C.5.1.1. Halbwinkelsätze . . . 597
C.5.2. Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie . . . 597
C.5.2.1. Sinussatz . . . 598
C.5.2.2. Cosinusseitensatz . . . 598
C.5.2.3. Cosinuswinkelsatz . . . 598
C.5.2.4. Beziehung zwischen vier Stücken . . . 599
C.5.2.5. Beziehung zwischen fünf Stücken . . . 599
C.5.2.6. Gausssche Gleichungen . . . 600
C.5.2.7. Nepersche Analogien . . . 601
C.5.3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck . . . 601
C.5.3.1. Sinussatz . . . 602
C.5.3.2. Cosinusseitensatz . . . 602
C.5.3.3. Cosinuswinkelsatz . . . 602
C.5.3.4. Beziehung zwischen vier Stücken . . . 602
C.5.3.5. Beziehung zwischen fünf Stücken . . . 602
C.5.4. Astronomisches Dreieck . . . 603
C.5.4.1. Beziehungen zwischen phi, delta, s und z, a . . . 603
C.5.4.2. Beziehungen zwischen phi, delta, s und z, q . . . 603
C.5.5. Koordinatentransformationen . . . 603
C.5.5.1. Berechnung von z und a aus delta und s . . . 603
C.5.5.2. Berechnung von delta und s aus z und a . . . 604

Liste der Experimente **605**

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abbildungsverzeichnis **617**

Tabellenverzeichnis **620**

Personenregister **621**

Glossar **641**

Akronyme **643**

Referenzen **674**

1. Einleitung

1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 4.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiter verwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Der Lizenzgeber kann diese Freiheiten nicht widerrufen solange Sie sich an die Lizenzbedingungen halten.
Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter
http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html
oder unter
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/
oder unter
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de

Die CC-Icons und -Buttons

und

wurden unter der Lizenz CC BY von http://creativecommons.org/about/downloads veröffentlicht.

1.2. Dank

Das Skript in der gegenwärtigen Form ist eine Reorganisation des Stoffes früherer Veranstaltungen dar. Trotzdem ist dieses Skript zuerst eine rudimentäre Sammlung zusätzlicher Gedanken. Ich danke Tamara Stadter für das für sie sehr mühsame übertragen meiner Notizen in TeX.
Die Struktur und der Inhalt des Skriptes sind inspiriert von den Werken von Jörn Bleck-Neuhaus (*Elementare Teilchen*, [Ble13]), Wolfgang Demtröder (*Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, [Dem10]) und von Bradley W. Caroll und Dale A. Ostlie (*An Introduction to Modern Astrophysics*, [CO07]). Weiterer Input kam von Ulrich Ellwanger (*Vom Universum zum Elementarteilchen*; *From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions*, [Ell15; Ell12]), Abraham Seiden (*Particle Physics: A Comprehensive Introduction*, [Sei09]), Peter Thyssen und Arnauld Ceulemans (*Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table*, [TC17]), A. Das und T. Ferbel (*Introduction To Nuclear And Particle Physics*, [DF09]), Klaus Stierstadt (*Atommüll - wohin damit?*, [Sti10a]), John Stillwell (*Naive Lïe Theory*, [Sti10b]), Torsten Fliessbach (*Allgemeine Relativitätstheorie*, [Fli12]), Jakob Schwichtenberg (*Physics from Symmetry (Undergraduate Lecture Notes in Physics)*, [Sch15]), Catherine Heymans (*The Dark Universe* [Hey17]), Karl Schilcher (*Quantenelektrodynamik kompakt*, [Sch19]) und Grotzinger und Jordan (*Press/Siever Allgemeine Geologie*, [GJ17]).
Ein interessantes Buch mit Links zu Videos ist von J. Wambsganß, *Universum für alle* [Wam12].
Das DESY hat Usenet FAQs zusammengetragen [Cha+13]. Diese behandeln allgemeine Physikfragen, Teilchen- und Kernphysik, Quantenphysik und Relativität und Kosmologie.

1.3. Vorschau auf den Inhalt

Die drei Themengebiete KERNPHYSIK, TEILCHENPHYSIK und ASTROPHYSIK werden ineinander verwoben besprochen. Astrophysik kann nicht ohne Teilchen und Kernphysik verstanden werden, Teilchenphysik nicht ohne Kernphysik. Und die Kernphysik beruht auf der Teilchenphysik und in ihren Anfängen auch auf der Astrophysik. Die einzelnen Kapitel sind mit den Teilgebieten gekennzeichnet.

1.3.1. Kernphysik

Die KERNPHYSIK befasst sich mit Atomen und deren Kernen. Radioaktivität, Kernenergie, Fusion, Periodensystem und die Auswirkungen auf den Mensch sind das Thema. Die detaillierte Klärung von Fragen wird mit der TEILCHENPHYSIK angegangen. Zur Teilchenphysik möchte ich auf die Materialien (Folien, Vorlesungsvideos) von Dr. Tina Potter, University of Cambridge hinweisen [Pot21]. Die Materialien waren Ende März 2021 unter https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html zu erreichen. Dr. Potter gibt ein sehr ausführliche Darstellung der Kernphysik. Sie bespricht die fundamentalen Prinzipien (Kräfte, Symmetrien) und Theorien.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

1.3.2. Teilchenphysik

Die TEILCHENPHYSIK ist die Physik der Elementarteilchen, also die Bausteine der in der KERNPHYSIK besprochenen Objekte. Sie behandelt Wechselwirkungen bei hohen Energien (> 1 MeV), mit einigen Ausnahmen und bei kleinen Strukturen (< 1 pm). Die Beobachtungen werden mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden beschrieben (Gruppentheorie, Quantenelektrodynamik). Zur Teilchenphysik möchte ich auf die Materialien (Folien, Vorlesungsvideos) von Dr. Tina Potter, University of Cambridge hinweisen [Pot21]. Die Materialien waren Ende März 2021 unter https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html zu erreichen. Dr. Potter gibt ein sehr ausführliche Darstellung der Teilchenphysik. Sie bespricht die fundamentalen Prinzipien (Kräfte, Symmetrien, Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik) bis hin zur Supersymmetrie.

1.3.3. Astrophysik

Im Teil ASTROPHYSIK wird das, was wir über uns sehen oder erahnen besprochen. Alles was wir über die Welt ausserhalb des Sonnensystems wissen, haben wir durch Messung von Strahlung oder Teilchen erfahren. Licht und optische Astronomie war der Anfang dieser Erkundung. Im Sonnensystem haben wir punktuell Besuche von Menschen (erdnahe Umlaufbahn oder der Mond) oder Besuche von Sonden (Planeten, Monde, Asteroiden und die Grenze des Sonnensystems).
Nach einer Besprechung der klassischen Astronomie, deren Instrumente, der Himmelsmechanik im Sonnensystem und der Koordinatensysteme folgt eine Diskussion der Planeten, Asteroiden, Kometen und natürlich der Sonne.
Das gesamte Verständnis der Sonne beruht auf der Diagnose von ferne. Sonnenflecken, Magnetfelder und Spektren zusammen mit den Teilchen im Sonnenwind erlauben ein Modell der Sonne zu entwerfen. Die kernphysikalischen Prozesse innerhalb der Sonne werden phänomenologisch und ohne tiefere Begründung diskutiert.
Ausgehend von der Sonne wird allgemein das Innere von Sternen und deren Klassifikation besprochen. Nach einem Ausflug in die Allgemeine Relativitätstheorie werden die Sterne in unserer Galaxie, der Milchstrasse betrachtet. Unsere Milchstrasse wird, wie wahrscheinlich alle Galaxien, von einem schwarzen Loch zusammengehalten.
Es interessiert dabei, wie Sterne entstehen und auch wieder vergehen.
Am Ende dieses Abschnittes betrachten wir das grosse Ganze, das Universum. Seine Struktur und seine Geschichte, Kosmologie genannt, schliessen diesen Teil ab.
Im *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* P. K. Seidelmann [Sei92] finden sich viele nützliche Informationen zur praktischen Astrophysik und Astronomie. Das Werk in der Ausgabe von 1992 kann von archive.org geladen werden.

Teil I.

Kernphysik

2. Instrumente der Kern- und Teilchenphysik

In diesem Teilgebiet der Physik werden Teilchen beschleunigt, dann zur Kollision oder Streuung gebracht und die Energien und Impulse sowie die inneren Freiheitsgrade der Teilchen analysiert. Dazu braucht man

- Beschleuniger,
- Wechselwirkungzonen und
- Detektoren.

2.1. Teilchenbeschleuniger

Bei Teilchenbeschleunigern sollen möglichst hohe Energien erzeugt werden, die zur Umwandlung von Teilchen in andere Teilchen dienen können. Deshalb werden Teilchen mit relativistischen Geschwindigkeiten verwendet.

2.1.1. Relativistische Bewegung

Wir betrachten eine Masse m, die mit einer konstanten Kraft $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0$ beschleunigt werde [Fre04; Sch15; Hof97]. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist [Mar14]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \\ &= \frac{dm}{dt}\boldsymbol{v} + m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\boldsymbol{v} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad (2.1.1a)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{m_0\cdot\left(-2\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\boldsymbol{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{m_0\boldsymbol{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.1.1b)\end{aligned}$$

Daraus berechnet man skalar

$$\frac{F}{m_0}dt = \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.1.2)$$

und

$$\int_0^t \frac{F}{m_0} dt = \frac{F}{m_0} t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_0^{v(t)} = \frac{v(t)}{\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.1.3}$$

$v(t)$ ist sowohl im Zähler wie auch in der Wurzel des Nenners. Wir lösen die Gleichung nach $v(t)$ auf und erhalten

$$v\left(t\right) = \frac{F}{m_0} t \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \tag{2.1.4}$$

und

$$a\left(t\right) = \frac{dv\left(t\right)}{dt} = \frac{F}{m_0} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.1.5}$$

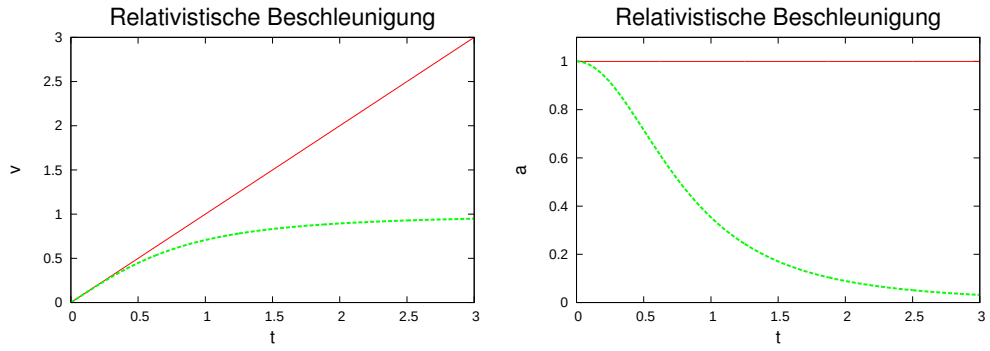


Abb. 2.1.: Zeitverlauf der RELATIVISTISCHEN GESCHWINDIGKEIT (links) und der RELATIVISTISCHEN BESCHLEUNIGUNG bei konstanter KRAFT [Mar14].

Für die Geschwindigkeit erhalten wir

$$v \approx \begin{cases} \frac{Ft}{m_0} & \text{für} \quad t \ll \frac{m_0 c}{F} \\ c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^{-2}\right) & \text{für} \quad t \gg \frac{m_0 c}{F} \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Dann ist die BESCHLEUNIGUNG

$$a(t) \approx \begin{cases} \frac{F}{m_0} & \text{für} \quad t \ll \frac{m_0 c}{F} \\ \left(\frac{m_0}{F}\right)^2 \left(\frac{c}{t}\right)^3 & \text{für} \quad t \gg \frac{m_0 c}{F} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

- Geschwindigkeit und BESCHLEUNIGUNG: $t \ll \frac{m_0 c}{F}$ ist der klassische Newtonsche Bereich.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

- Der Impuls nimmt linear mit der Zeit zu
  - unabhängig, ob relativistisch oder klassisch
  - Im klassischen Fall beruht die Impulszunahme auf der Zunahme der Geschwindigkeit, im relativistischen Fall auf der Zunahme der Masse.

Zur Berechnung der kinetischen Energie setzen wir ($v^2/c^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$) mit $A = Ft/(m_0c)$

$$E_{kin} = m_0c^2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{A^2}{1+A^2}\right)^{1/2}}-1\right) = m_0c^2\left(\left(1+A^2\right)^{1/2}-1\right) \tag{2.1.8}$$

oder

$$E_{kin} = m_0c^2\left(\left(1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2\right)^{1/2}-1\right) \tag{2.1.9}$$

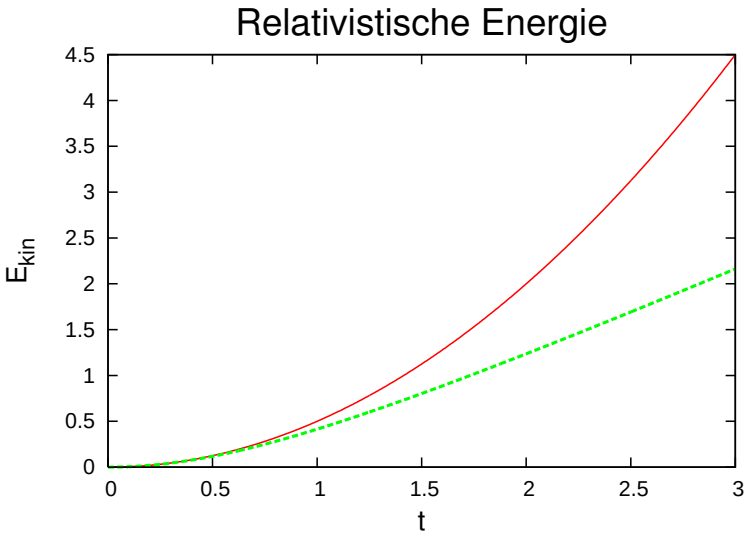


Abb. 2.2.: Verlauf der kinetischen Energie bei konstanter Kraft im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall[Mar14].

$$E_{kin} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{F^2t^2}{m_0} & \text{für} \quad t \ll \frac{m_0c}{F} \\ Fct & \text{für} \quad t \gg \frac{m_0c}{F} \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Die kinetische Energie steigt im relativistischen Falle linear mit der Zeit.
Die Distanz als Funktion der Zeit ist

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = c\int_0^t \frac{\frac{Ft}{m_0c}}{\left(1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2\right)^{1/2}}d\tau \tag{2.1.11}$$

Wir substituieren $A = \frac{Ft}{m_0c} \Longrightarrow dA = \frac{F}{m_0c}dt$ $dt = \frac{m_0c}{F}dA$.

$$\begin{aligned} x(t) &= c\frac{m_0 c}{F}\int_0^{Ft/(m_0c)} \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}dA \\ &= \frac{m_0c^2}{F}\left(\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}-1\right) \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

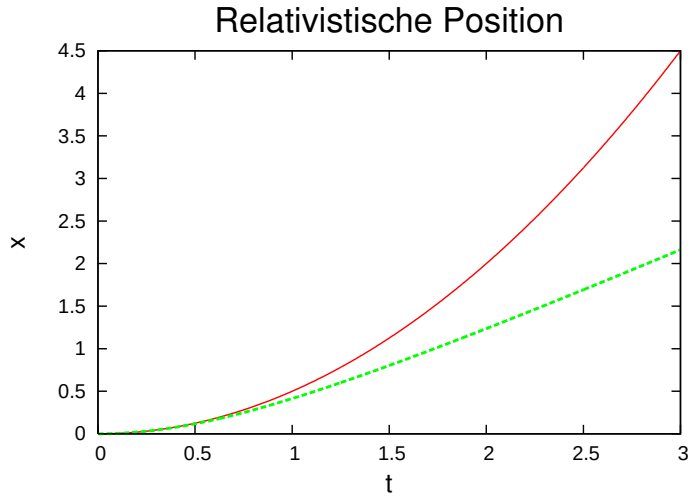


Abb. 2.3.: Verlauf der zurückgelegten Distanz bei konstanter KRAFT im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall [Mar14].

$$x(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2 & \text{für} \quad t \ll \frac{m_0c}{F} \\ ct & \text{für} \quad t \gg \frac{m_0c}{F} \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Die relativistische Eigenzeit $\tau = t'$ der beschleunigten MASSE nimmt langsamer zu:

$$\frac{v}{c} = \frac{Ft}{m_0c}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{Ft}{m_0c}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} \tag{2.1.14a}$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right) = 1-\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} \tag{2.1.14b}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}} \tag{2.1.14c}$$

(2.1.14d)

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2}} \tag{2.1.15}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\tau = \int_0^t \frac{d\hat{t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{F\hat{t}}{m_0 c}\right)^2}} = \frac{m_0 c}{F} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{Ft}{m_0 c}\right) \tag{2.1.16}$$

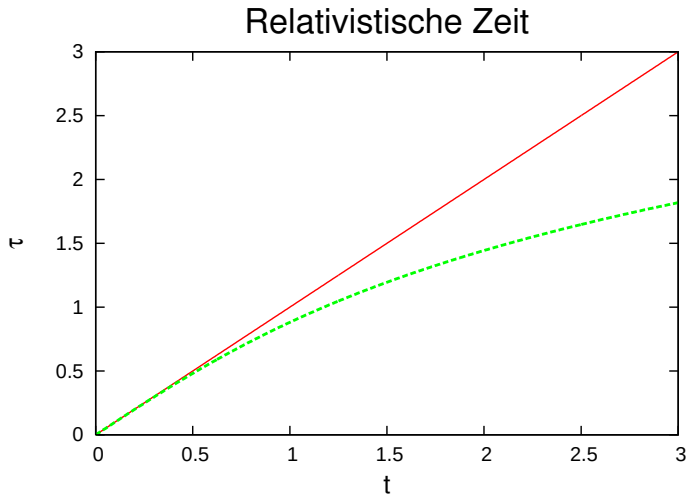


Abb. 2.4.: Verlauf der Eigenzeit bei konstanter KRAFT im klassischen (rot) und relativistischen (grün) Fall [Mar14].

$$t = \frac{m_0 c}{F} \sinh\left(\frac{F\tau}{m_0 c}\right) \tag{2.1.17}$$

$$x(\tau) = \frac{m_0 c^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\sinh\left(\frac{F\tau}{m_0 c}\right)\right)^2} - 1\right) = \frac{m_0 c^2}{F}\left(\cosh\left(\frac{F\tau}{m_0 c}\right) - 1\right) \tag{2.1.18}$$

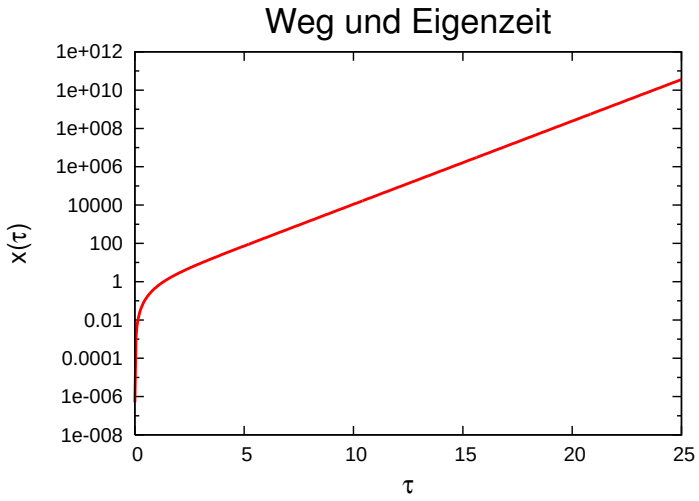


Abb. 2.5.: Zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit [Mar14].

$$\alpha = \frac{E_{kin}}{m_0 c^2} \tag{2.1.19a}$$

(2.1.19b)

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{2.1.19c}$$

(2.1.19d)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2.1.19e}$$

2.1.2. Wirkungsgrad bei ruhendem Target

Wir betrachten zuerst die Prozesse bei einer Kollision. Die pro Zeiteinheit in den Winkel ϑ gestreute Teilchenzahl oder Ereignisrate ist

$$\frac{dN}{dt} = \phi_A n_B \Delta V \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega. \tag{2.1.20}$$

Dabei ist $\Delta\Omega$ der Raumwinkel, ΔV das Volumen, ϕ_A der Teilchenfluss, n_B die Teilchendichte im Target und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt.
Bei einem ruhenden Target müssen die kinetischen Energien im Laborsystem $E_{kin}(A) > 0$ und $E_{kin}(B) = 0$ in kinetische Energien im Schwerpunktsystem $E'_{kin}(A)$ und $E'_{kin}(B)$ umgerechnet werden. Dann kann die Streuung oder die Reaktion rechnerisch durchgeführt werden. Dabei beleibt die Bewegung des Schwerpunkts erhalten. Schliesslich muss in das Laborsystem zurückgerechnet werden.
Wir verwenden, dass der relativistische Viererimpuls $\boldsymbol{P} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)^T$, dessen Norm eine relativistische Invariante ist. Aus $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \boldsymbol{p}^2}$.
Wir betrachten eine eindimensionale Welt. Im Laborsystem mit dem ruhenden Teilchen B haben wir die Energien $E_{A,L} = m_{A,0}c^2 + E_{A,kin}$ und $E_{B,L} = m_{B,0}c^2$ sowie die Impulse $p_{A,L} \neq 0$ und $p_{B,L} = 0$ und die Viererimpulsvektoren $\boldsymbol{P}_{A,L} = \left(\frac{E_{A,L}}{c}, p_{A,L}, 0, 0\right)^T$ und $\boldsymbol{P}_{B,L} = \left(\frac{E_{B,L}}{c}, 0, 0, 0\right)^T$. Im Schwerpunktssystem haben wir

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

die Viererimpulse $\boldsymbol{P}_{A,S} = \left(\frac{E_{A,S}}{c}, p_{A,S}, 0, 0\right)^T$ und $\boldsymbol{P}_{B,S} = \left(\frac{E_{B,S}}{c}, p_{B,S}, 0, 0\right)^T$.

Im Schwerpunktssystem sind die Impulse der Teilchen A und B entgegengesetzt gleich, also $p_{A,S} = -p_{B,S} = p_S$. Wir setzen nun die Quadrate der Vierervektoren im Laborsystem und im Schwerpunktssystem gleich (relativistische Invariante) und erhalten

$$\left(\boldsymbol{P}_{A,L} + \boldsymbol{P}_{B,L}\right)^2 = \left(\boldsymbol{P}_{A,S} + \boldsymbol{P}_{B,S}\right)^2 \tag{2.1.21a}$$

$$c^2 \left(\left(\frac{E_{A,L} + E_{B,L}}{c}, p_{A,L}, 0, 0\right)^T\right)^2 = c^2 \left(\left(\frac{E_{A,S} + E_{B,S}}{c}, 0, 0, 0\right)^T\right)^2 \tag{2.1.21b}$$

mit dem Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie

$$-\left(E_{A,L} + E_{B,L}\right)^2 + c^2 p_{A,L}^2 = -\left(E_{A,S} + E_{B,S}\right)^2 := -E_S^2 \tag{2.1.21c}$$

$$E_S^2 = \left(E_{A,L} + E_{B,L}\right)^2 - c^2 p_{A,L}^2 \tag{2.1.21d}$$

E_S ist die für Reaktionen im Schwerpunktssystem verfügbare Energie. Wir setzen nun $E_{A,L}^2 = m_{A,0}^2 c^4 + c^2 p_{A,L}^2$, daraus $E_{A,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2 = m_{A,0}^2 c^4$ und $E_{B,L} = m_{B,0} c^2$. Wir versuchen $E_{A,L}$ in erster Potenz zu isolieren und bekommen

$$E_S = \sqrt{E_{A,L}^2 + 2E_{A,L}E_{B,L} + E_{B,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2} \tag{2.1.22a}$$

$$= \sqrt{E_{A,L}^2 - c^2 p_{A,L}^2 + 2E_{A,L}E_{B,L} + E_{B,L}^2} \tag{2.1.22b}$$

$$E_S = \sqrt{m_{A,0}^2 c^4 + m_{B,0}^2 c^4 + 2m_{B,0} c^2 E_{A,L}} \tag{2.1.22c}$$

Wenn nun $M_{A_0} = m_{B,0} = m_0$ ist, folgt

$$E_S = \sqrt{2m_0^2 c^4 + 2m_0 c^2 E_{A,L}} \tag{2.1.23}$$

Mit der Definition $\alpha = \frac{E_{A,L}}{m_0 c^2}$ erhalten wir

$$E_S = m_0 c^2 \sqrt{2 + 2\alpha} \tag{2.1.24}$$

Dies ergibt einen Wirkungsgrad von

$$\eta = \frac{E_S}{E_A} = \frac{E_S}{m_A(v_A)c^2} = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \tag{2.1.25}$$

Abbildung 2.6 zeigt eine grafische Darstellung.

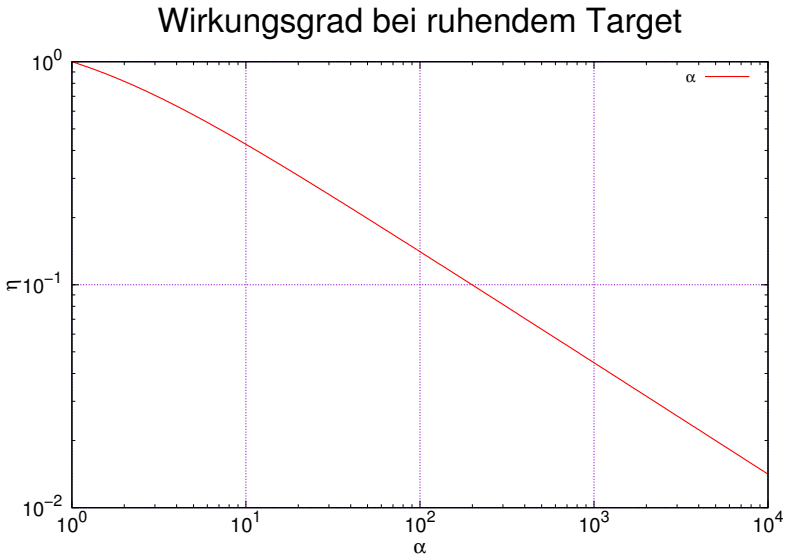


Abb. 2.6.: Wirkungsgrad bei der Streuung

Wer sich für eine tiefer gehende Erörterung interessiert verweise ich auf Demtröder [Dem10, p. 64ff].

2.1.3. Funktionsweise

Beschleuniger benötigen elektrisch geladene Teilchen. Wenn ein Teilchen mit der Ladung q durch eine Spannung U beschleunigt wird, ergibt sich eine kinetische Energie von

$$q\,U = E_{kin} = (m - m_0)c^2 = \alpha\, m_0 c^2 \tag{2.1.26}$$

$\alpha = 1 + \gamma$ ist wie üblich in der speziellen Relativitätstheorie definiert.
Wegen der begrenzten Durchschlagsspannung von Luft (oder Druckluft) werden Teilchen in der Regel durch N Beschleunigungsstrecken mit der Spannung U beschleunigt.

$$N\,q\,U = E_{kin} = (m - m_0)c^2 = \alpha\, m_0 c^2 \tag{2.1.27}$$

Neben einstufigen Beschleunigern wie einer Kathodenstrahlröhre werden die mehrstufigen Beschleuniger in verschiedenen Ausführungen gebaut

Linearbeschleuniger haben die kleinsten Verluste, benötigen aber eine grosse Länge

kreisförmige Beschleuniger Synchrotrons und Zyklotrons benötigen weniger Platz. Die Teilchen können im Prinzip unendlich lange Zeit beschleunigt werden. Die Strahlungsverluste sind durch die notwendige Beschleunigung zum Kreismittelpunkt aber gross.

Laserbasierte Beschleuniger können sehr kurz gebaut werden, da Laser dynamisch sehr viel grössere elektrische Felder erzeugen können. Die Strahlqualität erreicht jedoch noch nicht die Qualität der elektrischen Beschleuniger [Lee+06].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

2.1.4. Linearbeschleuniger

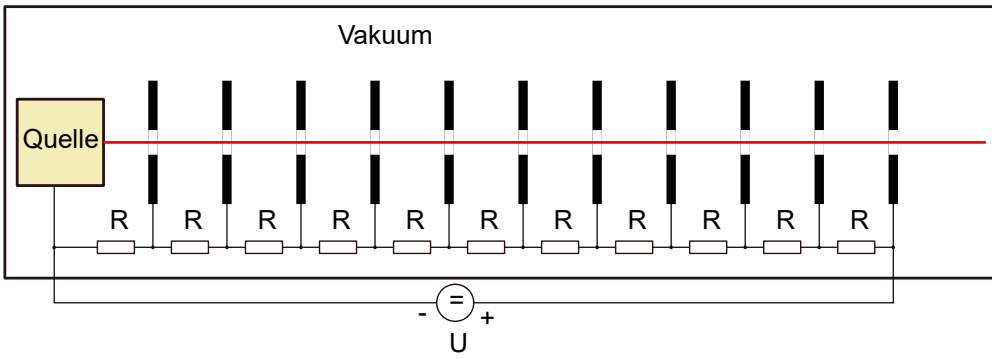


Abb. 2.7.: Elektrostatischer Beschleuniger (siehe auch [Dem10, Abb. 4.5])

Einstufige elektrostatische Beschleuniger sind so ähnlich aufgebaut wie in Abbildung 2.7. Eine Gleichspannung U wird über eine Widerstandskaskade aus N Widerständen R in gleiche Spannungsschritte aufgeteilt. Das Vorzeichen der Spannung hängt dabei vom Vorzeichen der zu beschleunigenden Ladung ab. In Abbildung 2.7 wären dies negativ geladene Teilchen.

Die Hochspannung kann über Van-de-Graaff-Generatoren (nach Robert Jemison Van de Graaff) oder über Spannungsvervielfacherkaskaden hergestellt werden.

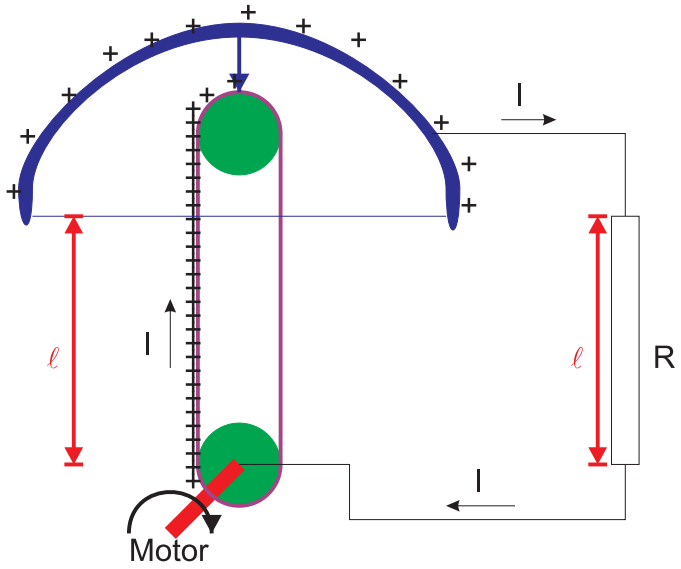


Abb. 2.8.: Van-de-Graaff-Generator zur Herstellung von Hochspannung. [Mar16]

In Abbildung 2.8 ist schematisch ein Van-de-Graaff-Generator gezeigt. Für positiv geladene Teilchen muss die Quelle auf Hochspannung gebracht werden, dafür ist die Detektion bei Erdpotential.

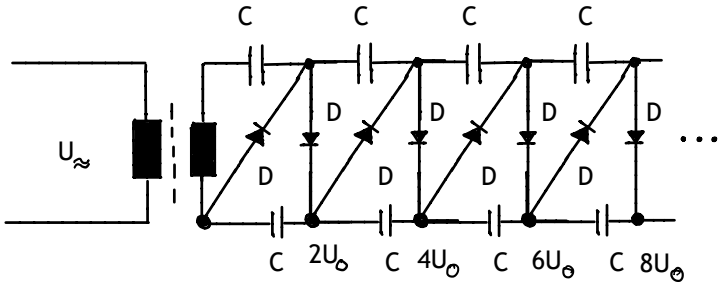


Abb. 2.9.: Kaskaden-Hochspannungsgenerator [HH89, p. 48]

Abbildung 2.9 zeigt eine Halbleiter-Kaskadenschaltung zur Erzeugung einer hochvoltigen Gleichspannung. Teilspannungen können an den Knoten abgegriffen werden.

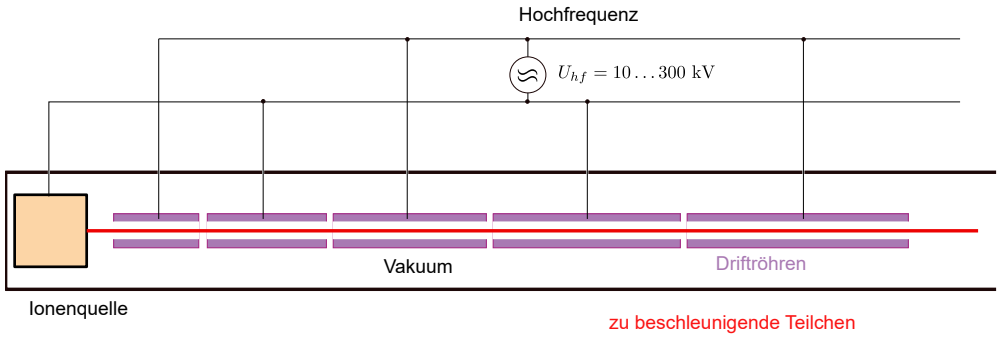


Abb. 2.10.: Skizze eines Driftröhrenbeschleunigers, inspiriert von [Dem10].

Beim Driftröhrenbeschleuniger nach Abbildung 2.10 werden Ladungen durch eine Wechselspannung mit der Amplitude U_0 beschleunigt.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{2.1.28}$$

φ ist dabei eine durch die Apparatur bestimmte Phase. Bei jedem Übergang von einer Röhre zur nächsten wird die Ladung durch die Spannung $\Delta U = 2U_0$ beschleunigt, ausser am Anfang und am Ende. Dort ist die Beschleunigungsspannung U_0. Bei N Driftröhren wird eine Ladung also durch

$$U_{tot} = U_0 + 2(N-1)U_0 + U_0 = 2NU_0 \tag{2.1.29}$$

beschleunigt. Die Beschleunigungsspannung ändert die kinetische Energie, also

$$E_{kin} = \alpha m_0 c^2 = 2NU_0 \cdot q \tag{2.1.30}$$

oder

$$\alpha = \frac{2NU_0}{m_0 c^2} q \tag{2.1.31}$$

Aus $v = \frac{c}{1+\alpha}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = c\frac{\alpha}{1+\alpha}\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}$ folgt schliesslich

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$v = \frac{c}{1+\frac{2NU_0}{m_0c^2}q}\frac{2NU_0}{m_0c^2}q\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{2NU_0q}} = \frac{2NU_0qc}{m_0c^2+2NU_0q}\sqrt{1+\frac{m_0c^2}{NU_0q}} \tag{2.1.32}$$

Die Ladung q ist je nach dem zu beschleunigenden Teilchen eine Elementarladung oder auch Z mal eine Elementarladung. Im zweiten Falle werden schwere Kerne beschleunigt.

Im i-ten Rohr hat das geladene Teilchen die Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{2\left(\frac{1}{2}+(i-1)\right)U_0qc}{m_0c^2+2\left(\frac{1}{2}+(i-1)\right)U_0q}\sqrt{1+\frac{m_0c^2}{\left(\frac{1}{2}+(i-1)\right)U_0q}} \tag{2.1.33}$$

oder

$$v_i = \frac{(2i-1)\,U_0qc}{m_0c^2+(2i-1)\,U_0q}\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{(2i-1)\,U_0q}} \tag{2.1.34}$$

Die Driftzeit in einer Röhre ist die halbe Periodendauer $t_D = T/2 = 1/2\nu = \pi/\omega$. Damit ist die Länge der i-ten Röhre

$$L_i = v_it_D = \frac{\pi\,(2i-1)\,U_0qc}{\omega\,(m_0c^2+(2i-1)\,U_0q)}\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{(2i-1)\,U_0q}} \tag{2.1.35}$$

Wenn $nU_0q \ll m_0c^2$ ist, also im nichtrelativistischen Falle, ist

$$v_i \approx \frac{(2i-1)\,U_0qc}{m_0c^2}\sqrt{\frac{2m_0c^2}{(2i-1)\,U_0q}} = \sqrt{\frac{2\,(2i-1)\,U_0q}{m_0c}} \tag{2.1.36}$$

und

$$L_i \approx \frac{\pi\,(2i-1)\,U_0qc}{\omega\,(m_0c^2)}\sqrt{\frac{2m_0c^2}{(2i-1)\,U_0q}} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{(i-1/2)\,U_0q}{m_0c}} \tag{2.1.37}$$

Hochfrequenztechnisch einfacher sind Wanderwellenbeschleuniger, z. B. nach Luis Walter Alvarez [Alv+55] oder [Wei94]. In diesem Design werden Mikrowellen so geführt, dass sie zur rechten Zeit am richtigen Ort die geladenen Teilchen beschleunigen können.

2.1.5. Zyklotron

Funktionsfähige Zyklotrone bauten 1930 in Berkeley, California, USA, Ernest Orlando Lawrence und pld:livingstonms sowie im gleichen Jahr in Paris Jean Thibaud.

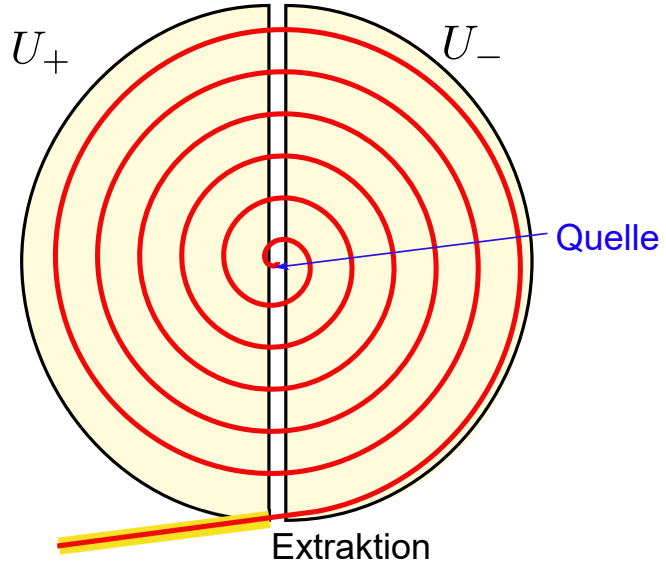


Abb. 2.11.: Schematischer Aufbau eines Zyklotrons

Ein Zyklotron ist ein relativ einfach aufgebauter Beschleuniger. Die folgenden Rechnungen sind nichtrelativistisch, gelten also nur für kleine Geschwindigkeiten.

Ein Zyklotron verwendet die Tatsache, dass die Umlaufzeit proportional zur Geschwindigkeit zunimmt.

Im nichtrelativistischen Fall lautet das Kräftegleichgewicht

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{rqB}{m} \tag{2.1.38}$$

Dabei ist der Impuls $p = mv$ und daraus

$$r = \frac{p}{qB} \tag{2.1.39}$$

Die Zeit für einen Umlauf ist

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} \tag{2.1.40}$$

Das heisst, dass die Hochfrequenz

$$f_{HF} = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \tag{2.1.41a}$$

$$\omega_{HF} = \frac{qB}{m} \tag{2.1.41b}$$

Wenn R der maximale Radius des Zyklotrons ist, ist die erreichbare Energie

$$E_{kin,max} = \frac{mv^2(R)}{2} = \frac{m}{2}\frac{R^2q^2B^2}{m^2} = \frac{q^2}{2m}(R \cdot B)^2 \tag{2.1.42}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

2.1.6. Betatron

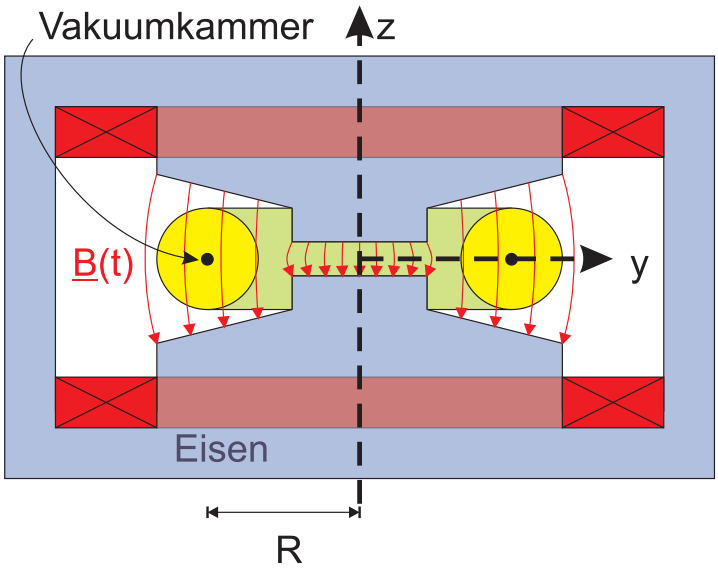


Abb. 2.12.: Aufbau eines Betatrons

Aufbau eines Betatrons
Die Bewegung der Teilchen in einem Betatron wird durch

$$m\frac{v^2}{R} = e \cdot v \cdot B(t) \tag{2.1.43}$$

oder

$$mv(t) = p(t) = e \cdot B \cdot R \tag{2.1.44}$$

beschrieben. Daraus ergibt sich

$$\frac{dp(t)}{dt} = eE(t) \tag{2.1.45}$$

Mit der Integralform des Induktionsgesetzes, unter Annahme einer stationären Kreisbahn $S(R)$ mit dem Radius R bekommt man

$$\oint\limits_{S(R)} \boldsymbol{E}(t) \cdot d\boldsymbol{s} = E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \iint\limits_{A(R)} \boldsymbol{B}(t) \cdot d\boldsymbol{a} = \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \cdot \pi R^2 \tag{2.1.46}$$

wobei $\bar{B}$ das über die Fläche des Kreises gemittelte $\boldsymbol{B}$-Feld ist. Somit

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \tag{2.1.47}$$

Die Integration mit den Anfangsbedingungen $p(0) = 0$ und $B(0) = 0$ liefert

$$p(t) = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \bar{B}(t) \tag{2.1.48}$$

Der Vergleich mit der Gleichung für die Zentripetalkraft liefert die Wideröe-Bedingung (nach Rolf Wideröe)

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t) \tag{2.1.49}$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Wahl der Form der Polschuhe erreicht werden.
Ein Betatron betrieben mit 50 Hz hat jeweils 5 ms Zeit zur Beschleunigung. Das heisst die Teilchen (z.B. e^-) machen so etwa 10^6 Umläufe bis relativistische Effekte die Funktionsweise verunmöglichen.

2.1.7. Synchrotron

Das Prinzip des Synchrotrons wurde 1944 von Wladimir Weksler in einer russischen Zeitschrift veröffentlicht. Das erste bekannte funktionierende Elektronensynchrotron wurde 1945 von Edwin McMillan in Berkeley, California, USA gebaut. 1952 baute Mark Oliphant an der University of Birmingham in England das erste Protonensynchrotron.

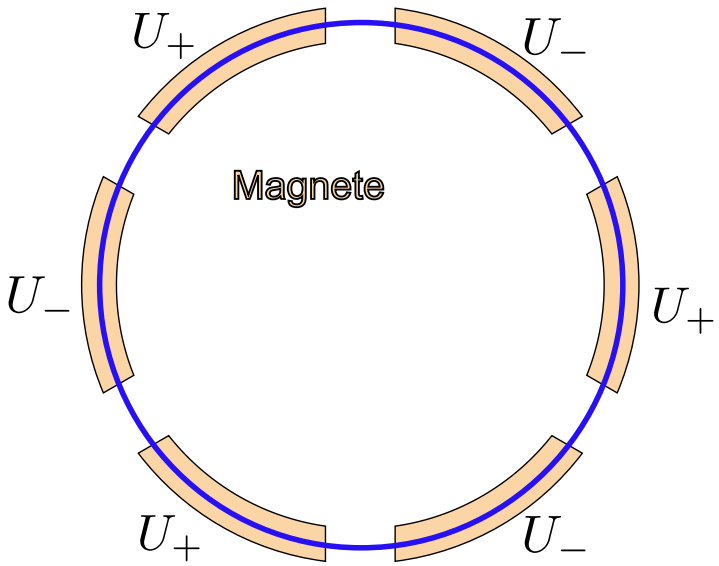


Abb. 2.13.: Schematischer Aufbau eines Synchrotrons

Bei einem Synchrotron muss, anders als bei einem Zyklotron, die Beschleunigungsfrequenz nachgeregelt werden. Für den Radius ergibt sich[1]

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{m_0 c^2}{qB}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{E_{kin}}{qcB}\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{E_{kin}}} \tag{2.1.50}$$

Im relativistischen Fall $E_{kin} \gg m_0c^2$ erhalten wir

$$r = \frac{E_{kin}}{qcB} \tag{2.1.51}$$

Das heisst, die magnetische Induktion muss nachgeregelt werden, um R konstant

[1] $\alpha = \frac{E_{kin}}{m_0c^2}$, $\frac{m(v)}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma = 1 + \alpha$ aus $1 + \alpha = \frac{E_{kin}}{m_0c^2} + \frac{m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{E_{kin}+E_0}{m_0c^2} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{m(v)}{m_0}$, $v = \frac{c\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha}$ und $p = m_0v(1+\alpha) = m_0c \cdot \sqrt{2\alpha+\alpha^2}$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

zu halten. Das heisst für eine magnetische Induktion $B = 1$ T, dann ist $\frac{r}{E_{kin}} = 3.3$ m GeV^{-1}.

2.1.7.1. Vertikale Stabilisierung

Beschleuniger funktionieren nur korrekt, wenn die zu beschleunigenden Teilchen auf ihrer Bahn stabilisiert werden. Die z-Komponente von $\boldsymbol{B}$ ist

$$B_z(r) = B_0 \left(1 - n\frac{r - r_0}{r_0}\right) \tag{2.1.52}$$

dabei ist n der Feldindex, der sich aus der relativen Änderung des Feldes bezogen auf die relative Änderung des Ortes

$$\frac{dB_z}{B_0} = -n\frac{dr}{r_0} \tag{2.1.53}$$

ergibt, also

$$n = -\frac{dB/B_0}{dr/r_0} \tag{2.1.54}$$

oder

$$n = -\frac{dB}{dr}\frac{r_0}{B_0} \tag{2.1.55}$$

Sei nun $\boldsymbol{B} = (B_r, 0, B_z)^T$. Weiter benötigen wir die Lorentzkraft $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ und daraus

$$F_z = qvB_r \tag{2.1.56}$$

Bei einem statischen Feld $\textbf{rot}\ \boldsymbol{B} = 0$ gilt

$$(\textbf{rot}\ \boldsymbol{B})_\varphi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \tag{2.1.57}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -n\frac{B_0}{r_0} \tag{2.1.58}$$

und

$$B_r(z) = -n\frac{B_0}{r_0}z \tag{2.1.59}$$

damit gibt es in die z-Richtung eine rücktreibende Kraft

$$F_z = -qvn\frac{B_0}{r_0}z \tag{2.1.60}$$

Dies führt zu einer Schwingung um die Gleichgewichtslage mit der Frequenz

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{m}\frac{vB_0}{r_0}n} \tag{2.1.61}$$

Mit dem Gleichgewicht in radialer Richtung $\frac{mv^2}{r_0} = qvB_0$ folgt

$$f_z = \frac{1}{2\pi}\frac{v}{r_0}\sqrt{n} \tag{2.1.62}$$

Es gibt die Grenzsituation, dass $n < 1$ ist. Dann ist die Periode bezogen auf die zurückgelegte Strecke grösser als $L = 2\pi r_0$. Dann muss $z_{max} < r$ sein.

2.1.7.2. Radiale Stabilisierung

Die radiale Gleichgewichtslage wird durch

$$qvB_0 = \frac{mv^2}{r_0} \tag{2.1.63}$$

gegeben. Wenn nun $r \neq r_0$ ist, ergibt sich eine Kraft

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{F} &= \left[\frac{mv^2}{r} - qvB_0\left(1 - n\frac{r-r_0}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e_r} \\ &= \frac{mv^2}{r_0}\left[\frac{1}{1+\frac{r-r_0}{r_0}} - \left(1 - n\frac{r-r_0}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e_r} \end{aligned} \tag{2.1.64}$$

und damit

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1}{\frac{r}{r_0}} = \frac{1}{1-1+\frac{r}{r_0}} = \frac{1}{1-\frac{r-r_0}{r_0}} \tag{2.1.65}$$

$$\Delta\boldsymbol{F} = \frac{mv^2}{r_0}\left[\frac{1}{1+\frac{r-r_0}{r_0}} - \left(1 - n\frac{r-r_0}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e_r} \tag{2.1.66}$$

wenn $\frac{r-r_0}{r_0} \ll 1$

$$\Delta\boldsymbol{F} = \frac{mv^2}{r_0}\left[1 - \left(\frac{r-r_0}{r_0}\right) - \left(1 - n\frac{r-r_0}{r_0}\right)\right]\boldsymbol{e_r} \tag{2.1.67}$$

$$= \frac{mv^2}{r_0^2}\left[-(r-r_0) + (n(r-r_0))\right]\boldsymbol{e_r} \tag{2.1.68}$$

$$= -\frac{mv^2}{r_0^2}(r-r_0)(1-n)\boldsymbol{e_r} \tag{2.1.69}$$

$$\tag{2.1.70}$$

Wenn $n < 1$ ist, gibt es eine rücktreibende Kraft. Diese oszilliert mit der Frequenz

$$\nu_r = \frac{v}{2\pi r_0}\sqrt{1-n} \tag{2.1.71}$$

2.1.7.3. Starke Fokussierung

Das Prinzip der starken Fokussierung stammt von Ernest D. Courant, M. Stanley Livingston und Hartland Snyder.

Wenn Teilchen in einen Beschleuniger eingebracht werden, haben diese nie alle die gleiche Richtung. Das heisst neben dem Transfer von Energie muss ein Beschleuniger die Teilchen auf der Bahn halten, also letztlich fokussieren (um einen Begriff aus der Optik zu verwenden).

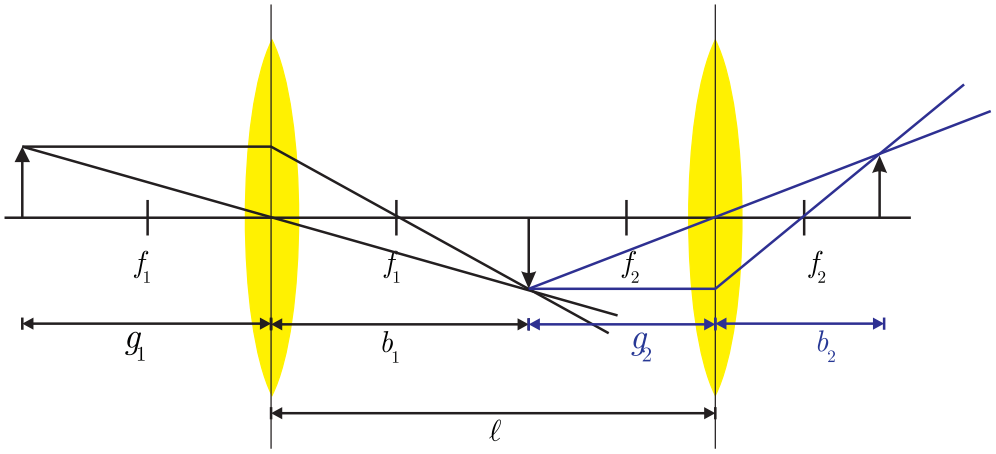


Abb. 2.14.: Prinzip der starken Fokussierung (siehe auch [Mar16])

Um das Wesentliche herauszuarbeiten betrachten wir zwei Linsen mit f_1, g_1 und der daraus folgenden Bildweite b_1 sowie f_2, g_2 und der daraus folgenden Bildweite b_2. Daraus ergibt die Beziehung $g_2 = \ell - b_1$ zwischen der Gegenstandsweite der zweiten Linse und der Bildweite der ersten Linse.

Die entsprechenden Abbildungsgleichungen sind

$$b_1 = \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} \qquad\qquad b_2 = \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2}$$

Die Kombination der beiden Gleichungen liefert

$$b_2 = \frac{f_2(\ell - b_1)}{\ell - b_1 - f_2} \quad = \frac{f_2(\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1})}{\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} - f_2} \quad = \frac{f_2(\ell(g_1 - f_1) - f_1 g_1)}{(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1}$$

Wenn wir $f_2 = -f_1 = -f$ setzen, bekommen wir

$$b_{2,f\to -f} = \frac{-f(\ell(g_1 - f) - f g_1)}{(\ell + f)(g_1 - f) - f g_1} \quad = \frac{-f(\ell(1 - \frac{f}{g_1}) - f)}{(\ell + f)(1 - \frac{f}{g_1}) - f} \tag{2.1.72}$$

Wenn parallel sich bewegende Objekte (Licht) auf die erste Linse treffen, bekommen wir für $g_1 \to \infty$ die Gleichung

$$b_{2,f\to -f,\infty} = \lim_{g_1\to\infty} \frac{-f(\ell(1 - \frac{f}{g_1}) - f)}{(\ell + f)(1 - \frac{f}{g_1}) - f} \quad = \frac{-f\ell + f^2}{\ell + f - f} \quad = f\left(\frac{f}{\ell} - 1\right) \tag{2.1.73}$$

Wenn anderseits $f_2 = -f_1 = f$ ist, bekommen wir

$$b_{2,-f\to f} = \frac{f(\ell(g_1+f)+fg_1)}{(\ell-f)(g_1+f)+fg_1} \qquad = \frac{f(\ell(1+\frac{f}{g_1})+f)}{(\ell-f)(1+\frac{f}{g_1})+f} \tag{2.1.74}$$

Wenn parallel sich bewegende Objekte (Licht) auf die erste Linse treffen, bekommen wir für $g_1 \to \infty$ die Gleichung

$$b_{2,-f\to f,\infty} = \lim_{g_1\to\infty} \frac{f(\ell(1+\frac{f}{g_1})+f)}{(\ell-f)(1+\frac{f}{g_1})+f} \quad = \frac{f\ell+f^2}{\ell-f+f} \quad = f\left(\frac{f}{\ell}+1\right) \tag{2.1.75}$$

$$\tag{2.1.76}$$

Die resultierende Bildweite hängt also sowohl von der Reihenfolge der Linsen wie auch von ℓ und f ab. Bei endlicher Gegenstandsweite g_1 sind die Bildweiten $b_{2,f\to -f} = b_{2,-f\to f}$ gleich, wenn gilt

$$\ell = \frac{2f^2 g_1}{g_1^2 - f^2} \tag{2.1.77}$$

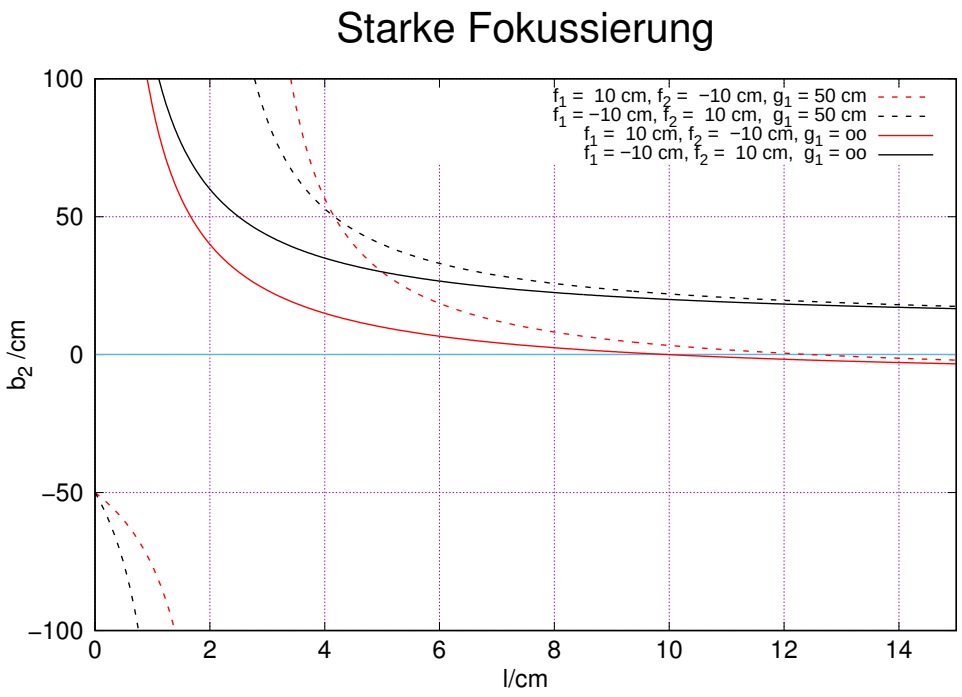


Abb. 2.15.: Starke Fokussierung, basierend auf [Mar16]

Abbildung 2.16 zeigt die Wirkung von elektrischen Feldlinien auf geladene Teilchen. Geladene Teilchen erfahren eine Kraft entlang der Feldlinien. Deshalb ist der linke Teil der Lücke fokussierend, der rechte defokussierend. Die Beträge der Fokuslängen sind gleich. Da die „Linsen“ nicht am gleichen Ort sind, kompensiert sich wie bei optischen Linsen die Wirkung der Fokussierung nicht komplett durch die Wirkung einer gleich starken Defokussierung. Zusammen ist so eine Konstruktion

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

fokussierend.

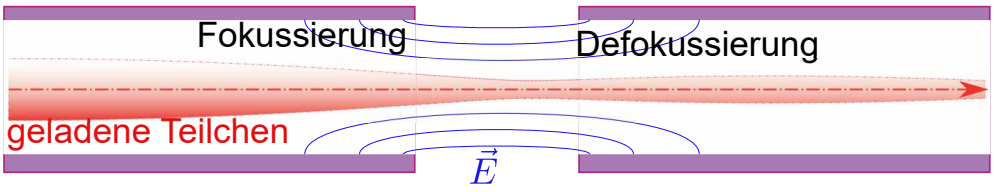


Abb. 2.16.: Fokussierung in Beschleunigern

2.1.7.4. Synchrotronschwingungen und Energiegewinn

Synchrotronschwingungen sind longitudinale Schwingungen, die entstehen weil Resonatoren Teilchen nicht kontinuierlich beschleunigen können. Es gibt N_{Res} Resonatoren.
Der Energiegewinn berechnet sich aus

$$\Delta E = N_{\text{Res}} q \cos\varphi(t_n) \text{ mit } \varphi(t_n) = 2\pi\nu t_n + \varphi_0 \tag{2.1.78}$$

Dabei ist ν die Frequenz, mit der das Synchrotron betrieben wird. Die Energie der Teilchen und die Grösse des $\boldsymbol{B}$-Feldes müssen synchron zunehmen.
Aus $m(v)v = p = qr_0B_z$ und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + c^2p^2$$

Der Energiezuwachs pro Umlauf ist

$$\Delta E = \left(\frac{dE}{dt}\right) T \tag{2.1.79}$$

wobei $T = \frac{2\pi r_0}{v}$ ist.
Dann ist

$$\frac{d}{dt}E^2 = 2E\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0c^4 + c^2p^2\right) = c^2p\frac{dp}{dt} \tag{2.1.80a}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{E}{c^2p}\frac{dE}{dt} \tag{2.1.80b}$$

Weiter gilt für die z Komponente von $\boldsymbol{B}$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{1}{qr_0}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{qr_0}\frac{E}{c^2p}\frac{dE}{dt} \tag{2.1.81a}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta E}{T} = \frac{\Delta E\, v}{2\pi r_0} = \frac{v \cdot N_{\text{Res}} qU_0 \cos\varphi(t_n)}{2\pi r_0} \tag{2.1.81b}$$

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{1}{qr_0}\frac{E(t)}{c^2p}\frac{v \cdot N_{\text{Res}} qU_0 \cos\varphi(t_n)}{2\pi r_0} = E(t)\frac{N_{\text{Res}} U_0 \cos\varphi(t_n)}{2\pi r_0^2 c^2 m} \tag{2.1.81c}$$

Damit ein Synchrotron funktioniert muss diese Beziehung gelten.

2.1.7.5. Steuerung der Magnetfelder

$$\nu = \frac{N_{Strecken}}{2\pi\sqrt{\left(\frac{r_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{qr_0B}\right)^2}} \tag{2.1.82}$$

Aus dem feststehenden Radius des Synchrotrons bekommen wir

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{m_0c}{qB}\sqrt{2\alpha+\alpha^2} = \frac{E_{kin}}{qcB}\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{E_{kin}}} \tag{2.1.83}$$

Im relativistischen Falle ist

$$r = \frac{E_{kin}}{qcB} \tag{2.1.84}$$

In einem Synchrotron werden die Magnetfelder und die Frequenzen nachgesteuert

$$B(\alpha) = \frac{m_0c}{qr}\sqrt{2\alpha+\alpha^2} \tag{2.1.85a}$$

$$v(\alpha) = c\frac{\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha} \tag{2.1.85b}$$

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{c}{2\pi r}\frac{\sqrt{2\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha} \tag{2.1.85c}$$

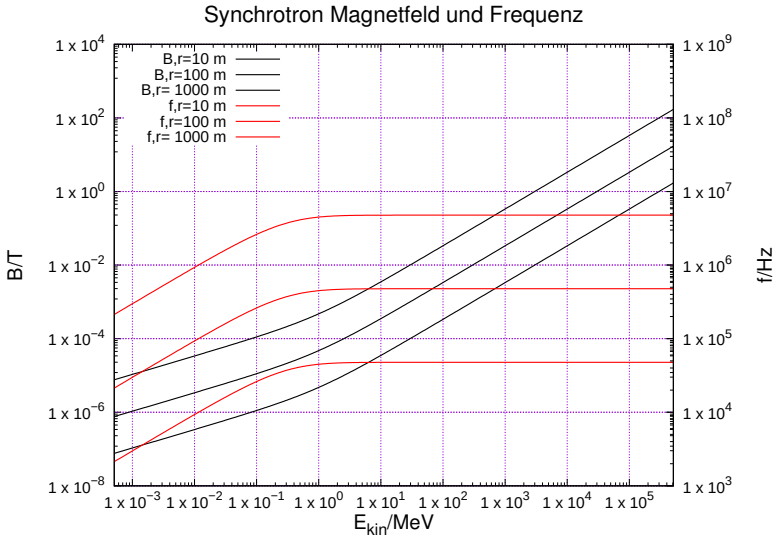


Abb. 2.17.: Nachsteuerung der magnetischen Induktion

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

2.1.8. Beispiele von Beschleunigern

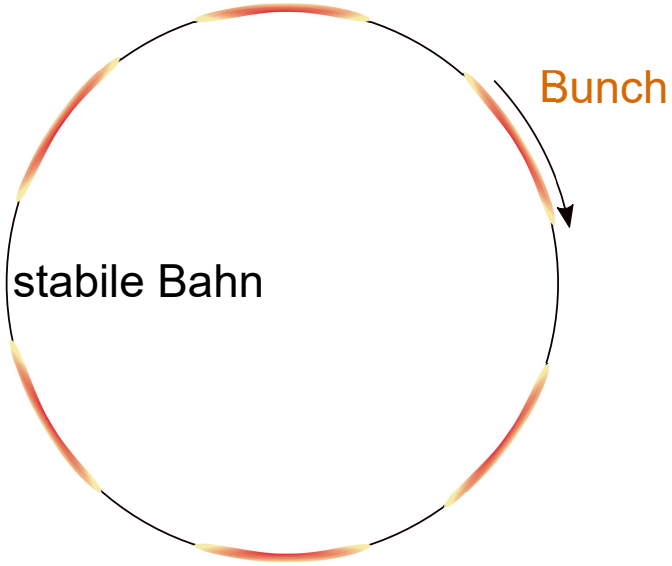


Abb. 2.18.: Teilchenpakete im Beschleuniger (adaptiert aus [Dem10, Abb. 4.31])

In Synchrotrons laufen Teilchen in Paketen im Kreis herum (Siehe Abb. 2.18). Dies ist notwendig, da keine Quelle Teilchen mit genau einer Geschwindigkeit erzeugen kann. Deshalb ist es notwendig, dass die Struktur der beschleunigenden Felder zu schnelle Teilchen weniger beschleunigt als zu langsame Teilchen. Damit erhält man eine longitudinale Fokussierung. Die Bunches können nicht beliebig kurz werden, da die geladenen Teilchen sich abstossen.

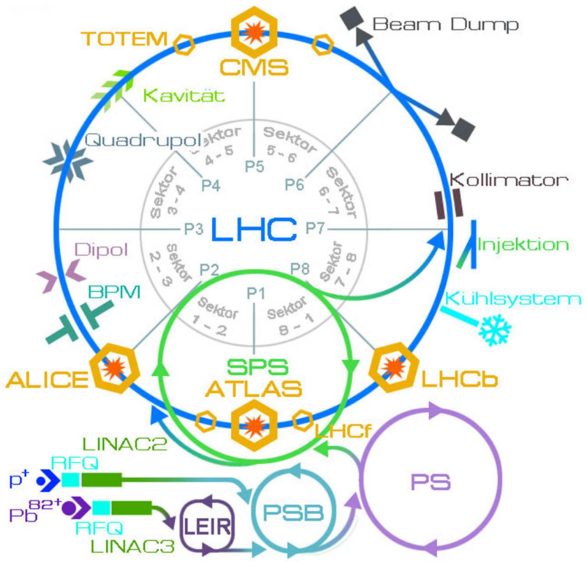


Abb. 2.19.: Layout des Large Hadron Collider des CERN [CER17a] (Nutzung nach den Terms of Copyright [CER17b])

Abbildung 2.19 zeigt das Layout des Large Hadron Colliders des CERN. Details dazu und auch der aktuelle Betriebszustand können unter http://www.lhc-facts.ch/

eingesehen werden.
Die Website des Beschleunigers ELSA in Bonn hat eine Liste von Beschleunigern weltweit «*Particle Accelerators Around the World* [Fro21]».

2.2. Detektoren

Ohne Detektoren sind die Experimente in der Kernphysik und in der Teilchenphysik nicht durchführbar. Der Mensch hat für diese Ereignisse keine Sinnesorgane! Unter Detektoren verstehen wir:

- Nachweisgeräte
- Spurendetektoren
- Energieauflösende Detektoren

2.2.1. Ionisationskammer

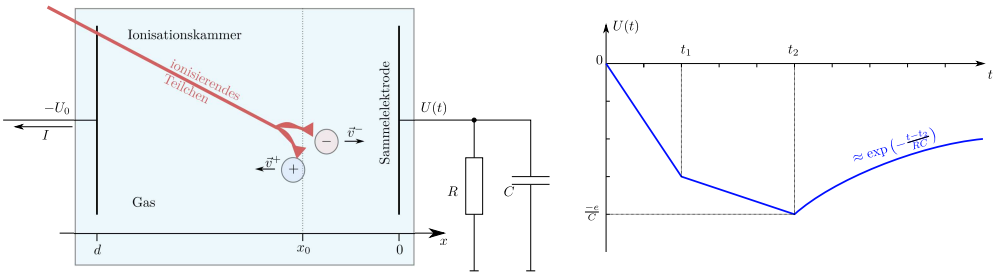


Abb. 2.20.: Aufbau einer Ionisationskammer und der entstehende Ausgangspuls (siehe auch W. Demtröder [Dem10, Fig. 4.59]).

Wenn ein ionisierendes Teilchen (siehe Abbildung 2.20 links) in eine Ionisationskammer eintritt ionisiert es durch Stösse das dort befindliche Gas. Das Elektron und das Ion werden durch das elektrische Feld nach links zur negativen Spannung $-U_0$ oder nach rechts zum RC-Glied beschleunigt. Die Spannung $U(t)$ ist im ungestörten Zustand 0. Wenn die Ionisation bei $t = 0$ geschieht werden die geladenen Teilchen beschleunigt. Da das Elektron leichter ist, trifft es zur Zeit t_1 auf der Sammelelektrode ein, bevor das Ion zur Zeit t_2 auf der Gegenelektrode eintrifft. Durch die kapazitive Kopplung erreicht die Spannung am Kondensator zur Zeit t_2 ihren negativen Maximalwert $-\frac{e}{C}$. e ist der Betrag der Elektronenladung. Der Kondensator C entlädt sich über R mit einer exponentiellen Charakteristik und der Zeitkonstante $\tau = RC$. Wichtig ist, dass $\tau \gg t_1$ und $\tau \gg t_2$ ist.
Die einmal gebildeten positiven und negativen Ladungsträger bewegen sich aber nicht im Vakuum, sondern in einem Gas. Dieses führt zur Rekombination der Ladungsträger mit der Rate

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \cdot n^+ \cdot n^- \tag{2.2.1}$$

mit α dem Rekombinationskoeffizienten. Diese Rate hängt sowohl von der Konzentration der negativen (n^-) wie auch der positiven (n^+) Ladungsträger ab. Nun

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

bewegen sich die schwereren positiven Ladungsträger langsamer, was zu Raumladungseffekten führt [Dem10, p. 97].
Für die Rekombination von positiven und negativen Ionen in Luft beträgt der Rekombinationskoeffizient $\alpha \approx 10^{-12}$ m^3 s^{-1} und für die Rekombination von positiven Ionen mit Elektronen $\alpha \approx 10^{-16}$ m^3 s^{-1}.

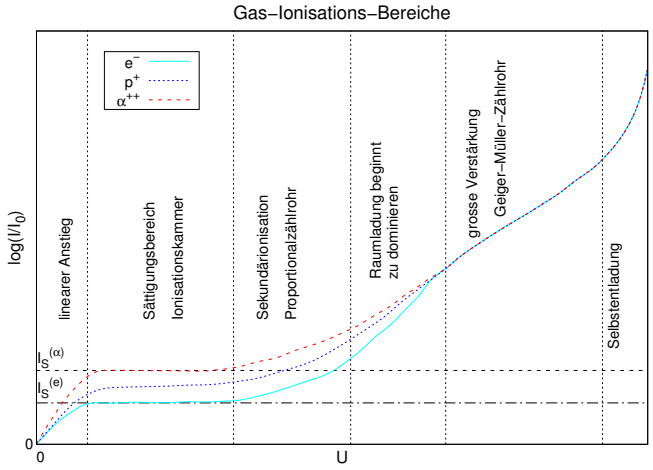


Abb. 2.21.: Unterschiedliche Ionisationsbereiche in einer Gasentladungsröhre (nach [Dem10, Abb. 4.58]).

In Abb. 2.21 können die folgenden Bereiche unterschieden werden:

linearer Anstieg In diesem Bereich sinkt die Driftzeit der Ladungsträger mit zunehmender Spannung U und damit sinkt auch die Rekombinationsrate.

Sättigungsbereich In diesem Bereich werden alle Ladungsträger gesammelt. Der Strom hängt von der Masse der ionisierenden Teilchen ab, α^{++} erzeugt mehr Ladungsträger und einen grösseren Strom als p^+ und da wieder grösser als e^-.

Sekundärionisation Ab elektrischen Feldern von $> 10^6$ V m^{-1} tritt Sekundärionisation auf. Da das elektrische Feld um einen Draht $E \propto \ln(r/r_0)$ ist, kann der Ionisationsbereich eng am Draht eingeschränkt werden.

Raumladung beginnt zu dominieren Die Raumladung der positiven Ionen erniedrigt die effektiv wirkende Spannung und damit die Ströme. Deshalb werden die Stromkurven für leichte und schwere Teilchen immer ähnlicher.

grössere Verstärkung Hier ist die Verstärkung so gross und die Raumladung so dominant, dass die Höhe des Strompulses unabhängig von der Teilchensorte ist. Dies ist der Bereich des Geiger-Müller-Zählrohrs (nach Hans Geiger und Walther Müller).

Selbstentladung In diesem Bereich sind die elektrischen Felder so hoch, dass sich die Elektroden spontan entladen können.

Ein Geiger-Müller-Zählrohr ist ähnlich aufgebaut wie ein Proportionalzählrohr.

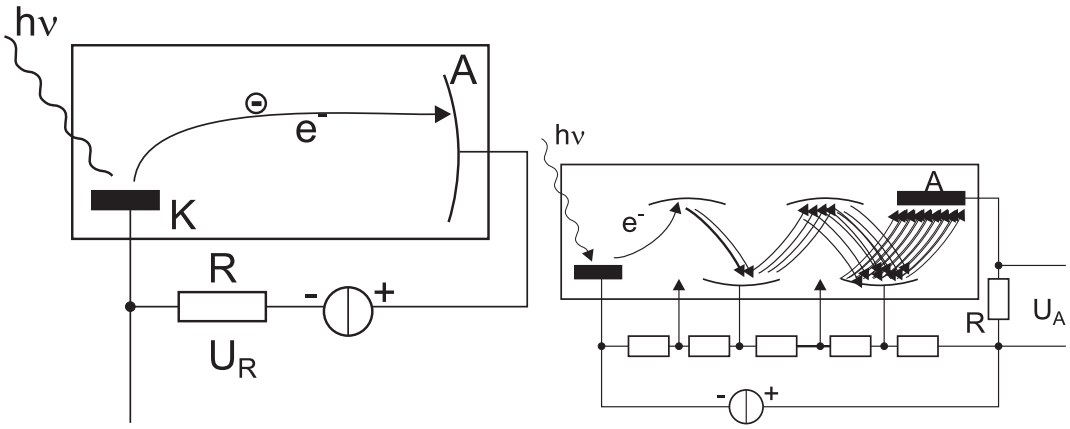
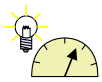


Abb. 2.22.: PHOTOZELLE (links) und PHOTOMULTIPLIER (rechts).



Versuch 1: Versuch zur Vorlesung:
Geiger-Müller-Zählrohr (Versuchskarte k-2, Video)

Anstelle des elektrischen Pulses kann auch das bei der Entladung entstehende Licht detektiert werden (FUNKENZÄHLER).

2.2.2. Szintillatoren

Szintillationszähler wandeln die kinetische Energie von Teilchen in Anregungen von Atomen in einem Szintillatormaterial um. Die entstehenden Lichtblitze werden in einem Photomultiplier (siehe Abb. 2.22) detektiert.

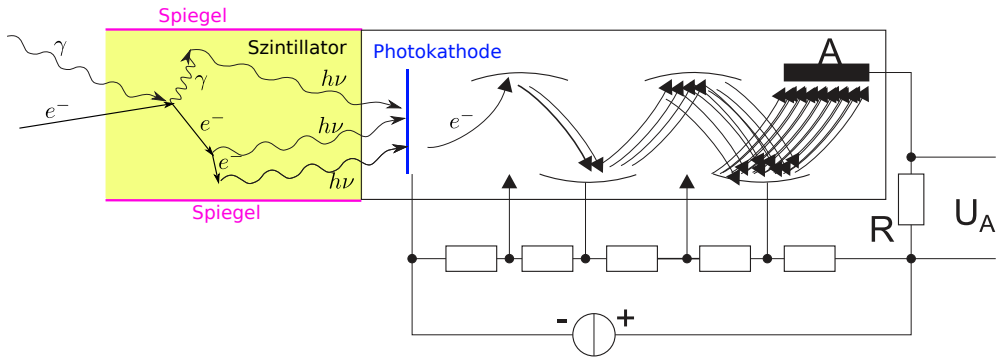


Abb. 2.23.: Schematischer Aufbau eines Szintillationsdetektors (siehe auch W. Demtröder [Dem10, Kap. 4.3.2.]

Wichtig ist, dass möglichst viel Licht gesammelt wird. Deshalb sind die Seiten des Szintillatorkristalls wie in Abb. 2.23 verspiegelt. Die von geladenen und ungeladenen Teilchen erzeugten Photonen werden von der Photokathode in Elektronen umgewandelt und dann im Photomultiplier verstärkt. Die Pulse werden dann wie bei der Ionisationskammer ausgelesen (siehe Abschnitt 2.2.1).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

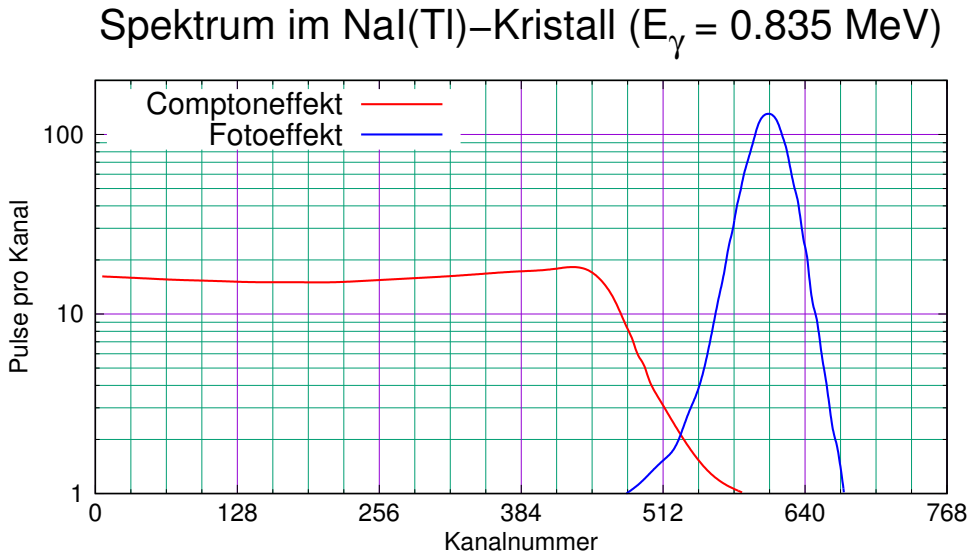


Abb. 2.24.: Spektrum eines Szintillators nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.62]

Abbildung 2.24 zeigt das Spektrum eines Szintillatorkristalls aus NaI(Tl). Natriumiodid wird mit Thallium aktiviert. Die dominanten Effekte sind der Comptoneffekt (siehe Abschnitt 4.4) und der Photoeffekt [MG19, Kap. 4.1.]. Pro Elektron entstehen

$$N_{\text{ph}} = \underbrace{\delta}_{Quantenausbeute} \cdot \frac{E_{kin}}{h\nu} \tag{2.2.2}$$

Photonen. Dies führt am Photomultiplier zur Spannung

$$U = M \cdot \eta \cdot \beta \cdot N_{\text{ph}} \cdot \frac{e}{C}. \tag{2.2.3}$$

Dabei sind M der Multiplikationsfaktor, η die Quantenausbeute der Photokathode, β der Bruchteil weitergeleiteter Elektronen und C die Kapazität. Die resultierende Spannung ist proportional zur Energie der Teilchen, also z.B. für γ-Quanten

$$U = U(E_\gamma) \tag{2.2.4}$$

Der Detektor funktioniert wie erwähnt auch mit γ-Quanten. Der Photoeffekt ist proportional zu Z^5, der Anzahl Elektronen (und Protonen) in einem Atom. NaI(Tl) ist dann nicht das optimale Szintillatormaterial. CsI ist besser geeignet. Bei hohen Energien dominiert dann der Compton-Effekt (siehe Abbildung 2.24).

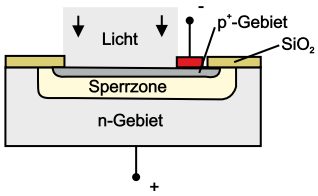


Abb. 2.26.: Schema der P^+NN^+–Fotodiode (skizziert nach Hinsch [Hin96]).

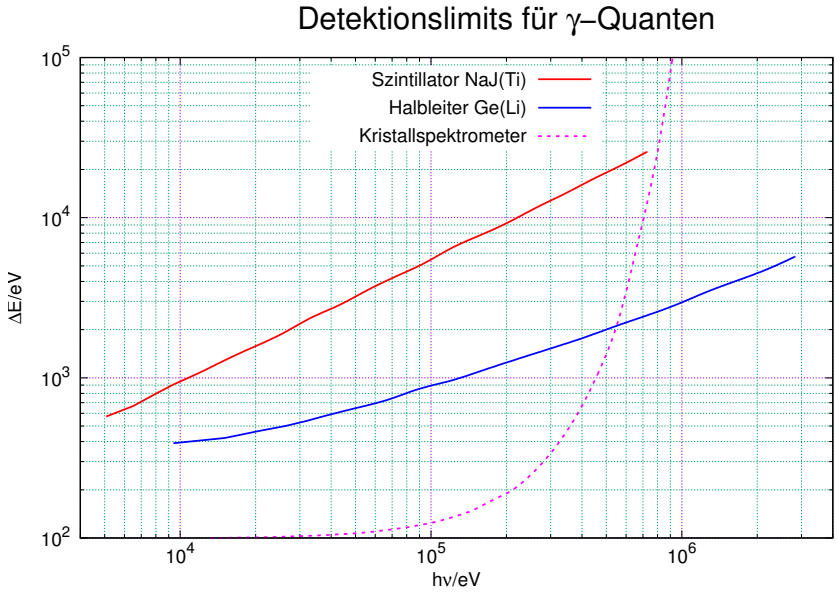


Abb. 2.25.: Detektionslimits nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.81]

Abbildung 2.25 zeigt schliesslich die Detektionsgrenzen von Szintillator-Detektoren und von Halbleiterdetektoren (siehe Abschnitt 2.2.3).

2.2.3. Halbleiterdetektoren

Abbildung 2.26 zeigt das Schema einer Photodiode. Hochenergetische Teilchen regen in der Sperrzone Elektronen ins Leitungsband an. Bei genügender Energie können auch mehrere Elektronen angeregt werden. Dabei ist die Breite der Übergangsschicht

$$d \approx \sqrt{\frac{3\epsilon\epsilon_0}{q}\left(\frac{1}{n_D}+\frac{1}{n_A}\right)U} \tag{2.2.5}$$

mit $U \sim 500$ V der angelegten Sperrspannung, $n_D \sim 1\cdot 10^{17}$ m^{-3} der Zahlendichte der Donatoren und $n_A \sim 1\cdot 10^{22}$ m^{-3} der Zahlendichte der Akzeptoren. Dann ist die Breite der empfindlichen Schicht, der Übergangsschicht $d \sim 1.3$ mm.

2.2.4. Čerenkov-Detektoren

Čerenkov-Detektoren beruhen auf der Čerenkov-Strahlung (nach Pavel Alexeevič Čerenkov [Che60]). Eine Beschreibung von Čerenkov-Detektoren gibt R. L. Mather [Mat51].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

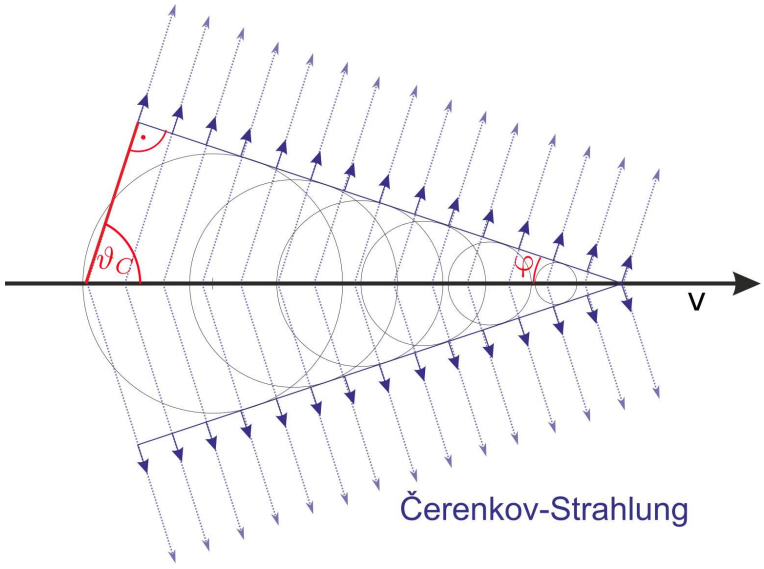


Abb. 2.27.: Čerenkov-Effekt

Abbildung 2.27 zeigt die Wirkung des Detektors. Ein geladenes Teilchen mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewirkt in den Atomen des durchflogenen Materials eine Bewegung der Ladungen, es entsteht eine elektromagnetische Welle. Da das Teilchen sich im Material mit $v > \frac{c}{n}$ bewegt, also schneller als die Lichtgeschwindigkeit im Material, bilden die entstehenden Huygens'schen Elementarwellen einen Konus. Der Öffnungswinkel des Konus ist φ

$$\sin(\varphi) = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{\beta n} \tag{2.2.6}$$

(β ist eine Abkürzung aus der speziellen Relativitätstheorie). Der Winkel der Richtung des ausgestrahlten Lichtes zum Geschwindigkeitsvektor heisst Čerenkov-Winkel $\vartheta_C = \pi - \varphi$.

$$\cos(\vartheta_C) = \frac{1}{\beta n} \tag{2.2.7}$$

R. L. Mather [Mat51] zitiert in seinem Paper I. Frank und I. Tamm [FT37] und I. Tamm [Tam39]: In den beiden Artikeln[2] wird die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{dN(x)}{dx} &= \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \Delta\omega \\ &= \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c^2} \left(1 - \cos^2(\vartheta_C)\right) \Delta\omega = \frac{Z^2 e^2 \sin^2(\vartheta_c)}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c^2} \Delta\omega \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

zitiert. Hier ist Z die Ladung des Teilchens und $dN(x)/dx$ die Anzahl abgestrahlte Teilchen pro Länge. Betrachten wir den Bereich von $\lambda = (400 \text{ bis } 700)$ nm ist

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_o} - \frac{2\pi c}{\lambda_u} = 2\pi c \left(\frac{1}{400 \text{ nm}} - \frac{1}{700 \text{ nm}}\right) = 2.0182 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

[2] Beide sind in elektronischer Form nicht erhältlich.

Damit ist die Zahl der Photonen

$$\frac{dN_{Z=1,(400 \text{ bis } 700)\ \text{nm}}(x)}{dx} = 49\,125.7\ \text{m}^{-1} \tag{2.2.9}$$

ein Wert, der mit [Mat51, Gleich. (2)] übereinstimmt. Wenn man $dN(x)/dx \cdot \hbar\omega = dW(x)/dx$ berechnet, also die abgestrahlte Energie pro Länge, und ω und $\Delta\omega$ und λ bzw. $\Delta\lambda$ umrechnet erhält man die abgestrahlte Leistung analog zu [Mat51, Gleich. (3)]

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{\varepsilon_0} \frac{\sin^2(\vartheta_C)}{\lambda^3} \Delta\lambda \tag{2.2.10}$$

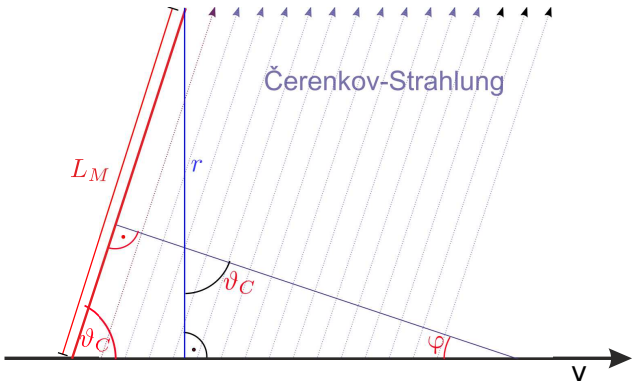


Abb. 2.28.: Berechnung der Energie aus dem Čerenkovwinkel.

Abbildung 2.28 zeigt die Berechnung des Čerenkovwinkels. Dazu betrachten wir die Fläche des Kegelmantels des Lichtkegels, nicht des Kegels der Wellenfront. Aus der Geometrie in der Abbildung ergibt sich, dass $r = L_M \sin(\vartheta_C)$ ist. Dann ist die Mantelfläche

$$A_M = \pi\ r\ L_M = \pi L_M^2 \sin(\vartheta_C) \propto \frac{dW(x)}{dx} \tag{2.2.11}$$

Aus der Fläche des Kegelmantels des Lichtkegels für zwei verschiedene Winkel ϑ_C bei gegebener Flugstrecke kann das Verhältnis der abgestrahlten Leistung bestimmt werden. Ebenso folgt aus $\cos\vartheta_c = 1 = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{v}$ die Minimalgeschwindigkeit für den Čerenkov-Effekt

$$v_{min,\text{Čerenkov}} = \frac{c}{n} \tag{2.2.12}$$

Wenn Teilchen durch die Wechselwirkung unter $v_{min,\text{Čerenkov}}$ abgebremst werden, hört die Čerenkov-Strahlung auf. Wenn der Lichtkonus auf eine Ebene projiziert wird, kann so die Energie und die Stärke der Wechselwirkung bestimmt werden.

2.2.5. Spurendetektoren

Mit Spurendetektoren meint man Nebel-, Blasen- und Funkenkammern. In ihnen werden Magnetfelder zur Bestimmung von Energie und Ladungsvorzeichen eingesetzt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{mv^2}{r_0} = q\,v\,B \tag{2.2.13}$$

2.2.5.1. Photoplatten

Bei Photoplatten wirken die Ionen, erzeugt durch die hochenergetischen Teilchen, als Kondensationskeime. So wird die Spur des Teilchens dargestellt.

2.2.5.2. Nebelkammern

Bei Nebelkammern wirken die Ionen, erzeugt durch die hochenergetischen Teilchen, als Kondensationskeime. In einem unterkühlten Gas entstehen so kleine Wassertröpfchen, Nebel. So wird die Spur des Teilchens dargestellt.
Wassertröpfchen sind nur ab einer gewissen Mindestgrösse stabil, da der Dampfdruck proportional zum Kehrwert des Tröpfchenradius ist. Damit ein Tröpfchen entsteht muss der Dampfdruck $p_s < p_{\text{extern}}$ kleiner als der Umgebungsdruck sein. Die Verkleinerung des Tröpfchenradius ergibt die Energie

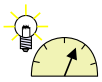
$$\Delta W = 4\pi\sigma\left(r^2 - (r-\Delta r)^2\right) \approx 8\pi\sigma r\Delta r \tag{2.2.14}$$

mit σ der Oberflächenspannung und Δr der Änderung des Radius. Nach Kelvin ist

$$p_s(r) = p_\infty \exp\left(2\frac{\sigma}{r}\frac{M}{\rho RT}\right) \tag{2.2.15}$$

mit p_∞ dem Sättigungsdampfdruck für $r = \infty$, ρ der Dichte der Flüssigkeit, M dem Molekulargewicht (pro Mol) und R der Gaskonstante.
Bei geladenen Tröpfchen verringert der nach aussen gerichtete Druck der Ladungen die kollabierende Wirkung der Oberflächenspannung

$$p_s(r) = p_\infty \exp\left(\left(2\frac{\sigma}{r} - \frac{Z^2e^2}{8\pi\epsilon_0 r^4}\right)\cdot\frac{M}{\rho RT}\right) \tag{2.2.16}$$



Versuch 2: Versuch zur Vorlesung:
Nebelkammer: Ulmer Nebel (Versuchskarte AT-72, Video)

2.2.5.3. Blasenkammern

Effizienter als Nebelkammern sind Blasenkammern, da sich bei Ihnen die Teilchen durch ein Material mit sehr viel höherer Dichte bewegen. Die höhere Dichte erhöht die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung. Wenn die Flüssigkeit überhitzt ist, dann bilden die geladenen Teilchen die Siedekeime. Es entstehen Bläschen entlang der Spur. Dieser Prozess ist analog zum Siedeverzug von Wasser in Mikrowellen, dem explosionsartigen Verdampfen des Wassers.

2.2.5.4. Streamerkammern

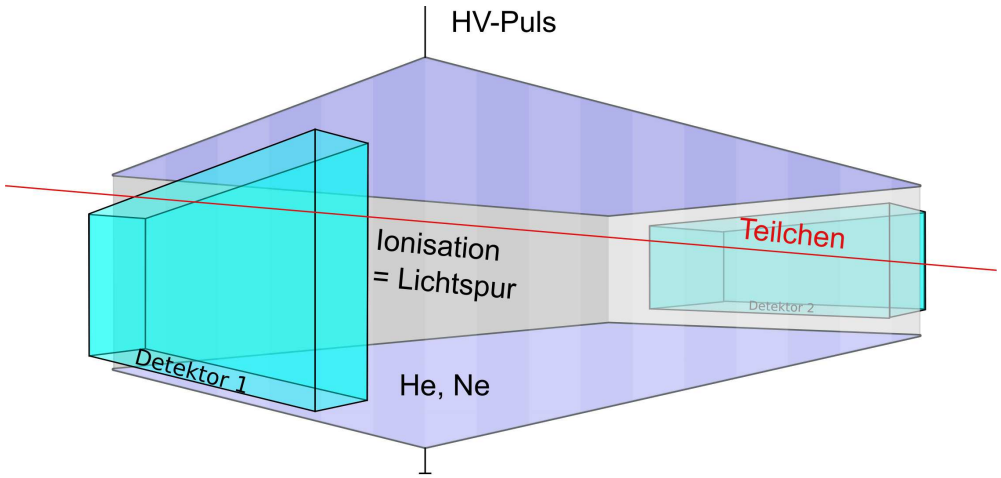


Abb. 2.29.: Prinzipieller Aufbau einer Streamer-Kammer

Streamerkammern wie in Abbildung 2.29 gezeigt bestehen aus einer gasgefüllten Kammer, je einem Detektor an der Eintritts und der Austrittsseite und Elektroden, an die Hochspannungspulse angelegt werden können. Tritt ein Teilchen sowohl durch den Eintritts- wie auch durch den Austrittsdetektor wird mit einer einstellbaren Zeitverzögerung ein Hochspannungspuls (≈ 500 kV, ≈ 10 ns) ausgelöst. Die ionisierten Atome entlang des Entladungskanals (Streamer) leuchten. Deren Licht wird detektiert. Der Hochspannungspuls beendet das Leuchten des STREAMERS.

2.2.5.5. Mehrdraht-Funkenkammern

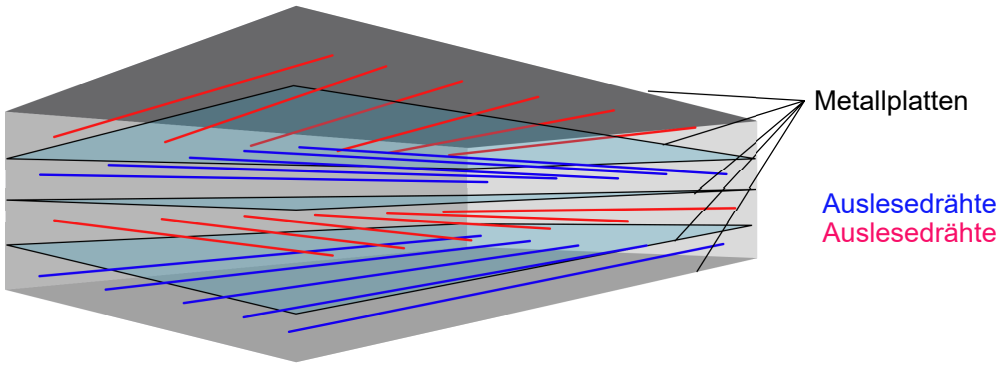


Abb. 2.30.: Prinzip der Mehrdraht-Funkenkammer

Mehrdraht-Funkenkammern wie in Abb. 2.30 funktionieren ähnlich. Detektoren am Eingang und am Ausgang stellen wieder fest, dass ein Teilchen passiert hat. Auch hier erzeugt das Teilchen wieder Ionen. Die Drähte sind geladen. Die Ionisationswahrscheinlichkeit ist in der Nähe dünner Drähte höher ist (siehe Seite 45). Deshalb bricht die Spannung zwischen jenen Drähten zusammen, zwischen denen das Teilchen passiert ist. Jeder Draht wird einzeln ausgelesen, die Signale verarbeitet, kategorisiert und die gesuchten Muster gespeichert, der Rest weggeworfen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

2.2.5.6. Anwendung: Zerfall von Pionen

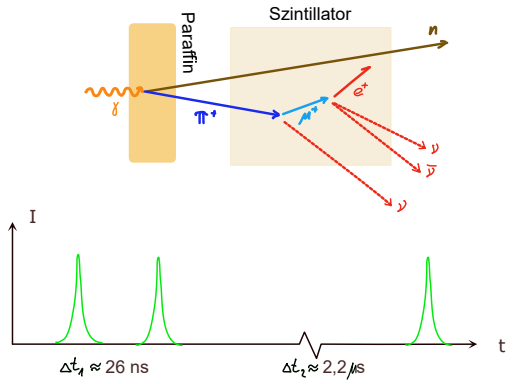


Abb. 2.31.: Messung des π^+-Zerfalls (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50] und W. Demtröder [Dem10].

Abbildung 2.31 zeigt eine Möglichkeit, den Zerfall des π^+ zu messen. O. Chamberlain u. a. [Cha+50] verwendeten Röntgenstrahlen aus einem 340 MeV-Synchrotron, um in einem Paraffin-Kristall (Kohlenwasserstoffketten mit einem hohen Wasserstoffanteil) π^+ zu erzeugen. Diese kommen in einem Szintillator zur Ruhe und emittieren dabei ein erstes Photonenpaket. Nach ihrer mittleren Lebensdauer wird ein weiteres Photonenpaket emittiert, diesmal beim Entstehen eines μ^+-Leptons. Auch dessen Zerfall nach 2.2 µs ergibt das dritte Lichtpaket. Daraus wurden dann die Messdaten in Abbildung 2.32 berechnet.

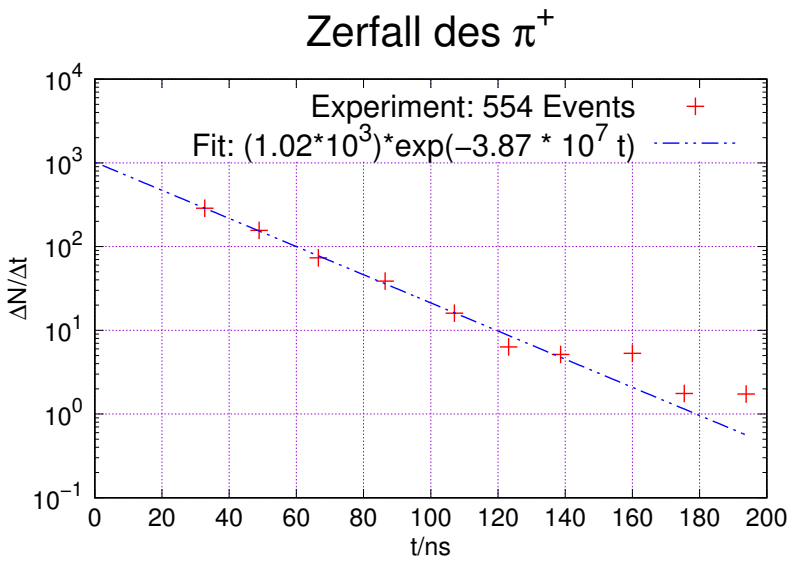


Abb. 2.32.: Zerfall des π^+ (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50], siehe auch W. Demtröder [Dem10, abb. 7.3]).

3. Fermionen und Bosonen

Diese Darstellung hier ist angelehnt an J. Bleck-Neuhaus [Ble13] und J.-M. Schwindt [Sch13]. Wir kennen aus früheren Vorlesungen zwei Teilchen, PHOTONEN und ELEKTRONEN. Beide Teilchen haben einen SPIN, das Elektron hat MASSE und LADUNG. Die Quantenmechanik sagt, dass beide Objekte durch Wellenfunktionen beschrieben werden können. Das Elektron mit einer endlichen RUHEMASSE kann sich nur mit $v < c$ bewegen, während im Vakuum die Geschwindigkeit von Photonen gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. In den folgenden zwei Abschnitten soll eine Zusammenfassung der Dirac-Theorie und ein Überblick über Spins und magnetische Momente gegeben werden.

3.1. Spin und magnetisches Moment

Nach J.-M. Schwindt [Sch13] betrachten wir zuerst Drehimpulse, klassisch definiert durch $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ für punktförmige Teilchen. Aus der Atomphysik / Quantenphysik wissen wir, dass für die Eigenwerte von Drehimpulsen per Kommutatorrelationen bestimmt werden können. Wir betrachten dazu die Operatoren $\hat{\mathrm{L}}_x$, $\hat{\mathrm{L}}_y$ und $\hat{\mathrm{L}}_z$ sowie $\hat{\mathrm{L}}^2$. Mit $k = \{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$ kann man die Kommutatorrelationen

$$[\,\hat{\mathrm{L}}_i, \hat{\mathrm{L}}_j\,] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{\mathrm{L}}_k \qquad \forall \{i, j\} \in \{1, 2, 3\} \tag{3.1.1a}$$

$$[\,\hat{\mathrm{L}}^2, \hat{\mathrm{L}}_i\,] = 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\} \tag{3.1.1b}$$

Hier ist ϵ_{ijk} der EPSILON-TENSOR, oder nach J.-M. Schwindt [Sch13] die EPSILON-TENSORDICHTE. Oftmals wird ϵ_{ijk} auch LEVI-CIVITA-TENSOR genannt. Es gilt, dass $\epsilon_{ijk} = 1$ ist wenn ijk eine gerade PERMUTATION von 1 2 3 ist, $\epsilon_{ijk} = -1$ wenn ijk eine ungerade Permutation von 1 2 3 ist und ϵ_{ijk}=0 sonst.

$$\epsilon_{ijk} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{i=1}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{i=2}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{i=3} \right) \tag{3.1.2}$$

Elektronen haben neben dem Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ auch einen Eigendrehimpuls, einen Spin $\boldsymbol{s}$. Die z-Komponente von $\boldsymbol{s}$ nimmt dabei die Werte $\pm\frac{1}{2}$ an. Die Kombination des Gesamtbahndrehimpulses L mit dem Gesamtspin S ist der Gesamtdrehimpuls J. Auch dort gilt

$$[\,\hat{\mathrm{J}}_i, \hat{\mathrm{J}}_j\,] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{\mathrm{J}}_k \qquad \forall \{i,j\} \in \{1,2,3\} \tag{3.1.3a}$$

$$[\,\hat{\mathrm{J}}^2, \hat{\mathrm{J}}_i\,] = 0 \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{3.1.3b}$$

Die Zustände eines Teilchens sind durch die Drehimpulsquantenzahlen ℓ, s, j und die entsprechenden z-Komponenten m (unabhängig vom Typ) noch nicht festgelegt. Beim Wasserstoffatom braucht es noch die Energiequantenzahl n, es kann aber auch irgend eine andere Quantenzahl ν zu einer anderen Messgrösse sein. Aus der Quantenphysik ist bekannt, dass Aufsteige- und Absteigeoperatoren ($\hat{\mathrm{J}}_+$ oder $\hat{\mathrm{J}}_-$) alle Zustände abbilden können:

$$\hat{\mathrm{J}}_+ \,|j,m,\nu\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)\,(j+m+1)}\,|j,m+1,\nu\rangle \tag{3.1.4a}$$

$$\hat{\mathrm{J}}_- \,|j,m,\nu\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)\,(j-m+1)}\,|j,m-1,\nu\rangle \tag{3.1.4b}$$

Der Spin mit seinen Eigenwerten $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$ kann durch zwei Eigenfunktionen dargestellt werden, also ein zweidimensionales Problem. Aus

$$\hat{\mathrm{S}}_z \left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle \text{ oder } \hat{\mathrm{S}}_z\,|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\pm\rangle \tag{3.1.5}$$

ergibt sich die Matrixschreibweise

$$\hat{\mathrm{S}}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

mit den gleichen Eigenwerten. Mit den Aufsteige- und Absteigeoperatoren (j durch s ersetzen) erhalten wir

$$\hat{\mathrm{S}}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.7a}$$

$$\hat{\mathrm{S}}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.1.7b}$$

Mit den Definitionen der Aufsteige- und Absteigeoperatoren folgt

$$\hat{\mathrm{S}}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{S}}_+ + \hat{\mathrm{S}}_-\right) \qquad = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.8a}$$

$$\hat{\mathrm{S}}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{\mathrm{S}}_+ - \hat{\mathrm{S}}_-\right) \qquad = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.8b}$$

Mit der Einheitsmatrix I haben wir eine vollständige Basis der komplexen 2×2-Matrizen. Weiter sind, bis auf Vorfaktoren, $\hat{\mathrm{S}}_x$, $\hat{\mathrm{S}}_y$nd $\hat{\mathrm{S}}_z$ die Pauli-Matrizen. $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ hat den Eigenwert $\hbar\,(s+1)\,s = \frac{3}{4}\hbar^2$. Es ist

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 I \tag{3.1.9}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Ein punktförmiges Elementarteilchen wie ein ELEKTRON mit Spin hat also zwei Wellenfunktionen, eine für den Ort (Hilbertraum $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{L}^2$ der Funktionen $\psi : (\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$ und dem Skalarprodukt $(\psi, \phi) = \int \psi^*(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x})$ und eine für den Spin (Hilbertraum $\mathcal{H}_\chi = \mathbb{C}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt). Die vollständige Wellenfunktion existiert nun im Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\psi \otimes \mathcal{H}_\chi$. Für Wellenfunktionen bedeutet dies, dass es für jeden Spinzustand eine eigene Wellenfunktion braucht. Wir können dann $|\pm\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}\rangle \otimes |\pm\rangle$ durch die beiden simultan existierenden Wellenfunktionen $(\psi_+(\boldsymbol{x}), \psi_-(\boldsymbol{x}))$ ausdrücken.

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int \begin{pmatrix}\psi_+^* & \psi_-^*\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\psi_+ \\ \psi_-\end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \int \left(|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2\right) d\boldsymbol{x} = 1 \tag{3.1.10}$$

Weiter haben wir

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \text{ mit } |\chi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \text{ und } |\psi_+\rangle = \alpha\,|\psi\rangle\,, \quad |\psi_i\rangle = \beta\,|\psi\rangle \tag{3.1.11}$$

Schliesslich ist die Normierungsbedingung auch

$$\int \left|\psi(\boldsymbol{x}^2)\right| d\boldsymbol{x} = 1 \text{ und } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{3.1.12}$$

Es gibt Teilchen wie die Z-Bosonen und die $W^\pm$-Bosonen wie auch das Photon, die einen Spin 1 haben. Diese Leben in einem dreidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$. Die Basisvektoren sind die Eigenzustände $|+\rangle$, $|0\rangle$ und $|-\rangle$. Die Spinoperatoren $\hat{\mathrm{S}}_x$, $\hat{\mathrm{S}}_y$, $\hat{\mathrm{S}}_z$ und $\hat{\mathrm{S}}^2$ sind die Matrizen

$$\hat{\mathrm{S}}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{3.1.13a}$$

$$\hat{\mathrm{S}}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \tag{3.1.13b}$$

$$\hat{\mathrm{S}}_z = \hbar \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.1.13c}$$

$$\hat{\mathrm{S}}^2 = 2\hbar \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2\hbar I \tag{3.1.13d}$$

$$\tag{3.1.13e}$$

Ein PHOTON hat einen Spin der Grösse $\hbar = 1 \cdot \hbar$. Das würde nach den vorherigen Ausführungen bedeuten, dass das Photon drei z-Zustände hätte. Nun bewegt sich aber ein Photon mit der Lichtgeschwindigkeit c. Deshalb existiert bei einem Photon der Zustand mit $m = 0$ nicht. Auch Photonen haben nur zwei mögliche Orientierungen entlang der z-Achse. Diese z-Achse liegt in die Bewegungsrichtung der Photonen. Der Spin des Photons ist gleichbedeutend mit den beiden möglichen ZIRKULAREN POLARISATIONSRICHTUNGEN.

Aus der Atomphysik wissen wir das Elektronen als Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen ein magnetisches Moment haben, so wie alle Fermionen. Der Spin $\boldsymbol{s}$ entspricht einem mechanischen Drehimpuls, der nach quantenmechanischen Überlegungen mit einem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}_s$ verknüpft ist. Der Zusammenhang zwischen dem Spin $\boldsymbol{s}$ und dessen magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}_s$ ist

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{s} \tag{3.1.14}$$

wobei

$$g_s = 2.0023 \tag{3.1.15}$$

ist. Der Wert von g_s ist überraschend:

- Das magnetische Moment ist etwa doppelt so gross wie aus klassischen Argumenten zu erwarten gewesen wäre. Dies ist ein quantenmechanischer Effekt.
- Aus klassischer quantenmechanischer Rechnung würde $g_s = 2$ folgen. Die Abweichung von 2.0000 ist ein quantenelektrodynamischer Effekt und durch Messungen auf viele Nachkommastellen bestätigt. Die Quantenelektrodynamik verknüpft die spezielle Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik. Gleichzeitig bietet sie eine einheitliche Beschreibung von Teilchen und Feldern.

Zur Erinnerung: Das magnetische Moment des Elektronenspins kann mit dem Bohrschen Magneton ausgedrückt werden

$$\mu_{s,z} = \pm 1.00116 \mu_{Bohr} \tag{3.1.16}$$

Das Verhältnis zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment heisst gyromagnetisches Verhältnis $\gamma = \frac{|\mu|}{|\ell|}$. Das gyromagnetische Verhältnis für den Bahndrehimpuls und den Spin ist

$$\gamma = 1.00116 \frac{e}{m_e} \tag{3.1.17}$$

Der Spin kann zum Beispiel mit dem Stern-Gerlach-Versuch nachgewiesen werden (nach Otto Stern und Walther Gerlach).

3.2. Dirac-Theorie

In seiner Theorie des Photoeffekts hat Albert Einstein gezeigt, dass elektromagnetische Wellen auch als Photonen angesehen werden können. Dies ist der Welle-Teilchen-Dualismus. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.2.2.] können die Maxwellgleichungen bei festgehaltener Frequenz ω in der Form der Gleichungen des harmonischen Oszillators geschrieben werden. Der Grund ist, dass die Energie des elektromagnetischen Feldes von $\boldsymbol{E}^2(t)$ und $\boldsymbol{B}^2(t)$ abhängt und dass beide Grössen über Zeitableitungen ($\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ in einer Dimension) verknüpft sind. Beim harmonischen Oszillator hängt die Gesamtenergie von $\boldsymbol{x}^2(t)$ und

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$\boldsymbol{p}^2(t)$ ab, und Impuls und Ort sind auch über eine Zeitableitung $\boldsymbol{p}(t) = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)$ miteinander verknüpft. Aus den Aufsteige- und Absteigeoperatoren werden im Zusammenhang mit Photonen Erzeugungs- ($\hat{\mathrm{c}}^\dagger$) und Vernichtungsoperatoren ($\hat{\mathrm{c}}$) für Photonen. Diese erhöhen oder erniedrigen die Photonenzahl n jeweils um 1.

$$\hat{\mathrm{c}}^\dagger \left|n\right\rangle = \left|n+1\right\rangle \tag{3.2.1a}$$
$$\hat{\mathrm{c}} \left|n\right\rangle = \left|n-1\right\rangle \qquad \text{mit } n > 0 \tag{3.2.1b}$$
$$[\,\hat{\mathrm{c}}, \hat{\mathrm{c}}^\dagger\,] = 1 \tag{3.2.1c}$$

Weiter kann die Zahl der Photonen durch den Operator

$$\hat{\mathrm{n}} \left|n\right\rangle = \hat{\mathrm{c}}^\dagger \hat{\mathrm{c}} \left|n\right\rangle = n \left|n\right\rangle \tag{3.2.2}$$

bestimmt werden. Ausgehend von der Matrixformulierung der Quantenmechanik nach Werner Heisenberg gelang es Paul Dirac im Jahre 1927 das elektromagnetische Feld quantisiert zu beschreiben. Er verwendete für das Feld den (Strahlungs-) Hamiltonoperator

$$\hat{\mathrm{H}}_{rad} = \sum_{k,\sigma} \left(\hat{\mathrm{n}}_{k,\sigma} + 1\right) \hbar\omega_k \tag{3.2.3}$$

wobei σ die beiden Polarisationsrichtungen sind und $k = |\boldsymbol{k}| = \omega_k/c$ alle Wellenzahlen beinhaltet. Paul Dirac kombinierte den Hamiltonoperator $\hat{\mathrm{H}}_{rad}$ des Feldes mit dem Hamiltonoperator eines Atoms. Er ergänzte diesen Operator durch einen Störoperator bestehend aus $\hat{\mathrm{c}}^\dagger$ und $\hat{\mathrm{c}}$: Diese Operatoren verändern den Zustand des Atoms in dem Sie ein Photon vernichten (absorbieren) oder erzeugen (emittieren). Eine weitere Konsequenz seiner Theorie war, dass es zu jedem Fermion ein Antiteilchen gibt, auch ein Fermion. Das heisst, dass ein Teilchen und sein Antiteilchen sich vernichten können. Umgekehrt heisst das auch, dass Teilchen und Antiteilchen nur gemeinsam entstehen können. Die Zahl der Fermionen einer bestimmten Art ist also konstant wenn Antiteilchen negativ gezählt werden. Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) können in Paaren erzeugt werden, müssen aber nicht. Wenn Bosonen geladen sind, dann können sie nur in Paaren entstehen.
Elementarteilchen sind wie Photonen ununterscheidbar. Dirac gelang es, das elektromagnetische Feld in der sogenannten zweiten Quantisierung ohne Nummerierung der Teilchen zu beschreiben. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] folgt daraus die Bose-Einstein-Statistik. Die Ununterscheidbarkeit bedeutet, dass die Teilchen interferieren. Die Ununterscheidbarkeit verlangt, dass bei mehreren gleichartigen Teilchen beim Vertauschen von zwei Teilchen

- die Mehrteilchenwellenfunktion für Bosonen (ganzzahliger Spin) gleich bleibt (symmetrische Wellenfunktion) oder
- die Mehrteilchenwellenfunktion für Fermionen (halbzahliger Spin) das Vorzeichen umkehrt (antisymmetrische Wellenfunktion).

Bei zwei Teilchen vom identischen Typ mit den Wellenfunktionen ψ und ϕ ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] die resultierende Zweiteilchenwellenfunktion

$$\psi^{s,a}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(1)\phi(2) \pm \psi(2)\phi(1)\right) \tag{3.2.4}$$

Diese Operation nennt sich SYMMETRISIERUNG (Vorzeichen +, Index s für Bosonen) oder ANTISYMMETRISIERUNG (Vorzeichen −, Index a für Fermionen). Gleichung (3.2.4) hat zur Konsequenz, dass zwei Fermionen nicht im gleichen Zustand sein können, d. h. nicht die gleiche Wellenfunktion haben dürfen. Dann ist nämlich $\psi^a(1,2) = 0$. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] bedeutet dies, dass zwei Elektronen (allgemein Fermionen) mit parallelem Spin eine antisymmetrische Ortsfunktion haben müssen, d.h. wenn Ihre Orte $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ gleich sind ist wieder $\psi^a(1,2) = 0$.
J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] gibt das folgende Beispiel an: Es seinen ψ und ϕ zwei orthogonale Zustände, d.h. sie sind wegen der Konstruktion nicht gleich und erfüllen damit das Prinzip, dass zwei Fermionen nicht im gleichen Zustand sein dürfen. Ein Parameter $0 \leq \beta \leq 1$ erlaubt die Konstruktion einer weiteren normierten Wellenfunktion $\phi_\beta = \sqrt{1-\beta^2}\psi + \beta\phi$. Für $\beta = 1$ bekommen wir die beiden orthogonalen Wellenfunktionen. Die antisymmetrisierte Zweiteilchenwellenfunktion ist dann

$$\begin{aligned}
\psi^a(1,2,\beta) &= \frac{k}{\sqrt{2}}\left(\psi(1)\phi_\beta(2) - \psi(2)\phi_\beta(1)\right) \\
&= \frac{k}{\sqrt{2}}\left(\psi(1)\left(\sqrt{1-\beta^2}\psi(2) + \beta\phi(2)\right) - \psi(2)\left(\sqrt{1-\beta^2}\psi(1) + \beta\phi(1)\right)\right) \\
&= \frac{k}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-\beta^2}\psi(1)\psi(2) + \beta\phi(2)\psi(1) - \sqrt{1-\beta^2}\psi(2)\psi(1) - \beta\psi(2)\phi(1)\right) \\
&= \frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2}}\left(\psi(1)\psi(2) - \psi(2)\psi(1)\right) + \frac{k\beta}{\sqrt{2}}\left(\phi(2)\psi(1) - \psi(2)\phi(1)\right) \\
&= \frac{k\beta}{\sqrt{2}}\left(\phi(2)\psi(1) - \psi(2)\phi(1)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Es bleibt also nur der Term mit den orthogonalen Wellenfunktionen übrig. Die Normierung verlangt, dass $k = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ist. Wenn $\beta = 0$ ist, ist die resultierende Wellenfunktion 0. In allen anderen Fällen ist sie einfach die Kombination der beiden orthogonalen Wellenfunktionen. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.3.3.] kann die antisymmetrische Variante der Gleichung (3.2.4) als Determinante einer quadratischen Matrix bestehend aus zwei Spaltenvektoren geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\psi^a(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\det\left(\begin{pmatrix}\psi(1)\\ \psi(2)\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\phi(1)\\ \phi(2)\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\det\begin{pmatrix}\psi(1) & \phi(1)\\ \psi(2) & \phi(2)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(1)\phi(2) - \psi(2)\phi(1)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Nun ist nach den Gesetzen der linearen Algebra die Determinante unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Das heisst, die resultierende Wellenfunktion hängt nicht von der gewählten Basis ab.
Werden bei einem System von vielen identischen Fermionen zwei Paare ausge-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

tauscht, dann ändert sich das Vorzeichen für jedes Teilpaar einmal, insgesamt also nicht. Dies ist der Fall bei der Supraleitung, da dort die Elektronen zu Cooper-Paaren vereint sind. Die Gesamtwellenfunktion eines Systems von Fermionen hat also symmetrische, bosonische Anteile. Bei Supraleitern sind durch die Paarbildung die antisymmetrischen Anteile unterdrückt. Supraleiter sind ein bosonisches System.
Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Frage 9.2] zeigt sich, dass die abstossende Coulombkraft zweier Elektronen durch die Orbitale noch nicht vollständig gegeben ist.

$$E_{pot} = \langle \Psi^a(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) | \, V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \, | \Psi^a(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \rangle \\ = E_{pot}(\text{direct}) - E_{pot}(\text{ausgetauscht}) \quad (3.2.7)$$

Das heisst, der erste Term $E_{pot}(\text{direct})$ ist die klassische potentielle Energie zwischen den zwei Elektronenzuständen $\psi(\boldsymbol{r})$ und $\phi(\boldsymbol{r})$ in der antisymmetrischen Wellenfunktion $\Psi^a(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$. Der zweite Term $E_{pot}(\text{ausgetauscht}$ ist die quantenmechanische Korrektur, hier mit einem «$-$» wegen der Antisymmetrie der Fermionen. Die abstossende potentielle Energie zweier Elektronen wird durch Austauschkräfte (die Interferenzen) verringert.
Bei bosonischen Teilchen muss Gleichung (3.2.7) so geschrieben werden:

$$E_{pot} = \langle \Psi^s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) | \, V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \, | \Psi^s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \rangle \\ = E_{pot}(\text{direct}) + E_{pot}(\text{ausgetauscht}) \quad (3.2.8)$$

Hier ist die klassische potentielle Energie durch den positiven Term erhöht.

3.2.1. Basiszustände in der zweiten Quantisierung

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kasten 9.2] sagt, dass es im Vakuum einen Grundzustand mit dem Zustandsvektor $|\mathbf{0}\rangle$ mit der Normierung $\langle \mathbf{0}|\mathbf{0}\rangle = 1$ gäbe. Wenn nun ein Teilchen erzeugt werden soll verwendet man den Aufsteigeoperator $\hat{a}_k^\dagger$, wobei k den in einer Einteilchenbasis zu erzeugenden Zustand ϕ_k beschreibt.

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger \, |\mathbf{0}\rangle \quad (3.2.9)$$

In der Ortsbasis verwenden wir den Erzeugungsoperator $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})$ um am Ort $\boldsymbol{r}$ das Teilchen $|\boldsymbol{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}) \, |\mathbf{0}\rangle$ zu erzeugen. Die zum Eigenzustand $|\boldsymbol{r}\rangle$ gehörige Eigenfunktion ist $\psi(\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$.
In der Vorlesung Atomphysik oder Quantenmechanik wurde der Sachverhalt so beschrieben: Der Zustand $|k\rangle$ hat die Wellenfunktion ([Ble13, Kasten 9.2])

$$\phi_k(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}\rangle = \langle \mathbf{0}| \, \hat{\psi}(\boldsymbol{r}) \hat{a}_k^\dagger \, |\mathbf{0}\rangle \quad (3.2.10)$$

Ein zweites Teilchen entsteht durch

$$|k', k\rangle = \hat{a}_{k'}^\dagger \hat{a}_k^\dagger \, |\mathbf{0}\rangle \quad (3.2.11)$$

Der Operator $\hat{a}_k$ vernichtet den Zustand $|k\rangle$. Insbesondere gilt $\hat{a}_k \, |\mathbf{0}\rangle = 0$.

3.2.2. Freie Teilchen

Wie im Abschnitt 3.2.1 und bei J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.1.] skizziert werden Teilchen durch zustandsspezifische Aufsteigeoperatoren erzeugt

$$|k\rangle = \hat{a}_k^\dagger |\mathbf{0}\rangle \tag{3.2.12}$$

Der Prozess ist analog zu dem im HARMONISCHEN OSZILLATOR. Mit Hilfe des Kommutators (tiefgestellter Index «−») und des Antikommutators (tiefgestellter Index «+»)

$$[\,X, Y\,]_+ = XY + YX \qquad \text{Antikommutator} \tag{3.2.13a}$$
$$[\,X, Y\,]_- = [\,X, \acute{Y}\,] = XY - YX \qquad \text{Kommutator} \tag{3.2.13b}$$

kann man die folgenden Relationen für Aufsteige- und Absteigeoperatoren (oder Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren) für zwei Zustände A und B einer orthonormierten Basis hinschreiben

$$[\,\hat{a}_A, \hat{a}_B^\dagger\,]_\pm = \hat{a}_A\hat{a}_B^\dagger \pm \hat{a}_B^\dagger\hat{a}_A = \begin{cases} 1, & \text{wenn } A = B; \\ 0, & \text{wenn } A \neq B. \end{cases} \quad \text{und} \quad [\,\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger\,]_\pm = 0 \tag{3.2.14}$$

Die 0 in Gleichung (3.2.14) ist die Zahl Null oder der Nullvektor. Dieser Nullvektor muss vom Vektor des Vakuums, hier auch mit einer Null beschrieben, unterschrieben werden. In Gleichung (3.2.14) steht der Kommutator (tiefgestellter Index «−») für **Bosonen**, der Antikommutator (tiefgestellter Index «+») für **Fermionen**. Der Grund ist: Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen in Mehrteilchensystemen antikommutieren. Dies ist nicht zu verwechseln mit den Zuständen: Orthogonale Fermionenzustände kommutieren.
Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.1.] ergibt sich daraus das AUSCHLUSSPRINZIP (PAULIPRINZIP) aus der zweiten Relation in Gleichung (3.2.14).

$$[\,\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger\,]_+ = \hat{a}_A^\dagger\hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_B^\dagger\hat{a}_A^\dagger = 0 \tag{3.2.15}$$

Bei zwei identischen Fermionen (Vorzeichen «+», $A = B$) ergibt sich $2\hat{a}_A^\dagger\hat{a}_B^\dagger = 0$ (der Nulloperator).

Der Hamiltonoperator eines Vielteilchensystems mit allen Wechselwirkungen kann allein durch wiederholte Anwendung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$) konstruiert werden.

Wenn die $E(k)$ die Energieeigenwerte freier Teilchen in den Einteilchenzuständen $|k\rangle$ sind, wenn der Teilchenzahloperator $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ ist und wenn es keine Wechselwirkungen der Teilchen untereinander gibt, dann lautet der Hamiltonoperator des Vielteilchensystems

$$\hat{H}_{\text{freie Teilchen}} = \sum_{\forall k} E(k)\hat{n}_k = \sum_{\forall k} E(k)\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k \tag{3.2.16}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Dies ist der Operator der Gesamtenergie. Die Summe bei Elektronen ist dann über alle Raumdimensionen.
Photonen entstehen aus dem gleichen Vakuum, aber mit anderen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($\hat{c}^\dagger$ und $\hat{c}$). Der Hamiltonoperator für die elektromagnetische Strahlung ist

$$\hat{H}_{\text{Strahlung}} = \sum_{\forall p} \hbar\omega_p \hat{n}_p = \sum_{\forall p} \hbar\omega_p \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p \tag{3.2.17}$$

Elektronen und Strahlung hätten ohne Wechselwirkung den Gesamthamiltonoperator $\hat{H}_{\text{gesamt}} = \hat{H}_{\text{freie Teilchen}} + \hat{H}_{\text{Strahlung}}$.

3.2.3. Teilchen mit Wechselwirkungen

Wechselwirkungen werden in die Welt der zweiten Quantisierung eingefügt, indem zusätzliche Terme genannt Hamiltonoperator der Wechselwirkung $\hat{H}_{WW}$ addiert werden. Die Idee dabei ist: Wenn ein Teilchen vom Zustand A in den Zustand B wechselt muss gleichzeitig ein Teilchen des Zustandes A vernichtet und eines des Zustandes B erzeugt werden. Wir erinnern uns daran, dass die Operatoren in der Reihenfolge von rechts nach links angewandt werden.

$$\hat{H}_{WW}(A \to B) = \hat{a}_B^\dagger \hat{a}_A \tag{3.2.18}$$

Sollte der Zustand A kein Teilchen beinhalten, dann kommt hier null heraus. Dieser Wechselwirkungsoperator muss nun entsprechend realer physikalischer Wechselwirkungen konstruiert werden. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.3.] kann der Wechsel eines Elektrons von einem Zustand höherer Energie A in einen Zustand niedriger Energie A' unter Aussendung eines Photons so geschrieben werden

$$\hat{H}_{\text{Photonenemission}} = \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_p^\dagger \tag{3.2.19}$$

Entsprechend wäre der Hamiltonoperator der Photonenabsorption

$$\hat{H}_{\text{Photonenabsorption}} = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_{A'} \hat{c}_p \tag{3.2.20}$$

Wenn zwei Teilchen A und B aneinander streuen und nach dem Stoss in den Zuständen A' und B' sind lautet der vorläufige Wechselwirkungshamiltonoperator

$$\hat{H}_{\text{Streuung}} = \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \tag{3.2.21}$$

Wer Billard spielt weiss, dass aus dem gleichen Ausgangszustand durchaus mehrere Endzustände auftreten können. Weil in der Quantenwelt Ort und Impuls nach Werner Heisenberg nie gleichzeitig genau gemessen werden kann muss über alle möglichen Endzustände summiert (integriert) werden. Da nun nicht jedes Resultat des Stossprozesses gleich wahrscheinlich ist, müssen wir noch eine Wahrscheinlichkeit, die Streuamplitude $f(\Delta\boldsymbol{p})$ aus dem Impulsübertrag $\Delta\boldsymbol{p}$, mit multiplizieren.

$$\hat{H}_{\text{Streuung}} = \sum_{\substack{\forall A.A', B, B' \\ \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_{A'} - \boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{p}_B - \boldsymbol{p}_{B'}}} f(\Delta p) \hat{a}_{B'}^\dagger \hat{a}_B \hat{a}_{A'}^\dagger \hat{a}_A \tag{3.2.22}$$

Für die Coulombkraft ist $f(\Delta\boldsymbol{p}) \propto \frac{1}{(\Delta\boldsymbol{p})^2}$.

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.4.3.] gibt weiter an, dass eine genaue Rechnung zeigt, dass der Wechselwirkungshamiltonoperator nach Gleichung (3.2.22) nicht braucht, sofern im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung die Emission von Photonen nach Gleichung (3.2.19) und die Absorption von Photonen nach Gleichung (3.2.20) sowie eine korrekte Störungsrechnung verwendet werden.Dies führt dann letztlich auf den Formalismus der Feynmandiagramme (von Richard Feynman) nach Abschnitt 12.4.
Die Wechselwirkung über elektromagnetische Felder wird in diesem Formalismus über die Emission und die Absorption von Photonen gehandhabt. Das heisst, jegliche elektromagnetische Wechselwirkungsoperatoren müssen mindestens die Hamiltonoperatoren der Photonenabsorption und der Photonenemission enthalten. Das kann J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 9.5.] auch so formuliert werden:

Der elementare Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Emission und Absorption eines Photons.

Wenn die erlaubten Zustände die Impulseigenzustände von Elektronen und von Photonen sind und davon nur die genommen werden, die die Energie-, und Impulserhaltung sowie den Erhaltungssatz von der Anzahl Fermionen erfüllen. Dies heisst, dass $\boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_\gamma$ und $E_A = E_B + E_\gamma$ ist wobei γ für ein Photon steht (γ-Quant). Die Stärke der Wechselwirkung wird über eine noch zu bestimmende Kopplungskonstante g angegeben [Ble13, Kap. 9.5.]. Schliesslich benötigt man zur Normierung noch einen Faktor $1/\sqrt{p_\gamma c}$. Dieser Faktor ergibt sich aus der Umrechnung freier elektromagnetischer Felder in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (und erinnert an die relativistische Energie $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$ mit $m_0 = 0$).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

4. Streuexperimente

Bei Streuexperimenten gibt es die folgenden Untersuchungsmethoden:

- Elastische Streuung: Ein einfallender Strahl mit der Teilchenflussdichte $\Phi = nv_0$ (Einheit $[\Phi] = \mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$) trifft auf das Ziel mit der Fläche A. Die Anzahl Teilchen pro Zeiteinheit ist

$$\frac{dN}{dt} = \Phi\ A \tag{4.0.1}$$

  In der Zeit Δt treffen dann $N = \frac{dN}{dt}t = \dot{N}t = \Phi\ A\ \Delta t$ Teilchen auf, von denen $\Delta N = \Delta\dot{N}\Delta t = \Delta\Phi\ A\ \Delta t$ gestreut werden.

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta\dot{N}\Delta t}{\dot{N}t} = f\left(\vartheta, E_0\right)\delta\Omega \tag{4.0.2}$$

  mit

$$f(\vartheta, E_0) = \frac{n_T}{A}V\frac{d\sigma(\vartheta, E_0)}{d\Omega} \tag{4.0.3}$$

  Hier ist ϑ der Ablenkwinkel. Die Teilchen werden un den Raumwinkel Ω gestreut. Dabei ist die Teilchendichte im Target n_T und im nichtrelativistischen Falle die Energie $E_0 = \frac{1}{2}mv^2$

- Inelastische Streuung: Es gibt die folgenden Arten inelastischer Streuung:
  - Reaktive Streuung
  - Spektroskopie der Gammastrahlen für angeregte Kernzustände
  - Ersatz eines Elektrons durch ein μ, das sich im Wesentlichen im Kern aufhält
  - Messung der Energieverteilung der emittierten Teilchen von instabilen Kernen (e^- oder α)

Im Folgenden werden einzelne Realisierung von elastischer und inelastischer Streuung besprochen.

4.1. Röntgenstrahlung und Rayleigh-Streuung

Wenn Röntgenlicht (nach Wilhelm Conrad Röntgen) an einer Ladungswolke gestreut wird, tritt Rayleigh-Streuung auf. Das elektrische Feld der Röntgenwelle bringt die Ladungen des Kerns zum Schwingen. Diese strahlen dann nach [Mar16, Kap. 6.5]

$$I(r,\Theta) = \langle S(r,\Theta,t)\rangle_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{q^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2}\frac{\sin^2\Theta}{2r^2} \tag{4.1.1}$$

elektromagnetische Energie der gleichen Frequenz ab, es tritt also Streuung auf. Aus der Gleichung (4.1.1) kann abgelesen werden, dass die Streuamplitude der Rayleigh-Streuung proportional zu $\omega^4 \propto \nu^4$ ist. Die Amplitude ist proportional $q = Z \cdot e$, die Intensität oder der Betrag des Poynting-Vektors proportional zu Z^2e^2. Bei einer Energie von $\hbar\omega = 3$ keV ist die Wellenlänge $1.046\,852\,1 \cdot 10^{-11}$ m und die Frequenz $2.863\,752 \cdot 10^{19}$ 1/s, im Vergleich zu grünem Licht mit der Wellenlänge $5 \cdot 10^{-7}$ m und der Frequenz $6.00 \cdot 10^{14}$ 1/pers. Deshalb ist die Intensität der Rayleigh-Streuung für die Energie $\hbar\omega = 3$ keV somit $5.204016 \cdot 10^{18}$ mal stärker als für grünes Licht.

4.2. Streumethoden

Bei einem Streuexperiment werden Teilchen an einem ruhenden (oder bewegten) Objekt, TARGET genannt, gestreut. Das Target wird über seinen Wirkungsquerschnitt σ charakterisiert. σ ist die aus der Ferne aus der Richtung des streuenden Teilchens gesehene Querschnittsfläche eines harten Streukörpers. Der Wirkungsquerschnitt wird in der Teilchenphysik mit der Einheit

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} := 10^{-28} \text{ m}^2 \tag{4.2.1}$$

Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Streuereignis eintritt wenn eine Fläche A mit N sich nicht überlappenden STREUZENTREN mit dem Streuquerschnitt σ mit einem Projektil beschossen wird ist

$$p = \frac{N\sigma}{A} \tag{4.2.2}$$

Solange Streuzentren sich nicht überlappen ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch die Geometrie.

Der TOTALE WIRKUNGSQUERSCHNITT wird auch mit der Grösse σ gemessen und ist durch

$$\sigma = \frac{\frac{\#\text{Reaktionen}}{\text{Zeit}}}{\frac{\text{Strahlteilchen}}{\text{Zeit}} \cdot \frac{\text{Streuzentren}}{\text{Fläche}}} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a \cdot \frac{N_b}{A}} = \frac{\dot{N}}{I \cdot N_b^A} s \tag{4.2.3}$$

Hier ist $\dot{N}$ die Anzahl der Streuprozesse (Reaktionen) pro Sekunde, $\dot{N}_a$ die Anzahl der Teilchen pro Sekunde im einströmenden Teilchenstrahl, N_b Die Anzahl Streuzentren in der Fläche A. $\dot{N}_a = I$ ist auch der TEILCHENSTROM der eintreffenden Teilchen. $\frac{N_b}{A} = N_{bA}$ ist die Flächendichte der Streuzentren (mit der Annahme, dass die Zentren sich nicht überlappen).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

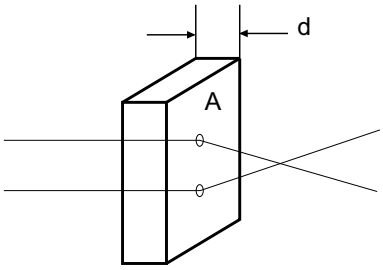


Abb. 4.1.: Berechnung eines Streuquerschnittes nach [Dem10, Abb 2.3].

Abbildung 4.1 zeigt eine weitere Betrachtungsmöglichkeit. Sei n_a die Teilchendichte im eintreffenden Strahl, N_a die gesamte Teilchenzahl im Strahl, v_a die (mittlere) Strahlgeschwindigkeit, n_b die Volumendichte der Streuzentren, N_b die Zahl der Streuzentren im Target, A die Querschnittsfläche des Targets und d dessen Dicke. Dann haben wir die Grössen

$$\dot{N}_a = I_a \qquad \text{(Teilchenstrom)} \tag{4.2.4a}$$

$$Q_a = \frac{\dot{N}_a}{A} \qquad \text{(Teilchenfluss)} \tag{4.2.4b}$$

$$N_b = n_b A d \tag{4.2.4c}$$

$$N_b^F = \frac{N_b}{A} \qquad \text{(Dichte der Streuzentren)} \tag{4.2.4d}$$

Die Reaktionsrate oder Streurate im Target ist dann:

$$\dot{N} = Q_a N_b \sigma_b = I_a N_b^F \sigma_b \tag{4.2.5}$$

Eine häufige Kenngrösse einer Streuung (oder Kernreaktion) ist die Luminosität:

$$L = I_a N_b^F = n_a v_a N_b \qquad \text{Einheit: } \left[\text{cm}^{-2}\ \text{s}^{-1}\right] \tag{4.2.6}$$

Mit der Luminosität L wird die Reaktionsrate (Streurate)

$$\dot{N} = L\sigma \tag{4.2.7}$$

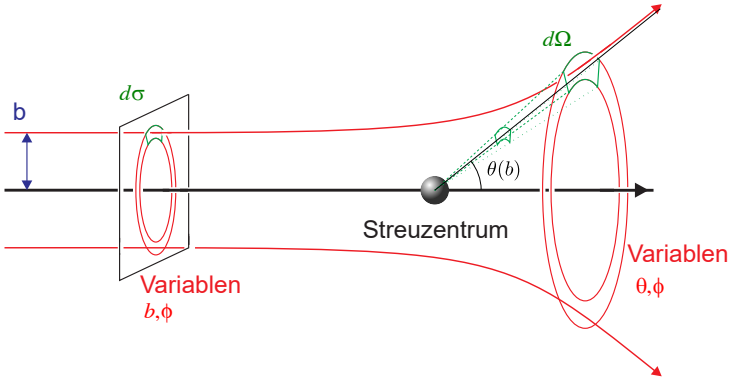


Abb. 4.2.: Differenzieller Streuquerschnitt [Dem10].

Der differentielle Streuquerschnitt ist folgendermassen definiert (siehe Abb. 4.2):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\frac{\#\text{Reaktionen}}{\text{Zeit}}}{\frac{\text{Strahlteilchen}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Flächendichte} \cdot \text{Raumwinkel}} \tag{4.2.8}$$

$d\sigma$ ist eine Fläche, $d\Omega$ ein Raumwinkel. Beide hängen vom Streuwinkel θ ab. Im Vergleich zu Gleichung (4.2.3) ist im Nenner noch die Variable «Raumwinkel» hinzugekommen.

Die Anzahl einfallender Teilchen in der Ringfläche $d\sigma$ ist

$$d\sigma = 2\pi b db \tag{4.2.9}$$

Diese Teilchen werden gestreut und werden danach auslaufende Teilchen genannt. Sie bewegen sich durch das Raumwinkelelement $d\Omega$

$$d\Omega = 2\pi \sin(\theta) d\theta = 2\pi d\left(-\cos(\theta)\right) = -2\pi d\cos(\theta) \tag{4.2.10}$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin(\theta)(-d\theta)} = \frac{b}{\sin(\theta)} \frac{db}{d\theta} \tag{4.2.11}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen aus dem Bereich $b \ldots b + db$ nach $\theta \ldots \theta + d\theta$ gestreut wird.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

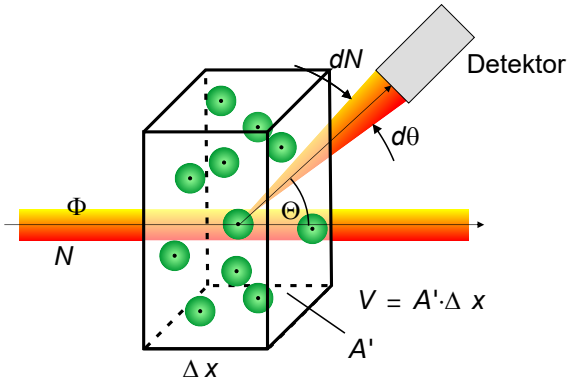


Abb. 4.3.: Prinzipieller Aufbau eines Streuversuches (Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.1 [Dem10])

In Abb. 4.3 hat der einfallende Strahl die Teilchendichte

$$\Phi = nv_0 \tag{4.2.12}$$

(die Einheiten sind $[\Phi] = \mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$, $[n] = \mathrm{m}^{-3}$, und $[v_0] = \mathrm{m}\ \mathrm{s}^{-1}$). Die Gesamtzahl der Teilchen ist

$$N = \Phi A \tag{4.2.13}$$

Dann ist die Zahl ΔN der in die Richtung θ gestreuten Teilchen im Vergleich zur Gesamtzahl N

$$\frac{\Delta N}{N} = f(\theta, E_0)\Delta\Omega \tag{4.2.14}$$

Wie immer hier wird Zylindersymmetrie um die Einfallsrichtung angenommen. $f(\theta, E_0)$ ist die Streufunktion. Die Form dieser Funktion hängt von der Physik des Streuprozesses ab, vom Streuwinkel θ oder von der Energie E_0 (und damit von der Geschwindigkeit v_0). Mit der Teilchendichte n_T im Targetvolumen $V = A' \cdot \Delta x$ erhalten wir für die elastische Streuung die Form

$$f(\theta, E_0) = \frac{n_T}{A'} V \frac{d\sigma(\theta, E_0)}{d\Omega} \tag{4.2.15}$$

$\frac{V}{A'}$ ist die Dicke des Targets. Weiter ist der Ablenkwinkel θ. Wir betrachten hier die Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$ bei der Energie $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Wie schon definiert ist $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Streuquerschnitt, also der Beitrag eines Targetatoms zur Streuung in den Winkel θ mit dem Normraumwinkel $\Delta\Omega = 1$.
Mögliche einfallende Teilchen und deren Wechselwirkungen sind:

- Elektonen: Nur elektromagnetische und schwache Wechselwirkung
- Neutronen: Nur starke Wechselwirkung
- Protonen, α-Teilchen, usw.: Alle Wechselwirkungen

Wir unterscheiden die folgenden Arten der Streuung:

- Elastische Streuung: Keine Dissipation

- Inelastische Streuung: Innere Energie wird angeregt
- Reaktive Streuung: Identität der beteiligten Teilchen ist nicht erhalten

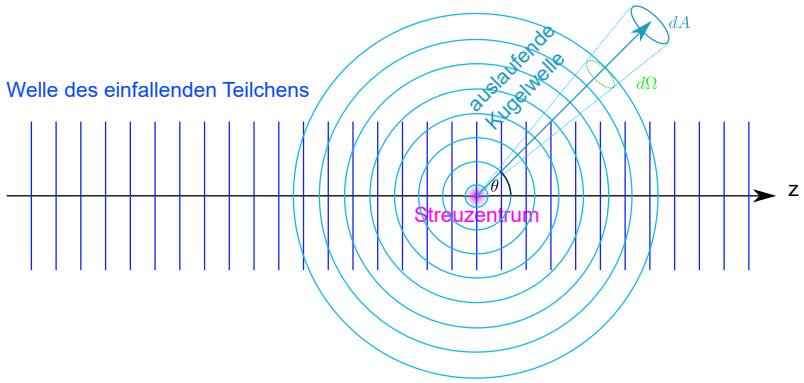


Abb. 4.4.: Skizze der Wellennatur der Streuung

Abbildung 4.4 zeigt die Streuung im Wellenbild. Eine einfallende ebene Welle e^{ikz} entlang der z-Achse streut an einem punktförmigen Streuzentrum bei $z = 0$. Bei elastischer Streuung wird die Energie der Teilchen oder Wellen nicht geändert: Die Wellenlänge und damit der Wellenvektor k bleiben. Am Streuzentrum läuft eine Kugelwelle weg. Wir übersehen grosszügig die Probleme bei $r = 0$. Die detektierte Welle bei ELASTISCHER STREUUNG ist eine Überlagerung einer ebenen Welle und einer Kugelwelle: elastische Streuung

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \mathfrak{A}\left[e^{ikz} + f(\theta)\cdot\frac{1}{r}e^{ikr}\right] \tag{4.2.16}$$

$\mathfrak{A}$ ist die Amplitude der Welle, $f(\theta)$ ist die oben diskutierte Streufunktion, nur ohne Bezug auf die Energie. Die gestreute Welle trifft im Abstand r_D auf einen Detektor mit der Fläche dA. Der Detektor deckt also den Raumwinkel

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \tag{4.2.17}$$

ab. Wenn j_a die am Detektor eintreffende Teilchenstromdichte (Einheit $[j_a] = \mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$) und j_e die Teilchenstromdichte des einfallenden Strahls ist, gilt die Beziehung

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{j_a dA}{j_e} \tag{4.2.18}$$

Für den Teilchenstrom am Detektor erhalten wir mit v_a der Geschwindigkeit der auslaufenden Teilchen (Wir detektieren nur $\langle\Psi^2\rangle = |\Psi|^2$)

$$j_a dA = v_a\left|\Psi_a\right|^2 dA = v_a\left|\mathfrak{A}\ f(\theta)\frac{1}{r}e^{ikr}\right|^2 dA = v_a\mathfrak{A}^2\left|f(\theta)\right|^2 d\Omega \tag{4.2.19}$$

Bei elastischer Streuung ist $v_e = v_a$. Dann haben wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{v_a\mathfrak{A}^2\left|f(\theta)\right|^2}{v_e\mathfrak{A}^2} = \left|f(\theta)\right|^2 \tag{4.2.20}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Das heisst, mit einem Streuexperiment kann $|f(\theta)|^2$ bestimmt werden, aber nicht die in der Regel komplexe Amplitude $f(\theta)$. Gleichung (4.2.20) ist die Partialwellengleichung.

4.3. Stossprozesse

Bei Stössen von geladenen Teilchen wie dem Elektron oder dem α-Teilchen mit Atomen oder Atomkernen ist die elektromagnetische Wechselwirkung und insbesondere die Coulomb-Wechselwirkung (nach Charles Augustin de Coulomb) dominant. Diese Wechselwirkung ist das Hauptthema der folgenden Abschnitte.

4.3.1. Elektrodynamik und Vierervektoren, Repetition und Erweiterung

Nach U. Ellwanger [Ell15] muss zuerst die Formulierung der Elektrodynamik betrachtet werden.

$$\text{Lorentzkraft klassisch} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{4.3.1a}$$

Maxwellgleichungen $\Longrightarrow$ Wellengleichung $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = c^2\Delta\boldsymbol{E} \text{ und } \frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = c^2\Delta\boldsymbol{B} \tag{4.3.1b}$$

Eine andere Schreibweise dieser Gleichung angepasst für Operatoren heisst Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = 0 \tag{4.3.2}$$

Eine analoge Klein-Gordon-Gleichung existiert für $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{E}$ sind über die Maxwellgleichungen gekoppelt, so dass es nicht 6 sondern nur vier unabhängige Komponenten gibt.
$\Longrightarrow$ Verwendung des elektrostatischen Potentials ϕ und des Vektorpotentials $\boldsymbol{A}$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\phi(x,y,z,t) = 0 \tag{4.3.3a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)A_i(x,y,z,t) = 0 \qquad i\in\{x,y,z\} \tag{4.3.3b}$$

und

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{4.3.4}$$

Formulierung als Vierervektor $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$.
Für hohe Geschwindigkeiten transformiert sich $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$ wie der Vierervektor $(ct, x, y, z)^T$.

4.3.2. Elektron-Elektron-Streuung

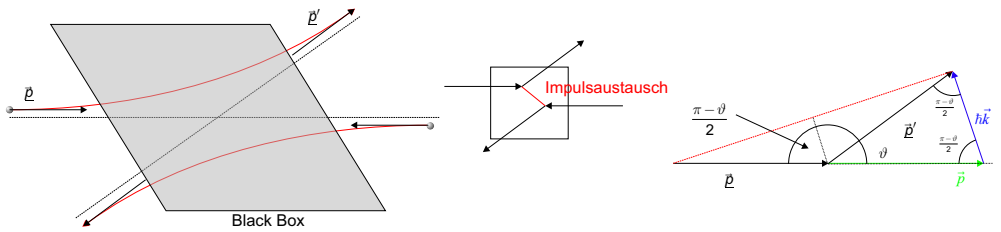


Abb. 4.5.: Links: Streuung zweier Elektronen im Schwerpunktssystem. Mitte: Situation, wenn man die Details der Streuung vernachlässigt. Rechts: Impulsübertrag.

Wir betrachten nur das Schwerpunktssystem. Wir vernachlässigen dabei wie in Abb. 4.5 die Details im Wechselwirkungsbereich. Dann sind Energien und Impulse auch einzeln erhalten (siehe auch U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.2]):

$$\text{vorher} \quad E_1^a = \sqrt{m_e^2c^4 + \left(\boldsymbol{p}_1^a\right)^2 c^2} = \sqrt{m_e^2c^4 + \left(\boldsymbol{p}_2^a\right)^2 c^2} = E_2^a \tag{4.3.5}$$

Im Schwerpunktssystem vor dem Stoss ist $\boldsymbol{p}_1^a = -\boldsymbol{p}_2^a$. Wie üblich wird der Abstand der Bewegungslinien der beiden Elektronen mit b bezeichnet(Stossparameter). Nach dem Stoss haben wir

$$\text{nachher} \quad E_1^b = \sqrt{m_e^2c^4 + \left(\boldsymbol{p}_1^b\right)^2 c^2} \text{ und } \sqrt{m_e^2c^4 + \left(\boldsymbol{p}_2^b\right)^2 c^2} = E_2^b \tag{4.3.6}$$

Es gilt die Energie- und die Impulserhaltung:

$$\boldsymbol{p}_1^a + \boldsymbol{p}_2^a = \boldsymbol{p}_{tot} = 0 = \boldsymbol{p}_1^b + \boldsymbol{p}_2^b \text{ und } E_1^a + E_2^a = E_{tot} = E_1^b + E_2^b \tag{4.3.7}$$

Damit folgt auch

$$E_i^b = E_i^a \text{ und } \left|\boldsymbol{p}_i^b\right| = \left|\boldsymbol{p}_i^a\right| \text{ mit } i \in \{1,2\} \tag{4.3.8}$$

Der Winkel θ gegeben durch das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{p}_1^a \cdot \boldsymbol{p}_1^b = \left|\boldsymbol{p}_1^a\right| \left|\boldsymbol{p}_1^b\right| \cos(\theta) \tag{4.3.9}$$

Klassischerweise wird die Ablenkung als Folge der Kräfte der elektrischen Felder gesehen. Wenn $\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2 \ll m_e c^2$ ist , haben wir

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right) \frac{m_e}{2b\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2} \tag{4.3.10}$$

Daraus ergibt sich die nach Ernest Rutherford benannte RUTHERFORD-STREUUNG.

$$P(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16\left|\boldsymbol{p}_1\right|^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{4.3.11}$$

Bei vielen ununterscheidbaren Elektronen sind die gestreuten Teilchen in die Winkel θ und $\theta + \pi$ ununterscheidbar. Gleichung (4.3.11) muss ergänzt werden. Wir erhalten die Winkelverteilung

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$P(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16\left|\boldsymbol{p}_1\right|^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \left(\frac{(-e)^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e^2}{16\left|\boldsymbol{p}_1\right|^4 \sin^4\left(\frac{(\theta+\pi)}{2}\right)} \quad (4.3.12)$$

Bei dem Prozess der Streuung zweier Elektronen müssen die Ladungen berücksichtigt werden. Das heisst, elektromagnetische-Wellen werden abgestrahlt.

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^- - \Delta E_{kin} + h\nu \quad \text{mit} \quad \Delta E_{kin} = h\nu \quad (4.3.13)$$

Es gibt auch den Prozess der inversen Bremsstrahlung, d. h. der Streuung im elektrischen Feld

$$e^- + e^- + h\nu \longrightarrow e^- + e^- + \Delta E_{kin} \quad (4.3.14)$$

Allgemein kann die elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch virtueller Photonen beschrieben werden. Die Lebensdauer des virtuellen Photons $E = h\nu$ beträgt

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{h\nu} = \frac{1}{2\pi\nu} \quad (4.3.15)$$

oder $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$.

4.3.3. Quantenmechanische Behandlung

In diesen Abschnitten sollen die verschiedenen Effekte besprochen werden, die auf der Anwendung der Quantenmechanik beruhen. So sind Teilchen vom gleichen Typ ununterscheidbar, der Wellencharakter führt zu Interferenzen und Prozesse wie Absorption und Emission werden mit Übergangsmatrixelementen beschrieben.

4.3.3.1. Differenzieller Streuquerschnitt

In diesem und den kommenden Abschnitten soll die quantenmechanische Behandlung nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13] skizziert werden. Das Teilchen vor dem Stoss hat den Impuls $\boldsymbol{p}_{ein}$ und nach dem Stoss den Impuls $\boldsymbol{p}_{aus} = \boldsymbol{p}_{ein} + \Delta\boldsymbol{p}$. $\Delta\boldsymbol{p}$ ist der Impulsübertrag. Die de Broglie-Welle (nach Louis-Victor de Broglie) hat eine Wellenlänge $\lambda_{ein,aus} = 2\pi\frac{\hbar}{p_{ein,aus}}$. Im Raum hat die Wellenfunktion der einfallenden oder ausfallenden Welle die Form

$$\psi_{\boldsymbol{k}} = \mathfrak{A}_0 \exp\left(i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right) \quad (4.3.16)$$

mit den üblichen Definitionen in der Quantenmechanik $\hbar\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$ und $E_{kin} = \hbar\omega$. Weiter verwenden wir den Hamiltonoperator des freien Teilchens und die zeitunabhängige Schrödingergleichung (nach Erwin Schrödinger)

$$\hat{\mathrm{H}}_0 = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} \tag{4.3.17a}$$

$$\hat{\mathrm{H}}_0 \psi_{\boldsymbol{k}} = E_{kin} \psi_{\boldsymbol{k}} \tag{4.3.17b}$$

Zur Behandlung des Streuprozesse brauchen wir die komplette Schrödingergleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{\mathrm{H}} \psi \tag{4.3.18}$$

Der Hamiltonoperator $\hat{\mathrm{H}}$ enthält neben der kinetischen Energie ($\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m}$) auch die potentielle Energie $V(r)$ des Streuzentrums. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.2.] kann gezeigt werden, dass weg vom Streuzentrum ($V(r) \ll E_{kin}$)mit freien Teilchen gerechnet werden kann. Die einlaufende Welle ist ein Eigenzustand von $\hat{\mathrm{H}}_0$ und nicht zu $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{V}}$. Im Streubereich ist die einlaufende Welle kein Eigenzustand des Hamiltonoperators. Sie muss nach den Eigenzuständen entwickelt werden. Wieder weiter weg sind die Eigenzustände von $\hat{\mathrm{H}}$ keine Eigenzustände von $\hat{\mathrm{H}}_0$ mehr, also müssen die Zustände nochmals Projiziert werden. Diese Projektionen können mit einem Übergangsmatrixelement

$$\langle \psi_{\boldsymbol{k}_{aus}} | \hat{\mathrm{V}} | \psi_{\boldsymbol{k}_{ein}} \rangle = \int \psi^*_{\boldsymbol{k}_{aus}}(\boldsymbol{r}) V(\boldsymbol{r}) \psi_{\boldsymbol{k}_{ein}}(\boldsymbol{r}) d^3r \tag{4.3.19}$$

charakterisiert werden. Diese Näherung wird nach Max Born BORN'SCHE NÄHERUNG genannt.

Mit Gleichung (4.2.20) kann der differenzielle Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$ mit der Streuamplitude f ausgedrückt werden. Die Streuamplitude ist in der BORN'SCHEN NÄHERUNG und mit Gleichung (4.3.19):

$$f\left(\boldsymbol{k}_{ein}, \boldsymbol{k}_{aus}\right) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \psi_{\boldsymbol{k}_{aus}} | \hat{\mathrm{V}} | \psi_{\boldsymbol{k}_{ein}} \rangle \tag{4.3.20}$$

Anders als in der klassischen Mechanik kann aus der Streuamplitude nicht mehr eindeutig auf das Streuzentrum geschlossen werden. Mit den hier verwendeten ebenen Wellen und mit $\Delta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{ein} - \boldsymbol{k}_{ein}$ wird die Streuamplitude

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\boldsymbol{k}_{aus}} | \hat{\mathrm{V}} | \psi_{\boldsymbol{k}_{ein}} \rangle &= \int \exp\left(i\boldsymbol{k}_{aus} \cdot \boldsymbol{r}\right) V(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i\boldsymbol{k}_{ein} \cdot \boldsymbol{r}\right) d^3r \\ &= \int \exp\left(i\Delta\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}\right) V(\boldsymbol{r} d^3r \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

4.3.3.2. Streuung im Coulomb-Potential

Je nach Energie des einlaufenden Teilchens (auch PROJEKTIL genannt, Ladung ze) sind Atomkerne (Ladung Ze) bei der Streuung mehr oder weniger abgeschirmt. Das Coulomb-Potential (nach Charles Augustin de Coulomb) ist kugelsymmetrisch. Deshalb ist die Streuamplituden nur von $\Delta k = |\Delta k|$ ab.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$V_{abgeschirmt}(\boldsymbol{r}) = V_a(\boldsymbol{r}) = V_{Coulomb}(r)\exp\left(-\frac{r}{a}\right) = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{r} \tag{4.3.22}$$

a ist die Reichweite, $a \to \infty$ führt zum üblichen Coulombpotential. Für die Streuung von α-Teilchen ist $a \approx 50$ pm. Laut J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.4.1.] ist die Streuamplitude für das abgeschirmte Coulombpotential

$$f_a(\Delta k) = \frac{2m}{\hbar^2}(z\ Z)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta k^2 + a^{-2}} = 2m\ z\ Z\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta p^2 + \frac{\hbar^2}{a^2}} \tag{4.3.23}$$

Mit $a \to \infty$ wird aus Gleichung (4.3.23) die Streuformel für das klassische Coulombpotential

$$f(\Delta k) = 2m\ z\ Z\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Delta p^2} \tag{4.3.24}$$

Diese Gleichung ist sogar für Materiewellen rein klassisch (z.B. bei der RUTHERFORD-STREUUNG (nach Ernest Rutherford) von α-Teilchen an einer Goldfolie.
Der differenzielle Streuquerschnitt für das klassische Coulomb-Potential wird

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Delta p)|^2 = \left(2m\ z\ Z\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{\Delta p^4} = \frac{\rho_0^2}{16}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{4.3.25}$$

Die Streuformel für das abgeschirmte Coulomb-Potential ($\frac{1}{a} > 0$) hat keine Divergenzen mehr bei $\theta = 0$. Dies ist ein Ausdruck der quantenmechanischen Unschärferelation nach Werner Heisenberg.

4.3.3.3. Mehrere Streuzentren

Bei mehreren Streuzentren müssen die einzelnen Streuamplituden kohärent überlagert werden. Das heisst, dass zuerst die Amplituden addiert werden müssen und erst dann das Betragsquadrat (Wellenfunktion mal konjugiert komplexe Wellenfunktion) berechnet werden darf. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.5.2.] ist es immer richtig die kohärente Summe

$$\left|\sum_n \psi_n\right|^2 = \sum_n |\psi_n|^2 + \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} \psi_n^*\psi_m \tag{4.3.26}$$

Gleichung (4.3.26) bedeutet nichts anderes, dass der Betrag der kohärenten Summe ($\left|\sum_n \psi_n\right|^2$) gleich der Summe der inkohärenten Summe ($\sum_n |\psi_n|^2$) plus der Summe aller Interferenzterme ist. Die Summe der Interferenzterme der beiden Wellen ψ_m und ψ_n sieht mit Phasenfaktoren $\Delta\varphi_{mn} = \varphi_m - \varphi_n$ so aus

$$\sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} \psi_n^*\psi_m = \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} |\psi_n|\,|\psi_m|\cos\left(\Delta\varphi_{mn}\right) \tag{4.3.27}$$

Die Interferenzterme verschwinden also nur wenn (bei gleichen Amplituden) die Werte des Cosinus bei «+ » und «- » gleich häufig sind. Ein Beispiel der Wirkung dieser Aussage ist die Supraleitung, dort verschwinden die $\cos(\Delta\varphi_{mn})$ der Elektronenwellenfunktion (Fermionen) eben nicht.

4.3.3.4. Hofstadter-Streuung

Robert Hofstadter entdeckte, dass auch einzelne Atomkerne Teilchenwellen zur Interferenz bringen können. Seine Interpretation der Resultate mit der Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung zusammen mit der elektromagnetischen Wechselwirkung wurde mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Die Gleichung (4.3.23) für die Streuung an einem abgeschirmten Coulombpotential kann so erweitert werden, dass die Streuung an gedachten punktförmigen Streuzentren ($f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k)$) gefaltet wird mit der normierten Verteilung ($\rho(\boldsymbol{r})$) dieser Zentren. Die Form der Ladungsverteilung beschreibt

$$df_{\boldsymbol{r}}(\Delta k) = f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k)\rho(\boldsymbol{r})dV \tag{4.3.28}$$

wobei $dQ = \rho(\boldsymbol{r})\ Ze\ dV$ ist.

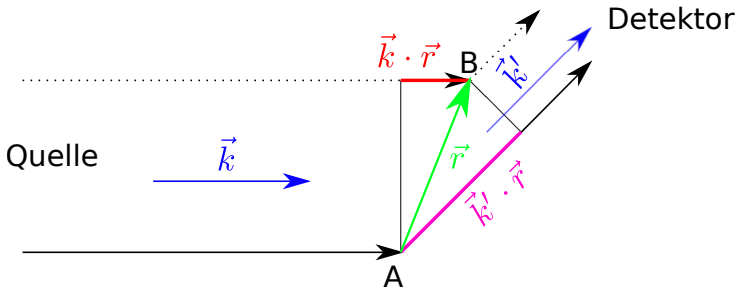


Abb. 4.6.: Berechnung der Hofstadter-Streuung. Skizziert nach J. Bleck-Neuhaus[Ble13, Abb. 5.2]

Analog zur Berechnung der Phase bei der Beugung an einem Gitter subtrahieren wir die zwei Phasen $\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$, die an zwei durch den Vektor $\boldsymbol{r}$ getrennten Punkten A und B gestreut werden (siehe Abb. 4.6). Die Streuamplitude des Kerns ist dann nach J. Bleck-Neuhaus[Ble13, Kap. 5.6.1.]

$$\begin{aligned} f_{Ze,\rho}(\Delta k) = \int \exp(i\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\, df_{\boldsymbol{r}}(\Delta\boldsymbol{k}) = f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k)\cdot\int \exp(i\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,\rho(\boldsymbol{r})dV \\ = f_{Ze,\text{punkt}}(\Delta k)\cdot F(\Delta\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

$F(\Delta\boldsymbol{k})$ in Gleichung (4.3.29) ist die räumliche Fouriertransformierte der Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$. $F(\Delta\boldsymbol{k})$ heisst Formfaktor der Ladungsverteilung. Für ein punktförmiges Teilchen mit $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0\delta(\boldsymbol{r})$ ergibt sich die Streufunktion für das Coulomb-Potential einer punktförmigen Ladung. Wenn $\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \ll 1$ ist (die Einheiten stimmen) im Gebiet mit ρ wesentlich von Null verschieden, dann sind die Phasen klein und das Resultat für punktförmige Teilchen entsteht auch wieder.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

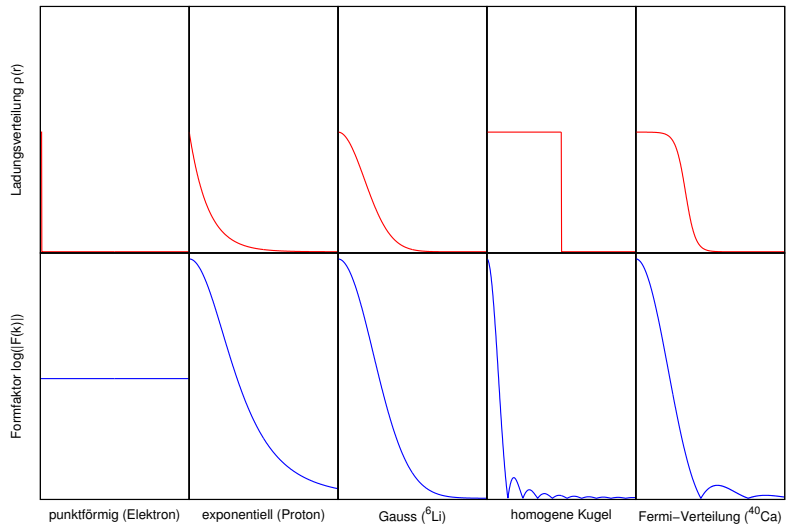


Abb. 4.7.: Formfaktor verschiedener Ladungsverteilungen (nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.6.1.] und K. Bethge; G. Walter und B. Wiedemann [BWW07]

Abbildung 4.7 zeigt den Formfaktor für verschiedene typische Ladungsverteilungen. Aus der Abbildung könnte die Idee kommen, dass aus dem Betrag des Formfaktors, gemessen über die Streuamplitude, die Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ rekonstruiert werden könnte. Dies ist so direkt nicht möglich, da die Phase verloren geht. Die einzige Möglichkeit ist, ein Modell von $\rho(\boldsymbol{r})$ zu erstellen, und dann die Fouriertransformation zu berechnen. Stimmt diese mit den Messungen überein, gibt es eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass das Modell die Wirklichkeit wiederspiegelt.

4.3.3.5. Kohärente Überlagerung

Aus der klassischen Behandlung kann die STREUFORMEL nach Ernest Rutherford

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\Omega \tag{4.3.30}$$

abgeleitet werden (siehe O. Marti und M. Gonçalves *Atomphysik* [MG19]).

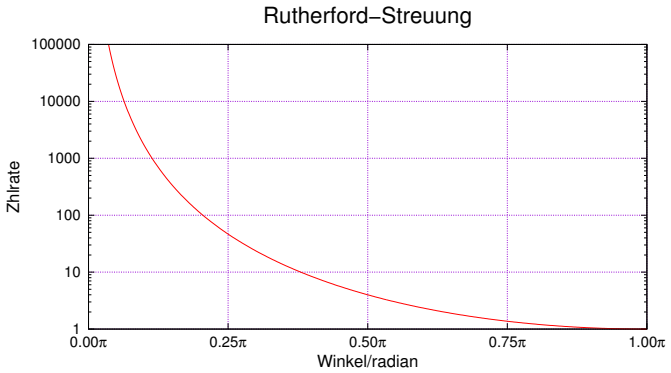


Abb. 4.8.: Schematischer Verlauf der Streuamplitude der RUTHERFORD-STREUUNG.

Abbildung 4.8 zeigt die mit der Gleichung (4.3.30) berechnete Streukurve.

Nun treten noch zwei Phänomene auf:

1. Wir können die Streuung in die Winkel θ und $\theta + \pi$ nicht unterscheiden, das heisst wir müssen die beiden Streuquerschnitte addieren.

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4} \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} \right) d\Omega \tag{4.3.31}$$

2. Bei gleichem Projektil und Ziel sind die Teilchen (z.B. Elektron und Elektron, oder α-Teilchen und α-Teilchen, nicht aber ein Elektron und ein ANTIPROTON) nicht unterscheidbar, das heisst: Anstelle der Wahrscheinlichkeiten müssen die Amplituden addiert werden und erst dann kann die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet werden. Dies führt für $\frac{dn(\theta,d\Omega)}{n}$ zu Interferenzthermen. Wir erhalten die MOTT'SCHE STREUFORMEL (nach Nevill Mott)

$$\frac{dn(\theta, d\Omega)}{n} = \frac{Z^2 e^4 D_{Folie} N}{(4\pi\epsilon_0)^2 M^2 v_0^4} \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} \mp \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right) d\Omega \tag{4.3.32}$$

mit «+ » für Bosonen und «- » für Fermionen. Bei unterscheidbaren Teilchen ist Gleichung (4.3.30) zu verwenden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

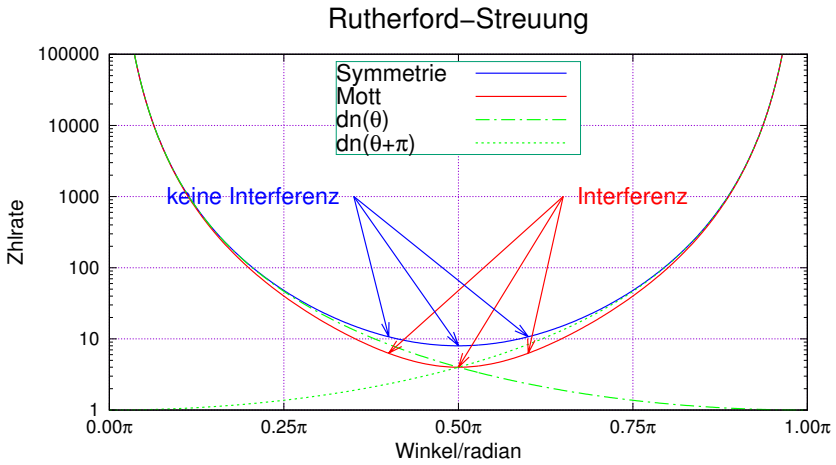


Abb. 4.9.: Vergleich der Streuung ohne Symmetrie (grün) mit der Streuung mit Symmetrie (blau) und zusätzlich mit Interferenz (rot), der MOTT-STREUUNG (nach Nevill Mott).

Abbildung 4.9 zeigt die Wechselwirkung ohne Berücksichtigung der Quantenstatistik. Es gibt zwei Verhalten

- Wenn beide Teilchen Bosonen sind, dann ist die Streuamplitude bei 0.5π grösser als aus der inkohärenten Streuung erwartet.
- Wenn beide Teilchen Fermionen sind, dann ist die Streuamplitude bei 0.5π kleiner als aus der inkohärenten Streuung erwartet.

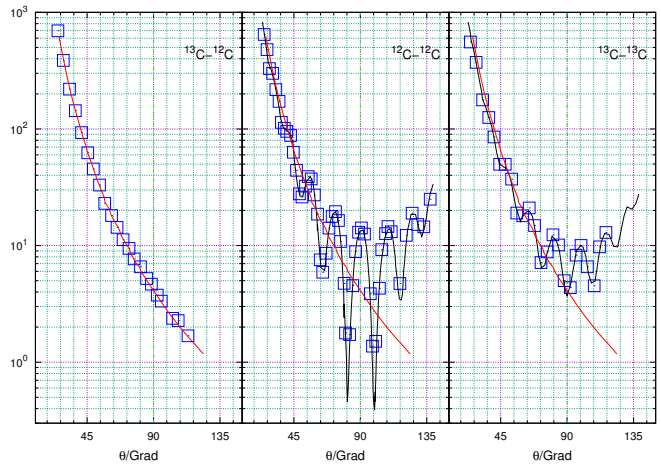


Abb. 4.10.: Streuung von Fermionen und Bosonen (nach G. R. Plattner und I. Sick [PS81] und J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 5.7.3.]).

Abbildung 4.10 zeigt die Streuung von ^{13}C und ^{12}C Kernen aneinander. ^{13}C ist ein Fermion, ^{12}C ist ein Boson. Wenn ein Fermion an einem Boson streut, ergibt sich die ganz gewöhnliche Streuung ohne Interferenz (Abb. 4.10 links). Bei der Streuung eines Bosons an einem Boson ist bei $\theta = 90°$ eine Überhöhung gegenüber der nicht interferierenden Streuung zu beobachten. Bei der Streuung von einem

Fermion an einem Fermion (Abb. 4.10 rechts) wird bei $\theta = 90°$ ein Minimum beobachtet. Die grüne Linie zeigt den Winkel von 90° an. Die vertikale Achse zeigt die gestreute Intensität in zufälligen Einheiten.

4.4. Compton-Effekt

Beim Compton-Effekt (nach Arthur Compton) ist die Energie der Photonen sehr viel grösser als die Bindungsenergie des streuenden Elektrons (allgemein eine Ladung) in einem Atom (oder einem anderen gebundenen System).

$$\hbar\omega \gg E_b \tag{4.4.1}$$

Die γ-Strahlen schlagen ein $e^{\mp}$ aus dem Atom oder Kern. Dann kann das Streuproblem als eine Streuung des Teilchens Photon am Teilchen Ladung aufgefasst werden. Es müssen sowohl Energie wie auch Impuls erhalten bleiben. Deshalb wird die Energie und damit die Wellenlänge der γ-Strahlen sich bei der Compton-Streuung ändern. Nach O. Klein und Y. Nishina [KN29] ist der relativistisch korrekte Streuquerschnitt für die Compton-Streuung

$$\sigma_c = \pi r_e^2 Z \frac{m_e c^2}{E_\gamma}\left[\ln\left(\frac{2E_\gamma}{m_e c^2}\right) + \frac{1}{2}\right] \propto \frac{Z}{E_\gamma} \tag{4.4.2}$$

Dabei ist r_e der klassische Elektronenradius gegeben durch die Gleichheit der elektrostatischen Energie einer Kugel mit $q = e$ und $r = r_e$ und der Ruheenergie $m_0 c^2$.

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} = m_e c^2 \tag{4.4.3}$$

und

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} \tag{4.4.4}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

4.5. Paarbildung

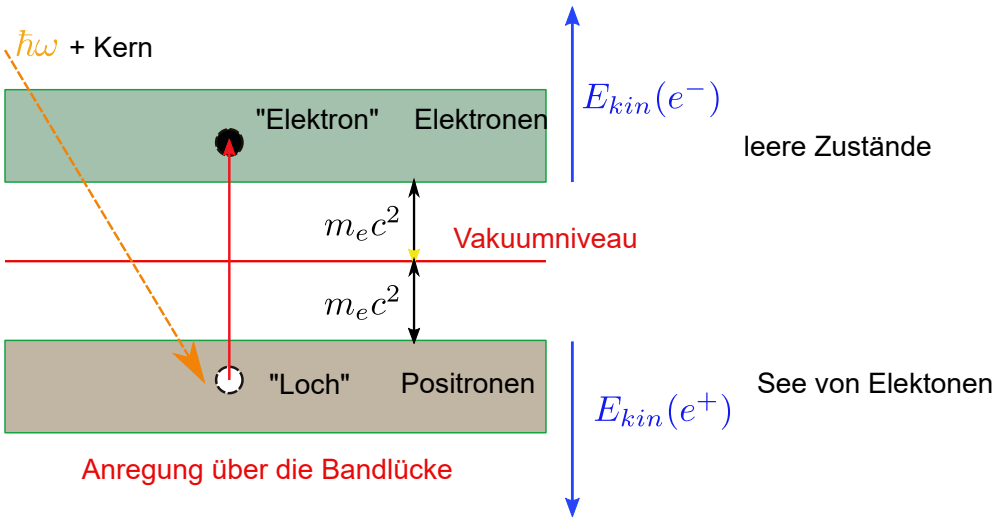


Abb. 4.11.: Paarerzeugung nach Paul Dirac (Nach [Dem10, Abb. 4.51])

Abbildung 4.11 zeigt die Erzeugung eines e^--e^+-Paars nach Paul Dirac. das Szenario ist an die Vorstellungen der Festkörperphysik für die Anregung von Exzitonen (Elektron-Loch-Paare) in Halbleitern angelehnt. Der Prozess ist nur möglich, wenn ein Atomkern als weiterer Körper vorhanden ist, der durch seine Beteiligung Energie- und Impulserhaltung garantieren kann. In der Vorstellung ist die das Volumen voll von unsichtbaren Teilchen, deren Fehlen (das Loch) als Antiteilchen wahrgenommen wird. In diesem Bild muss für jedes neu entstandene Elektron ein Loch, also ein Positron, vorhanden sein. Es muss gelten

$$\hbar\omega \geq 2m_e c^2 \tag{4.5.1}$$

und für die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{\hbar\omega}{2} - m_e c^2 \tag{4.5.2}$$

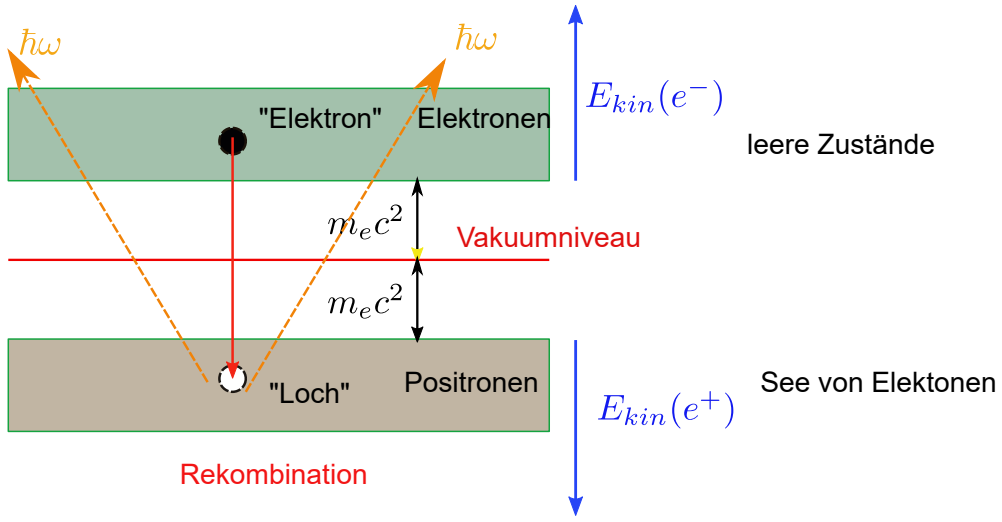


Abb. 4.12.: Paarvernichtung nach Paul Dirac (Nach [Dem10, Abb. 4.51])

Auch der umgekehrte Prozess ist möglich: Ein Elektron rekombiniert mit einem Positron, einem Loch. Wegen der Impuls-, der Drehimpuls- und der Energieerhaltung entstehen zwei γ-Quanten. Prozesse mit mehr γ-Quanten sind denkbar, aber viel unwahrscheinlicher.

Für diese Prozesse ist der Streuquerschnitt

$$\sigma_p \propto Z^2 \tag{4.5.3}$$

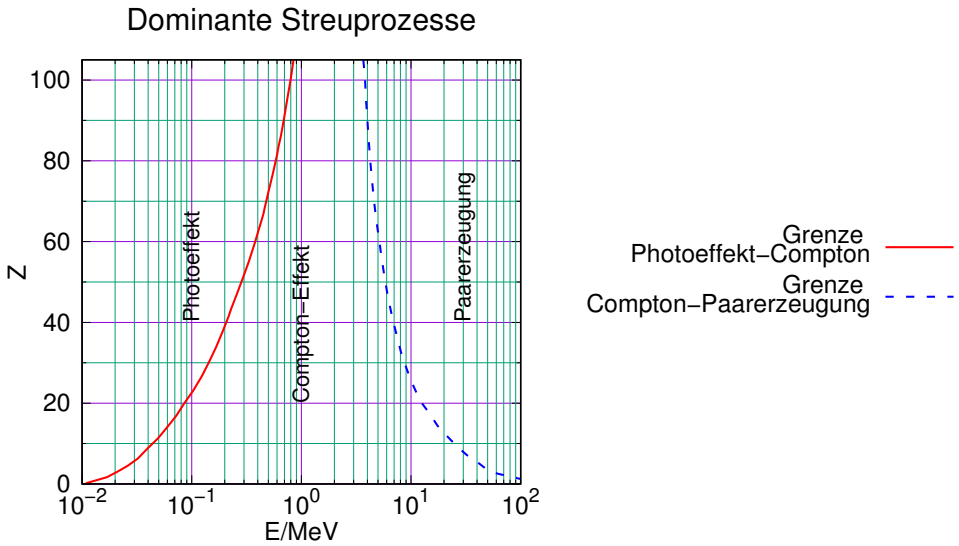


Abb. 4.13.: Dominante Streuprozesse in Abhängigkeit der Kernladung Z und der γ-Energie nach W. Demtröder[Dem10, Abb. 4.52]

Zur Einordnung des Compton-Effekts (siehe Abschnitt 4.4) und der Paarerzeugung mit dem Photoeffekt (Abschnitt 5.1) zeigt Abbildung 4.13 die Bereiche, in denen jeweils einer der drei Effekte dominiert. Links ist der Bereich des Photoeffekts, in der Mitte ist der Bereich des Compton-Effekts und rechts dominiert

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

die Paarerzeugung.

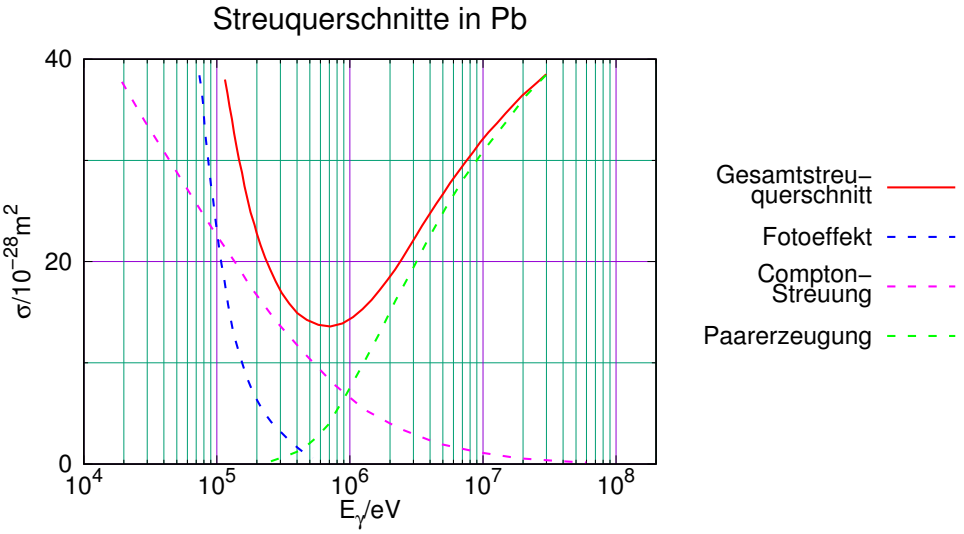


Abb. 4.14.: Streuquerschnitte von γ-Quanten in Pb als Funktion der γ-Energie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.53].

Abbildung 4.14 schliesslich zeigt den Beitrag der drei Effekte (Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarerzeugung) zur Streuung von γ-Quanten an Blei.

5. Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

5.1. Photoeffekt

Beim PHOTOEFFEKT (erklärt von Albert Einstein) wird durch die Absorption eines Photons soviel Energie eingetragen, dass ein Hüllenelektron das Atom verlässt. Das Restatom wird benötigt um Energie- und Impulssatz gleichzeitig zu erfüllen. Der Streuquerschnitt ist die Summe der Streuquerschnitte jedes einzelnen Elektrons in der Schale

$$\sigma_{ph} = \sum_{i=1}^{Z} (\sigma_{ph})_i \tag{5.1.1}$$

$\sigma_{ph,i}$ ist der Streuquerschnitt des i-ten Elektrons. Von allen Elektronen haben diejenigen in der K-Schale, also im untersten S-Zustand, den grössten Streuquerschnitt. Nach Heitler [Hei54] und der Rechnung von Eichler und Stöhlker [ES07, Gl. 4.8] gilt

$$\sigma_{ph} \approx \sigma_0 Z^5 \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma}\right)^{\frac{7}{2}} \quad \text{für} \quad E_\gamma \gg E_b(K) \tag{5.1.2}$$

Die Referenz ist die Bindungsenergie der K-Schale . Bei schweren Elementen überwiegt der Photoeffekt wegen Z^5-Abhängigkeit in Gleichung (5.1.2).

5.2. Verluste in Materie

Wenn sich leichte Teilchen wie ELEKTRONEN oder POSITRONEN durch Materie bewegen, werden sie relativ schnell in andere Richtungen gestreut. Dadurch ist die Teilchenzahl nicht alleine durch ein Exponentialgesetz beschrieben. Hans Bethe konnte aus einer statistischen Betrachtung des Energieverlustes (Geschwindigkeitsabnahme) nichtrelativistischer Elektronen oder Positronen[1] die Gleichung

$$-\frac{dE}{dx} \approx \frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi\ \varepsilon_0^2 m_e v^2} \ln\left(\frac{2 m_e v^2}{\langle E_b \rangle}\right) \tag{5.2.1}$$

ableiten. Dabei ist n_e die Elektronendichte im durchstrahlen Material (Target), $\langle E_b \rangle$ die mittlere Bindungsenergie der Elektronen im Target, Z_1 die Anzahl Elektronen in einem Atom des Targets (Kernladungszahl), v die Geschwindigkeit der Elektronen (oder Positronen) und m_e deren Massen. Wird Gleichung (5.2.1) für schwerere Teilchen verwendet, dann ist bei gleicher Energie deren Geschwindig-

[1] Für den relativistischen Fall siehe Gleichung (8.1.10).

keit geringer. Deshalb ist die Reichweite von Elektronen in Materie bei gleicher kinetischer Energie grösser als z.B. die Reichweite von Protonen oder α-Teilchen. Ein weiterer Verlustmechanismus ist die BREMSSTRAHLUNG. Beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab. Der Verlust an kinetischer Energie pro Länge in Materie bei Bremsstrahlung ist

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Bremsstrahlung}} = \frac{4n_a Z^2 \alpha^3 (\hbar c)^2 E_e}{m_e^2 c^4} \ln\left(\frac{a(E_e)}{Z^{1/3}}\right) \tag{5.2.2}$$

Hier ist n_a die Zahlendichte von Atomen im Target, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$ die FEINSTRUKTURKONSTANTE und $a(E_e)$ eine Funktion, die angibt, bei welchem Stossparameter die Elektronen noch nahe genug am Kern vorbei fliegen um beschleunigt zu werden. Die Bremsstrahlungsverluste dominieren bei hohen Energien.

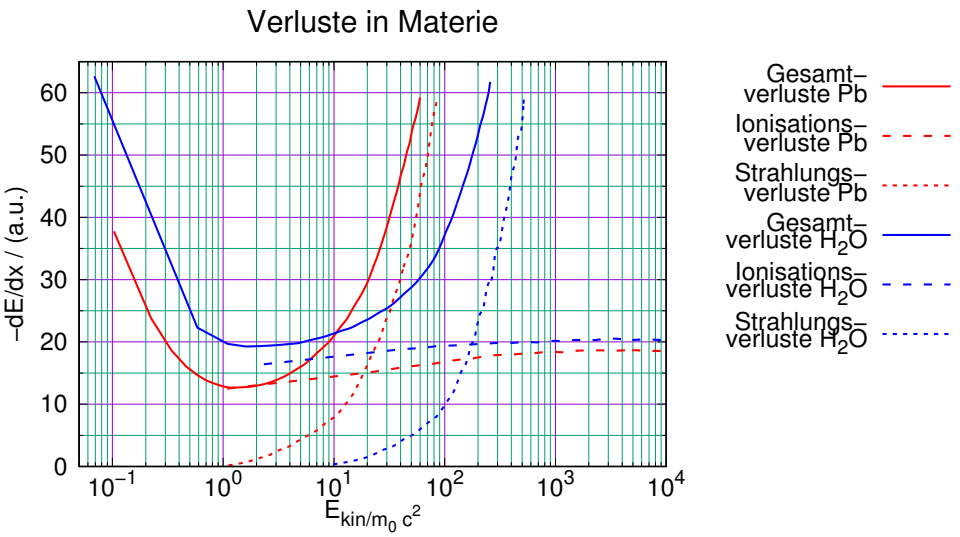


Abb. 5.1.: Verluste beim Durchgang durch Materie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.49].

Abbildung 5.1 zeigt die verschiedenen Verlustarten in Materie und deren relative Stärke.

5.3. Neutronen

Neutronen (entdeckt von James Chadwick) können mit der Hülle von Atomen nur magnetisch wechselwirken, da ihre Ladung ja null ist. Neutronen können elastisch an Kernen gestreut werden, wobei die Spins der Kerne und des Neutrons wechselwirken, es also eine spinabhängige Streuung gibt. Wenn wir die Orientierung der Spins vernachlässigen, ergibt sich aus der Physik des klassischen Stosses bei einem zentralen Auftreffen im nichtrelativistischen Falle der maximale Energieübertrag

$$\Delta E_n = E_n - E_{n'} = E_n \frac{4 m_K m_n}{(m_K + m_n)^2} \tag{5.3.1}$$

wobei E_n die kinetische Energie des Neutrons vor und $E_{n'}$ die kinetische Energie

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

nach dem Stoss ist. m_K ist die Masse des Kerns und m_n die Masse des Neutrons. Für ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ sind die Massen von Kern und Neutron etwa gleich, für ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ ist der Kern 235 mal schwerer als das Neutron.
Schliesslich können Neutronen durch den Kern eingefangen werden. Beispiele für solche Reaktionen sind:

$$n + {}^{113}_{48}\mathrm{Cd} \longrightarrow {}^{114}_{48}\mathrm{Cd}^* \longrightarrow {}^{114}_{48}\mathrm{Cd} + \gamma \tag{5.3.2a}$$
$$n + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + p \tag{5.3.2b}$$
$$n + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \longrightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \alpha \tag{5.3.2c}$$
$$n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{136}_{53}\mathrm{I}^* + {}^{98}_{39}\mathrm{Y} + 2n \tag{5.3.2d}$$

Der Absorptionsquerschnitt der Neutronen zeigt Resonanzen (siehe Abb. 5.2), wenn die Energie der Neutronen einem Energieniveau des Kerns entspricht.

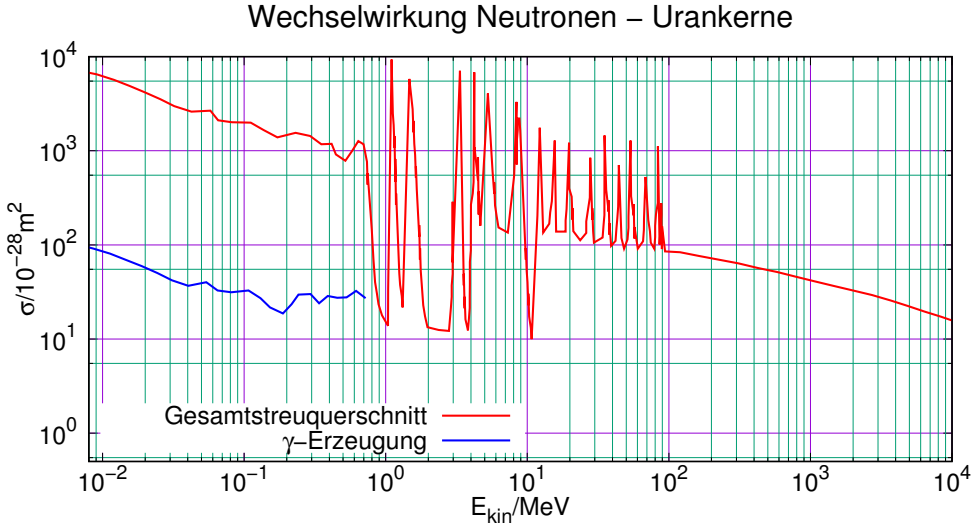


Abb. 5.2.: Streuung von Neutronen an ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 4.56]). Der Wirkungsquerschnitt ist in b (Barn) angegeben.

6. Atome und Kerne

6.1. Atomkerne

6.1.1. Begriffe

Nukleonen	Protonen und Neutronen	${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$
Nuklid	Kern ${}^{A}_{Z}X$ mit A Nukleonen und Z Protonen und $N = (A - Z)$ Neutronen	${}^{12}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$
Isotope	Kerne mit gleicher Protonenzahl Z, aber unterschiedlicher Neutronenzahl N	${}^{62}_{28}\mathrm{Ni}$, ${}^{64}_{28}\mathrm{Ni}$
Isobare	Kerne mit gleicher Nukleonenzahl A, aber unterschiedlicher Protonenzahl Z	${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$
Isotone	Kerne mit gleicher Neutronenzahl N, aber unterschiedlicher Protonenzahl Z	${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$
Spiegelkerne	Kerne mit vertauschten Werten von Z und N	${}^{3}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$
Isomere Kerne	Kerne mit gleichem Z und N in unterschiedlichen Energiezuständen	${}^{16}_{8}\mathrm{O}(E_1)$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}(E_2)$

Tab. 6.1.: Begriffe aus der Atomphysik (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 2.2.]).

Tabelle 6.1 erklärt einige, im Folgenden wichtige Begriffe.

6.1.2. Rutherfords Atommodell

Die auf Seite 72 beschriebene Streumethode hat Ernest Rutherford verwendet um zu zeigen, dass Materie aus Atomen besteht. Er konnte dabei das Modell von J. J. Thomson erweitern (siehe auch K. Simonyi [Sim90, Abb. 4.6-4 und Kap. 4.6.4.]). Thomsons Modell bestand aus einem See von damals nicht spezifizierten positiven Ladungen gemischt mit Elektronen. Sein Modell stammte aus seinen Beobachtungen mit Kathodenstrahlen. Thomson erkannte, dass die Bestandteile des Atoms sich aus thermodynamischen Gründen bewegen mussten. Er führte die Emission von Licht auf Schwingungen in diesem Gemisch aus positiven und negativen Ladungen zurück. Er erkannte, dass die thermischen Bewegungen wegen den Maxwellschen Gesetzen (James Clerk Maxwell) zu einer Emission von elektromagnetischen Wellen führen müsste, also einem Energieverlust. Thomson konnte mathematisch zeigen, dass in sehr guter Näherung die Interferenz der elektromagnetischen Wellen eine Auslöschung derselben bewirkt. Die gleiche Thematik kam dann wieder mit dem Bohrschen Atommodell auf (Niels Bohr).

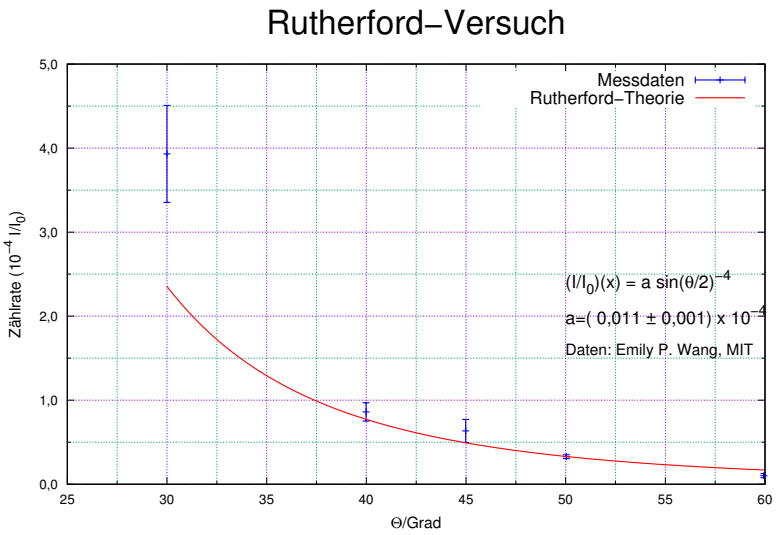


Abb. 6.1.: Moderne Ausführung von Rutherfords Streuversuch von α-Teilchen an einer dünnen Goldfolie (Quelle: E. P. Wang [Wan04]).

Ernest Rutherford streute α-Teilchen an einer Goldfolie. E. P. Wang [Wan04] hat sein Experiment 2004 wiederholt (Siehe Abb. **??**). Sein aus den Ergebnissen und den Abweichungen hergeleitetes Modell hatte die folgenden Eigenschaften (siehe auch J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 3.5.1.]:

- Atome haben eine Hülle von kreisenden Elektronen. Ihre Anzahl stimmt mit der Ordnungszahl des Elements überein. Die Elektronen nehmen den grössten Teil des Atomvolumens ein.
- Es gibt einen sehr kleinen positiv geladenen Kern. Die Anzahl positiver Ladungen stimmt mit der Anzahl Elektronen überein, da Atome neutral sind. Der Löwenanteil der Atommasse ist im Kern konzentriert. Ernest Rutherford nahm an, dass der Atomkern aus den etwas früher entdeckten Protonen (Wilhelm Wien) besteht. Um die Ladung zu kompensieren mussten sich zusätzliche nicht beobachtbare Elektronen im Kern befinden.

Die Annahme, dass Elektronen im Kern gewisse positive Ladungen der Protonen kompensieren, führte zu einem Widerspruch mit gemessenen Drehimpulsen der Atomkerne.

6.1.3. Bestimmung des Kernradius

Mit dem Coulomb-Gesetz (nach Charles Augustin de Coulomb) kann mit dem Formalismus aus Abschnitt B.1.1 der minimale Abstand δ_0 bei einem zentralen Stoss berechnet werden. Für die Energie gilt:

$$\frac{m\, v_0^2}{2} = \frac{m\, v^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \delta} \tag{6.1.1}$$

Hier ist $\delta = \delta(v_0, b)$ der minimale Abstand zum Streuzentrum. Für einen zentralen Stoss ($b = 0$) ist $v = 0$. Der minimale Minimalabstand δ_0 ist dann (siehe Abb. B.1)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\delta_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} \tag{6.1.2}$$

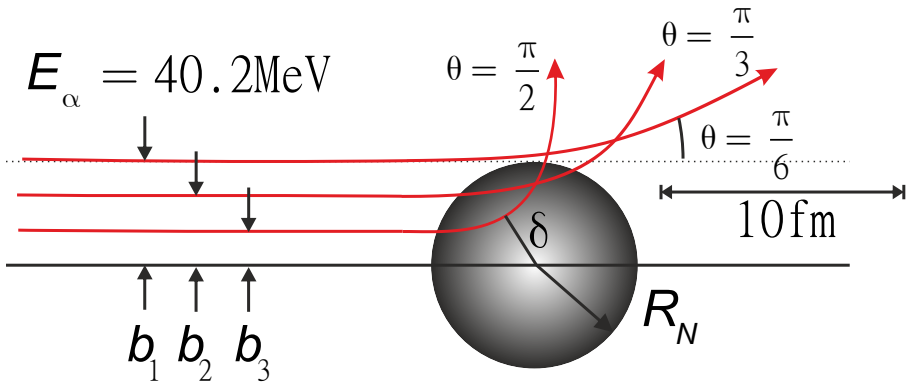


Abb. 6.2.: Skizze der Streuung bei unterschiedlichen Streuparametern

Abbildung 6.2 zeigt die Streugeometrie. Eine allgemeine Lösung bekommen wir, wenn wir die Drehimpulserhaltung mit verwenden. Für den Drehimpuls bezogen auf das Streuzentrum bekommen wir

$$m\ b\ v_0 = m\ \delta\ v \Longrightarrow v = v_0 \frac{b}{\delta} \tag{6.1.3}$$

Zusammen mit der potentiellen Energie ergibt sich

$$\frac{m\ v_0^2}{2} = \frac{m\ v_0^2}{2}\left(\frac{b^2}{\delta^2}\right) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 \delta} \tag{6.1.4}$$

Wir setzen $x = \frac{1}{\delta}$ und erhalten eine quadratische Gleichung

$$\frac{m\ v_0^2 b^2}{2} x^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} x - \frac{m\ v_0^2}{2} = 0 \tag{6.1.5}$$

Diese hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \pm \sqrt{\frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2} + 4\frac{m^2 v_0^4}{4} b^2}}{m v_0^2 b^2} \\ &= -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}}\right) \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

x sollte positiv sein, also ist

$$x_{1,2} = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}}\right) \tag{6.1.7}$$

Damit ist $\delta(v_0, b)$

$$\delta(v_0, b) = -\frac{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2 b^2}{Z_1 Z_2 e^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 v_0^4 b^2}{Z_1^2 Z_2^2 e^4}}\right)} \tag{6.1.8}$$

Für den Grenzwert $b \to 0$ schreiben wir Gleichung (6.1.5) um

$$b^2 x^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} x - 1 = 0 \tag{6.1.9}$$

Wenn $b = 0$ ist, ist die Lösung

$$x_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{Z_1 Z_2 e^2} = \frac{1}{\delta_0} \Longrightarrow \delta_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0} \tag{6.1.10}$$

Gleichung (6.1.9) kann mit δ_0 (Gleichungen (6.1.2) oder (6.1.8)) geschrieben:

$$b^2 x^2 + \delta_0 x - 1 = 0 \tag{6.1.11a}$$

$$\frac{b^2}{\delta^2} + \frac{\delta_0}{\delta} - 1 = 0 \tag{6.1.11b}$$

$$b^2 + \delta_0\delta - \delta^2 = 0 \tag{6.1.11c}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta = \frac{-\delta_0 \pm \sqrt{\delta_0^2 + 4b^2}}{-2} = \frac{\delta_0}{2} \mp \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + b^2} \tag{6.1.11d}$$

$$\tag{6.1.11e}$$

δ muss positiv sein. Dann ist die Lösung

$$\delta = \frac{\delta_0}{2} + \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + b^2} \tag{6.1.12}$$

Weiter ist

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2} \cdot \frac{1}{b} \tag{6.1.13}$$

oder

$$b = \frac{\delta_0}{2} \cot\frac{\theta}{2} \tag{6.1.14}$$

Schliesslich können wir den Minimalabstand $\delta(\theta)$ schreiben

$$\begin{aligned} \delta = \frac{\delta_0}{2} + \sqrt{\frac{\delta_0^2}{4} + \frac{\delta_0^2}{4}\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\delta_0}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}}\right) \\ = \frac{\delta_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Wir setzen nun $\delta(\theta) = r_K(\theta)$. Wir suchen nun den Winkel, ab dem die Streugleichung (6.1.4) nicht mehr gilt. r_K ist dann ein Mass für den Radius des Kerns.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$r_K = \delta = \frac{\delta_0}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \Longleftrightarrow \frac{2r_K}{\delta_0} - 1 = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{6.1.16a}$$

$$\sin\frac{\theta_G}{2} = \frac{1}{\frac{2r_K}{\delta_0} - 1} = \frac{\delta_0}{2r_K - \delta_0} \tag{6.1.16b}$$

$$\theta_G = 2\arcsin\frac{\delta_0}{2r_K - \delta_0} = 2\arcsin\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_0 r_K - Z_1 Z_2 e^2} \tag{6.1.16c}$$

θ_G ist der Grenzwinkel, ab dem die Physik der Coulomb-Streuung versagt. Es ist $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

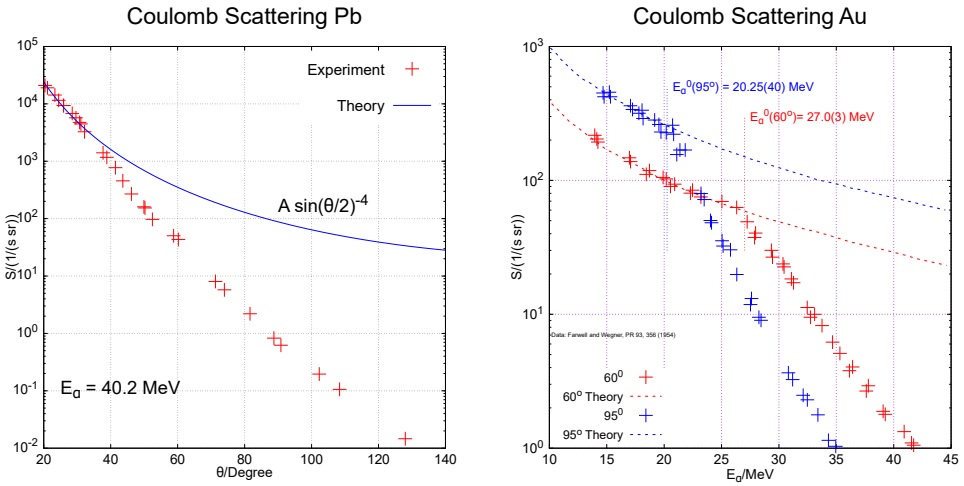


Abb. 6.3.: Coulomb-Streuung an Blei (links, adaptiert aus H. E. Wegner; R. M. Eisberg und G. Igo, „Elastic Scattering of 40-Mev Alpha Particles from Heavy Elements“ [WEI55]) und Gold (Adaptiert aus F. T. Avignone; S. R. Elliott und J. Engel, „Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass“ [AEE08]).

Abbildung 6.3 zeigt, dass die Idee richtig war. Der Grenzwinkel θ_G, bei dem die Streuung von der Coulomb-Streuung (auch Rutherford-Streuung) abweicht ist ein Mass für die Grösse des Kerns.

Aus ähnlichen Experimenten schloss James Chadwick 1920 aus dem Knick in der Rutherford-Streuung (Coulomb-Streuung) dass

$$R_K \approx r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \tag{6.1.17}$$

Die Masse des Kernes kann mit einem Massenspektrometer bestimmt werden (Vorschau)

$$M_N = M^+ - \left[(Z-1)m_e - \frac{E_B^{\text{el}}}{c^2}\right] \tag{6.1.18}$$

wobei E_B^{el} die Bindungsenergie der $Z-1$ Elektronen ist (Äquivalenz von Masse und Energie).

6.1.4. Ladungsverteilung im Kern

Mit der in Abschnitt 4.3.3.4 diskutierten Methode konnte Robert Hofstadter die Ladungsverteilung in Kernen messen. Abbildung 6.4 zeigt sein Resultat.

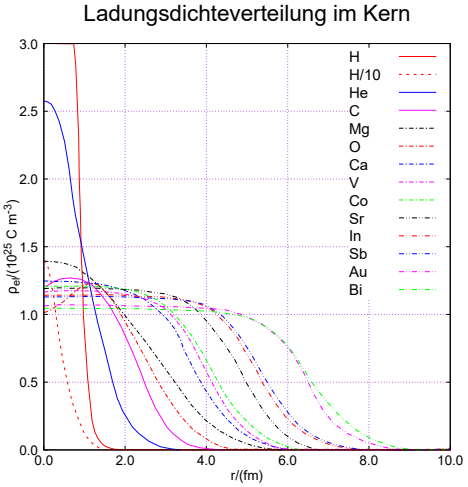


Abb. 6.4.: Ladungsdichteverteilung in Kernen, adaptiert von R. Hofstadter [Hof57]

Wichtig für das Verständnis von Kernen ist die Beobachtung, dass die Ladungsdichteverteilung für Kerne mit $Z \geq 16$ (ungefähr) konstant ist. Das heisst, die potentielle Energie in einem Kern ist nicht die eines Wasserstoffatoms. Nach Enrico Fermi ist eine Approximation der Ladungsdichteverteilung im Kern

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left((r - R_{1/2})/a\right)} \tag{6.1.19}$$

r ist die Radialkoordinate und $R_{1/2}$ der Radius, bei dem die Ladungsdichteverteilung auf die Hälfte abfällt. Abbildung 6.5 zeigt exemplarisch für Ca

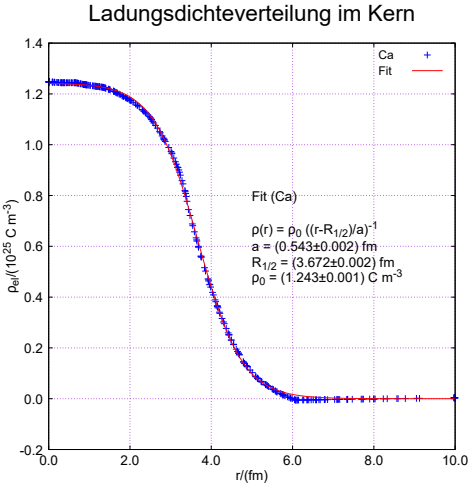


Abb. 6.5.: Fit der Ladungsverteilung bei Ca (Daten aus R. Hofstadter [Hof57]).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

6.1.4.1. Iterative Methoden

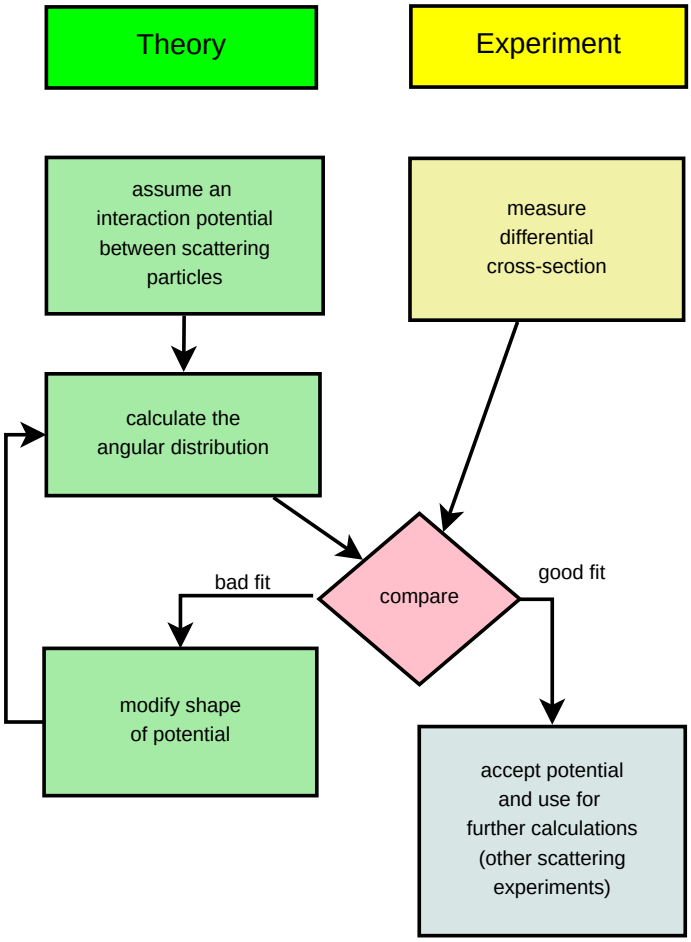


Abb. 6.6.: Iterative Methoden, adaptiert aus W. Demtröder [Dem10, Abb 2.7].

Wie schon ausgeführt, ist es nicht möglich aus den Streukurven die Ladungsverteilung im Kern direkt zu bestimmen. Abb. 6.6 zeigt ein mögliches iteratives Vorgehen. Aus der Theorie wird ein Modell gebaut. Diese wird zur Berechnung der Streuamplitude verwendet. Das Resultat wird mit dem Experiment verglichen. Gibt es Diskrepanzen über einem gewissen Grenzmass, wird das Modell verändert und wieder berechnet. Dabei wird darauf geachtet, dass das Mass der Differenz abnimmt. Bei einer Konvergenz glaubt man, dass das Modell die Wirklichkeit beschreibt.

6.1.5. Beugung an Kernen

Aus Abschnitt 4.3.3.5 wissen wir, dass, wenn die de Broglie-Wellenlänge (nach Louis-Victor de Broglie) $\lambda \ll R_K$ kleiner als der Kernradius ist, es Beugungsmuster in den Streuverteilungen $\Delta N(\vartheta)d\vartheta = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) n_T\, N_0\, V\, \Delta\Omega$ gibt. Für nichtrelativistische Teilchen ist $\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}}$. Robert Hofstadter zeigte, dass Beugungsmessungen nicht direkt in Strukturfaktoren überführt werden können (Phasenproblem, siehe auch vorherige Abschnitte).

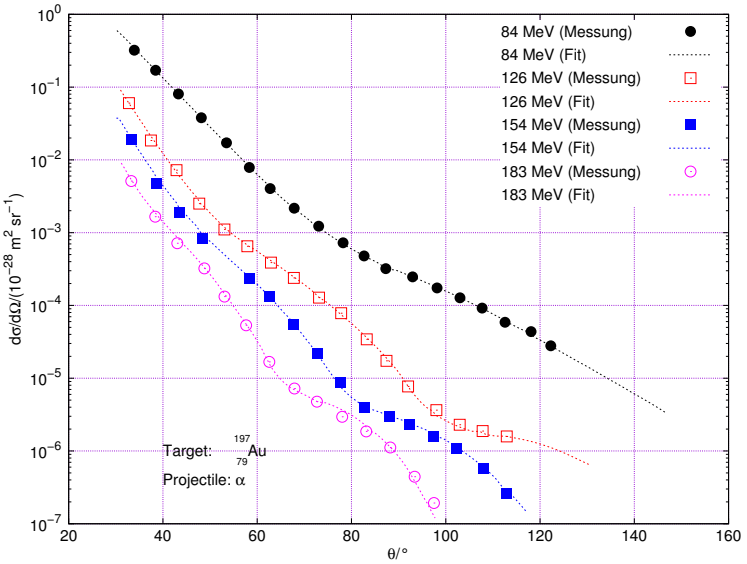


Abb. 6.7.: Streuung von Elektronen an $^{197}_{79}$Au Atomkernen skizziert nach Hofstadter [Hof61]

Abbildung 6.7 skizziert das Resultat von Robert Hofstadter. Abbildung 6.8 zeigt eine seiner genauen Auswertungen der Streukurven.

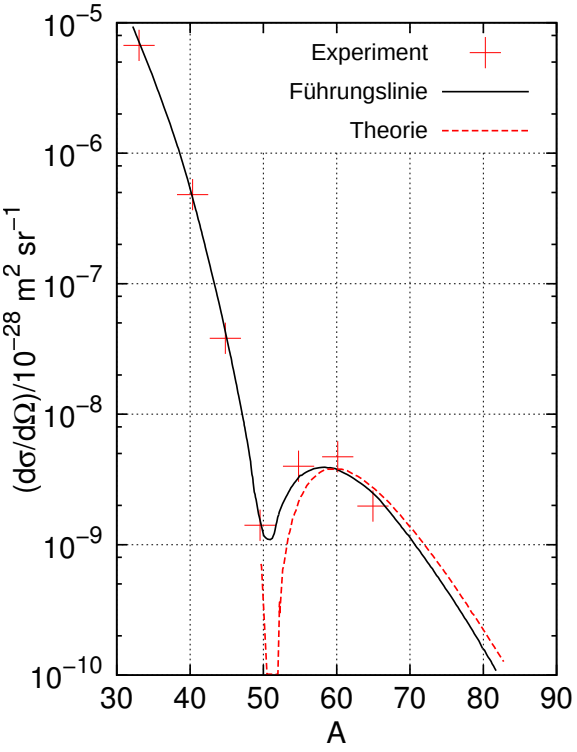


Abb. 6.8.: Streumessung mit Beugung, skizziert nach Hofstadter [Hof57]

Abbildung 6.9 schliesslich zeigt den Formfaktor bei einer Streuung an $^{16}_{8}$O -Kernen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

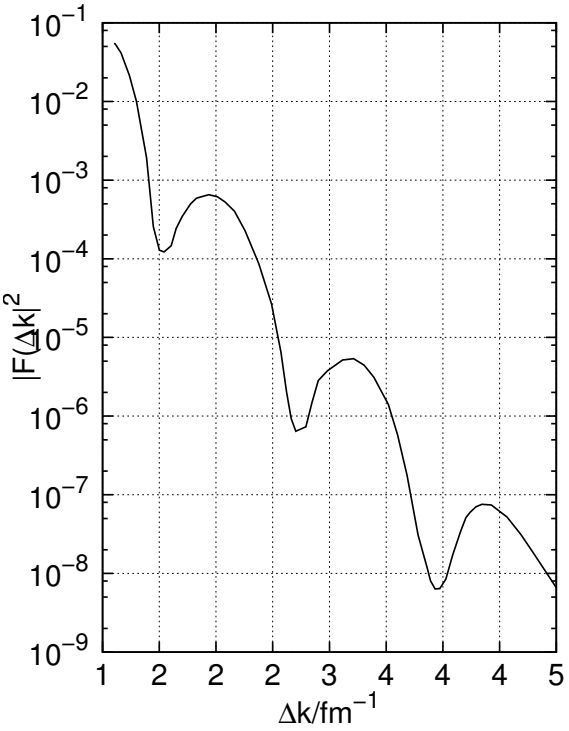


Abb. 6.9.: Streuung von 750 MeV-Elektronen an $^{16}_{8}O$ -Kernen, adaptiert aus [Dem10] [Dem10, Abb 2.12].

6.1.5.1. Alternative Methoden

Aus der Atomphysik wissen wir, dass nach Johannes Rydberg die Frequenzen in Atomen von der Masse des Kerns (und z.B. der Abschirmung durch die anderen Ladungen) abhängt. Nach der Messung des differenziellen Streuquerschnittes (siehe Gleichung (4.3.25)) werden die Frequenzen der Röntgen-K_α-Linien gemessen und mit dem Moseleyschen Gesetz (nach Henry Moseley) ausgewertet:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_y \cdot (Z - S)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \tag{6.1.20}$$

Hier ist $\bar{\nu}$ ist die Wellenzahl, $Ry = 10\,973\,731.568\,527(73)\ \mathrm{m}^{-1}$ die Rydberg-Konstante und $(Z - S)\,e$ die effektive Kernladung unter Berücksichtigung der Abschirmung. Da Frequenzen auf mehr als 12 Stellen genau gemessen werden können, bietet diese Methode eine Möglichkeit, Kernmassen zu bestimmen. Diese werden zur Auswertung der Streuergebnisse benötigt.

6.2. Isospin-Formalismus

Werner Heisenberg zeigte, dass in weiten Grenzen ein Neutron n und ein Proton p als zwei Varianten eines gedachten Teilchens namens Nukleon mit zwei verschiedenen Ladungszuständen angesehen werden können. Dies erlaubt, analog zum Spinformalismus eine Wellenfunktion für ein Nukleon hinzuschreiben

$$\Psi_e = \underbrace{\Psi(\boldsymbol{r})}_{\text{Ortsfunktion}} \cdot \underbrace{X^{\pm}}_{\text{Spinfunktion}} \tag{6.2.1}$$

Hier ist $X^+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \uparrow$ und $X^- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \downarrow$ die Bezeichnungen für die zwei Zustände. Diese Darstellung ist analog zum Spinformalismus

$$\Psi_p = \Psi_N(\boldsymbol{r}) \cdot \pi \qquad \text{mit} \quad \pi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{für p} \tag{6.2.2a}$$

$$\Psi_n = \Psi_N(\boldsymbol{r}) \cdot \nu \qquad \text{mit} \quad \nu = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{für n} \tag{6.2.2b}$$

$$\tag{6.2.2c}$$

ν und π sind die Isospinwellenfunktionen für das NEUTRON und das PROTON.

Die Isospinwellenfunktion ist eine abstrakte Darstellung der beiden Zustände eines Nukleons, dem Proton und dem Neutron. Anders als beim Spin ist beim Isospin **kein magnetisches Moment** und **kein Drehimpuls** verknüpft.

Analog zum Spinvektor schreiben wir einen Isospinvektor

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{6.2.3}$$

Der Isospinvektor $\boldsymbol{\tau}$ hat alle Eigenschaften eines Drehimpulses und kann durch Pauli-Matrizen (nach Wolfgang Pauli) beschrieben werden

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

Analog zum Spin gibt es die Eigenwerte

$$\tau_3\pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\pi \tag{6.2.5a}$$

$$\tau_3\nu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\nu \tag{6.2.5b}$$

Ein Kern besteht aus verschiedenen Nukleonen, der Isospin des Kerns ist die Vektorsumme der Isospins der einzelnen Bestandteile

$$\boldsymbol{T} = \sum \boldsymbol{\tau_k} \tag{6.2.6}$$

Für die 3-Komponente des Isospinvektors $\boldsymbol{T}$ (Betrag $T = |T|$) gibt es $2T + 1$ mögliche Werte von $T_3 = \sum \tau_{3k}$, analog zu Drehimpulsen.

Achtung: Die Komponenten von $\boldsymbol{\tau}$ sind keine Ortskomponenten, sondern Komponenten eines Isospins.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Beispiel: Bei den beiden Spiegelkernen ${}^{11}_{6}\mathrm{C}$ und ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ müsste die Gesamtwellenfunktion bei identischen Nukleonen identisch sein. Dabei wurde die Coulomb-Wechselwirkung vernachlässigt. Wenn der Energiegewinn beim Übergang von ${}^{11}_{6}\mathrm{C}$ in ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$

$$\Delta E_C > (m_n + m_p)c^2 \rightarrow \beta^+\text{-Zerfall} \tag{6.2.7}$$

ist, erwarten wir einen β-Zerfall.

6.2.1. Pauli-Prinzip

Wolfgang Pauli erkannte, dass die Symmetriebedingungen bei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen die möglichen Wellenfunktionen einschränkten. Dies führte zum Pauli-Ausschlussprinzp oder Pauli-Prinzip. $2p$ und/oder $2n$ mit jeweils antiparallelem Kernspin füllen die tiefen Energieniveaus. Für diese gepackten Nukleonen ist $T_3 = 0$.
${}^{11}_{6}\mathrm{C}$ und ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$ bilden ein Isospin-Dublett

$$\left.\begin{array}{ll} {}^{11}_{6}\mathrm{C}: & T_3 = \frac{1}{2} \\ {}^{11}_{5}\mathrm{B}: & T_3 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Isospin-Dublett} \tag{6.2.8}$$

Der in Abschnitt 6.2 angesprochene β^+-Zerfall bedeutet für die 3-Komponente des Isospins

$$T_3 = +\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad T_3 = -\frac{1}{2} \tag{6.2.9}$$

dass sie sich ändert. Diese Änderung bei einem Übergang ist ein Zeichen für die schwache Wechselwirkung. Mehr dazu in späteren Kapiteln.
Allgemein gilt bei A Nukleonen

$$T_3 = \sum_{k=1}^{A} \tau_{3k} = \frac{1}{2}(Z - N) \tag{6.2.10}$$

A ist das allgemein übliche Symbol für die Gesamtzahl der Nukleonen in einem Kern.

T	T_3	Isospinfunktion	
1	1	$\varphi^1_1 = \pi(1)\cdot\pi(2)$	Isospin-Triplett
1	0	$\varphi^1_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) + \pi(2)\nu(1)]$	
1	-1	$\varphi^1_{-1} = \nu(1)\cdot\nu(2)$	
0	0	$\varphi^0_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) - \pi(2)\nu(1)]$	Isospin-Singulett

Tab. 6.2.: Isospinzustände bei zwei Nukleonen. (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 5.3]).

Die Gesamtwellenfunktion bei zwei Nukleonen hat die folgenden Symmetrieeigen-

schaften:

- Isospin-Triplett ⇒ Wellenfunktion symmetrisch beim Austausch der beiden Teilchen
- Isospin-Singulett ⇒ Wellenfunktion antisymmetrisch beim Austausch der beiden Teilchen

6.3. Parität

Unter dem Begriff PARITÄT verstehen wir die Punktspiegelung im Raum

$$\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r} \tag{6.3.1}$$

Wir haben bei der Diskussion in Abschnitt 6.2.1 gesehen, dass das PAULI-PRINZIP eine Aussage über die Symmetrie der Wellenfunktion beim Austausch zweier Teilchen macht. Hier betrachten wir zwei Typen von Wellenfunktionen:

$$\text{Symmetrisch:} \qquad \psi_s(\boldsymbol{r}) \overset{r\to -r}{\longrightarrow} \overline{\psi_s}(\boldsymbol{r}) = \psi_s(-\boldsymbol{r}) \tag{6.3.2a}$$

$$\text{Antisymmetrisch:} \qquad \psi_a(\boldsymbol{r}) \overset{r\to -r}{\longrightarrow} \overline{\psi_a}(\boldsymbol{r}) = -\psi_a(-\boldsymbol{r}) \tag{6.3.2b}$$

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.2.] bedeutet die Linearität der Transformation, dass die Operation durch den PARITÄTSOPERATOR $\hat{\mathrm{P}}$ ausgedrückt werden kann. Die Eigenzustände des Paritätsoperators haben den Eigenwert

$$\hat{\mathrm{P}}\psi_p(\boldsymbol{r}) = P\psi_p(\boldsymbol{r}) \tag{6.3.3}$$

Wenn wir $\hat{\mathrm{P}}$ zweimal anwenden haben wir die Identität

$$\hat{\mathrm{P}}^2\psi(\boldsymbol{r}) = \hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{P}}\psi(\boldsymbol{r})\right) = \hat{\mathrm{P}}\left(P\psi(-\boldsymbol{r})\right) = P^2\psi(\boldsymbol{r}) = \hat{\mathrm{I}}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{6.3.4}$$

Daraus folgt:

$$P = \pm 1 \tag{6.3.5}$$

Weiter ist auch $\hat{\mathrm{P}} = \hat{\mathrm{P}}^\dagger = \hat{\mathrm{P}}^{-1}$, also hermitesch und unitär. Die Eigenfunktionen zu den zwei Eigenwerten sind

$$\overline{\psi^{(+)}}(\boldsymbol{r}) = \left(\hat{\mathrm{P}}\psi^{(+)}\right)(\boldsymbol{r}) = \psi^{(+)}(-\boldsymbol{r}) = (+1)\,\psi^{(+)}(\boldsymbol{r}) \tag{6.3.6a}$$

$$\overline{\psi^{(-)}}(\boldsymbol{r}) = \left(\hat{\mathrm{P}}\psi^{(-)}\right)(\boldsymbol{r}) = \psi^{(-)}(-\boldsymbol{r}) = (-1)\,\psi^{(-)}(\boldsymbol{r}) \tag{6.3.6b}$$

Die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik sind invariant gegen der Punktsymmetrie deshalb kommutieren der Paritätsoperator und der Hamiltonoperator.

$$[\,\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{H}}\,] = 0 \tag{6.3.7}$$

Dies heisst, dass jeder nicht entartete Eigenzustand des Hamiltonoperators auch ein Eigenzustand des Paritätsoperators ist, also eine definierte Parität hat.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Ortskoordinaten wechseln bei der Paritätsoperation das Vorzeichen, genauso wie die Geschwindigkeiten. Dies entspricht dem Eigenwert -1. Oder in anderen Worten: diese Vektoren sind bezüglich des Nullpunkts antisymmetrisch. Beide Grössen sind polare Vektoren. Der Drehimpuls mit seinem Kreuzprodukt aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor ändert das Vorzeichen nicht, das entspricht $+1$. Drehimpulse sind axiale Vektoren, also symmetrisch bezüglich der Spiegelung am Koordinatennullpunkt.
Wenn der Wechselwirkungsoperator $\hat{\mathrm{H}}_{WW}$ mit dem Paritätsoperator kommutiert, also

$$[\,\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{H}}_{WW}\,] = 0 \tag{6.3.8}$$

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung erhalten die Parität, deren Wechselwirkungsoperator kommutiert mit dem Paritätsoperator. Die schwache Wechselwirkung ist nicht paritätserhaltend.
Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.2.] ist die Parität nicht einfach zu messen. Wenn bei einer paritätserhaltenden Wechselwirkung ein Teilchen 1 sich in zwei Teilchen $1'$ und $2'$ aufspalten, gibt es die folgenden Einschränkungen:

- Der gesamte Endzustand ψ_{Ende} muss die gleiche Parität haben wie der Anfangszustand ψ_{Anfang}. Das bedeutet dass
  - bei gerader Parität des Anfangszustandes die beiden Endzustände entweder beide gerade oder beide ungerade
  - bei ungerader Parität des Anfangszustandes die beiden Endzustände je einmal gerade und ungerade

  sein müssen.
- Wenn die beiden Endzustände einen Bahndrehimpuls haben, dann kommt noch ein Faktor $(-1)^\ell$ hinzu.
- Generell ist die Parität das Produkt der Paritätseigenwerte aller Teilwellenfunktionen.
- Die Transformationseigenschaften von Zahlen und Vektoren sind im Anhang C.3 aufgelistet.

6.4. Nukleon-Nukleon-Streuung

Hier betrachten wir die Streuung von n an p, von n an n oder von p an p. Die Berechnung der Streuung wird im Schwerpunktsystem durchgeführt. Bei kleinen und mittleren Energien haben wir

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{L}| = b\mu v_0 = b\sqrt{\frac{1}{2}mE_0} \tag{6.4.1}$$

mit E_0 der kinetischen Energie eines Nukleons und $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m}{2}$ der reduzierten Masse.

Die Wechselwirkung z.B. zwischen Neutronen n kann nicht die elektromagnetische Wechselwirkung sein. Wir kennen sie noch nicht, aber wir wissen, dass sie eine maximale Reichweite R_0 haben müssen. Dieses R_0 ist der maximal mögliche Abstand bei dem es eine Wechselwirkung gibt. Das Produkt aus einer Geschwindigkeit und einem dazu senkrechten Bahndrehimpuls ist ein Bahndrehimpuls. Bahndrehimpulse sind quantisiert. Das heisst, aus der Geometrie gibt es einem maximalen Bahndrehimpuls, gleichzeitig gibt es den Bahndrehimpuls nur quantisiert. Wir haben die Beziehung

$$|\boldsymbol{L}_{\max}| = \ell_{\max}\hbar \leq 2R_0\mu v_0 = 2R_0\hbar k \tag{6.4.2}$$

Die maximal mögliche Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell_{\max}$ für die Streuung (oder der maximal mögliche Wert für die 3-Komponente des Bahndrehimpulses)

$$\ell_{\max} \leq 2R_0 k = \frac{2R_0}{\hbar}\sqrt{\frac{1}{2}mE_0} \tag{6.4.3}$$

Quantenmechanisch wird der Streuprozess durch den totalen elastischen Wirkungsquerschnitt für Teilchen mit der reduzierten de Broglie-Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p} = \frac{1}{k}$ beschrieben. Wenn die einlaufende Welle in Partialwellen mit den Drehimpulsen $\hbar\ell$ bezüglich des Streuzentrums eingeteilt wird, ergibt sich eine Aufteilung der gesamten Fläche des einfallenden Teilchenstroms in Kreisringzonen (siehe W. Demtröder [Dem10, Kap. 4.4.2.]). Teilchen mit dem Impuls p ergeben die Ringradien

$$r_n = \frac{L}{p} = \frac{\hbar\ell}{p} = \ell\frac{\hbar}{p} = \ell\frac{\hbar}{\hbar k} = \ell\frac{\lambda}{2\pi} = \ell\lambda\!\!\!^{-} \tag{6.4.4}$$

Pro Kreisringsegment ergibt sich die Fläche

$$A_\ell = \pi\left(r^2(\ell+1) - r^2(\ell) = \pi\left(\ell+1\right))^2\lambda\!\!\!^{-2} - \ell^2\lambda\!\!\!^{-2}\right)) = \pi\lambda\!\!\!^{-2}\left(2\ell+1\right) \tag{6.4.5}$$

Die Gesamtfläche wird

$$A = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sigma_\ell = \pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{\ell=0}^{\ell_{max}}\left(2\ell+1\right) = \pi\lambda\!\!\!^{-2}\left(\ell+1\right)^2 \tag{6.4.6}$$

Dieses A ist der Ausgang für die Berechnung des Streuquerschnitts unter Berücksichtigung der Wechselwirkung über das Potential. Jede Partialwelle in A_ℓ erhält durch die Wechselwirkung einen Faktor $\left(1 - \exp\left(2i\delta_\ell\right)\right)$. Die Summation kann in ein Integral überführt werden. Aus dem Integral ergibt sich, dass bei der elastischen Streuung jede Partialwelle eine Phase δ_ℓ – also die Phase gegen einen einmal festgelegten Nullpunkt – erhält. Der Gesamtstreuquerschnitt ist dann

$$\sigma_{\text{int}}^{\text{el}} = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}}(2\ell+1)\sin^2(\delta_\ell) \tag{6.4.7}$$

erhält. Die Streuphase δ_0 wird durch die Physik der Wechselwirkung bestimmt. Dadurch enthält der gesamte Streuquerschnitt die Physik der Wechselwirkung.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

6.4.1. Spinabhängigkeit

Wir haben gesehen, dass Nukleonen einen Spin $\boldsymbol{I}_i$ haben. Wie bei den sonstigen Drehimpulsen gilt

$$|\boldsymbol{I}_i| = \hbar\sqrt{I_i\,(I_i+1)} \tag{6.4.8}$$

Bei einem Nukleon oder Teilchen mit mehreren Nukleonen ist die Vektorsumme aller Spins[1] und aller Drehimpulse ein Charakteristikum des Teilchens. Diese Summe

$$\boldsymbol{I} = \sum_{\forall i} (\boldsymbol{I}_i + \boldsymbol{\ell}_i) \tag{6.4.9}$$

heisst der KERNSPIN.

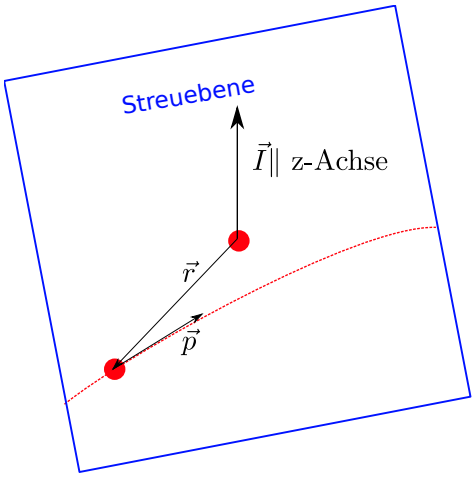


Abb. 6.10.: Definition der Streuebene nach [Dem10, Abb. 5.1]

Abbildung 6.10 zeigt die Streugeometrie. Wir setzen die z-Achse parallel zum Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$. Wenn die beiden einzelnen Spins $\boldsymbol{I}_i$ der beiden Nukleonen parallel sind, dann befinden sich die beiden Nukleonen in einem TRIPLETTZUSTAND. Der resultierende Gesamtspin kann eine 3-Komponente parallel zur z-Achse haben, oder es ist $I_3 = 0$. Bei antiparallelen Spins ist nur $I_3 = 0$ möglich.

$$\boldsymbol{I}_1 \parallel \boldsymbol{I}_2 \Longrightarrow \quad \begin{cases} I_z = 0 & \text{in der Streuebene;} \\ I_z = \pm 1, & \text{auserhalb der Streuebene.} \end{cases} \tag{6.4.10a}$$

$$\boldsymbol{I_1} \downarrow\uparrow \boldsymbol{I_2} \Longrightarrow \quad I_z = 0 \text{ nur in der Streuebene} \tag{6.4.10b}$$

Es gibt also drei Triplettzustände und einen Singulettzustand. Die Streuquerschnitte für Triplettzustände (σ^t_{tot}) und die Singulettzustände (σ^s_{tot}) müssen dann mit den Gewichten $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ addiert werden

$$\sigma^{\text{el}}_{tot} = \frac{1}{4}\sigma^s_{tot} + \frac{3}{4}\sigma^t_{tot} \tag{6.4.11}$$

Mit den Streuphasen erhalten wir

[1] aber nicht der Isospins.

$$\sigma_{tot}^{\text{el}} = \frac{4\pi}{k^2}\left[\frac{3}{4}\sin^2\delta_0^t + \frac{1}{4}\sin^2\delta_0^s\right] \tag{6.4.12}$$

mit $k = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}$ wie oben.
Experimentell waren die totalen Streuquerschnitte bei der Neutron-Proton-Streuung (gemessen: σ_{tot}^{el} sowie σ_{tot}^t und σ_{tot}^s mit Gleichung (6.4.12) berechnet):

$$\sigma_{tot}^{\text{el}} = 20.3 \cdot 10^{-24}\ \text{cm}^2 = 20.3\ \text{b} \tag{6.4.13a}$$
$$\sigma_{tot}^t \approx 3.8\ \text{b} \tag{6.4.13b}$$
$$\sigma_{tot}^s \approx 70\ \text{b} = 4\,(20.3\ \text{b} - 3 \cdot 3.8\ \text{b}) \tag{6.4.13c}$$

Aus den Gleichungen (6.4.7) und (6.4.12) kann man für Streuwellen mit $\ell = 0$ (S-Welle) eine Streulänge definieren. Aus dem dann winkelunabhängigen totalen Streuquerschnitt ergibt sich

$$\lim_{\lambda\!\!\!^{-}\to\infty} \sigma_{total} = 4\pi(a^*)^2 \overset{\ell=0}{=} 4\pi\lambda\!\!\!^{-2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1)\sin^2(\delta_\ell) = 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sin^2(\delta_\ell) \tag{6.4.14}$$

Durch Ziehen der Wurzel bekommen wir

$$a^* = \pm \lim_{\lambda\!\!\!^{-}\to\infty} \lambda\!\!\!^{-}\sin(\delta_0) = \pm \lim_{k\to 0} \frac{\sin(\delta_0)}{k} \tag{6.4.15}$$

$k \to 0$ ist äquivalent zur Aussage, dass die Energie des Teilchens gegen null geht. In der Regel hat der Quotient einen endlichen Grenzwert.

Beispiel:
Aus $\sigma_{tot}^t \approx 3.8{\cdot}10^{-24}\ \text{cm}^2$ folgt $a^* = 5.5$ fm. Aus der Singulett- und Triplettstreuung kann a^* und R_K bestimmt werden, aber nicht der Potentialverlauf.

6.4.2. Ladungsabhängigkeit

Um die Ladungsunabhängigkeit der Nukleonstreuung zu zeigen vergleichen wir die $p-n$-Streuung mit der $p-p$-Streuung und der $n-n$-Streuung. Aus Gleichung (4.3.25)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2$$

folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta) \pm f(\pi - \vartheta)|^2 \tag{6.4.16}$$

Wenn der Stossparameter b genügend klein ist, ist $\ell = 0$ und damit (keine Winkelabhängigkeit bei S-Wellen

$$f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta) \tag{6.4.17}$$

Bei höheren Bahndrehimpulsen modifiziert dieser die Winkelverteilung, das heisst die Symmetrie ist nicht mehr gewährleistet. Wie schon besprochen ist bei Fermionen die Gesamtwellenfunktion antsisymmetrisch. Das bedeutet, dass die Spins der

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Fermionen antiparallel sind.
Das bedeutet, dass die $n-n$- und die $p-p$-Streuung nur im Singulettzustand möglich ist. Die $p-n$-Streuung unterliegt nicht dem Pauli-Prinzip: Sie tritt sowohl im Singulett- wie auch im Triplettzustand auf. Deshalb muss hier der Singulettzustand rechnerisch bestimmt werden.
Wir können deshalb die $n-n$- und die $p-p$-Streuung nur im Singulettzustand vergleichen (den Triplettzustand gibt es nicht). Bei der $p-p$-Streuung muss das Coulombpotential zusätzlich mit berücksichtigt werden.
Wenn alle diese Nebenbedingungen erfüllt sind ergibt sich, dass die $n-n$-, $p-p$- und $p-n$-Streuquerschnitte gleich sind. Dies ist eine Stütze der Annahme eines generischen Teilchens namens NUKLEON. Dies kann auch so formuliert werden:

Kernkräfte hängen nicht von der Ladung der Nukleonen ab.

6.5. Kernmodelle

6.5.1. Massendichteverteilung und Masse

Die Ladungsdichteverteilung (6.1.19) (nach Enrico Fermi)

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1+\exp\left(\frac{r-R_{1/2}}{a}\right)}$$

ist eine Approximation für die Massenverteilung.

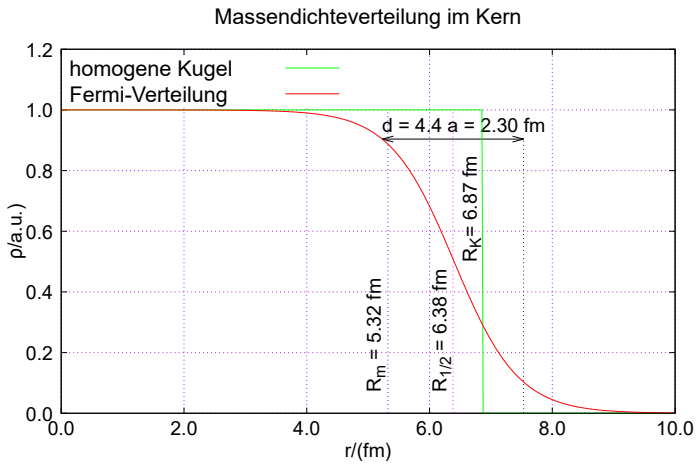


Abb. 6.11.: Massedichteverteilung von Au mit den verschiedenen Kernradien (nach W. Demtröder [Dem10]).

Abbildung 6.11 zeigt die verschiedenen Grössen bei der Beschreibung eines Kerns

- Halbwertsradius $R_{1/2}$ (= 6.38 fm bei $^{197}_{79}$Au)

- mittlerer quadratischer Kernradius R_m^2 ($R_m = 5.32$ fm bei ${}^{197}_{79}\text{Au}$)

$$R_m^2 = \frac{\int_0^\infty r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 dr} \tag{6.5.1}$$

- Kugelradius bei einer homogenen Kugel R_K ($R_K = 6.87$ fm bei ${}^{197}_{79}\text{Au}$)

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi\rho_0 \int_0^{R_K} r^2 dr} \int_0^\infty r^2 \rho(r) \cdot 4\pi\, r^2 dr = \frac{3}{5} R_K^2 \tag{6.5.2}$$

- Randbereich von $R_{1/2} - 2.2a$ bis $R_{1/2} - 2.2a$ mit $d = 4.4a$ ($= 2.3$ fm bei ${}^{197}_{79}\text{Au}$)

Der Radius der homogenen Kugel berechnet sich mit $M_K = 4\pi\rho_0 \int_0^{R_K} r^2 dr$ und R_m für $\rho(r) = \rho_0$. Bei einer konstanten Massendichte $\rho_m(r) = \rho_0$ folgt aus der Kernmasse

$$\frac{4}{3}\pi R_S^3 \rho_0 = M_K \approx M_N \cdot A \tag{6.5.3}$$

M_N ist die Masse eines Nukleons. Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{3M_K}{4\pi\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}} \approx r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \tag{6.5.4}$$

Wir haben dann

$$R_m = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.77 \cdot R_K = A^{1/3} \cdot 1.0 \text{ fm} \tag{6.5.5a}$$

$$R_K = \sqrt{\frac{3}{5}} R_m \approx A^{1/3} \cdot 1.3 \text{ fm} \tag{6.5.5b}$$

$$R_{1/2} = 0.9 - 1.1 \cdot R_m \approx A^{1/3} \cdot (0.9 - 1.1) \text{ fm} \tag{6.5.5c}$$

Oft wird $r_0 \approx 0.94 - 1.3$ fm gesetzt.

Die Grösse des Kernradius' hängt vom betrachteten Modell ab.

6.5.2. Bausteine

Die Untersuchungen von Ernest Rutherford (siehe Abschnitt 6.1.2) ergab sich, dass haben Kerne aus zwei Arten von NUKLEONEN bestehen. Das PROTON ist das positiv geladene Nukleon und ein wenig leichter als das ungeladene Nukleon, das NEUTRON. Die Nukleonen werden durch Kernkräfte, die auch STARKE WECHSELWIRKUNG genannt werden, zusammengehalten. Diese ist unabhängig von der

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Ladung.

Name	Proton	Neutron
Symbol	p	n
Ladung	$+e$	0
Masse	1.007 276 466 63(9) u	1.008 664 915 9(5) u
	$\hat{=}$ 938.272 081(6) MeV/c^2	$\hat{=}$ 939.565 413(6) MeV/c^2
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Pariät	$+$	$+$
magnetisches Moment	$2.792\,847\,344\,6(8)\mu_K$	$-1.913\,042\,7(5)\mu_K$

Tab. 6.3.: Masse der Nukleonen nach P. A. e. Zyla, *The Review of Particle Physics (2021)* [Zyl21]. μ_K ist das Kernmagneton.

Da die Massen der beiden Nukleonen (siehe 6.3) unterscheidet sich nur um 1.293 332 1(5) MeV/c^2. Deshalb kann in guter Näherung von einem generischen Nukleon gesprochen werden.

6.5.3. Tröpfchenmodell

Im Folgenden werden die Gleichungen plausibel gemacht.

1. Anziehende Kernkräfte sind kurzreichweitig (also nur zu nächsten Nachbarn)

   Aus $\Rightarrow E_B$/Nukleon unabhängig von $A = Z + N$

   $\Rightarrow E_{\mathrm{B}_1} = +a_v \cdot A$

   $$E_{B_1} = +a_V \cdot A \tag{6.5.6}$$

   Dies ist der Volumenanteil.

2. Wir nehmen weiter an, dass Nukleonen an der Oberfläche weniger gebunden sind, da Nachbarn fehlen:

   $$\text{Oberfläche} \;\propto\; V^{\frac{2}{3}} \;\propto\; A^{\frac{2}{3}}$$

   $$E_{B_2} = -a_s \cdot A^{2/3} \tag{6.5.7}$$

   Damit ist dies der Oberfllächenanteil.

3. Nukleonen sind Fermionen (nach Enrico Fermi) $\Rightarrow$ Pauli-Prinzip (nach Wolfgang Pauli)

   Energie minimal bei gegebenem A wenn eine gerade Anzahl von Protonen Z und eine gerade Anzahl von Neutronen N vorhanden sind: gg-Kern

$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3}{5}E_F\,(N_n + N_p) = \frac{3}{5}E_F\,A$$
$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{V}\right)^{2/3}\left(N_p^{2/3} + N_n^{2/3}\right)$$

Mit $\Delta N = N_n - N_p$ und $N = N_n + N_p$ und $N_n = (1/2)(A + \Delta N) = (A/2)(1 + \Delta N/A)$ und $N_p = (1/2)(A - \Delta N) = (A/2)(1 - \Delta N/A)$

$$\langle E_F\rangle = \frac{3\hbar^2}{10m}\left(\frac{3\pi^2}{V}\right)^{2/3}\frac{A^{2/3}}{2^{2/3}}\left(\left(1+\frac{\Delta N}{A}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{\Delta N}{A}\right)^{2/3}\right) \tag{6.5.8}$$

$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3\hbar^2}{10m}\left(\frac{3\pi^2}{V}\right)^{2/3}\frac{A^{5/3}}{2^{2/3}}\left(\left(1+\frac{\Delta N}{A}\right)^{2/3} + \left(1-\frac{\Delta N}{A}\right)^{2/3}\right) \tag{6.5.9}$$

$$(1 \pm x)^{2/3} \approx 1 \pm \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \pm \ldots$$
$$(1+x)^{2/3} + (1-x)^{2/3} \approx 2 - \frac{2}{9}x^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned}\langle E_{kin}\rangle =& C_1 A\left(\frac{A}{V}\right)^{2/3}\left[2 - \frac{2}{9}\left(\frac{\Delta N}{A}\right)^2 + \ldots\right]\\ =& C\left[A - \frac{2}{9}\frac{\Delta N^2}{A} + \ldots\right]\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

(mit $A \approx V$). Der erste Term ist im Volumenterm enthalten. Der zweite Term wird

$$E_{B_3} = -a_F\frac{(Z-N)^2}{A} \tag{6.5.11}$$

Dies ist die Asymmetrie-Energie

4. Coulomb-Abstossung

$$E_{B_4} = -a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} \qquad \text{mit} \qquad a_C = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \tag{6.5.12}$$

Folgt aus der Integration der Coulombenergie für eine homogene sphärische Ladung.

5. gg-Kerne sind stabiler als uu-Kerne. Also gibt es einen Paarungsanteil

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$E_{B_5} = a_P \cdot A^{-1/2}\delta \quad \text{mit } \delta = \begin{cases} +1 & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für gu- und ug-Kerne} \\ -1 & \text{für uu-Kerne} \end{cases} \tag{6.5.13}$$

wobei die A-Abhängigkeit empirisch ist

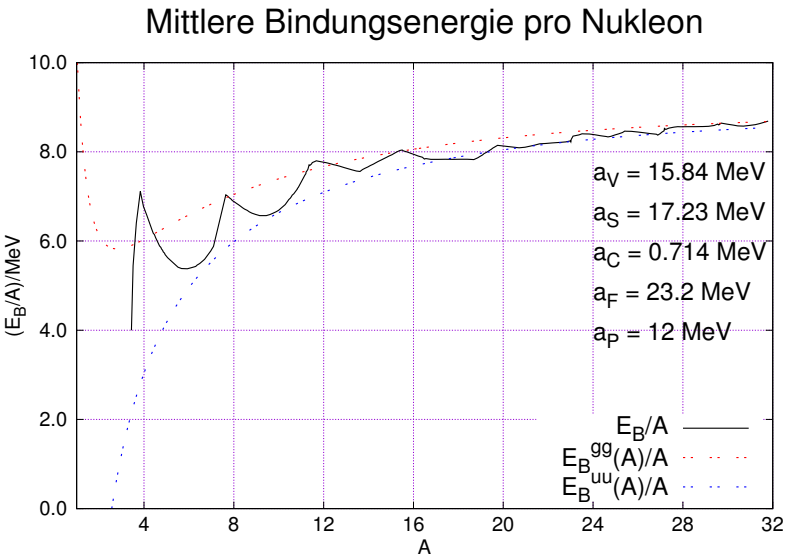


Abb. 6.12.: Experimentelle Bindungsenergie pro Nukleon im Vergleich zum Tröpfchenmodell (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.32 [Dem10])

6.5.3.1. Bethe-Weizsäcker-Gleichung

Das Tröpfchenmodell wird in der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker) durch

$$\begin{aligned} E_B =& \Delta M c^2 \\ =& \left(Z m_p + N m_n - M_k\right) c^2 \\ =& a_V A - a_S A^{2/3} - a_F \left(N - Z\right)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

beschrieben, wobei M_K die Masse des Kerns ist.
Die Zahlenwerte nach W. Demtröder [Dem10] sind:

$$a_V = 15.84 \text{ MeV} \qquad a_S = 18.33 \text{ MeV} \qquad a_F = 23.2 \text{ MeV} \tag{6.5.15a}$$
$$a_C = 0.714 \text{ MeV} \qquad a_p = 12 \text{ MeV} \tag{6.5.15b}$$

A. Das und T. Ferbel [DF09] geben den Paarungsterm etwas anders an:

$$E_B(A,Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_F \frac{(A-2Z)^2}{A} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_p A^{-3/4} \tag{6.5.16}$$

mit den Zahlenwerten

$$a_V = 15.6 \text{ MeV} \qquad a_S = 16.8 \text{ MeV} \qquad a_F = 23.3 \text{ MeV} \tag{6.5.17a}$$

$$a_C = 0.72 \text{ MeV} \qquad a_p = 34 \text{ MeV} \tag{6.5.17b}$$

6.5.3.2. Gesamtmasse von Kernen und Atomen

$$\begin{aligned} M_K(A,Z) =& Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_B}{c^2} \\ =& Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{1}{c^2}\left[a_V A - a_S A^{2/3} - a_F\,(N-Z)^2\,A^{-1}\right. \\ & \left. - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2}\right] \end{aligned} \tag{6.5.18}$$

$$\begin{aligned} M_a(A,Z) =& M_K(A,Z) + Zm_e - \frac{E_B^{el}}{c^2} \\ =& Zm_p + (A-Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2}\left[a_V A - a_S A^{2/3} - a_F\,(N-Z)^2\,A^{-1}\right. \\ & \left. - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el}\right] \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

6.5.4. Einteilchenmodelle

Die einfachsten Kernmodelle betrachten jedes einzelne Nukleon als selbständiges Teilchen. Nach dem Kastenpotential wird als Erweiterung das Fermigas-Modell (nach Enrico Fermi) betrachtet. Ein Vergleich mit der Atomphysik führt dann zum Schalenmodell.

6.5.4.1. Begriffserklärung mit würfelförmigem Kastenpotential

Vor dem sphärischen Potentialkasten betrachten wir zuerst den würfelförmigen Potentialkasten.

- Im Kern heben sich die gegenseitigen Kräfte der Nukleonen auf
- Für $r = a$ und $r > a$ gibt es eine nach innen gerichtete Kraft, die die Nukleonen im Kern hält.
- Kurze Reichweite der Kernkräfte $\Longrightarrow$ das Potential ist wegen $\boldsymbol{F} = -\,\mathbf{grad}\,V$ im Kern konstant und negativ
- Potentielle Energie

$$E_{pot}(r) = \begin{cases} -E_0 & \text{für} \quad r < a \\ 0 & \text{für} \quad r \geq a \end{cases} \tag{6.5.20}$$

- Schrödingergleichung (nach Erwin Schrödinger)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi - E_0\psi = E\psi \tag{6.5.21}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

- Produktansatz
$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \tag{6.5.22}$$

- Drei Gleichungen
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_x(x)}{\partial x^2} = E_x\psi_x \tag{6.5.23a}$$
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_y(y)}{\partial y^2} = E_y\psi_y \tag{6.5.23b}$$
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_z(z)}{\partial z^2} = E_z\psi_z \tag{6.5.23c}$$

- Energieeigenwerte
$$E_x + E_y + E_z = E + E_0 = E - E_{pot} \tag{6.5.24}$$

- Wellenvektor $k_i = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_i}$
$$\frac{\partial^2\psi_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2\psi_x \tag{6.5.25a}$$
$$\frac{\partial^2\psi_y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2\psi_y \tag{6.5.25b}$$
$$\frac{\partial^2\psi_z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2\psi_z \tag{6.5.25c}$$

- Randbedingungen (ψ verschwindet) ergeben
$$\psi_x(x) = A_x \sin(k_x x) \qquad \text{mit} \qquad k_x = n_x \cdot \frac{\pi}{a} \tag{6.5.26a}$$
$$\psi_y(y) = A_y \sin(k_y y) \qquad \text{mit} \qquad k_y = n_y \cdot \frac{\pi}{a} \tag{6.5.26b}$$
$$\psi_z(z) = A_z \sin(k_z z) \qquad \text{mit} \qquad k_z = n_z \cdot \frac{\pi}{a} \tag{6.5.26c}$$

- Kubischer Potentialkasten
$$E_i = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n_i^2 \quad \text{mit} \quad i = x,y,z \tag{6.5.27}$$

- Gesamtenergie
$$E + E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \tag{6.5.28}$$

- E Gesamtenergie, $E - E_{pot} = E + E_0$ (siehe Gleichung (6.5.20))

- Energie $E \leq E_{max} - E_0 < 0 \Longrightarrow$ Gitterpunkte in Oktanten mit $k_x > 0$, $k_y > 0$, $k_z > 0$ und
$$k_{max} = \frac{p_{max}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m \cdot E_{max}} \tag{6.5.29}$$

- Anzahl Zustände

$$n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 = \frac{a^3}{6\pi^2\hbar^3} \left(2m \cdot E_{max}\right)^{3/2} \tag{6.5.30}$$

- Die Zustände $n < n_F$ werden bis zur Fermi-Energie E_F aufgefüllt (nach Enrico Fermi). Wenn $Z = N$ ist, sind dies $A/4 = n_F$ Zustände

6.5.4.2. Fermigas-Modell

Mit Hilfe des im Abschnitt 6.5.4.1 würfelförmigen Kastens soll die Anzahl Zustände abgezählt werden.
Annahme: Nukleonen sind ein Fermigas. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Energie folgt der Fermi-Verteilung. Das Konzept der Fermi-Energie stammt aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für Partikel mit halbzahligem Spin von Enrico Fermi.
Kinetische Energie

$$E + E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \tag{6.5.31}$$

Nach Gleichung (6.5.30) ist die Zahl der Energieeigenwerte (in einem Oktanten zwischen den x-, y- und z-Achsen) für $E \leq E_{max} - E_0 < 0$

$$n = \frac{a^3}{6\pi^2\hbar^3} \left(2mE_{max}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Die Anzahl Zustände pro Volumen (unabhängig vom Volumen!) ist

$$\frac{n}{V} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \left(\frac{2m\,E}{\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{6.5.32}$$

und die Zustandsdichte

$$\frac{dn}{dE} = \frac{a^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{E} \tag{6.5.33}$$

Wenn $Z = N$ ist, ist die Fermi-Energie (nach Enrico Fermi)

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6n_F\pi^2}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{6.5.34}$$

Da Neutronen und Protonen sich durch ihren Isospin unterscheiden können gilt

$$n_F = \frac{A}{4} \tag{6.5.35}$$

Für stabile Kerne muss

$$E_F < E_{max} \quad \Rightarrow \quad E < 0 \tag{6.5.36}$$

gelten. Die mittlere Nukleonendichte wird dann

$$\rho_N = \frac{n_F}{V} \approx 0.15 \text{ Nukleonen/f}^3\text{m} \tag{6.5.37}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Daraus kann die folgende Voraussage gemacht werden

$$E_F \approx 35 \text{ MeV, da } E_B \leq 10 \text{ MeV} \tag{6.5.38}$$

Schliesslich ergibt sich daraus für die Tiefe des Potentialtopfs

$$-E_0 \approx (40 - 50) \text{ MeV} \qquad \text{unabhängig von } A \tag{6.5.39}$$

Alternative Sichtweise
Abschätzung mit dem Phasenraumvolumen (nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.3.]):
Der maximale Impuls sei p_F. Dann ist die maximale kinetische Energie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \tag{6.5.40}$$

Der Impuls nimmt das Impulsvolumen

$$V_p(p_F) = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \tag{6.5.41}$$

ein. Im Ortsraum ist das Volumen mit dem Kernradius $R_K = r_0 A^{1/3}$

$$V(A) = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A \tag{6.5.42}$$

Das Phasenraumvolumen ist dann

$$V_{tot} = V_p(p_F) V(A) = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \cdot \frac{4\pi}{3} r_0^3 A = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (r_0 p_F)^3 A \tag{6.5.43}$$

Nach Werner Heisenberg ist das minimale Phasenraumvolumen (Unschärferelation)

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{6.5.44}$$

Das Volumen eines dreidimensionalen Zustandes muss dann mindestens

$$V_{tot,1 \text{ Teilchen}} = (2\pi\hbar)^3 = h^3 \tag{6.5.45}$$

sein. Damit gehen wir den umgekehrten Weg von Planck, der um seine Strahlungsformel abzuleiten einen klassischen Phasenraumansatz macht, aber nicht wie üblich $h \to 0$ gehen lassen konnte.
Die Anzahl Teilchen bekommen wir, indem wir V_{tot} durch das Volumen eines Zustandes teilen. Wir beachten, dass wegen den Spins in jedem Einteilchen-Phasenraumvolumen zwei Teilchen sein können.

$$n_F = \frac{V_{tot}}{V_{tot,1 \text{ Teilchen}}} = 2\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (r_0 p_F)^3 A}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3 \tag{6.5.46}$$

$r_0 p_F$ verglichen mit $\hbar$ ist offensichtlich ein Mass proportional zum Volumen eines Nukleons.
Zur Abschätzung setzen wir $N = Z = \frac{A}{2}$. Wir beachten, dass Neutronen und Protonen im gleichen Phasenraumvolumen sein können, da sie einen unterschiedlichen Isospin haben. Wir setzen nun $A/2$ gleich n_F und erhalten

$$\frac{A}{2} = \frac{4}{9\pi} A \left(\frac{r_0 p_F}{\hbar}\right)^3 \tag{6.5.47}$$

A fällt heraus (das war zu erwarten, da Robert Hofstadter [Hof57] experimentell gezeigt hatte, dass die Ladungsdichte und damit die Massendichte konstant ist. Bei ausschliesslich nächster Nachbar-Wechselwirkung bedeutet dies, dass der Potentialtopf eine konstante Tiefe hat. Der Fermiimpuls ist

$$p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \tag{6.5.48}$$

Damit ist auch der Fermiimpuls konstant. Die entsprechende Energie ist

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \tag{6.5.49}$$

Mit der Masse eines Nukleons (etwa die Protonen- oder Neutronenmasse) folgt

$$E_F \approx 33 \text{ MeV} \tag{6.5.50}$$

Mit der noch nicht besprochenen Bindungsenergie im Kern $E_{B,K} \approx -8$ MeV ergibt sich

$$-E_0 = E_F - E_{B,K} = 41 \text{ MeV} \tag{6.5.51}$$

Besser als das Kastenpotential ist das Woods-Saxon-Potential

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R_0)/b}} \tag{6.5.52}$$

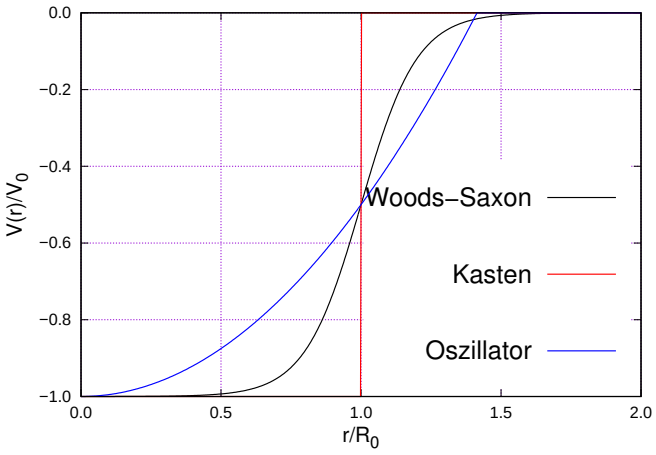


Abb. 6.13.: Woods-Saxon-Potential

6.5.4.3. Sphärisches Kastenpotential

Annahme: Kerne sind ein sphärisches Kastenpotential für Neutronen und Protonen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{6.5.53}$$

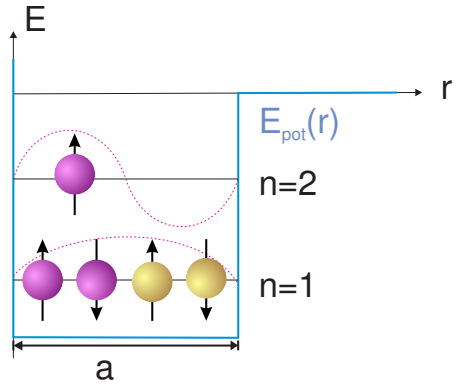


Abb. 6.14.: Kastenpotential für Neutronen und Protonen adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.28 [Dem10]

Abbildung 6.14 zeigt schematisch ein Kastenpotential für $^{7}_{3}\mathrm{Li}$. Dabei ist die Coulomb-Abstossung der Protonen vernachlässigt.

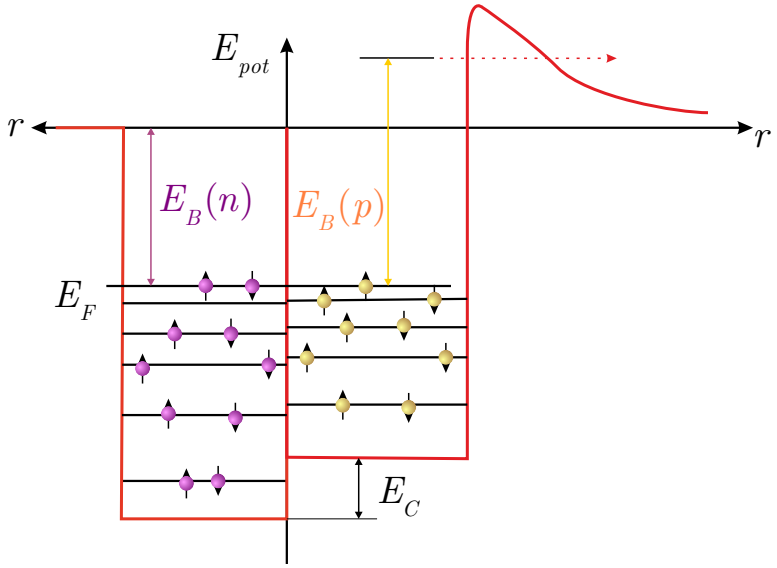


Abb. 6.15.: Vergleich der Potentiale von Neutronen und Protonen für $^{19}_{9}\mathrm{F}$, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.29 [Dem10]

Abbildung 6.15 zeigt die Anordnung von Protonen und Neutronen für $^{19}_{9}\mathrm{F}$.
Das Potential ist tiefer, als es der Bindungsenergie entspricht, weil die Nukleonen aufgrund der Unschärferelation wegen ihrer räumlichen Begrenzung eine grosse positive kinetische Energie besitzen.
Die Energie, die benötigt wird um einen Kern zu verlassen ist die Austrittsarbeit

$$W_a = E_b = -E_{\text{pot}} - E_F. \tag{6.5.54}$$

Da $E_{\text{pot}} < 0$ gilt ist $E_F > 0$.

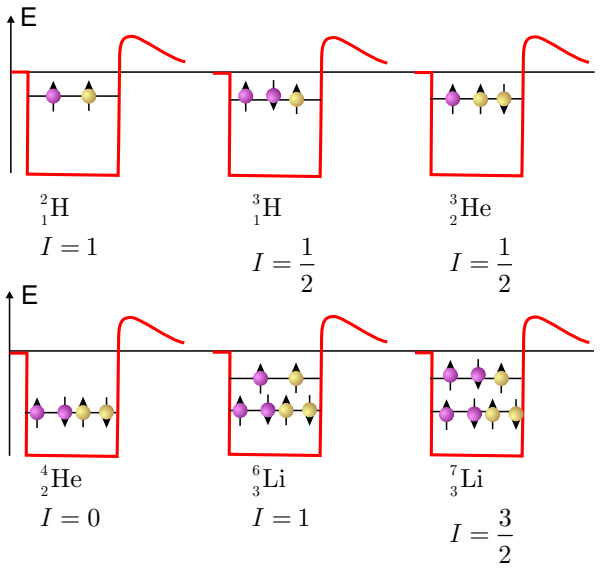


Abb. 6.16.: Nukleonenaufbau der leichten Kerne, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.30 [Dem10]

6.5.4.4. Harmonischer Oszillator

Das Potential eines harmonischen Oszillators ohne Berücksichtigung der Drehimpulse ist

$$V(r) = c \cdot r^2 - V_0 \tag{6.5.55}$$

Es ist $(V(r) + V_0)^2 \propto r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und damit

$$\psi(r) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z) \tag{6.5.56}$$

Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} E(n_x, n_y, n_z) &= \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega \left((n_x + n_y + n_z) + \frac{3}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.5.57}$$

6.5.4.5. Schalenmodell

Die Idee ist, dass bei elektronischen Zuständen im Coulombpotential immer dann wenn alle Drehimpulszustände zu einem n gefüllt sind, die Elektronenkonfiguration besonders stabil ist. Beim Wasserstoffatom sind dies (siehe O. Marti und M. Gonçalves [MG19, Kap. 6.])

$$n_d = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2n^2 \tag{6.5.58}$$

Zustände. Wenn noch die Reihenfolge der Besetzung von Unterschalen berücksich-

tigt wird ergeben sich die Zahlen in Tabelle 6.4

n	1	2	3	4	5	...
n_d	2	8	18	32	50	...
Magische	2	10	18	36	54	...
Zahlen		$= 2 + 8$	$= 2 + 8$	$= 2 + 8$	$= 2 + 8 + 18$	
			$+8$	$+18 + 8$	$+18 + 8$	

Tab. 6.4.: Magische Zahlen der Elektronenkonfigurationen

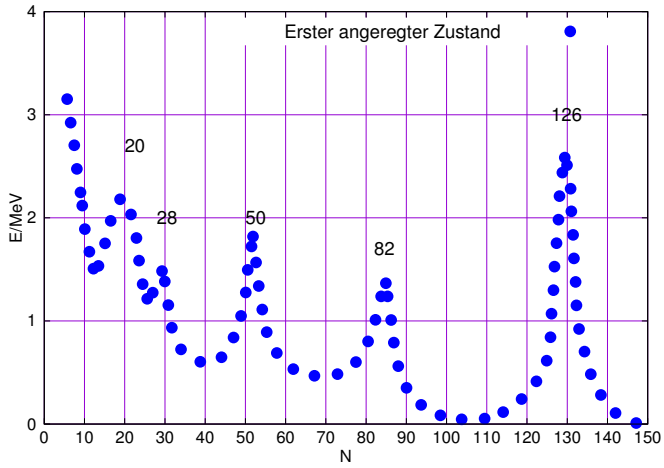


Abb. 6.17.: Energie des ersten angeregten Neutronenzustandes als Funktion der Neutronenzahl nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.29].

Abbildung 6.17 zeigt eine Messung der Energie des ersten angeregten Neutronenzustandes, die zeigt, dass es auch im Kern magische Zahlen geben muss.
Diese experimentell bestimmten Zahlen sind in Tabelle 6.5 angegeben.

Schale	1	2	3	4	5	6	7
Mag. Zahl N	2	8	20	28	50	82	126
Mag. Zahl Z	2	8	20	28	50	82	

Tab. 6.5.: Magische Zahlen der Protonen (Z) und Neutronen (N) in Kernen nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

In diesem Abschnitt soll nun begründet werden, wie diese Zahlen gefunden werden können. Beim Kastenmodell und beim harmonischem Oszillator sind n und ℓ unabhängig. Immer dann wenn bei den Drehimpulsen Schalen oder Unterschalen gefüllt sind beobachten wir magische Zahlen, also besonders stabile Konfigurationen.

- kugelsymmetrisches Potential, radiale Schrödingergleichung (nach Erwin Schrö-

dinger) mit $u(r) = r \cdot R(r)$

$$\partial_r^2 u + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\right] u = 0 \tag{6.5.59}$$

- $V(r)$ liegt zwischen dem Kastenpotential und dem harmonischen Potential

  – Lösung Kastenpotential (Energieeigenwerte nach Gleichung (6.5.28))

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \tag{6.5.60}$$

  – Lösung harmonisches Potential (Energieeigenwerte nach Gleichung (6.5.57))

$$\begin{aligned} E(n_x, n_y, n_z) &= \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_z + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega\left((n_x + n_y + n_z) + \frac{3}{2}\right) \end{aligned} \tag{6.5.61}$$

Teilchen im Potentialtopf

Die radiale Wellenfunktion kann aus der Gleichung (siehe O. Marti und M. Gonçalves [MG19, Kap. 6.3.2.4.])

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2\ell\,(\ell+1)}{2m_e r^2} + V\,(r)\right] R\,(r) = E \cdot R\,(r) \tag{6.5.62}$$

berechnet werden. Die Lösungen sind nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.1.] sphärische Besselfunktionen. Insbesondere sind die Energieniveaus für alle n und ℓ nicht entartet. Was bleibt ist die Entartung der ϕ-Abhängigkeit, also der m-Quantenzahl. Analog wie beim Wasserstoffatom ist

$$-\ell \leq m \leq \ell \text{ und } m \in \mathbb{Z} \tag{6.5.63}$$

Das heisst, es gibt zu jedem ℓ bei zwei Spinorientierungen $2(2\ell + 1)$ entartete Zustände.

ℓ	0	1	2	3	4	5	6
$2(2\ell+1)$	2	6	10	14	18	22	26

Tab. 6.6.: Gefüllte Schalen im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Werte aus Tabelle 6.6 ergeben die magischen Zahlen in Tabelle

Schale	1	2	3	4	5	...
Magische Zahlen	2	8	18	32	50	...
		$= 2 + 6$	$= 8 + 10$	$= 18 + 14$	$= 32 + 18$	

Tab. 6.7.: Magische Zahlen der im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

Die Zahlen in Tabelle 6.7 sind Kombinationen aus der Tabelle selber und aus Tabelle 6.6.

Teilchen im harmonischen Oszillator

Die radiale Wellenfunktion lautet hier (siehe A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.])

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{n,\ell} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)\right) R_{n,\ell} = 0 \tag{6.5.64}$$

Die Lösungen sind Laguerre-Polynome. Die Energieeigenwerte sind

$$E_{n,\ell} = \hbar\omega\left(2n + \ell - \frac{1}{2}\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } \ell = 0, 1, 2, \ldots \text{ unabhängig von } n \tag{6.5.65}$$

Mit der Umformung $\Lambda = 2n+\ell-2$ bekommt man eine Darstellung wie in Gleichung (6.5.57). Dann ist

$$E_{n,\ell} = E_\Lambda = \hbar\omega\left(\Lambda + \frac{3}{2}\right) \text{ mit } \Lambda = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.5.66}$$

Wieder gibt es die $(2\ell + 1)$-fache Entartung. Nur in der Koordinate Λ ist dies komplizierter, da prinzipiell n und ℓ unabhängig sind. Für gerade Λ ist (ℓ, n) nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.]

$$(\ell, n) = \left(0, \frac{\Lambda+2}{2}\right), \left(2, \frac{\Lambda}{2}\right), \left(4, \frac{\Lambda-2}{2}\right), \ldots, (\Lambda, 1) \tag{6.5.67}$$

Für ungerade Λ ist (ℓ, n) nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.2.]

$$(\ell, n) = \left(1, \frac{\Lambda+1}{2}\right), \left(3, \frac{\Lambda-1}{2}\right), \left(5, \frac{\Lambda-3}{2}\right), \ldots, (\Lambda, 1) \tag{6.5.68}$$

Λ	(ℓ, n)				
0	$(0,1)$				
1	$(1,1)$				
2	$(0,2)$	$(2,1)$			
3	$(1,2)$	$(3,1)$			
4	$(0,3)$	$(2,2)$	$(4,1)$		
5	$(1,3)$	$(3,2)$	$(5,1)$		
6	$(0,4)$	$(2,3)$	$(4,2)$	$(6,1)$	
7	$(1,4)$	$(3,3)$	$(5,2)$	$(7,1)$	
8	$(0,5)$	$(2,4)$	$(4,3)$	$(6,2)$	$(8,1)$
9	$(1,5)$	$(3,4)$	$(5,3)$	$(7,3)$	$(9,1)$

Tab. 6.8.: Entartete Niveaus im harmonischen Oszillator nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

In jedem (ℓ, n)-Niveau gibt es $2(2\ell-1)$ entartete Zustände (ϕ-Abhängigkeit, Spins). Die Anzahl der entarteten Niveaus bei geradem Λ ist

$$n_\Lambda = \sum_{\ell=0,2,4,\ldots}^{\Lambda} 2(2\ell+1) = \sum_{k=0}^{\Lambda/2} 2(4k+1) = \ldots = (\Lambda+1)(\Lambda+2) \tag{6.5.69}$$

Für ungerade Λ erhalten wir den gleichen Wert. Die beiden Bedingungen zusammen ergeben die Tabelle 6.9.

Λ	0	1	2	3	4	5	6
$(\Lambda+1)(\Lambda+2)$	2	6	12	20	30	42	56

Tab. 6.9.: Entartungen im harmonischen Oszillator.

Tabelle 6.10 zeigt die daraus abgeleiteten magischen Zahlen.

Schale	0	1	2	3	4	...
Magische	2	8	20	40	70	...
Zahlen		$= 2+6$	$= 2+6+12$	$= 2+6+12+20$	$= 2+6+12+20+30$	

Tab. 6.10.: Magische Zahlen der im Kastenmodell nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 3.4.].

M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen [GJ55] erkannten, dass im Inneren von Kernen eine starke Spin-Bahnkopplung herrschen muss. Das bewirkt für grosse n

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abweichungen der magischen Zahlen. Das Potential mit Spin-Bahn-Kopplung ist

$$V_i(r) = V(r) + V_{ls}(r) \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \tag{6.5.70}$$

$V_{ls}(r)$ ist eine Funktion von r. Diese Funktion ist in der Atomphysik $V_{ls}(r) = 1$. Hier ist sie nicht konstant und die wichtige von Maria Goeppert-Mayer gefundene Funktion der Kopplung der Niveaus. Wie üblich bekommt man mit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{S}^2 + 2\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ dass $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right)$. Daraus ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right) \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) \\ &\overset{s=\frac{1}{2}}{=} \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2}, & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2}; \\ -\frac{\hbar^2}{2}(\ell+1), & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases}\end{aligned} \tag{6.5.71}$$

V_{ls} ist negativ. Deshalb liegt das Niveau mit $j = \ell - \frac{1}{2}$ tiefer. Die einzelnen Niveaus verschieben sich durch die Kopplung um

$$\Delta E_{n,\ell}\left(j = \ell + \frac{1}{2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2}\int |\psi_{n,\ell}(\boldsymbol{r})|^2 V_{ls}(r)\, dr \tag{6.5.72a}$$

$$\Delta E_{n,\ell}\left(j = \ell - \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{2}(\ell+1)\int |\psi_{n,\ell}(\boldsymbol{r})|^2 V_{ls}(r)\, dr \tag{6.5.72b}$$

Dies ergibt die Aufspaltung

$$\begin{aligned}\Delta = \Delta E_{n,\ell}\left(j = \ell - \frac{1}{2}\right) - \Delta E_{n,\ell}\left(j = \ell + \frac{1}{2}\right) \\ = \hbar^2\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\int |\psi_{n,\ell}(\boldsymbol{r})|^2 V_{ls}(r)\, dr\end{aligned} \tag{6.5.73}$$

Für grössere ℓ wird die Aufspaltung von Niveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung grösser. Schwere Kerne sind nicht mehr kugelsymmetrisch. $\boldsymbol{L}$ ist nicht zeitlich konstant. Dies ändert nochmals die Reihenfolge und die Besetzung von Niveaus.
Das Schalenmodell manifestiert sich in der Energie die benötigt wird um ein Neutron abzuspalten.

- Energie, um ein Nukleon abzuspalten

  $$-E_B = E_{kin}^{max} + E_{pot} = E_F - E_0 \tag{6.5.74}$$

  E_F: Fermi-Energie (nach Enrico Fermi)

  E_0: Tiefe des Potentialtopfs

- Vergleich der Separationsenergien für p und n

  $$E_S(p) = E_B(N, Z) - E_B(N, Z-1) \tag{6.5.75a}$$

  $$E_S(n) = E_B(N, Z) - E_B(N-1, Z) \tag{6.5.75b}$$

- Paarung von zwei n oder zwei p mit antiparallelem Spin erhöht die Bindungsenergie

$$E_p(p) = 2\left[E_B(N,Z) - E_B(Z-1,N)\right] - \left[E_B(N,Z) - E_B(Z-2,N)\right] \tag{6.5.76a}$$

$$E_p(n) = 2\left[E_B(N,Z) - E_B(Z,N-1)\right] - \left[E_B(N,Z) - E_B(Z,N-2)\right] \tag{6.5.76b}$$

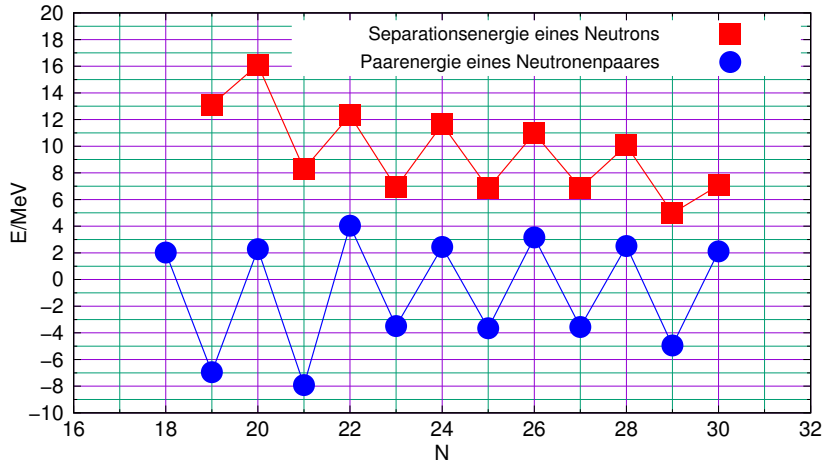


Abb. 6.18.: Separationsenergie eines Neutrons ($E_S(N)$, rot) und Paarenergie eines Neutronenpaares ($E_P(N)$, blau) für Kalziumisotope ${}^{20+N}_{20}\mathrm{Ca}$ nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.27]

- Fermigasmodell sagt voraus, dass es keine Schwankungen gäbe

- Schwankungen der Separationsenergien analog zu den Schwankungen der Ionisierungsenergien in der Elektronenhülle

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

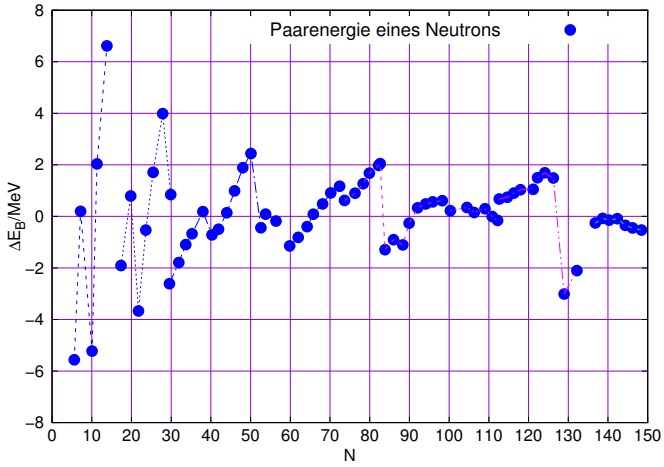


Abb. 6.19.: Paarenergie eines Neutronenpaares für verschiedene Isotope nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.28]

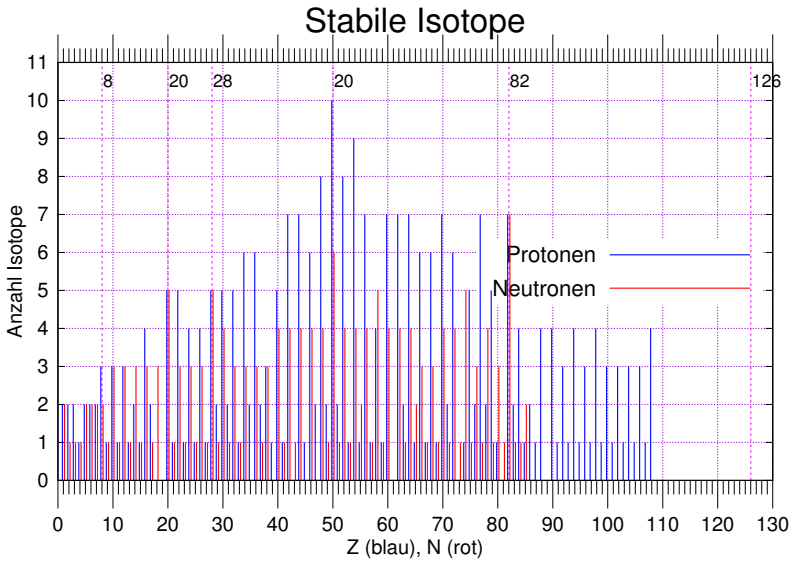


Abb. 6.20.: Anzahl der stabilen Isotope als Funktion der Protonenzahl Z und der Neutronenzahl N nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 5.30].

Maxima analog zu Maxima in der Ionsiationsenergie der Atome.

6.5.5. Mehrteilchenmodelle

- Schalenmodell bei schweren Kernen nicht sehr genau
- Tröpfchenmodell bei sehr schweren Kernen manchmal genauer
- Quadrupolmomente stimmen nur qualitativ
- Schwere Kerne haben ein permanentes elektrisches Quadrupolmoment
- Aage Bohr, James Rainwater, Ben Mottelson: Mehrteilchenmodell

- Schalenstruktur im Inneren, flüssige Oberfläche
- Vorhersage: Vibrations- und Rotationsniveaus in Kernen (sie existieren experimentell)
- Rotationshamiltonoperator $H = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2I_{\text{träg}}}$ mit Eigenwerten $\frac{\ell(\ell+1)}{2I_{\text{träg}}}\hbar^2$
- Modell sagt Verringerung der Niveauabstände bei zunehmendem A voraus

6.5.6. Vergleich der Kernmodelle

Maria Goeppert-Mayer verglich das SCHALENMODELL mit vielen anderen Modellen.

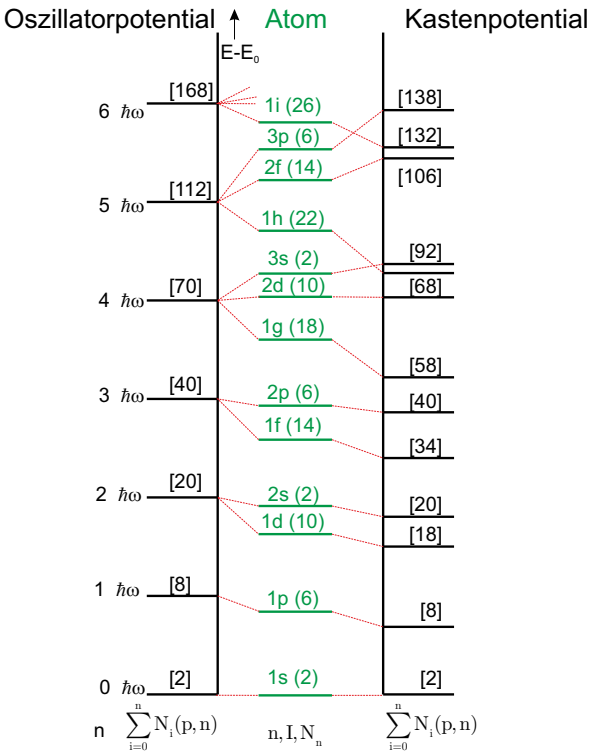


Abb. 6.21.: Vergleich der Kernmodelle nach M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* [GJ55] sowie [Goe64; GJ61; GJ60; Goe50a; Goe50b]

6.5.7. Bindungsenergien

Unter Bindungsenergie verstehen wir das Folgende:

$$\underbrace{M_K}_{\text{Kernmasse}} = \underbrace{\sum m_p}_{\text{Protonen}} + \underbrace{\sum m_n}_{\text{Neutronen}} - \underbrace{\Delta M}_{\text{Massendefekt}} \tag{6.5.77}$$

Achtung: Die Bindungsenergie E_B wird positiv definiert, so dass $-E_B$ die Erniedrigung der Energie durch eine Bindung ist.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Der Massendefekt ΔM wird bestimmt, indem die Grössen M_K, m_n und m_p gemessen werden. Den Massendefekt bezogen auf die Zahl der Nukleonen nennt man auch Packungsanteil

$$P_A = \frac{\Delta M}{A}. \tag{6.5.78}$$

Die folgende Tabelle 6.11 gibt einige Resultate wieder:

Kern	Masse / u	E_B/MeV	E_B/A/MeV
${}^{2}_{1}\mathrm{H}$	2.014	2.225	1.112
${}^{3}_{1}\mathrm{H}$	3.016	8.482	2.827
${}^{4}_{2}\mathrm{He}$	4.003	28.295	7.074
${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$	7.016	39.245	5.606
${}^{12}_{6}\mathrm{C}$	12.00	92.161	7.68
${}^{16}_{8}\mathrm{O}$	15.995	127.617	7.976
${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$	34.969	298.20	8.520
${}^{57}_{26}\mathrm{Fe}$	56.935	499.90	8.77
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	238.051	1804.04	7.58

Tab. 6.11.: Kerne und Kernmassen nach W. Demtröder[Dem10, Tab. 2.6.].

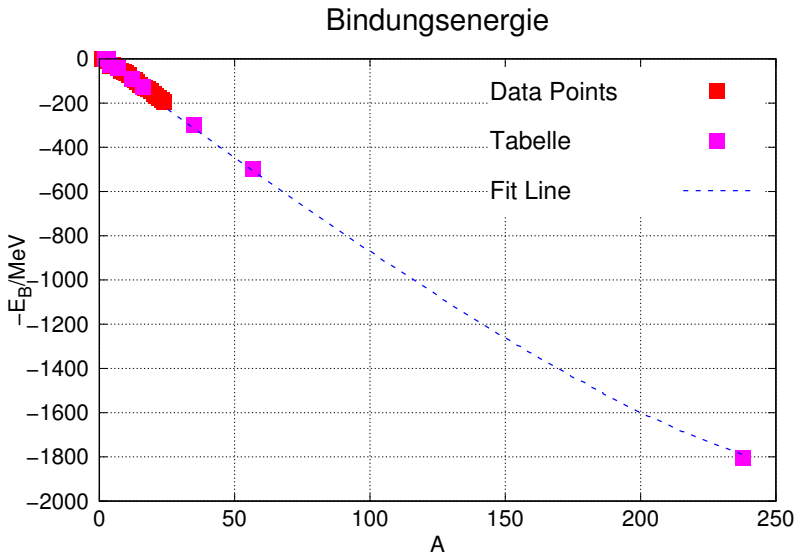


Abb. 6.22.: Bindungsenergie von Kernen nach Demtröder Band 4, Abb 2.24 [Dem10]

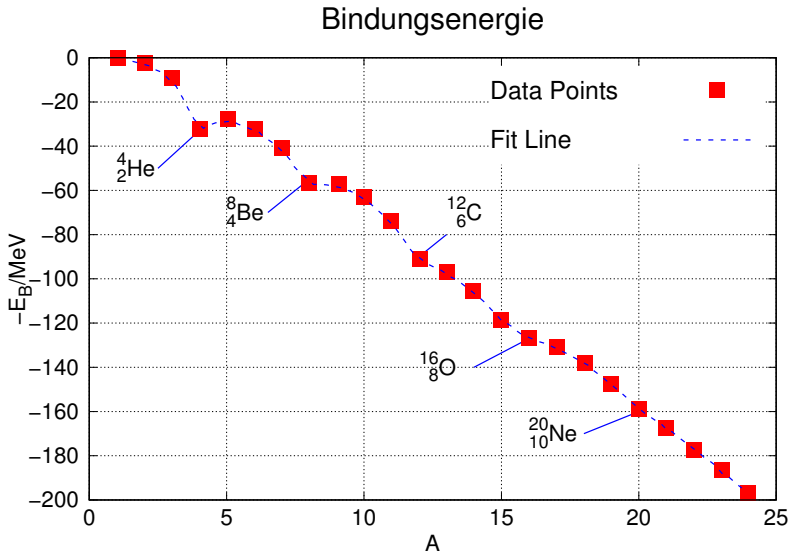


Abb. 6.23.: Bindungsenergie von leichten Kernen nach Demtröder Band 4, Abb 2.24 [Dem10]

Die Tabelle oben zeigt, dass die Bindungsenergie pro Nukleon, der Packungsanteil, für $^{62}_{28}$Ni maximal ist.

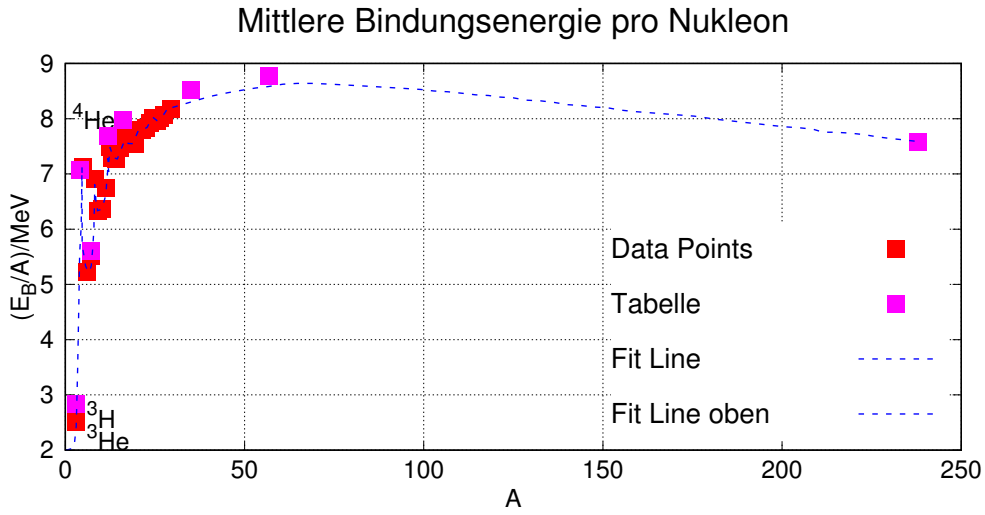


Abb. 6.24.: Mittlere Bindungsenergie (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.25 [Dem10])

Abbildung 6.24 zeigt die mittlere Bindungsenergie pro Kern.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

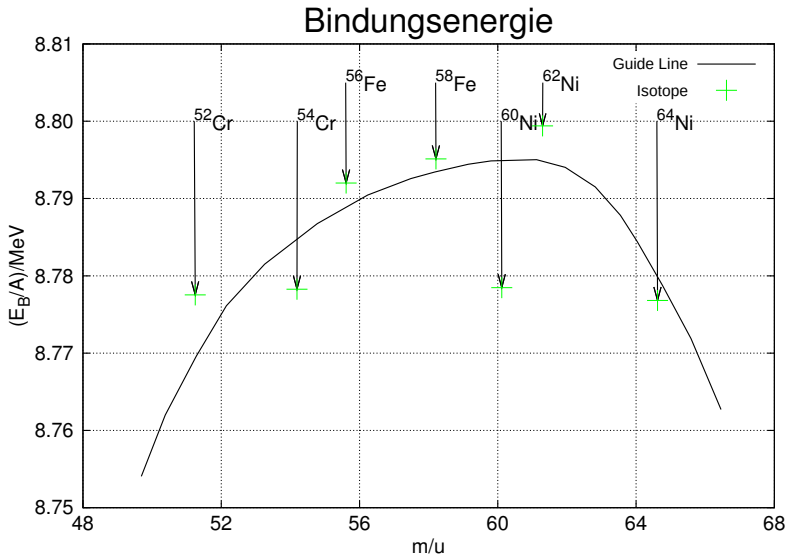


Abb. 6.25.: Stabilste Kerne (Nach Demtröder Band 4, Abb 2.26)

Abbildung 6.25 zeigt den Bereich der stabilsten Kerne mit der höchsten Bindungsenergie.

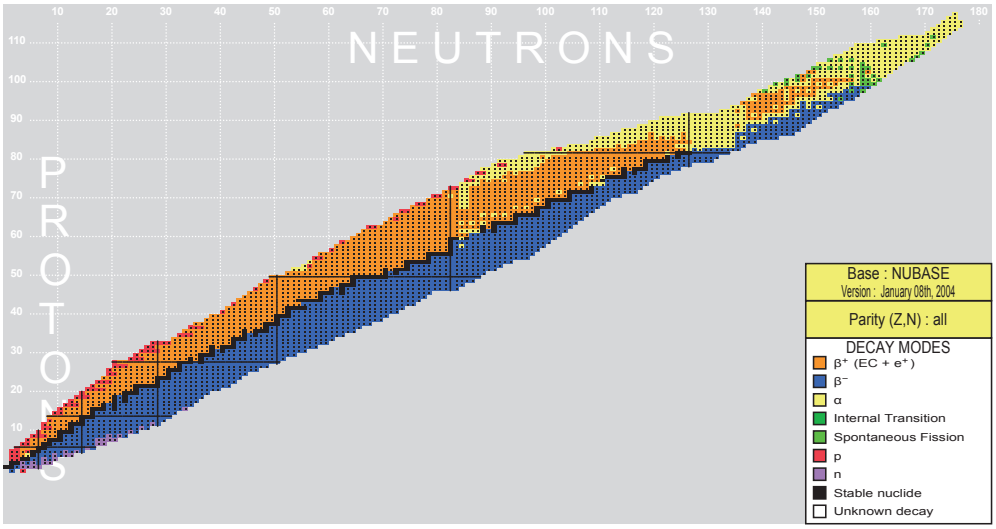


Abb. 6.26.: Nuklidkarte erzeugt mit Nucleus-Amdc [Wap12]

Daten zur Stabilität der Kerne können aus Programmen wie Nucleus-Amdc [Wap12] oder aus Webseiten wie dem Nuclear Data Center [Nat17] des Brookhaven National Laboratory gewonnen werden (siehe auch Abb. 6.26).

6.5.8. Rotation und Schwingung von Kernen

Wenn Kerne von der sphärischen Form abweichen, können sie in nächster Näherung durch Rotationsellipsoide beschrieben werden.

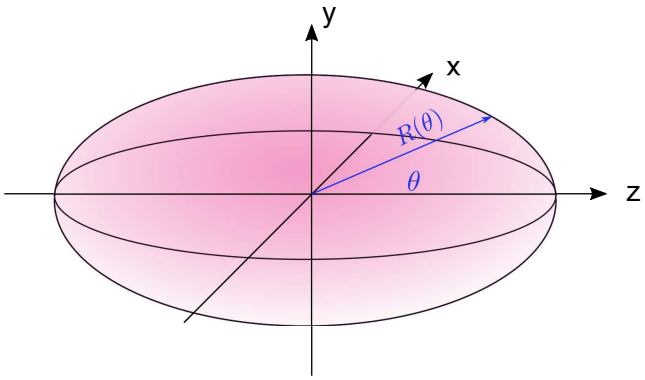


Abb. 6.27.: Bezeichnungen in einem Rotationsellipsoid.

Beim Rotationsellipsoid in Polardarstellung in Abbildung 6.27 ist der Radius als Funktion von θ durch

$$R(\theta) = R_0\left[1 + \beta Y_2^0(\theta,\phi)\right] = R_0\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\left(3\cos^2(\theta) - 1\right) + 1\right) \tag{6.5.79}$$

gegeben. Mit $\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$ haben wir auch

$$R(\theta) = R_0\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{3}\right)\right) \tag{6.5.80}$$

In der üblichen Darstellung eines Rotationsellipsoids mit a der Halbachse entlang der Symmetrieachse und b den Halbachsen senkrecht dazu ist

$$\Delta R = a - b \tag{6.5.81}$$

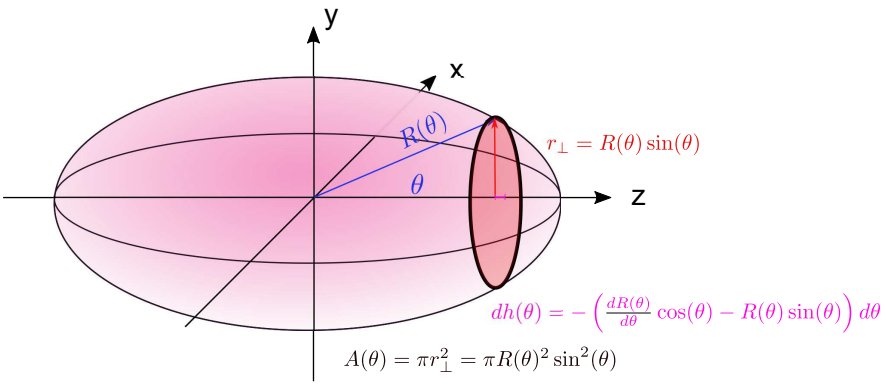


Abb. 6.28.: Definition der Integrationsfläche bei einem Rotationsellipsoid.

Das Volumen (siehe Abbildung 6.28) kann berechnet werden, indem die Fläche

$$A(\theta) = A(R(\theta)) = \pi r_\perp^2 \sin^2(\theta) = \pi R^2(\theta)\sin^2(\theta) \tag{6.5.82}$$

über den Wertebereich von θ integriert wird. Dabei kann aus dem Abstand $h(\theta) = R(\theta)\cos(\theta)$ entlang der z-Achse zum Nullpunkt

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$dh(\theta) = -\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\sin(\theta)\right)d\theta \tag{6.5.83}$$

(das „−“-Zeichen hängt von den Zählrichtungen ab) berechnet werden. Das Volumen ist dann

$$\begin{aligned} V(R_0,\beta) &= \int_0^\pi A(\theta)dh(\theta) && \text{(6.5.84a)}\\ &= -\int_0^\pi \pi R^2(\theta)\sin^2(\theta)\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\sin(\theta)\right)d\theta \\ &= -\pi R_0^3 \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\left(3\cos^2(\theta)-1\right)+1\right)^2 \sin^3(\theta) \\ &\quad\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\cos^2(\theta) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\left(3\cos^2(\theta)-1\right)+1\right)\right)d\theta \\ &= \frac{4\pi R_0^3}{3}\left(\left(\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta + 21\right)\frac{\beta^2}{28\pi}+1\right) && \text{(6.5.84b)} \end{aligned}$$

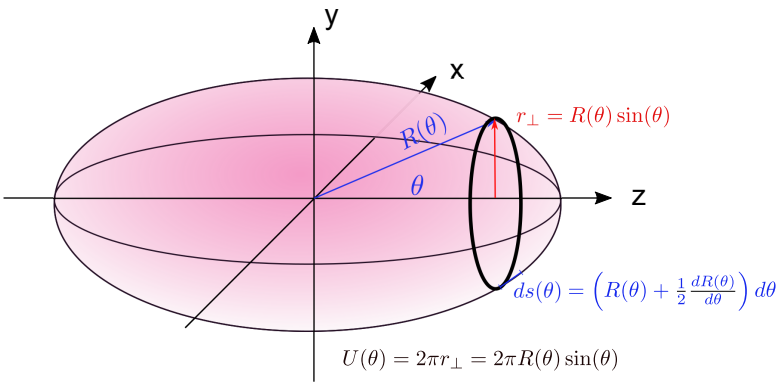


Abb. 6.29.: Definition der Integrationsfläche bei einem Rotationsellipsoid.

Für die Oberfläche (siehe Abbildung 6.29) benötigen wir den Umfang

$$U(\theta) = U(R(\theta)) = 2\pi r_\perp = 2\pi R(\theta)\sin(\theta) \tag{6.5.85}$$

und das Linienelement entlang eines Grosskreises durch die Pole. Nach dem Cosinussatz ist

$$ds^2(\theta) = R^2(\theta) + R^2(\theta+d\theta) - 2R(\theta)R(\theta+d\theta)\cos(d\theta) \tag{6.5.86}$$

Wenn man $R(\theta+d\theta) = R(\theta) + \frac{dR(\theta)}{d\theta}d\theta$ einsetzt und $\cos(d\theta) = 1 - d^2\theta/2$ bis zur ersten nichttrivialen Ordnung einsetzt, die Wurzel ausrechnet und Ordnungen höher als 2 ignoriert, bekommt man

$$ds(\theta) = R(\theta)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{dR(\theta)}{d\theta}\right)^2}{R(\theta)}\right)d\theta \tag{6.5.87}$$

Damit ist die Oberfläche

$$\begin{aligned} A_V(R_0,\beta) =& \int_0^\pi U(\theta)ds(\theta) && \text{(6.5.88a)}\\ =& \int_0^\pi 2\pi R(\theta)\sin(\theta)R(\theta)\left(1+\frac{1}{2}\frac{\frac{dR(\theta)}{d\theta}}{R(\theta)}\right)d\theta \\ =& 2\pi R_0^2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\left(3\cos^2(\theta)-1\right)+1\right)^2 \sin(\theta) \\ & \cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\sin(\theta)\cos(\theta)}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\beta\left(3\cos^2(\theta)-1\right)+1\right)}\right)d\theta \\ =& 4\pi R_0^2\left(1+\frac{\beta^2}{\pi}\right) && \text{(6.5.88b)} \end{aligned}$$

Mit dem Parameter ΔR sind Volumen und Oberfläche

$$V(R_0,\Delta R) = \frac{4\pi}{3}R_0^3\left(1+\frac{4\Delta R^2}{15R_0^2}+\frac{16\Delta R^3}{945R_0^3}\right) \tag{6.5.89a}$$

$$A_V(R_0,\Delta R) = 4\pi R_0^2\left(1+\frac{16\Delta R^2}{45R_0^2}\right) \tag{6.5.89b}$$

Nach Bethe-Weizsäcker (6.5.16) ist der Oberflächenterm proportional zu R^2 oder zu $A_V(R_0,\Delta R)$. Mit Gleichung (6.5.89b) und der Definition $\Delta R = a - b$ mit $a = R_0(1+\epsilon)$ und $b = R_0/\sqrt{1+\epsilon}$ erhalten wir für $E_0^S = -a_S A^{2/3} = -a_S A_V(R_0,\epsilon)$

$$\begin{aligned} A_V(R_0,\epsilon) &= 4\pi R_0^2\left(1+\frac{16\Delta R^2}{45R_0^2}\right) & &= 4\pi R_0^2\left(1+\frac{16(a-b)^2}{45R_0^2}\right) \\ &= 4\pi R_0^2\left(1+\frac{16}{45}\left(\epsilon-\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}}\right)^2+1\right) & &= 4\pi R_0^2\left(1+\frac{4\epsilon^2}{45}+O(\epsilon^3)\right) \end{aligned} \tag{6.5.90}$$

Damit wird der Oberflächentherm

$$E^S = E_0^S\left(1+\frac{4\epsilon^2}{45}+O(\epsilon^3)\right) = E_0^S + \Delta E^S \tag{6.5.91}$$

Der Ladungsterm $E_0^C = -a_C A^{(-1/3)} = -\tilde{a}_C R^{-1}$ wird mit

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$R \propto \sqrt{A_V(R_0, \epsilon)} \qquad \Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}\left(1 - \frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)\right) \tag{6.5.92}$$

Damit wird der Ladungsterm

$$E^C = E_0^C\left(1 - \frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)\right) = E_0^C - \Delta E^C \tag{6.5.93}$$

6.5.9. Drehimpuls, Spin, Statistik

Optische Spektren von Atomen zeigen eine Hyperfeinstruktur. Deshalb müssen Kerne ein magnetisches Moment haben. Und dies können sie nur haben, wenn es einen Spin gibt.

6.5.9.1. Kerndrehimpulse

- $\boldsymbol{I}$: Kernspin, I: Kernspinquantenzahl

$$|\boldsymbol{I}| = \hbar\sqrt{I \cdot (I+1)} \tag{6.5.94}$$

- Der Kernspin $\boldsymbol{I}$ ist die Vektorsumme aus den Bahndrehimpulsen der Neutronen und Protonen sowie aus deren Spins.

$$\boldsymbol{I} = \sum_i (\boldsymbol{I}_i + \boldsymbol{L}_i) \tag{6.5.95}$$

- Magnetisches Moment

$$\boldsymbol{\mu_I} = g_I \cdot \mu_K \cdot \frac{\boldsymbol{I}}{\hbar} \tag{6.5.96}$$

  mit Kern-Landé-Faktor g_I und Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e}{2m_p}\hbar = 5.056 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{J\ T^{-1}} \tag{6.5.97}$$

- In der Regel ist $\boldsymbol{L_i} = 0$ im Grundzustand. Es gibt Ausnahmen, z.B. ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$

Landé-Faktor (nach Alfred Landé)

$$g_I = \frac{\frac{|\boldsymbol{\mu}_I|}{\mu_K}}{\frac{|\boldsymbol{I}|}{\hbar}} \tag{6.5.98}$$

Verhältnis von magnetischem Moment zu Drehimpuls
Kernspin I

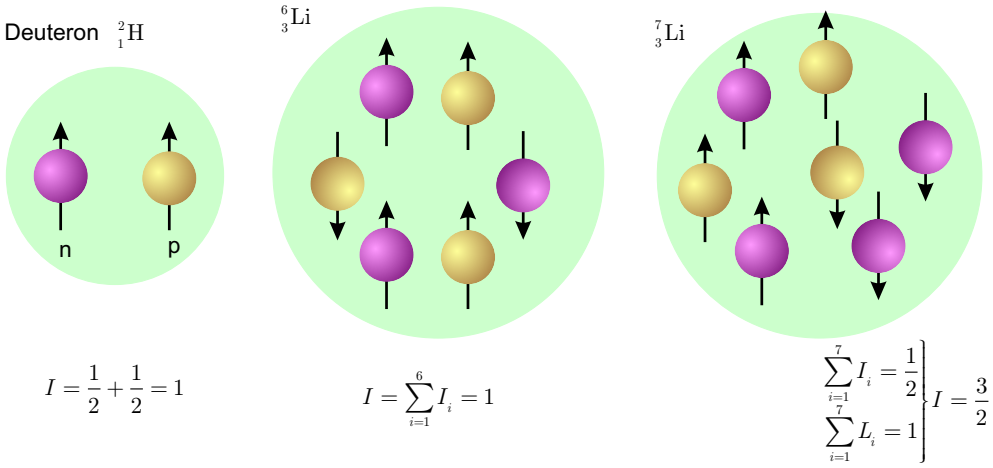


Abb. 6.30.: Kernspins, Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.16 [Dem10]

Verhältnisse

- gyromagnetisches Verhältnis:

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{\mu}_I|}{|\boldsymbol{I}|} \tag{6.5.99}$$

- Bestimmung aus der Hyperfeinstruktur des $1s$-Zustandes im H-Atom

$$\Delta E_{HFS} = \frac{2}{3}\mu_0 g_e \mu_B \cdot g_p \mu_K \cdot |\psi_{1s}(r=0)|^2 \tag{6.5.100}$$

- Zeeman-Aufspaltung (nach Pieter Zeeman)

$$\Delta W = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \tag{6.5.101}$$

- Rabi-Methode (nach Isidor Rabi): Wegen des Kernspins $I = \frac{1}{2}$ gibt es vier HF-Übergänge mit $\Delta m_J = +1$

6.5.9.2. Rabi-Methode

Die Methode ist nach Isidor Rabi benannt. Benutzt wird, dass der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ der Elektronenhülle an den Kernspin $\boldsymbol{I}$ koppelt und es (analog zu $\boldsymbol{J}$) einen neuen Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{F}$ gibt., mit

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = \hbar\sqrt{F(F+1)} = \langle \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J} \rangle \text{ mit } |J-I| \leq F \leq |J+I| \tag{6.5.102}$$

Analog zur Zeemanaufspaltung ist die Energie des Wechselwirkungsoperators $\hat{\mathrm{V}}_{HFS}$ des Kernspins $\boldsymbol{I}$ mit der magnetischen Induktion des Gesamtdrehimpulses $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B}_J$

$$\Delta E_{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{B}_J = g_I \mu_K B_J \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{\sqrt{J(J+1)}}$$
$$:= \frac{A}{2} \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{\sqrt{J(J+1)}} \quad (6.5.103)$$

mit g_I dem Landé-Faktor des Kerns, $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ dem Kernmagneton und $A = \frac{g_I \mu_K B_J}{\sqrt{J(J+1)}}$ der Hyperfeinstrukturkonstante. Die Rabi-Methode kann nun ΔE_{HFS} bestimmen.

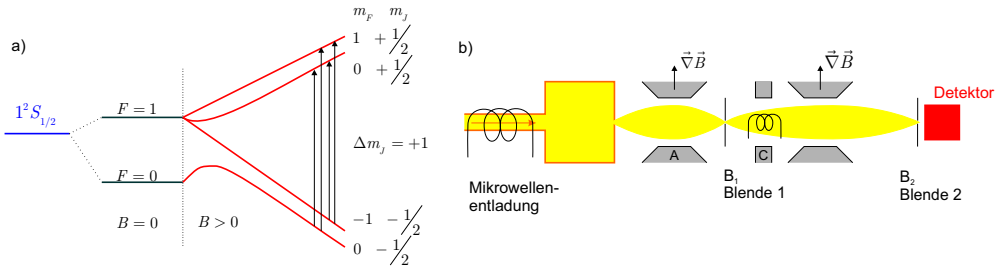


Abb. 6.31.: Messung des gyromagnetischen Verhältnisses nach Isidor Rabi, adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.16 [Dem10]

Abbildung 6.31 zeigt den Aufbau der Apparatur. Die zu untersuchenden Atomkerne (z.B. $^1_1$H) werden aus dem Ofen nach rechts emittiert. Im Bereich A lenkt ein inhomogenes Magnetfeld die Atome ab. Die Grösse der Ablenkung hängt vom gesamten magnetischen Moment ab. Dieses wird durch das Magnetische Moment der Elektronen dominiert. Im Bereich C induziert Mikrowellenstrahlung einen Übergang vom $F = 0$ ins $F = 1$ Niveau. Das anliegende homogene Magnetfeld erzeugt eine Hyperfeinaufspaltung, also eine Aufspaltung, die vom magnetischen Moment des Kerns abhängt. In B schliesslich kehrt ein umgekehrt orientiertes inhomogenes Magnetfeld die Ablenkung um. Die Blende B_2 wählt die Atome aus, die nicht abgelenkt sind. Durch die Änderung der Frequenz der Mikrowellenstrahlung kann so die Hyperfeinaufspaltung abgetastet werden.

6.5.9.3. Magnetische Momente von Nukleonen

Die Landé-Faktoren von Proton und Neutron haben keine so «schönen » Werte wie beim Elektron. Dies ist ein Hinweis auf die möglicherweise vorhandene innere Struktur der beiden Nukleonen. Das magnetische Moment des Protons ist

$$\mu_p = +2.79278 \mu_K \quad (6.5.104)$$

Damit wird das magnetische Moment des Protons μ_p in Einheiten des KERNMAGNETONS $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ ausgedrückt. Der Spin und das magnetische Moment des Protons sind parallel. Der Landé-Faktor des Protons ist

$$g_p = \frac{\mu_p/\mu_K}{I_p/\hbar} = \frac{2.79278}{0.5} = 5.585\,56 \quad (6.5.105)$$

Das magnetische Moment des Neutrons existiert, auch wenn das Nukleon ungeladen ist. Sein Wert beträgt:

$$\mu_n = -1.91315\mu_K \tag{6.5.106}$$

Der Neutronenspin und das magnetische Moment sind antiparallel. Der Landé-Faktor des Neutrons beträgt

$$g_n = -3.8263 \tag{6.5.107}$$

Während für die Bestimmung des magnetischen Moments des Protons die aus der Atomphysik bekannten Verfahren verwendet werden können, funktioniert dies bei Neutronen wegen der fehlenden Ladung nicht. Zur Bestimmung des magnetischen Moments verwendet man die spinabhängige Streuung des Neutrons an Spin-polarisierten Targetatomen. Die Streuung des Neutrons hängt von der relativen Orientierung des Neutronenspins und des Spins der Target-Atome ab.

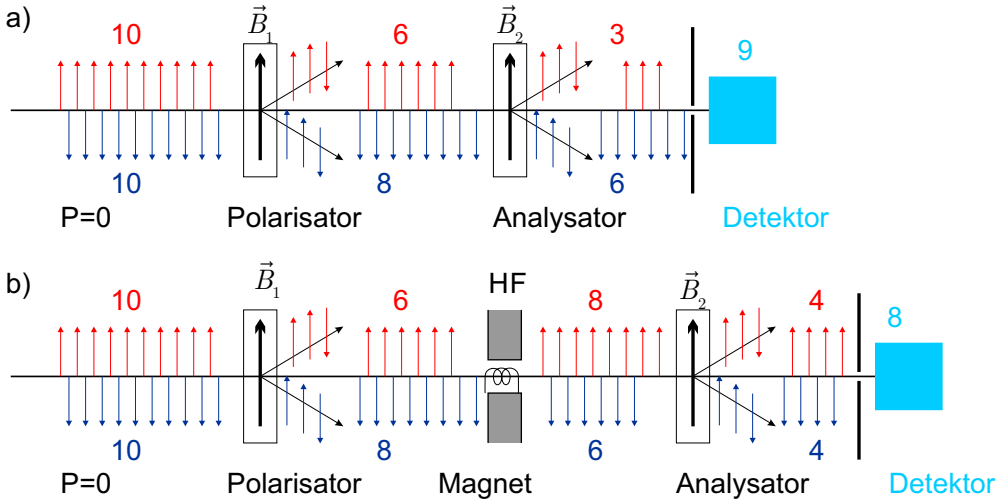


Abb. 6.32.: Messung des magnetischen Moments des Neutrons, Adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.18 [Dem10]

In Abbildung 6.32 a) wird ein Neutronenstrahl durch ein Eisentarget in einer starken magnetischen Induktion gesandt. Neutronen mit einem antiparallelem Spin (Anzahl N_-) zur Polarisationsrichtung des Eigentargets werden weniger oft gestreut als Neutronen mit parallelem Spin (N_+). Der Strahl ist nun leicht polarisiert

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \tag{6.5.108}$$

P ist negativ, da $N_- > N_+$ ist. Das zweite durch ein Magnetfeld polarisierte Eisentarget dient als Analysator. Sind die beiden magnetischen Induktionen $\boldsymbol{B}_1$ und $\boldsymbol{B}_2$ parallel ist die Transmission höher als im antiparallelen Falle. Im homogenen Magnetfeld bei b) zwischen Polarisator und Analysator kann die Spin-Richtung der Neutronen umgeklappt werden. Die Energie der beiden Zeeman-Niveaus ist

$$E_{1,2} = \pm\boldsymbol{\mu}_n \cdot \boldsymbol{B} \tag{6.5.109}$$

Aus der Frequenz der elektromagnetischen Strahlung und der Grösse der magne-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

tischen Induktion kann $\boldsymbol{\mu}_N$ bestimmt werden.

6.5.9.3.1. Proton, Elektron, Neutron Tabelle 6.12 zeigt einen Vergleich von verschiedenen Grössen der beiden Nukleonen Proton und Neutron mit dem Elektron.

Grösse	p	n	e^-
Masse	$1.672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27}$ kg	$1.674\,927\,498\,04(95) \cdot 10^{-27}$ kg	$9.109\,383\,701\,5(28) \cdot 10^{-31}$ kg
Spin	1/2	1/2	1/2
Magn. Moment	$+2.792\,847\,344\,63(82)\mu_K$ $1.410\,606\,797\,36(60) \cdot 10^{-26}$ J T^{-1}	$-1.913\,042\,73(45)\mu_K$ $-9.662\,365\,1(23) \cdot 10^{-27}$ J T^{-1}	$-1.001\,159\,652\,181\,28(18)\mu_B$ $-9.284\,764\,704\,3(28) \cdot 10^{-24}$ J T^{-1}
Landé-Faktor	$+5.585\,694\,689\,3(16)$	$-3.826\,085\,45(90)$	$-2.002\,319\,304\,362\,56(35)$
Lebensdauer	$> 1 \cdot 10^{30}$ a	887 s	∞

Tab. 6.12.: Vergleich von Proton, Neutron und Elektron (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 2.3.] und *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty* [NIS21].

6.5.10. Momente von Kernen

Das magnetische Moment des Deuterons ${}^2_1\mathrm{H}$ (Spin $I_d = 1$) ist nach *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty* [NIS21]

$$\mu_d = 0.857\,438\,233\,8(22)\mu_K \tag{6.5.110}$$

Dies ist um

$$\begin{aligned}\Delta\mu_d &= \mu_d - (\mu_p + \mu_n)\\ &= 0.857\,438\,233\,8(22)\mu_K - (2.792\,847\,344\,63(82)\mu_K - 1.913\,042\,73(45)\mu_K)\\ &= -0.022\,366\,4(4)\mu_K \end{aligned}\tag{6.5.111}$$

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.3.2.] ist der Grund, dass die beiden Nukleonen neben dem Grundzustand noch mit kleiner Wahrscheinlichkeit in einem angeregten Zustand mit dem Bahndrehimpuls $\ell = 2$ sind. $\ell = 1$ ist nicht möglich, da dieser Zustand eine andere Parität hat als der Grundzustand. Der Spin dieses angeregten Zustandes steht dann antiparallel zu $\ell = 2$, also $m_\ell = -2$.

Insgesamt zeigen sich Gemeinsamkeiten bei Kernen mit ungerader Protonen- und Neutronenzahl, bei Kernen mit ungerader Protonenzahl und gerader Neutronenzahl, oder umgekehrt. Die Interpretation analog zu den Elektronen im Atom sagt, dass nach abgeschlossenen Schalen ein Leuchtnukleon existiert, analog zum Elektronensystem. Eine genaue Analyse dieser Idee und der Abweichungen davon führte dann zum Schalenmodell.

6.5.10.1. Resonanz-Spektroskopie, Magnetische Momente von Kernen

Wie bei Atomen gibt es für ein Nukleon eine Energieaufspaltung im Magnetfeld, einen nuklearen Zeeman-Effekt. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.3.3.] ist die Aufspaltung

$$\Delta E = \hbar\omega_{Larmor} = g_p \mu_K B \tag{6.5.112}$$

Bei einer magnetischen Induktion von $B = 0.15$ T entspricht dies $\Delta E = 50$ nV. Auch mit stärkeren magnetischen Induktionen ist die Energieaufspaltung direkt spektroskopisch nur schwierig nachzuweisen. ΔE entspricht einer Larmorfrequenz von

$$\nu_{Larmor} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar} = 4.2 \text{ MHz} \tag{6.5.113}$$

Diese Frequenz ist leicht herstellbar und messbar. Das heisst, beim Durchstimmen einer Hochfrequenzquelle sollte sich bei 4.2 MHz ein Absorptionsmaximum zeigen.

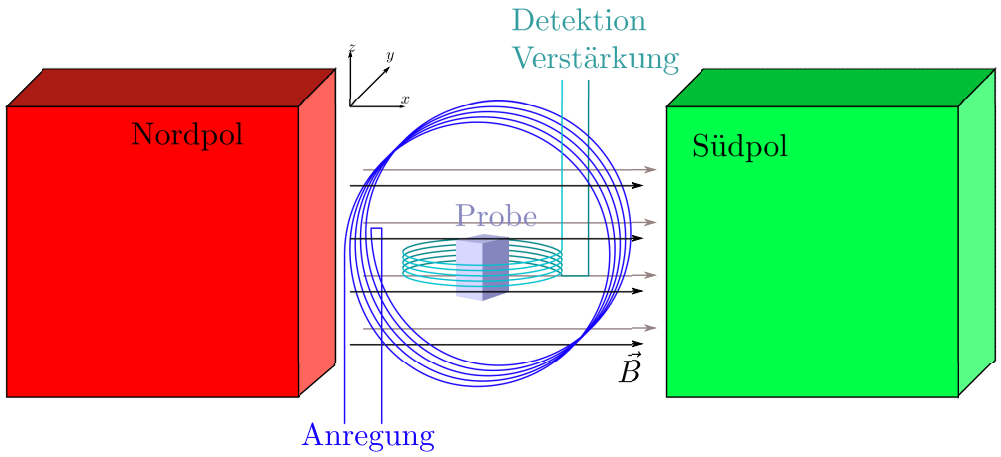


Abb. 6.33.: Prinzip der Magnetresonanzmessung (analog zu W. Demtröder [Dem10, Abb. 2.19.]).

Abbildung 6.33 zeigt das Prinzip der Magnetresonanzmessung. In einer magnetischen Induktion in die x-Richtung befindet sich die Probe. Mit der Anregungsspule wird ein periodisches Magnetfeld in die y-Richtung erzeugt. Die durch $\boldsymbol{B}$ ausgerichteten Spins der Probe präzedieren um die x-Richtung. So wird auch eine periodische Komponente in die z-Richtung erzeugt. Die Auslesespule detektiert diese Komponente des Magnetfeldes. Das verstärkte Signal ist das Messergebnis. Wenn nun die Anregungsfrequenz durchgestimmt wird, können die verschiedenen möglichen Anregungen, und insbesondere auch die Hyperfeinaufspaltung durch die Kopplung des Kernspins an den Gesamtspin der Elektronen detektiert werden. Da die Grösse des Kernspins und damit die Aufspaltung charakteristisch für die Kernsorte und das Isotop ist, kann man so sehr genau z.B. die Antwort von ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ detektiert werden.
Mit inhomogenen magnetischen Induktionen kann über die Aufspaltung bei bekanntem Isotop auch der Ort des Kerns detektiert werden. Die Anregung wird in der Regel nicht kontinuierlich eingestrahlt, sondern gepulst. Dies erlaubt, die freie Präzession zu detektieren. Auf diese Weise können auch Informationen über die

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Umgebung des getesteten Isotops erhalten werden.

6.5.10.2. Elektrisches Dipolmoment

Elektrische Dipolmomente treten im Gegensatz zu magnetischen Dipolmomenten selten auf. Magnetische Dipolmomente beruhen auf einem axialen Vektor (die Fläche des Kreisstromes), der bei der Raumspiegelung seine Richtung nicht ändert. Bei elektrischen Dipolmomenten ist dies ein polarer Vektor (der Abstand). Alle Eigenzustände des Hamiltonoperators haben definierte Parität. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies äquivalent dazu ist, dass es bei diesen Zuständen kein elektrisches Dipolmoment geben darf.
Der Störoperator hingegen hat eine Dipolkomponente. Wenn dem nicht so wäre, gäbe es keine Absorption oder Emission von Licht im Elektronensystem eines Atoms. Die Drehimpulserhaltung bei der Emission oder Absorption führt dann zu den bekannten Auswahlregeln.

6.5.10.3. Elektrisches Quadrupolmoment

Im Gegensatz zu Dipolmomenten können permanente elektrische Quadrupolmomente existieren. Diese treten auf, wenn Kerne nicht mehr kugelförmig sondern elliptisch sind. Die Argumentation nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.4.2.] beginnt mit der Beobachtung, dass bei Kugelsymmetrie

$$\int x^2 \rho_K(\boldsymbol{r}) d^3r = \int y^2 \rho_K(\boldsymbol{r}) d^3r = \int z^2 \rho_K(\boldsymbol{r}) d^3r \tag{6.5.114}$$

ist und dass wegen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dann das Quadrupolmoment null wird. Das Quadrupolmoment in die z-Richtung ist durch

$$\begin{aligned} Q &= 2\left\langle z^2 \right\rangle - \left(\left\langle x^2 \right\rangle + \left\langle y^2 \right\rangle\right) \\ &= \int \left(3r^2 - z^2\right) \rho_K(\boldsymbol{r}) d^3r = \int r^2 \left(3\cos^2(\theta) - 1\right) \rho_K(\boldsymbol{r}) d^3r \end{aligned} \tag{6.5.115}$$

gegeben. Dies führt zum Quadrupoloperator

$$\hat{\mathrm{Q}} e r^2 \left(3\cos^2(\theta) - 1\right) \tag{6.5.116}$$

und zu dessem Erwartungswert

$$Q = \int \psi^* \hat{\mathrm{Q}} \psi d^3r = \langle \psi | \hat{\mathrm{Q}} | \psi \rangle \tag{6.5.117}$$

Wenn ein Kern mit mehreren Protonen den Kernspin I hat ist das gesamte Quadrupolmoment parallel zu $\left\langle \hat{\boldsymbol{I}} \right\rangle$

$$Q = \langle \psi_I | \hat{\mathrm{Q}} | \psi_I \rangle \tag{6.5.118}$$

Die Energie eines Quadrupols in einem Feldgradienten $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ist

$$\Delta E_Q = \frac{Q}{4} \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{3\cos^2(\theta) - 1}{2} \tag{6.5.119}$$

Diese Energieaufspaltung ist proportional zu m_I^2, gegeben durch $\left(\hat{\boldsymbol{I}} \cdot \hat{\boldsymbol{J}}\right)^2$.

Quadrupolmomente wurden nur in kernen mit $I \geq 1$ beobachtet. $I = 0$ bedeutet Kugelsymmetrie. $I = \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu einem Vektor. Qudrupolmomente und höhere Momente zeigen oft grössere Abweichungen von Kernmodellen als z.B. die Schalenstruktur.

6.5.10.4. Isotopeneffekt in der optischen Spektroskopie

Die enorme Präzision der optischen Spektroskopie ermöglicht es, einzelne Isotope in optischen Spektren zu unterscheiden. R. N. Zare u. a. [Zar+09] zeigen dies anhand der Untersuchung von ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ und ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Grundlage für diese Messungen ist einerseits die Abhängigkeit von der Kernmasse der reduzierten Masse in der Rydbergformel und andererseits die Kopplung von Kernspins über die Hyperfeinaufspaltung.

6.5.11. Kollektive Anregungen

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.4.2.] können Kerne mit $A \geq 6$ kollektive Bewegungen mit scharf definierten Frequenzen zeigen. Dies kann verstanden werden, indem Kerne als kleine Vielteilchensysteme betrachtet werden, wie z.B. im Tröpfchenmodell oder bei Mehrteilchenmodellen mit einer flüssigen Oberfläche.

- Wenn Kerne schwingen können elektrische Dipolmomente auftreten. Diese können als Dipol-Riesenresonanzen beobachtet werten (siehe J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 7.5.1.]). Diese Riesenresonanzen sind experimentell beobachtet worden (B. L. Berman und S. C. Fultz [BF75]).

- Kollektive Rotationen können entlang der Achse des Kerns mit dem grössten oder dem kleinsten Massenträgheitsmoment auftreten. Dies ist analog zur Kreiseltheorie aus der Mechanik (siehe [Mar14]). An schwereren Kernen wurden solche Rotationen gefunden. A. Heusler [Heu17] zeigt Messungen an ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$.

- Wenn das Mehrteilchenmodell stimmt, müssten analog zu Oberflächenerdbebenwellen auf Kernen Oberflächenschwingungen auftreten. Auch diese Anregungsform wurde gefunden (siehe z.B. B. Hadinia u. a. [Had+05]).

6.6. Kernkräfte und Kernmodelle

6.6.1. Deuteron

Wie misst man die Bindungsenergie des Deuterons?

- Photospaltung

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + h\nu \longrightarrow n + p + E_{kin} \tag{6.6.1}$$

  - Dazu Messungen von $h\nu$ mit dem Photoeffekt
    $h\nu = U \cdot e$ wenn U die Beschleunigungsspannung für die Elektronen ist

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

- da $m_n \approx m_p \Rightarrow E_{kin,n} = E_{kin,p}$[2]
- Messung von $E_{kin,p}$ mit einer Gegenspannung

$$E_B = h\nu - E_{kin}(p) - E_{kin}(n) \tag{6.6.2}$$

- Rekombinationsstrahlung

$$n + {}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^2_1\mathrm{H} + \gamma \qquad \text{wobei } E_\gamma = h\nu = E_B \tag{6.6.3}$$

$\Rightarrow E_B = 2.224\,573$ MeV, da die Bindungsenergie kleiner als 8 MeV pro Nukleon ist $\Rightarrow$ grosse kinetische Energie

Abschätzung: Da $p_i \approx \frac{\hbar}{R}$ für $I = x, y, z$

$$\Rightarrow E_{kin} \geq \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{3\hbar^2}{2mR^2}$$
$$\Rightarrow 23 \text{ MeV/Nukleon}$$
$$-E_B = -E_0 + E_{kin} \Rightarrow E_0 \approx +48 \text{ MeV}$$

- Hyperfeinaufspaltung $\Rightarrow$ I = 1 aus $1s$-Zustand von ${}^2_1\mathrm{H}$

$\Rightarrow \mu_D = 0.857348\,\mu_K$ magn. Moment

μ_D ist kleiner als $\mu_p + \mu_n = 0.87963\,\mu_K$

$\Rightarrow \mu_D$ rührt von den Spins her und nicht von den Bahndrehimpulsen

$\Rightarrow L = 0 \quad , \quad S-$ Zustand

Bezeichnung analog zur Elektronenhülle ${}^3S-$Zustand

D hat ein elektrisches Quadrupolmoment

$$QM_D = 2.86 \cdot 10^{-31} \text{ cm}^2 \cdot e \tag{6.6.4}$$

$\Rightarrow$ Ladungsverteilung ist nicht sphärisch.

6.6.1.1. Abschätzung des n-p-Abstandes

Kastenpotential

[2] genauer: $E_{kin,n} = \frac{1}{2}\frac{1}{m_n}\left(\sqrt{2E_{kin,p}m_p} - p_{h\nu}\right)^2$

$$\mu = \frac{m_n \cdot m_p}{m_n + m_p} \Rightarrow \mu \approx \frac{1}{2}m \qquad \text{mit } m = \frac{1}{2}(m_n + m_p)$$

$$\text{Pot. Energie} \qquad E_{\text{pot}} = \begin{cases} -E_0 & \text{für } r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}[E - E_{\text{pot}}(r)] = 0$$

$$\Rightarrow u(r) = \begin{cases} A_1 \sin(k_1 r) & r < R_0 \\ A_2 e^{-r/a} & r > R_0 \end{cases}$$

Mit $k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{m(E_0 - E_B)}$ und $\frac{1}{a} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{mE_B}$

Stetigkeit

$$k_1 \cot(k_1 R_0) = \cot\left[\frac{R_0\sqrt{m(E_0 - E_B)}}{\hbar}\right] = -\sqrt{\frac{E_B}{E_0 - E_B}} = -\frac{1}{u}$$

Wenn $E_0 \gg |E_B|$

$$\cot(\,) \ll 1 \quad \Rightarrow \frac{m}{\hbar^2}R_0^2(E_0 - E_B) \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\boxed{E_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{mR_0^2}}$$

1. $R_0 = 1.5$ fm, $E_B = 2.2$ MeV $\Rightarrow E_0 = 45$ MeV

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit, das Nukleon ausserhalb zu finden: 80 %

WW zwischen zwei Nukleonen:

$$V_{\text{NN}} = V_1(\boldsymbol{r}) + V_2(\boldsymbol{I_1}, \boldsymbol{I_2})$$

$$V_2(\boldsymbol{I_1}, \boldsymbol{I_2}) = a_1\left[3 \cdot \frac{(\boldsymbol{I_1} \cdot r) \cdot (\boldsymbol{I_2} \cdot r)}{r^2} - \boldsymbol{I_1} \cdot \boldsymbol{I_2}\right]$$

6.6.2. Mesonen-Austauschmodell

Siehe auch Seite 64

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Analog kann die starke WW beschrieben werden

elektromagnetische Wechselwirkung	starke Wechselwirkung
$e^- + e^- \to e^- + (h\nu)_{virt} + e^- \to e^- + e^-$	$p + p \to p + (\pi^0)_{virt} + p \to p + p$
	$p + n \to n + (\pi^+)_{virt} + n \to n + p$
	$p + n \to p + (\pi^0)_{virt} + n \to p + n$
	$n + p \to n + (\pi^0)_{virt} + p \to n + p$
	$n + p \to p + (\pi^-)_{virt} + p \to p + n$
	$n + n \to n + (\pi^+)_{virt} + n \to n + n$

Tab. 6.13.: Vergleich der starken Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die Austauschteilchen sind virtuell.

π hat einen Isospin

$$\left.\begin{array}{lll} T_3: & \pi^0 & \tau_3 = 0 \\ & \pi^+ & \tau_3 = 1 \\ & \pi^- & \tau_3 = -1 \end{array}\right\} \text{Austauschmodell der Kernkräfte (Hideki Yukawa)} \tag{6.6.5}$$

π: $\pi-$Meson, auch Pion genannt.

$$\text{Ruhemasse:} \quad h\nu: \quad m_0 = 0 \Rightarrow \text{unendliche Reichweite} \tag{6.6.6a}$$

$$\pi: \quad m_{0,\pi} > 0 \Rightarrow \text{endliche Reichweite} \tag{6.6.6b}$$

Wegen $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ mit $\Delta E = m_\pi c^2$ und $r \leq c \cdot \Delta t$

$$\Rightarrow r \leq r_0 = \frac{\hbar}{m_\pi c} \tag{6.6.7}$$

mit $m_\pi c^2 = 139$ MeV $\Rightarrow$ $r_0 = 1.4$ fm

$$\text{Yukawa-Potential (nach Hideki Yukawa)} \qquad V(r) = \frac{g}{r} e^{-\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right) r} \tag{6.6.8a}$$

$$\text{Reichweite der Kernkräfte} \qquad r_0 = \lambda_{c,\pi} = \frac{\hbar}{m_\pi c} \tag{6.6.8b}$$

Die WW zwischen p-p und n-n wird über π^0 vermittelt, n-p und p-n über π^+ und π^-.

Da $\begin{array}{l} m_{\pi^+} > m_{\pi^0} \\ m_{\pi^-} > m_{\pi^0} \end{array}$ ist die np-WW die stärkste
Geometrie

$$\cos\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)=\frac{\hbar k}{2p}\Longrightarrow k=\frac{2p}{\hbar}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{6.6.9}$$

Relativitätstheorie

$$p=mv=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.6.10}$$

Quantenmechanik

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\hbar}{2p\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}=\frac{\pi\hbar}{p\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}=\frac{\pi\hbar\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \tag{6.6.11}$$

Dieses Photon entspricht der Energie

$$\Delta E=h\nu=h\frac{c}{\lambda}=\frac{hcm_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\pi\hbar\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2cm_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.6.12}$$

Nach der Energieunschärfe entspricht dies der Zeit

$$t=\frac{\hbar}{\Delta E}=\frac{\hbar\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2cm_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \tag{6.6.13}$$

Damit erreicht das Pion maximal die Reichweite

$$x=ct=\frac{\hbar c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{2cm_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}=\frac{\hbar\sqrt{c^2-v^2}}{2cm_0 v\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \tag{6.6.14}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

7. Radioaktiver Zerfall

Anhand des Tröpfchenmodells (Gleichung (6.5.14) oder Gleichung (6.5.16)) kann die Frage (teilweise) beantwortet werden: Welches sind die stabilen Kerne? Dazu suchen wir die Kernladungszahl Z_{min} (Anzahl Protonen) bei der die Masse des Atoms M_a minimal ist, die Gesamtenergie also minimal ist.

$$\left.\frac{\partial M_a(Z,A)}{\partial Z}\right|_{A=\text{const}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{7.0.1}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial}{\partial Z}\Big\{Zm_p + (A-Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2}\left[a_V A\right. \\
& \left. -a_S A^{2/3} - a_F\left(N-Z\right)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el}\right]\Big\} && \text{(7.0.2a)}\\
\text{mit } \tfrac{\partial}{\partial Z}E_B^{el} \approx 0 \text{ und } A = N+Z = \text{const}& \\
=& \frac{\partial}{\partial Z}\Big\{Zm_p + (A-Z)m_n + Zm_e - \frac{1}{c^2}\left[a_V A\right. \\
& \left. -a_S A^{2/3} - a_F\left(A-2Z\right)^2 A^{-1} - a_C Z^2 A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2} - E_B^{el}\right]\Big\} && \text{(7.0.2b)}\\
=& m_p - m_n + m_e - \frac{1}{c^2}\left[-2a_F(A-2Z)\frac{(-2)}{A} - 2a_C\frac{Z}{A^{1/3}}\right] && \text{(7.0.2c)}\\
0 =& Z\left(\frac{8a_F}{A} + \frac{2a_C}{A^{1/3}}\right) + c^2\left(m_p - m_n + m_e\right) - 4a_F && \text{(7.0.2d)}\\
0 =& \frac{Z}{A}\left(8a_F + 2a_C A^{2/3}\right) + c^2\left(m_p - m_n + m_e\right) - 4a_F && \text{(7.0.2e)}\\
Z =& A\frac{4a_F - c^2\left(m_p - m_n + m_e\right)}{8a_F + 2a_C A^{2/3}} = \frac{A}{2}\frac{4a_F - c^2\left(m_p - m_n + m_e\right)}{4a_F + a_C A^{2/3}} && \text{(7.0.2f)}
\end{aligned}$$

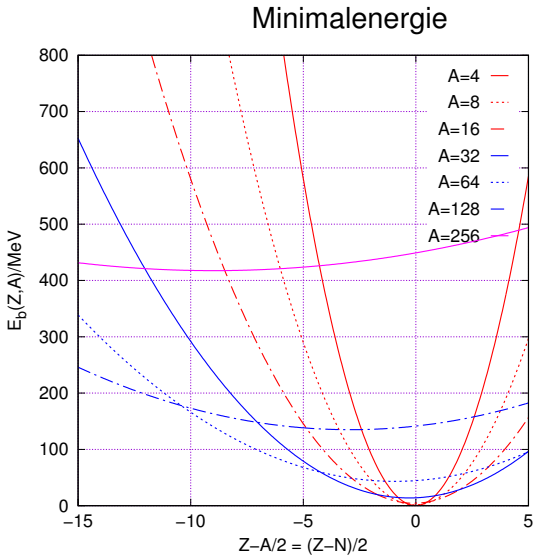


Abb. 7.1.: Lage der Minima nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker

Abbildung 7.1 zeigt die Lage der Minima für verschiedene Nukleonenzahlen A. Dargestellt ist die Bindungsenergie E_B als Funktion von $Z - \frac{A}{2} = \frac{Z-N}{2}$.

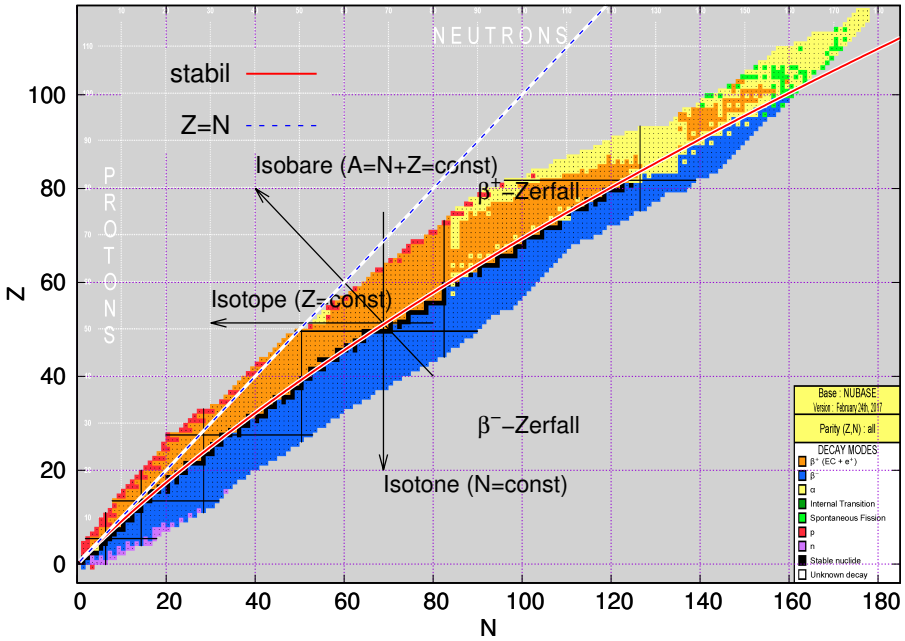


Abb. 7.2.: Stabilitätsbereiche berechnet mit der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (6.5.14) oder (6.5.16)), Nuklidkarte als Hintergrundbild erzeugt mit Nucleus-Amdc [Wap12]

Abbildung 7.2 zeigt die Linie der stabilen Kerne nach Gleichung (7.0.2). Eingezeichnet sind weiter die Bezeichnungen Isobare, Isotope und Isotone.

Mit Gleichung (6.5.18) kann berechnet und dargestellt werden, ob und wie Kerne ineinander umgewandelt werden können (siehe Abbildung 7.3).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

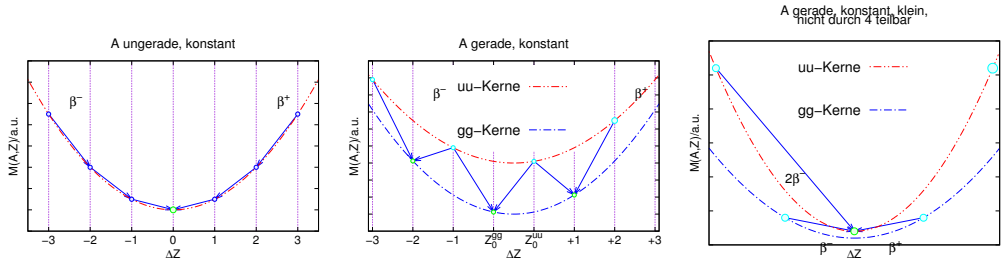


Abb. 7.3.: Stabile Kerne nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 3.3]

Wenn bei der Reaktion von ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ nach ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ ein Produkt mit der Masse M_2 entsteht, muss gelten:

$$M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) \geq M\left({}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}\right) + M_2 \tag{7.0.3}$$

Nur dann ist ein Zerfall möglich (notwendige Bedingung).
Die dazugehörige Reaktion ist:

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + {}^{A-A'}_{Z-Z'}\mathrm{Y} \tag{7.0.4}$$

7.1. Stabilitätskriterien

7.1.1. Mattauch'sche Isobarenregeln

Die Regeln sind nach Josef Mattauch benannt.

- Oberhalb von $Z = 7$ gibt es keine stabilen uu-Kerne
- Elemente mit ungeradem Z besitzen höchstens zwei stabile Isotope, die sich für $Z > 7$ um $\Delta A \geq 2$ unterscheiden
- Für Elemente mit $A = 2n+1$ (ungerade) gibt es in der Regel nur ein stabiles Isobar
- Für Elemente mit $A = 2n$ gibt es für $Z > 7$ keine stabilen isobare uu-Kerne und mindestens zwei stabile gg-Isobare
- β^--Zerfall

  $${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \beta^- \tag{7.1.1}$$

  mit

  $$\Delta E = \left(M_X - M_Y + m_e\right) c^2 + E_{kin} \tag{7.1.2}$$

  Wenn $\Delta E < \left(M_X - M_Y + m_e\right) c^2$ ist, ist der β^--Zerfall verboten. Analoges gilt für den β^+-Zerfall

7.2. Zerfallsgesetze

Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls sei für alle Atome einer Sorte gleich

$$\lambda = \frac{dP}{dt} \tag{7.2.1}$$

Anzahl Kerne

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -A(t) \tag{7.2.2}$$

$A(t)$: Aktivität

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{7.2.3}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{7.2.4}$$

$$A_0 = \lambda N_0 \tag{7.2.5}$$

Zeitkonstante

$$\tau = \langle t \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot N(t) dt = \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{7.2.6}$$

Halbwertszeit

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln(2) \tag{7.2.7}$$

$$A_0 = \frac{N_0}{t_{1/2}} \ln(2) \tag{7.2.8}$$

Aktivität $\Rightarrow$ Anzahl der instabilen Kerne (wenn nur eine Sorte vorhanden ist)

7.2.1. Statistik der Zerfälle

Radioaktive Zerfälle werden durch die entstehenden ausgesandten Teilchen oder Quanten charakterisiert. Charakteristisch ist in der Regel, dass eine sehr grosse Anzahl $N_0 \approx N_A$ Atomkerne vorhanden sind, deren Zerfallswahrscheinlichkeit $p \ll 1$ ist [Ble13]. In einer gegebenen Zeitspanne t_{mess} werden im Mittel μ Zerfälle über die Produkte gemessen. Erwartet werden

$$\langle m \rangle = \mu = N_0 p \tag{7.2.9}$$

Zerfälle. m ist die gemessene Anzahl Zerfälle. Die Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem Mittelwert μ in N_0 Experimenten $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Ereignisse zu haben, ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit von m Ereignissen, p^m, der Wahrscheinlichkeit, kein Ereignis zu haben $(1-p)^{N_0-m}$ und der Anzahl möglicher Reihenfolgen $\binom{N_0}{m}$, also

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$W_\mu(m) = p^m \cdot (1-p)^{N_0-m} \cdot \binom{N_0}{m} \tag{7.2.10}$$

Wir spalten

$$(1-p)^{N_0-m} = (1-p)^{-m}(1-p)^{N_0} = \left(1-\frac{\mu}{N_0}\right)^{-m}\left(1-\frac{\mu}{N_0}\right)^{N_0}$$

auf. Im Grenzfall $N_0 \to \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{N_0\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{N_0}\right)^{-m} &= 1^{-m} = 1\\
\lim_{N_0\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{N_0}\right)^{N_0} &= \exp(-\mu) = e^{-\mu}\\
\binom{N_0}{m} &= \frac{N_0\cdot(N_0-1)\cdot\ldots\cdot(N_0-m+1)}{m!} \approx \frac{N_0^m}{m!}
\end{aligned}$$

Für sehr grosse Werte N_0 und sehr kleines p lautet die Poisson-Verteilung

$$P_\mu(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu} \tag{7.2.11}$$

Dies erhält man, wenn man die Definition von p einsetzt.

Bei gegebener Zerfallskonstante λ und gegebener Messzeit t_{mess} bekommen wir

$$\mu(t_{mess}) = N_0 - N(t_{mess}) = N_0\left(1-e^{-\lambda t_{mess}}\right) \tag{7.2.12}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit für Zerfälle in der Zeit t_{mess} durch

$$p(t_{mess}) = \frac{\mu(t_{mess})}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t_{mess}} \tag{7.2.13}$$

gegeben.

Damit ergibt sich

$$P_{N_0,t_{mess}}(m) = \frac{N_0^m\left(1-e^{-\lambda t_{mess}}\right)^m}{m!}e^{-N_0\left(1-e^{-\lambda t_{mess}}\right)} \tag{7.2.14}$$

7.2.2. Natürlich vorkommende radioaktive Kerne

Element	Symbol	Strahlungsart	E/MeV	$t_{1/2}$/a
Tritium	${}^{3}_{1}\mathrm{H}$	β^-	0.0286	12.3
Kalium	${}^{40}_{19}\mathrm{K}$	β^-	1.3	$1.5 \cdot 10^9$
Rubidium	${}^{87}_{37}\mathrm{Rb}$	β^-	0.275	$5 \cdot 10^{10}$
Iod	${}^{129}_{53}\mathrm{I}$	β^-	0.15	$1.7 \cdot 10^7$
Cäsium	${}^{135}_{55}\mathrm{Cs}$	β^-	0.21	$3.0 \cdot 10^6$
Blei	${}^{205}_{82}\mathrm{Pb}$	α	2.6	$\approx 1.4 \cdot 10^{16}$
Polonium	${}^{209}_{84}\mathrm{Po}$	α	4.87	103
Radium	${}^{226}_{88}\mathrm{Rd}$	α	4.77	1620
Thorium	${}^{230}_{90}\mathrm{Th}$	α	$4.5 - 4.7$	$8 \cdot 10^4$
Uran	${}^{234}_{92}\mathrm{U}$	α	$4.6 - 4.8$	$2.5 \cdot 10^5$
Uran	${}^{235}_{92}\mathrm{U}$	α	$4.3 - 4.6$	$7.1 \cdot 10^8$
Uran	${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	α	4.2	$4.5 \cdot 10^9$

Tab. 7.1.: Natürlich vorkommende radioaktive Kerne (nach W. Demtröder [Dem10, Tab. 3.1.]).

Tabelle 7.1 gibt eine Liste von einigen natürlich vorkommenden radioaktiven Isotopen. Beispiele von solchen Reaktionen sind:

- α-Zerfall
$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{7.2.15} $$
- β^--Zerfall
$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- \tag{7.2.16} $$
- β^+-Zerfall
$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + e^+ \tag{7.2.17} $$
- γ-Zerfall
$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X}^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + h\nu \tag{7.2.18} $$

7.2.3. Goldene Regel und Lebensdauer

Bei Zerfällen von Kernen (wie auch bei vielen anderen Prozessen in der Natur) spielt nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] Zufall eine wesentliche Rolle. Die Umwandlung jedes Kernes folgt dabei ohne äusseren Einfluss. Es stellen sich dabei nach J. Bleck-Neuhaus zwei Fragen:

- Wann wandeln sich in einem Ensemble (Probe) pro Zeitintervall Δt die meisten Kerne um? Die Antwort ist bei $t = 0$ und nicht nach einer Wartezeit.
- Welche mittlere Wartezeit haben diejenigen Kerne noch vor sich, die nach der Zeit $t > 0$ noch nicht umgewandelt sind? Die Antwort ist, dass diese

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

die gleiche mittlere Wartezeit τ haben wie zu Beginn oder zu jedem anderen Zeitpunkt.

Angenommen, wir haben zu Beginn $N(0) = N_0$ Atome, die zerfallen können und wir beobachten in der Zeit Δt die Anzahl ΔN Zerfälle, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls

$$W(t = 0, \Delta t) = \frac{\Delta N}{N_0} = \lambda \Delta t \tag{7.2.19}$$

mit λ der in Gleichung (7.2.12) definierten Zerfallskonstante. Gleichung (7.2.19) gilt, wenn $\Delta t \ll \tau = \frac{1}{\lambda}$. Dann ist die Übergangsrate (oder die Zerfallskonstante)

$$\lambda = \frac{W(t = 0, \Delta t)}{\Delta t} \tag{7.2.20}$$

Diese Übergangsrate ist konstant, unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. Erklären kann man sie mit der Quantenmechanik und der Störungstheorie nach Paul Dirac. Dazu nimmt man zuerst einen (wahrscheinlich unbekannten) wahren und **zeitunabhängigen** Hamiltonoperator $\hat{\mathrm{H}}$ und den **exakten** Eigenzustand ψ_E an

$$\hat{\mathrm{H}}\psi_E = E\psi_E \tag{7.2.21}$$

Wäre unser Atomkern in diesem Eigenzustand, dann wäre er stabil und könnte sich nie umwandeln. Alles was sich ändern könnte ist die Phase $\exp\left(i\frac{E}{\hbar}t\right)$, die aber bei der Berechnung des Erwartungswertes von ψ_E herausfällt.

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_E = \hat{\mathrm{H}}\psi_E = E\psi_E \tag{7.2.22}$$

Ein radioaktiver Kern kann sich also nie in einem exakten Eigenzustand ψ_E befinden. Er muss sich vielmehr in einem Anfangszustand $\psi_{ini} \neq \psi_E$ befinden, der aber ähnlich zum exakten Zustand $\psi_E \approx \psi_{ini}$ sein kann. ψ_{ini} kann dann keine scharf definierte Energie besitzen. ψ_{ini} ist ein metastabiler Zustand zu einem ungestörten Hamiltonoperator $\hat{\mathrm{H}}_0$

$$\hat{\mathrm{H}}_0 \left|\psi^0_{ini}\right\rangle = E^0_{ini} \left|\psi^0_{ini}\right\rangle \tag{7.2.23}$$

Dabei soll die hochgestellte 0 einen Eigenzustand zu $\hat{\mathrm{H}}_0$ anzeigen. Die Differenz von $\hat{\mathrm{H}}$ und $\hat{\mathrm{H}}_0$ ist der Störoperator

$$\hat{\mathrm{H}}_{WW} = \hat{\mathrm{H}} - \hat{\mathrm{H}}_0 \tag{7.2.24}$$

Auf jeden Fall ist $[\,\hat{\mathrm{H}}_0, \hat{\mathrm{H}}_{WW}\,] \neq 0$, die beiden sind also nicht vertauschbar. Die zeitabhängige Schrödingergleichung mit $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_{WW}$ lautet

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^0_{ini}\right\rangle = \left(\hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_{WW}\right)\left|\psi^0_{ini}\right\rangle = E^0_{ini}\left|\psi^0_{ini}\right\rangle + \hat{\mathrm{H}}_{WW}\left|\psi^0_{ini}\right\rangle \tag{7.2.25}$$

$\hat{\mathrm{H}}_{WW}$ mischt $|\psi^0_{ini}\rangle$ dauernd andere zu $|\psi^0_{ini}\rangle$ orthogonale Zustände zu, erzeugt also eine Übergangswahrscheinlichkeit. Das heisst, dass beispielsweise beim Übergang ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$ nach Gleichung (7.2.15) $\hat{\mathrm{H}}_{WW}$ die Wellenfunktion $\left|\psi_{ini}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})\right\rangle$

mit der Wellenfunktion $\left|\psi_{fin}(^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y})\right\rangle + \left|\psi_{ini}(^{4}_{2}\mathrm{He})\right\rangle$ mischt[1]. $\hat{\mathrm{H}}_{WW}$ ist eine Linearkombination aller Eigenzustände ψ^0_{ini} zu $\hat{\mathrm{H}}_0$. Von allen diesen Eigenzuständen kommen die beobachtbaren Zustände ψ_{fin} in Frage. Das Betragsquadrat der Beimischungsamplitude ergibt die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Übergangs. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] wächst die Wahrscheinlichkeit des Übergangs immer dann besonders schnell, wenn die Endenergie der Zustände gleich der Anfangsenergie ist (in Resonanz). Wichtig ist ferner, dass die Wellenfunktion des α-Teilchens die Bewegung weg vom Mutterkern beschreibt. Aus der mit der Zeit zunehmenden Amplitude kann die Wahrscheinlichkeit des «Quantensprungs» abgelesen werden.
Die goldene Regel wurde von Wolfgang Pauli formuliert und dann von Enrico Fermi so benannt. Sie gibt die Zerfallskonstante als Funktion des Wechselwirkungsoperators (Störoperators) an.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_E \tag{7.2.26}$$

Die wesentlichen Faktoren nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] sind

- $M_{fi} = \langle\psi_{fin}| \hat{\mathrm{H}}_{WW} |\psi_{ini}\rangle$ Dieses Matrixelement gibt die Grösse der Kopplung des Endzustandes $|\psi_{fin}\rangle$ mit dem Anfangszustand $|\psi_{ini}\rangle$ an, also wie gross die erwartete Amplitude des Endzustandes bei gegebenem Anfangszustand ist.

- $\rho_E = \frac{dN}{dE}$ Die Phasenraumdichte oder Zustandsdichte gibt an, wie viele der Endzustände dN pro Energie dE unter den Nebenbedingungen der Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung vorhanden sind. Wenn Sie über einen Bach hüpfen wollen muss es sowohl einen Platz am Ausgangsufer haben als auch einen am Zielufer, sonst gelingt der Sprung nicht. Ein Beispiel: Der K-Einfang funktioniert nur für die K-Schale (Elektronenzustand mit $n = 1$, da dieser der einzige ist ohne Knoten im Kern).

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] beschreibt die Goldene Regel in Gleichung (7.2.26) den spontanen Prozess wie auch einen Prozess als Reaktion auf vorhergehende Aktionen, also den Umkehrprozess. Das Matrixelement M_{fi} ist symmetrisch für den Vorwärts- und den Rückwärtsprozess.
Mit Gleichung (7.2.26) kann der Wirkungsquerschnitt σ und die Zerfallskonstante λ miteinander verknüpft werden. Aus Dimensionsgründen muss die Grösse, die λ in σ überführt die Einheit [Fläche/Zeit] haben. Dies ist die Stromdichte $\boldsymbol{j} = n\boldsymbol{v}$ der einlaufenden Teilchen (n ist ein inverses Volumen, $\boldsymbol{v}$ eine Geschwindigkeit. Wir haben

$$\sigma = \frac{1}{|\boldsymbol{j}|}\lambda \tag{7.2.27}$$

Die Details, die bei der genauen Ableitung von Gleichung (7.2.27) zu beachten sind, finden Sie in J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.].
Die Energieunschärfe $\Delta E = E - E^0_{ini}$ des Anfangszustandes $|\psi_{ini}\rangle$ bekommt man aus Gleichung (7.2.24)

[1] Nur die Summe der Eigenfunktionen aller Produkte ist richtig!

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\left(\hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_{WW}\right) |\psi_E\rangle = E\,|\psi_E\rangle \tag{7.2.28}$$

indem man ψ_{ini} als Linearkombination der ψ_E zu verschiedenen Eigenwerten E schreibt. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] heisst dies, dass

$$|\psi_E\rangle = |\psi_{ini}\rangle + \text{einlaufende und auslaufende Welle} \tag{7.2.29}$$

ist. Jede laufende Welle hat ein kontinuierliches Energiespektrum, deshalb sind die Eigenwerte E auch kontinuierlich. Vor der Emission müssen sich im Aussenraum alle Wellen mit Eigenwerten um den speziellen betrachteten Eigenwert E auslöschen, das heisst alle Phasen zwischen 0 und 2π müssen gleichverteilt sein. Das heisst, dass es eine bestimmte Mindestenergiebreite geben muss, die Ursache der Energieunschärfe von $|\psi_{ini}\rangle$. Bei einer kleinen Störung (1. Ordnung Störungsrechnung reicht) sind es nur die Wellenfunktionen in einem kleinen Energiebereich um E^0_{ini}, deren Amplituden sich nach der Emission konstruktiv überlagern können:

$$\frac{\langle\psi_E|\,\hat{\mathrm{H}}_{WW}\,|\psi_{ini}\rangle}{E - E^0_{ini}} \tag{7.2.30}$$

Die Amplituden nehmen ab, proportional zu $(E - E^0_{ini})^{-1}$. Der messbare Erwartungswert nimmt dann quadratisch ab, also eine Lorentz-Kurve. Die Halbwertsbreite der Energieunschärfe ist

$$\Delta E = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau} \Longrightarrow \Delta E\tau = \hbar \tag{7.2.31}$$

Klassisch kann ein ähnliches Resultat für den gedämpften harmonischen Oszillator abgeleitet werden (siehe z.B. O. Marti, *Mechanik - Vorlesungsskript* [Mar14]). Aus $a(t) = A(t)\sin(\omega t) = A_0\exp(-(\lambda/2)t)\sin(\omega t)$ folgt für das Amplitudenquadrat (proportional zur «Energie») $|A(t)|^2 \propto \exp(-\lambda t)$. Diese Analogie ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 6.1.2.] der Grund, warum kurzlebige Teilchen Resonanzen genannt werden.

8. Radioaktive Strahlung

8.1. Strahlenquellen und Strahlungsarten

8.1.1. α-Strahlung

Bei einem Kernzerfall, also auch bei einem α-Zerfall müssen die Erhaltungssätze gelten.

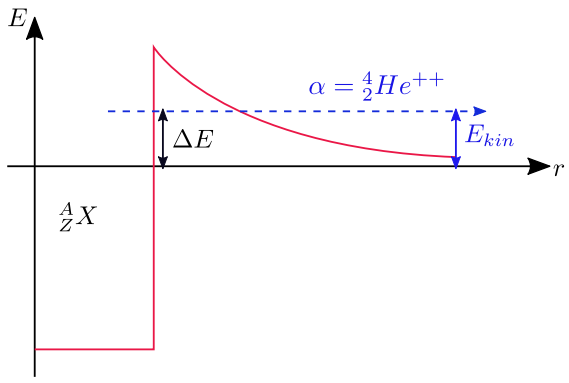


Abb. 8.1.: Energielandschaft beim Alpha-Zerfall.

Abbildung 8.1 zeigt die Energielandschaft beim α-Zerfall. Es gilt für die Massen

$$\Delta M = M(Z, A) - M_1(Z-2, A-4) - M_\alpha(2,4) > 0 \tag{8.1.1}$$

Energie-und Impulserhaltung bei einem ruhenden Mutterkern (Ausgangskern) lauten klassisch

$$M_1 v_1 + M_\alpha v_\alpha = 0 \tag{8.1.2a}$$

$$E_{kin}(M_1) + E_{kin}(M_\alpha) = \Delta M\, c^2 = \frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_\alpha}{2} v_\alpha^2 \tag{8.1.2b}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des α-Partikels, wenn keine weiteren Teilchen involviert sind:

$$v_\alpha = -\frac{M_1}{M_\alpha} v_1 \tag{8.1.3}$$

Diese Gleichungen können eingesetzt und wir erhalten

$$\frac{1}{2}M_1 v_1 \left(v_1 - v_\alpha\right) = \Delta M\, c^2 \tag{8.1.4a}$$

$$-\frac{1}{2}M_1 \frac{M_\alpha}{M_1} v_\alpha \left(-\frac{M_\alpha}{M_1} v_\alpha - v_\alpha\right) = \Delta M\, c^2 \tag{8.1.4b}$$

$$\frac{1}{2}M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha + M_1}{M_1} -\right) = \Delta M\, c^2 \tag{8.1.4c}$$

$$v_\alpha^2 = \frac{2M_1}{M_\alpha} \frac{\Delta M\, c^2}{M_\alpha + M_1} \tag{8.1.4d}$$

oder für Energien

$$E_{kin}(\alpha) = \frac{M_\alpha}{2} v_\alpha^2 = \frac{M_1\, \Delta M}{M_\alpha + M_1}\, c^2 \tag{8.1.5}$$

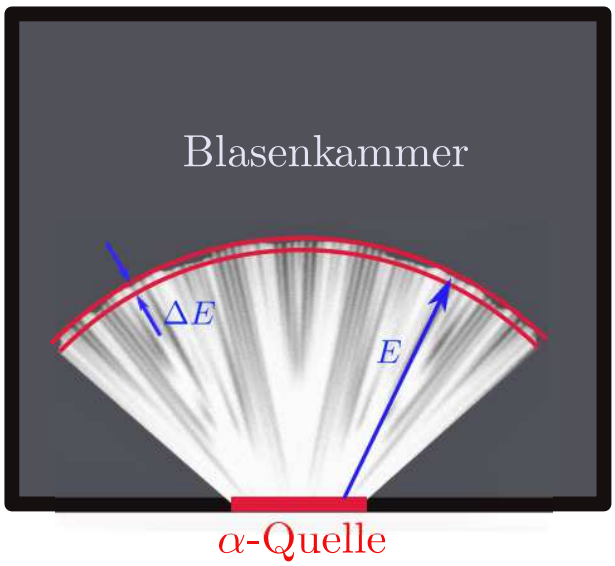


Abb. 8.2.: Skizze der Bahnen von α-Teilchen des $^{212}_{84}$Po in einer Blasenkammer, skizziert nach [GMB54]

Aus Messungen analog zur Simulation in Abbildung 8.2 kann mit Gleichung (8.1.5) geschlossen werden, das ΔM beim α-Zerfall gut definiert ist. Hier wird ausgenutzt, dass der Energieverlust in einer Blasen- oder Nebelkammer proportional zur kinetischen Energie ist. Kommen die α-Teilchen zur Ruhe, können Sie keine Bläschen oder Nebeltröpfchen mehr bilden, sind also nicht mehr sichtbar.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

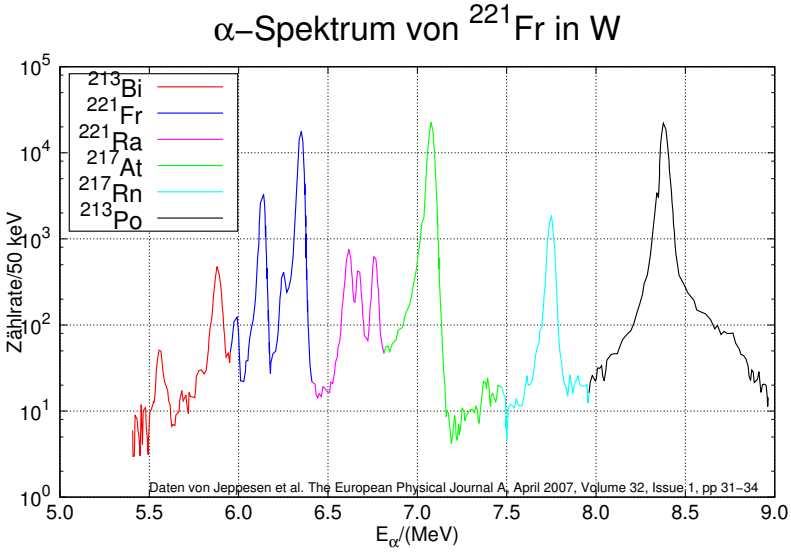


Abb. 8.3.: α-Teilchen beim Zerfall von $^{221}_{87}$Fr, gezeichnet nach [Jep+07, Fig. 1]

Abbildung 8.3 zeigt Messungen der α-Spektren verschiedener Kerne [Jep+07]. Da alle Spektren Linien zeigen, muss wie oben diskutiert geschlossen werden, dass der α-Zerfall ein Zweikörperproblem ist.

8.1.1.1. Geiger-Nuttall-Geraden bei α-Strahlern

Wenn angenommen wird, dass die Wahrscheinlichkeit eines α-Zerfalls unabhängig von allen Variablen und konstant ist, folgt, dass

$$p(\text{Zerfall}, N) = p(\text{Zerfall})N \Longrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = -p(\text{Zerfall})N = -\frac{1}{\lambda}N(t) \tag{8.1.6}$$

λ ist die Zerfallskonstante. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0 \tag{8.1.7a}$$

$$N(0) = N_0 \tag{8.1.7b}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \tag{8.1.8}$$

Üblicherweise wird die Halbwertszeit angegeben, also die Zeit $t_{1/2}$ bei der $N(t) = N_0/2$ ist. Damit haben wir die Beziehung

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \tag{8.1.9}$$

zwischen der Zerfallskonstante λ und der Halbwertszeit $t_{1/2}$. Aus der Gleichung für den Energieverlust auch relativistischer Elektronen [LSS63; Bet30]

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi\varepsilon_0^2 v^2 m_e}\left(\ln\left(\frac{2m_e v^2}{\langle E_b\rangle}\right) - \ln\left(1-\beta^2\right) - \beta^2\right) \tag{8.1.10}$$

(Z_1 ist die Ladung des Projektils) ergibt sich im nichtrelativistischen Falle $\beta = 0$ die Approximation

$$\frac{dE}{dx} \propto \frac{Z_1^2 n_e}{mv^2} \propto \frac{Z_1^2 \rho}{E_{kin}} \tag{8.1.11}$$

Dabei ist ρ die Massendichte im Target.

Der Erwartungswert der Reichweite ist

$$\langle R\rangle = -\int_{E_0}^{0} \frac{dE}{\frac{dE}{dx}} \tag{8.1.12}$$

Daraus und mit einem Korrekturfaktor für die Relativistik[1] folgt, dass die Reichweite proportional zu $E_{kin}^{3/2}$ ist.

Daraus ergibt sich die Geiger-Nuttall-Gleichung [GN11] (nach Hans Geiger und John Nuttall)

$$\ln(\lambda) = A + B\ln(R_\alpha) \tag{8.1.13}$$

wobei A und B für alle Elemente einer Zerfallsreihe gleich seien. R_α ist die Reichweite der α-Teilchen. Diese Gleichung kann mit der Energieabhängigkeit umgeschrieben werden

$$\ln(E_{kin}) = a + b\ln(\lambda) \tag{8.1.14}$$

Das heisst, dass die Zerfallskonstante und die kinetische Energie verknüpft sein müssen.

[1] Etwa so: $\ln(v^2/v_0^2) = 2\ln(v/v_0) \approx 2\ln(1+v/v_0) \propto v/v_0 \propto \sqrt{E_{kin}}$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

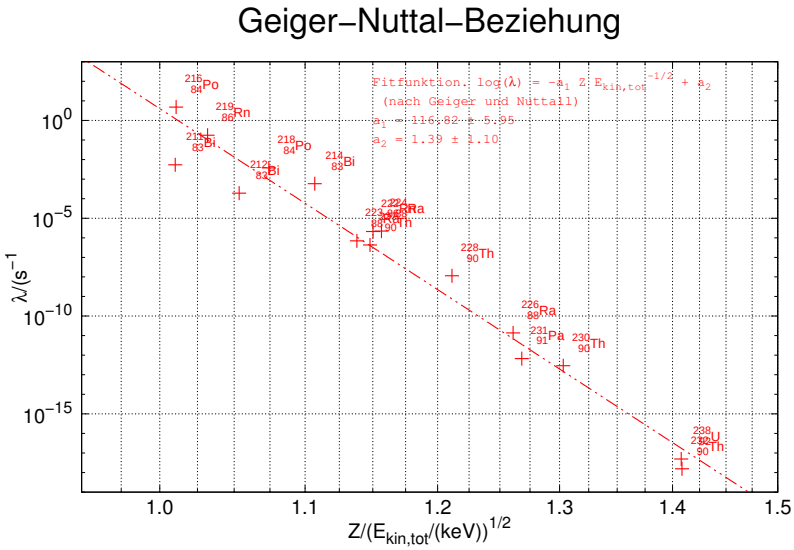


Abb. 8.4.: Geiger-Nuttall-Darstellung [GN11]. Daten aus National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/[Nat17]

Abbildung 8.4 (nach Hans Geiger und John Nuttall) zeigt anhand von experimentellen Daten, dass die empirische Theorie stimmt. Man muss also daraus schliessen, dass die Zerfallskonstante umso grösser ist, je grösser die beobachtete kinetische Energie ist.

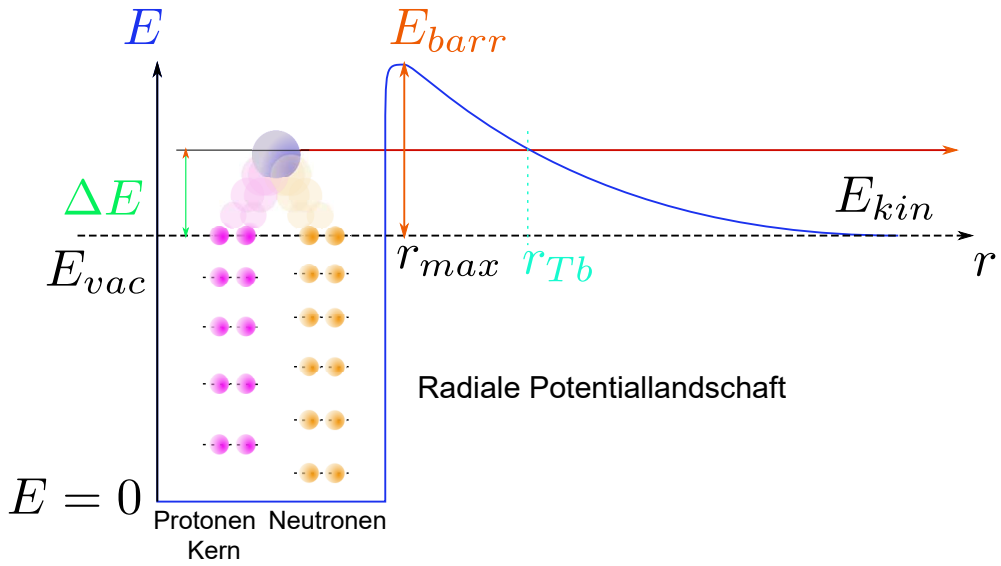


Abb. 8.5.: α-Zerfall, adaptiert aus Demtröder [Dem10, Abb. 3. 16 und 3.17]

Eine mögliche Erklärung ist der Tunneleffekt nach George Gamow[Gam28], wie er in Abbildung 8.5 skizziert ist.

Wir betrachten die Reaktion

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha \tag{8.1.15} $$

Coulomb-Potential (nach Charles Augustin de Coulomb):

$$E_{pot}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_{Kern}\, Z_\alpha\, e^2}{r} \tag{8.1.16}$$

Kernradius nach Gleichung (6.1.17) (auch Reichweite der Kernkräfte)

$$r_K = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

mit $r_0 \approx 1.3 \cdot 10^{-15}$ m $= 1.3$ fm.

α-Teilchen und Restkern berühren sich wenn

$$r = r_{max} = r_{K,A-4} + r_\alpha \tag{8.1.17}$$

ist. Dann ist die Coulombenergie maximal und die starken Wechselwirkungen sind bei grösserem r unwirksam. Es ist $Z_{TK} = Z - 2$ und $Z_\alpha = 2$ und $A_{TK} = A - 4$ sowie $A_\alpha = 4$.

$$E_{pot}(r_{max}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_{TK}\, Z_\alpha\, e^2}{r_0\left(A_{TK}^{1/3} + A_\alpha^{1/3}\right)} \tag{8.1.18}$$

Weiter kann mit klassischen Stössen gerechnet werden, also mit reduzierten Massen

$$E_{kin} = E_{kin,TK} + E_{kin,\alpha} = E_{kin}\cdot\frac{m_\alpha}{M_{TK}+m_\alpha} + E_{kin}\cdot\frac{M_{TK}}{M_{TK}+m_\alpha} \tag{8.1.19}$$

und deshalb

$$E_{kin,\alpha} = E_{kin}\cdot\frac{M_{TK}}{M_{TK}+m_\alpha} \tag{8.1.20}$$

E_{kin} kann auch mit Massen ausgedrückt werden

$$E_{kin} = M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)c^2 - \left(M\left({}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}\right) + M\left({}^{4}_{2}\alpha\right)\right) \tag{8.1.21}$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit für eine Barriere mit konstanter Energie (siehe auch [MG18, Seite 103 ff, Gl. (5.9.15)]) ist

$$\mathsf{T} \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\, e^{-\left(2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right)} \approx \mathsf{T}_0\, e^{-\left(2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right)} \tag{8.1.22}$$

Bei einer nicht konstanten Barriere wird der Exponent durch ein Integral über die Barrierenbreite ersetzt

$$\mathsf{T} \approx \mathsf{T}_0\, e^{-G} \tag{8.1.23}$$

G heisst Gamow-Faktor [Gam28](nach George Gamow) und ist für eine konstante Barriere

$G = 2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}$. Für eine Barriere mit variabler Potentialhöhe haben wir

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$G = 2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{(E_{pot}(r)-E)}dr$$
$$= 2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_{Kern}\,Z_\alpha\,e^2}{r}-E\right)} \quad (8.1.24)$$

Die Lösung dieses Integrals unter der Massgabe, dass r_1 der Radius des Kernes ist, r_2 der Ort und bei dem die Coulombenergie gleich E ist (also $r_2 > r_1$), ist

$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\cdot\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)}\right] \quad (8.1.25)$$

Wenn $Z_1 = 2$ und $Z_2 = Z - 1$ folgt

$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\cdot\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right)-\sqrt{\frac{r_1}{r_2}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)}\right] \propto \frac{Z-2}{\sqrt{E}} \quad (8.1.26)$$

Abbildung 8.6 ist eine experimentelle Bestätigung des Gamow-Modells (nach George Gamow) des α-Zerfalls, erstellt aus Daten von [Nat17].

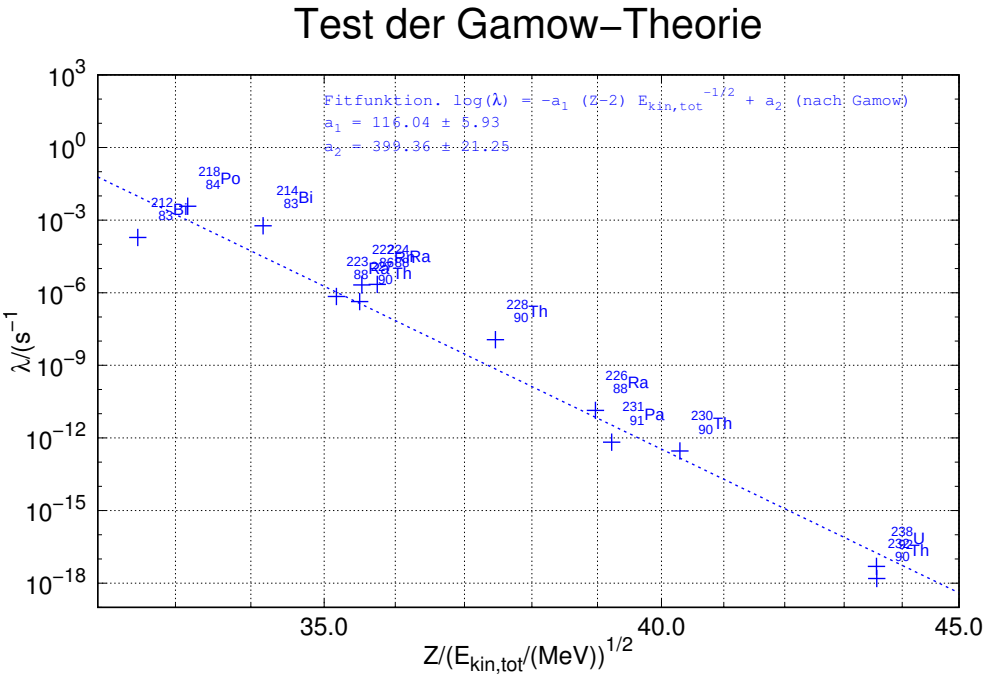


Abb. 8.6.: Gamow-Theorie (nach George Gamow) mit Daten aus National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/[Nat17]

Die Wahrscheinlichkeit einer Emission ergibt sich aus den folgenden Komponenten:

- Der Wahrscheinlichkeit, dass ein α-Teilchen gebildet wird: p_α,

- der Rate (Stösse/Sekunde) mit der die α-Teilchen die Wand berühren: R_α

- und der Tunnelwahrscheinlichkeit $T \propto \exp(-G)$

Alles zusammengenommen ergibt sich

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\ln(2)\, t_{1/2}} = p_\alpha R_\alpha T \tag{8.1.27}$$

Die Vorhersage ist:

$$\ln(t_{1/2}) \;\propto\; -\ln(\lambda) \;\propto\; -G \;\propto\; -E_\alpha^{-1/2} \tag{8.1.28}$$

Vergleiche dazu die Abbildung 8.4 mit der Geiger-Nuttall-Beziehung [GN11].

8.1.2. γ-Strahlung

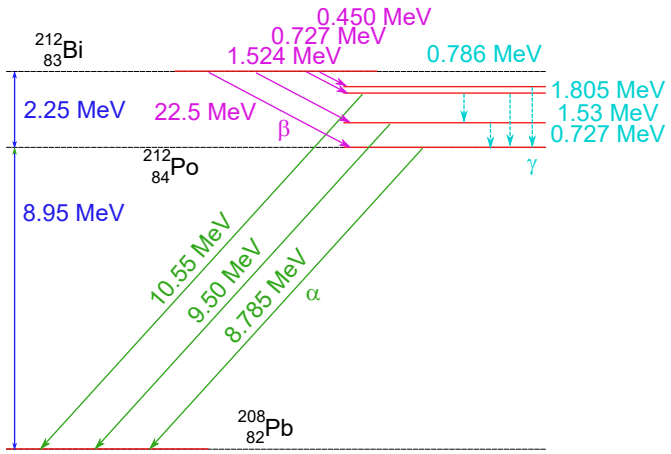


Abb. 8.7.: γ- Strahlung von $^{212}_{84}$Po entstanden durch β^--Zerfall aus $^{212}_{83}$Bi, adaptiert aus [Dem10, Abb. 3.29] mit Daten der IAEA [Int17]

Abbildung 8.7 zeigt die Energieniveaus beim Zerfall von $^{212}_{83}$Bi über den β-Zerfall in angeregte Kernniveaus von $^{212}_{84}$Po . Diese relaxieren unter Aussendung von γ-Quanten in den Grundzustand. Dieser wie auch angeregte Zustände zerfallen mit α-Teilchen in $^{208}_{82}$Pb .

Das Beispiel in Abbildung 8.7 zeigt, dass γ-Strahlen entstehen, wenn der Tochterkern in einem energetisch angeregten Zustand gebildet wird, und nicht im Grundzustand.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

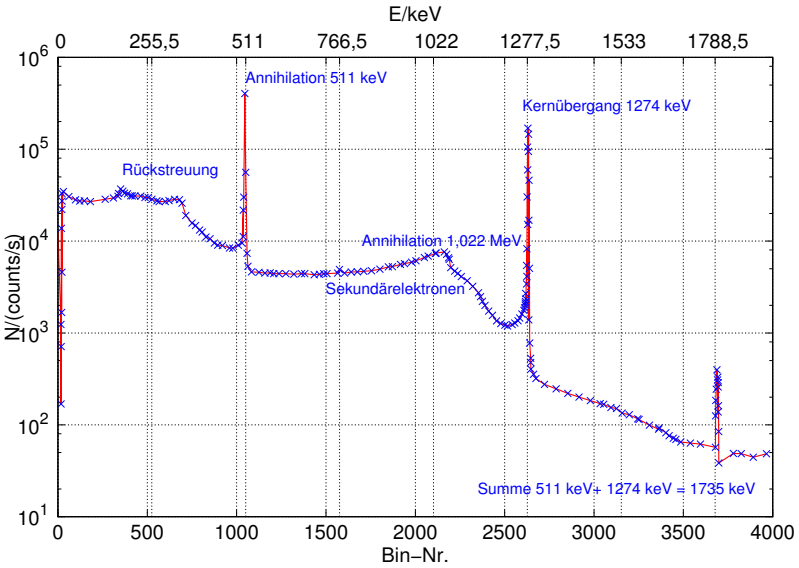


Abb. 8.8.: γ- Spektrum von $^{22}_{10}$Ne entstanden durch β^+-Zerfall aus $^{22}_{11}$Na, nach Demtröder Band 4, Abb. 3.30 [Dem10]

Abbildung 8.8 zeigt ein typisches γ-Spektrum. Dabei ist nicht nur die erwartete Linie bei 1274 keV zu sehen, sondern auch sogenannte „Vernichtungsstrahlen“ mit zwei γs in entgegengesetzte Richtungen. Diese treten auf, wenn ein e^- mit einem $\overline{e^-} = e^+$ reagiert.

$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma_1 \quad \text{mit} \quad h\nu_1 = m_e\, c^2 \tag{8.1.29}$$

Generell treten die Energien

$$h\nu_1,\ 2h\nu_1,\ h\nu_\gamma,\ h\nu_\gamma + h\nu_1,\ h\nu_\gamma + 2h\nu_1, \ldots$$

auf.

8.1.2.1. Multipol-Übergänge

Wir haben gesehen, dass jeder Kern einen Kernspin $\boldsymbol{I}$ trägt. Wenn ein γ-Quant emittiert wird, müssen die Regeln der Drehimpulserhaltung gelten, also die Auswahlregeln. Das heisst, $\Delta\boldsymbol{I}$ muss mit dem Drehimpuls des γ-Photons kompensiert werden.
Aus

$$\boldsymbol{I}_i \longrightarrow \boldsymbol{I}_f \tag{8.1.30}$$

(i bezeichnet den Anfangszustand und f den Endzustand) folgt, dass für die nach L klassifizierten Moden des elektromagnetischen Spektrums

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \tag{8.1.31}$$

gelten muss. Die Multipolentwicklung ergibt sich aus der lokalen Amplitude des elektromagnetischen Feldes analog zur Multipolentwicklung des elektrostatischen Potentials (siehe z.B. [Mar16], [Jac+89] oder [Wik17])

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_e(\tilde{\boldsymbol{r}})}{|\boldsymbol{r}-\tilde{\boldsymbol{r}}|}d\tilde{\boldsymbol{r}} \tag{8.1.32}$$

kann analog zu Taylorreihen (Entwicklung nach Potenzen) nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden (siehe auch das Wasserstoffatom in der Atomphysik [MG18])

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\frac{q_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \tag{8.1.33}$$

mit Entwicklungskoeffizienten, den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{\ell,m} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\rho_e\left(\tilde{r},\tilde{\theta},\tilde{\phi}\right)\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\tilde{r}^{\ell+1}Y_{\ell,m}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})\tilde{r}^2\sin(\tilde{\theta})d\tilde{\phi}\,d\tilde{\theta}\,d\tilde{r} \tag{8.1.34}$$

Analog kann das elektromagnetische Feld einer Welle in Multipole Entwickelt werden. Wir erinnern uns, dass die Amplitude einer sphärischen Kugelwelle durch

$$\boldsymbol{E}(r,\theta,\phi) = \boldsymbol{E}_0\frac{r_0}{r} \tag{8.1.35}$$

gegeben ist, äquivalent zum Fall, dass alle $q_{\ell,m} = 0$ sind ausser $q_{0,0} = Q$. Dann ist

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \tag{8.1.36}$$

Also kann auch die Amplitude einer elektromagnetischen Welle nach Multipolen entwickelt werden (K ist eine vom Einheitensystem abhängige Konstante)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = K\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\frac{\boldsymbol{E}_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \tag{8.1.37}$$

mit Entwicklungskoeffizienten, den sphärischen Multipolmomenten

$$\boldsymbol{E}_{\ell,m} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{E}\left(\tilde{r},\tilde{\theta},\tilde{\phi}\right)\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\tilde{r}^{\ell+1}Y_{\ell,m}(\tilde{\theta},\tilde{\phi})\tilde{r}^2\sin(\tilde{\theta})d\tilde{\phi}\,d\tilde{\theta}\,d\tilde{r} \tag{8.1.38}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

L	2^L	ΔL	**Name**	**Symbol**	**Paritätserhaltung**
0	1	0	Monopol	keines	$0 \to 0$ verboten
1	2	1	Dipol	E1 M1	nein (-1) ja (+1)
2	4	2	Quadrupol	E2 M2	ja (+1) nein (-1)
3	8	3	Oktupol	E3 M3	nein (-1) ja (+1)
4	16	4	Hexadekupol	E4 M4	nein

Tab. 8.1.: Tabelle der Multipolmoden des elektromagnetischen Feldes (nach Demtröder [Dem10, Tab. 3.3])

Tabelle 8.1 zeigt die Bezeichnungen und Entartungen für $L = \ell$. Nach Victor Weisskopf [Wei51] kann die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Multipolübergang zwischen E_i und E_k im Kern durch

$$A_{ik} \propto \left(\frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^{2L} \tag{8.1.39}$$

beschrieben werden. Dabei ist R die Ausdehnung der Ladungsverteilung und $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$. Die Lebensdauer eines Zustandes berechnet sich dann zu

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{\{k\}} A_{ik} \tag{8.1.40}$$

wobei $\{k\}$ die Menge aller aus dem Zustand $|i\rangle$ zugänglichen energetisch tieferen Zustände $|k\rangle$ ist.

Daraus ergibt sich

$$\tau_i = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{E_\gamma}\frac{1}{S(L)}\left(\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{R}\right)^{2L} \tag{8.1.41}$$

Hier ist

$$\alpha = \frac{1}{137.036} \tag{8.1.42}$$

die Feinstrukturkonstante und $E_\gamma = E_i - E_k$ die Energie des γ-Quants. Weiter ist

$$S(L) = \frac{3}{3+L}^{3}\frac{2(L+1)}{L\left[\prod_{n=1}^{L}(2n+1)\right]} \tag{8.1.43}$$

das statistische Gewicht.

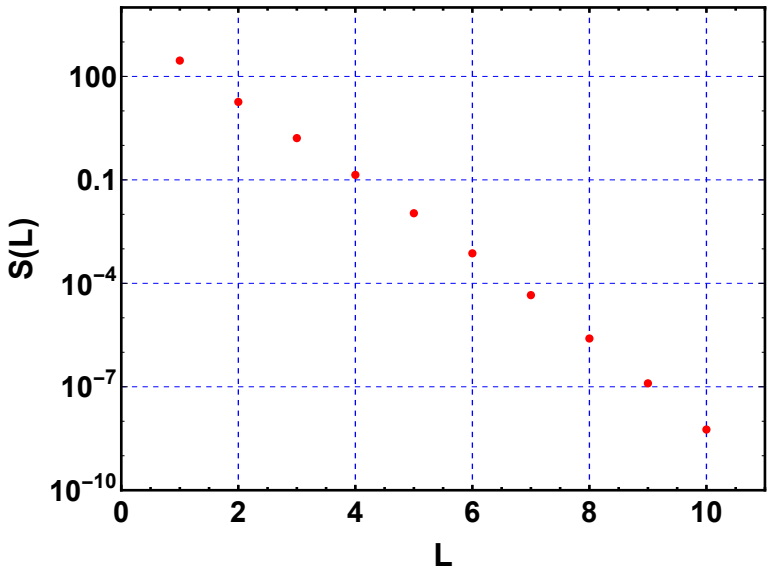


Abb. 8.9.: Statistische Gewichte $S(L)$ für Multipolübergänge

Aus Abbildung 8.9 ersieht man, dass nur die einfachsten Multipolübergänge beobachtbar sind. Für Kerne mit $I = 0$ existieren nur Monopole. Das heisst, ein γ-Zerfall ist nicht möglich, da dazu $I > 0$ benötigt wird, damit ein $\Delta I \neq 0$ existieren kann. Dies ist analog zu Antennen für elektromagnetische Strahlung. es braucht einen zeitlich wechselnden elektrischen Dipol, eine Ladung alleine und in Ruhe erzeugt keine Strahlung.

8.1.2.1.1. Multipol-Übergänge und reziproke Übergangswahrscheinlichkeiten (Lebensdauern)

E_γ	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$
0.1 MeV	$1 \cdot 10^{-13}$ s	$1 \cdot 10^{-6}$ s	$1 \cdot 10^{2}$ s	$1 \cdot 10^{9}$ s
1 MeV	$1 \cdot 10^{-15}$ s	$1 \cdot 10^{-10}$ s	$1 \cdot 10^{-5}$ s	1 s
10 MeV	$1 \cdot 10^{-18}$ s	$1 \cdot 10^{-15}$ s	$1 \cdot 10^{-12}$ s	$1 \cdot 10^{-9}$ s

Tab. 8.2.: Übergangswahrscheinlichkeiten von Multipolübergängen (nach Demtröder [Dem10, Tab. 3.4])

Analoges zeigt Tabelle 8.2. Weiter ist die Parität der Wellenfunktion wichtig. Darunter versteht man ob sich das Vorzeichen der Wellenfunktion bei der Operation $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ ändert ($\Pi = -1$) oder nicht ($\Pi = 1$).
Für magnetische Dipolübergänge berechnet sich die Zerfallszeiten zu

$$\frac{1}{\tau_m} \propto E_\gamma^{2L+1} A_{ik}^{(m)\,2(L-1)/3} \tag{8.1.44}$$

Verglichen mit elektrischen Multipolübergängen

$$\frac{1}{\tau_e} \propto E_\gamma^{2L+1} A_{ik}^{(m)\,2L/3} \tag{8.1.45}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

ergibt sich

$$\frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{A_{ik}^{(m)}}{A_{ik}^{(m)}} \approx 4.5 \cdot A^{2/3} \tag{8.1.46}$$

Magnetische Multipolübergänge mit niedriger Ordnung L sind deshalb weniger wahrscheinlich.

8.1.2.2. Innere Konversion

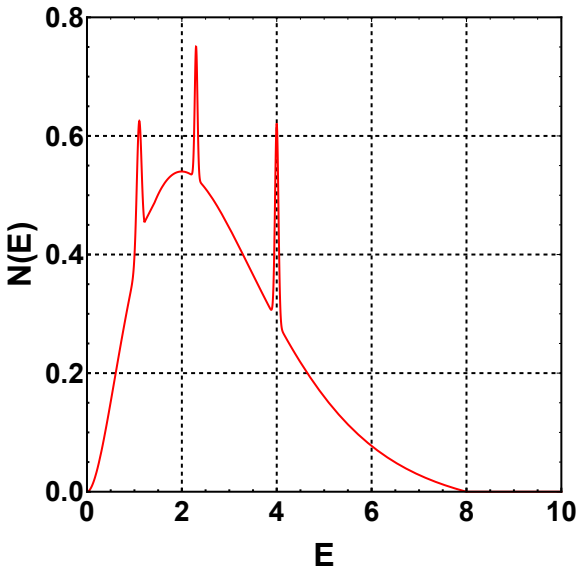


Abb. 8.10.: Skizze des β-Spektrums bei innerer Konversion

Unter innerer Konversion versteht man die Reaktion eines angeregten Kernes, bei dem ein ionisiertes Atom entsteht.

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}^{*} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{+} + e^{-} \tag{8.1.47}$$

Dieser Prozess heisst auch innerer Photoeffekt. Es entsteht kein Neutrino, da das Elektron aus der Elektronenhülle entfernt wurde und nicht neu gebildet wird.
Für die Energie ergibt sich

$$E_{kin}(e^{-}) = E\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{*}\right) - E\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{+}\right) - E_B(e^{-}) \tag{8.1.48}$$

${}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{*}$ entsteht häufig als Resultat eines β-Zerfalls. Die Signatur dieses Prozesses ist ein kontinuierliches Spektrum des β-Zerfalls überlagert mit einem Linienspektrum (siehe Abbildung 8.10).

8.1.2.3. Innere Paarbildung

Innere Paarbildung liegt zum Beispiel bei der Reaktion

$$^{16}_{8}\mathrm{O}^{*} \longrightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + e^{-} + e^{+} + E_{kin} \tag{8.1.49}$$

vor.

8.1.3. Isomere

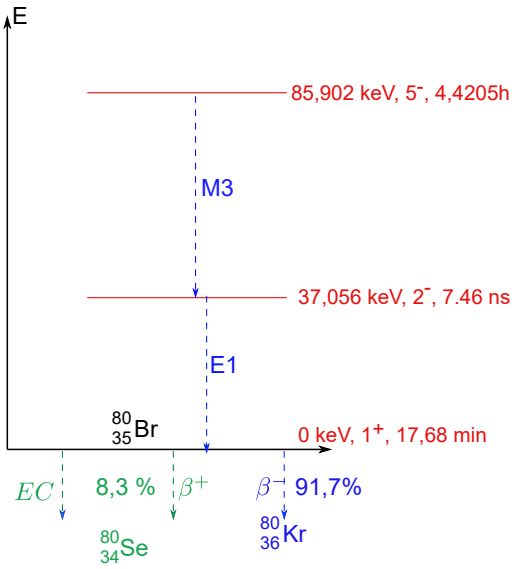


Abb. 8.11.: Isomerzustand $^{80}_{35}\mathrm{Br}^*$ des instabilen $^{80}_{35}$Br-Grundzustandes, Daten aus [Int17]. EC heisst Electron Capture, Elektroneneinfang. Neben den Niveaus sind die Energien bezogen auf den Grundzustand des $^{80}_{35}$Br angegeben, dann ist I^p, also den Kernspin und die Parität sowie die Lebensdauer τ.

Abbildung 8.11 zeigt mit Daten aus [Int17] die Niveaus und die Lebensdauern und Multipolmoden des Zerfalls des $^{80}_{35}\mathrm{Br}^*$. Abbildung 8.12 zeigt das Niveau-Schema generiert aus der IAEA-Website.

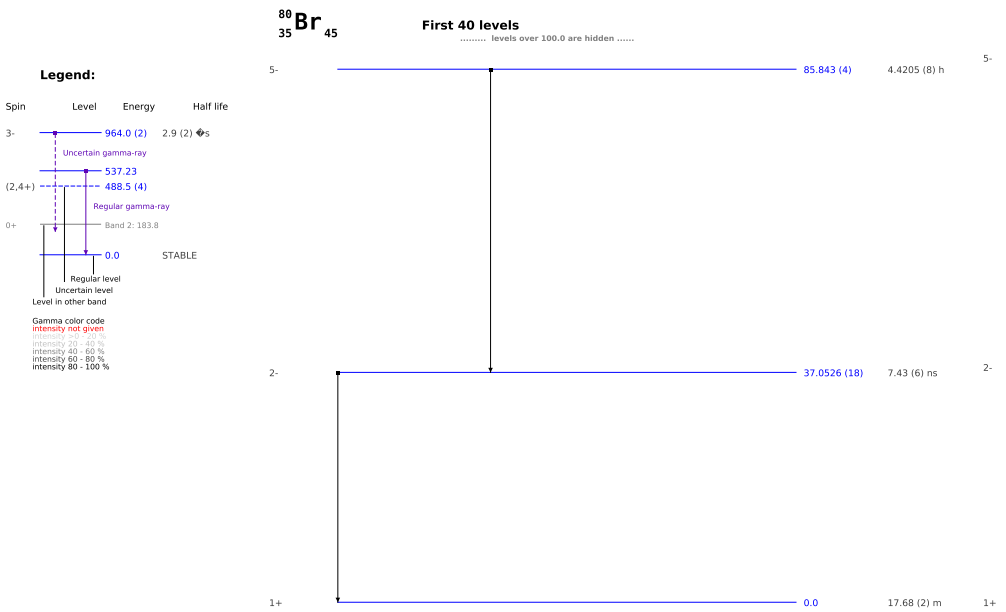


Abb. 8.12.: Niveau-Schema erzeugt mit der IAEA-Website und ihren Tools [Int17].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

8.1.4. β-Strahlung

Der β-Zerfall ist ein Beispiel für die Wirkung der schwachen Wechselwirkung und für die Symmetrieverletzung der Parität. Beim β-Zerfall ändert sich die Zahl der Nukleonen A nicht. Beispielreaktionen sind

$$^{225}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\beta^-} {}^{225}_{89}\mathrm{Ac} + \beta^- \tag{8.1.50a}$$

$$^{15}_{8}\mathrm{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{15}_{7}\mathrm{N} + \beta^+ \tag{8.1.50b}$$

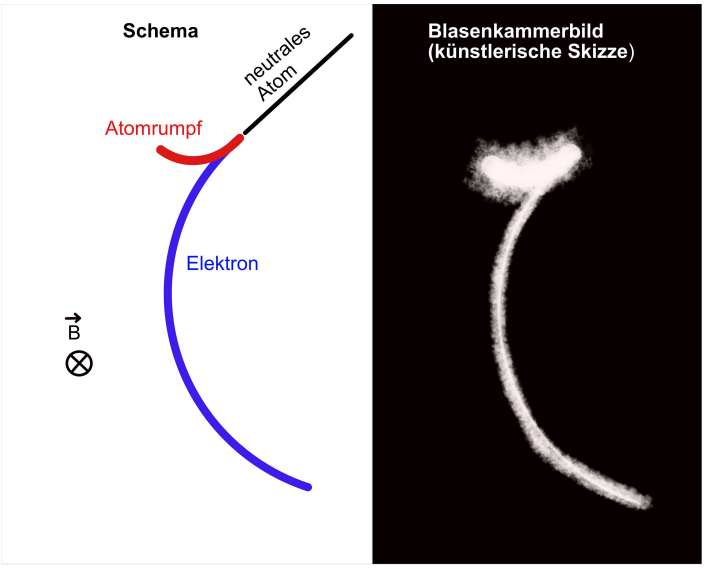


Abb. 8.13.: β-Zerfall eines ruhenden $^{6}_{2}$He-Kerns, inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.20 [Dem10]

Abbildung 8.13 zeigt eine Messung eines β-Zerfalls in einer Blasen- oder Nebelkammer. Magnetfelder bewirken über die Lorentzkraft eine Ablenkung geladener Teilchen. Im nichtrelativistischen Falle ist

$$|\boldsymbol{F}_z| = m\frac{v^2}{r} = |\boldsymbol{F}_L| = q\,|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}| \overset{\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}}{=} q\,v\,B \tag{8.1.51}$$

und daraus

$$r = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{\sqrt{2m\,E_{kin}}}{q\,B} \tag{8.1.52}$$

oder

$$|\boldsymbol{p}| = q\,r\;|\boldsymbol{B}| \tag{8.1.53}$$

8.1.4.1. Doppelzerfälle

Doppelzerfälle sind Reaktionen von $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ nach $^{A-4}_{Z-1}\mathrm{Y}$, die über zwei Wege ablaufen können.

$$\begin{array}{ccc} {}^{212}_{83}\mathrm{Bi} & \xrightarrow{\beta^-} & {}^{212}_{84}\mathrm{Po} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ {}^{208}_{81}\mathrm{Tl} & \xrightarrow{\beta^-} & {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} \end{array} \tag{8.1.54}$$

In diesem Reaktionsschema sind die Energien der α-Zerfälle bekannt (2-Körper-Zerfälle), die Energien der beiden β^--Zerfälle aber nicht (kontinuierliches Spektrum). Experimentell gilt aber:

$$E_{max}(\beta_1^-) + E_{kin}(\alpha_1) = E_{max}(\beta_2^-) + E_{kin}(\alpha_2) = \text{const} = 11.2 \text{ MeV} \tag{8.1.55}$$

unabhängig vom Weg. Das heisst, dass es beim β-Zerfall ein zweites Teilchen geben muss, dessen kinetische Energie verschwinden kann und dessen Ruhemasse sehr klein oder null sein muss.

Durch den β-Zerfall wird aus einem gu-Kern ein ug-Kern. Geradzahlige Nukleonen haben einen ganzzahligen Kernspin, oftmals auch 0. Ungeradzahlige Nukleonen führen zu einem halbzahligen Kernspin, mindestens aber $\hbar/2$.

Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} \text{ug-Kern} & \xrightarrow{\beta} & \text{gu-Kern} + \beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spin } \frac{\hbar}{2} & & \text{Spin } \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} \end{array} \tag{8.1.56}$$

Das heisst, wenn wir an Erhaltungssätze glauben, dann ist der β-Zerfall verboten, ausser es existiert ein weiteres elektrisch neutrales sehr leichtes Teilchen mit Spin $\hbar/2$.

Aus Neutral für ohne Ladung und „-ino“ für klein ergibt sich dann das Neutrino, ν.

Wie es Elektron und Positron, also β^- und $\beta^+ = \overline{\beta^-}$, also Teilchen und Antiteilchen, gibt es Neutrino ν und Antineutrino $\overline{\nu}$.

Neutrinos und Elektronen gehören zur gleichen Klasse der Leptonen. Die Zahl der Leptonen ist erhalten, also muss

- mit einem Elektron, einem β^- ein Antineutrino $\overline{\nu}$ und

- mit einem Positron, einem β^+ ein Neutrino ν entstehen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

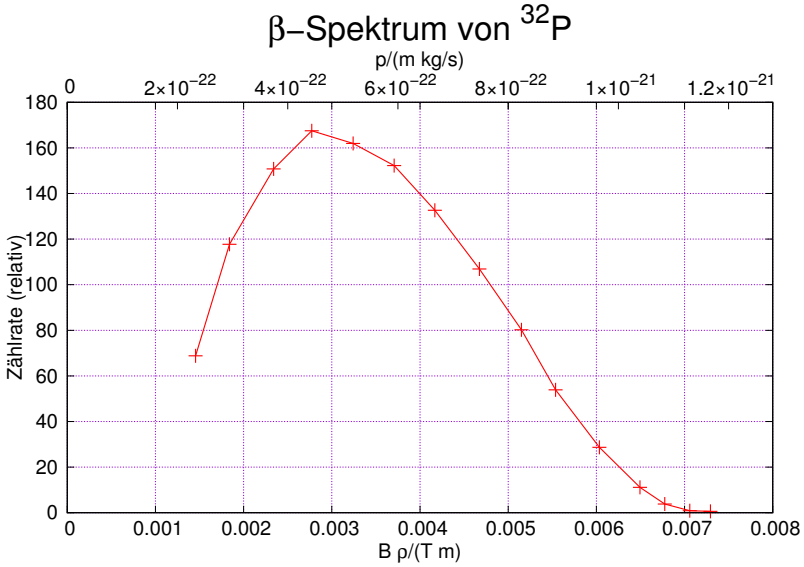


Abb. 8.14.: β-Spektrum von $^{32}_{15}$P nach Lyman [Lym37]

Wie Abbildung 8.14 zeigt, beobachtet man beim β-Zerfall immer ein kontinuierliches Spektrum und nie ein Linienspektrum. Der β-Zerfall kann deshalb kein Zweikörperzerfall sein, mindestens drei Objekte, die Energie und Impuls tragen können, müssen involviert sein.

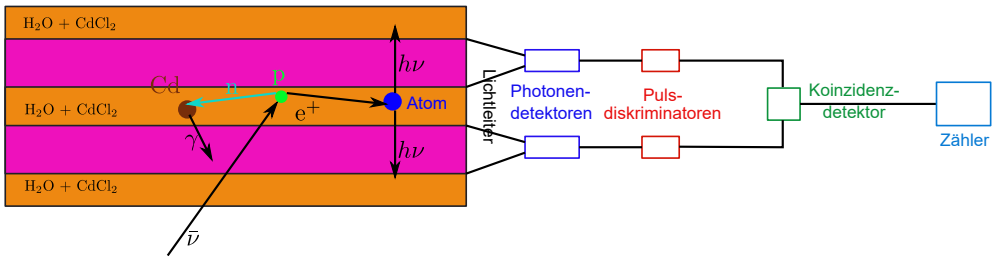


Abb. 8.15.: Nachweis des Antineutrinos, inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.21 [Dem10]

Abbildung 8.15 zeigt eine Möglichkeit zum Nachweis von Neutrinos. Die Kombination aus $CdCl_2$ gelöst in H_2O wird verwendet, um die Detektion von Neutrinos zu vereinfachen.

Das Neutrino reagiert (sehr selten, aber doch ab und zu) mit einem Proton aus dem Wasser.

$$\overline{\nu} + p \longrightarrow n + e^+ \tag{8.1.57}$$

Dieses Positron reagiert weiter mit einem Elektron, es ANNIHILIERT sich:

$$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma \qquad h\nu_\gamma = 0.511 \text{ MeV} \tag{8.1.58}$$

Es gibt noch einen zweiten Kanal, den über $CdCl_2$. Das Neutron reagiert nach der folgenden Reaktionsgleichung mit $^{113}_{48}$Cd (Halbwertszeit $8 \cdot 10^{15}$ a [Int17]):

$$^{113}_{48}\mathrm{Cd} + n \longrightarrow {}^{114}_{48}\mathrm{Cd}^{*} \longrightarrow {}^{114}_{48}\mathrm{Cd} + \gamma \tag{8.1.59}$$

Dabei bedeutet $^{114}_{48}\mathrm{Cd}^{*}$ dass der Kern $^{114}_{48}\mathrm{Cd}$ in einem angeregten Kernzustand ist. Die Detektion läuft nun so:

1. Detektiere ein γ bei 511 keV.
2. Detektiere ein zeitverzögertes γ aus der Reaktion mit $^{113}_{48}\mathrm{Cd}$.

Nur diese Kombination garantiert, dass ein Neutrino die Reaktion ausgelöst hat und nicht ein anderer Prozess.
In Abbildung 8.15 sind rechts die einzelphotonenzählenden Detektoren mit einer nachgelagerten Schaltung zur Pulsformung und -diskrimination und einer Koinzidenzschaltung gezeigt.

8.1.4.2. β-Zerfall und Positronenemission

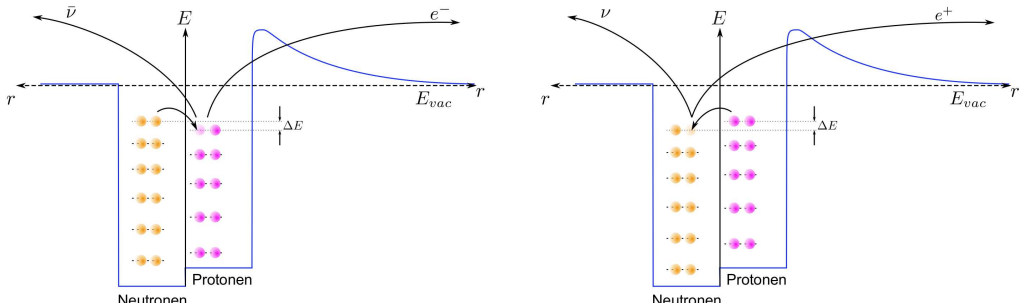


Abb. 8.16.: Umwandlung von Protonen in Neutronen (links) und umgekehrt (rechts), inspiriert von Demtröder Band 4, Abb. 3.22 und Abb. 3.23 [Dem10]

8.1.4.2.1. Umwandlung von n in p

Die Ausführungen beziehen sich auf Abbildung 8.16, linke Seite.

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e + E_{kin} \tag{8.1.60a}$$

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- + \overline{\nu}_e \tag{8.1.60b}$$

$$\Delta E = M\left(^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) - M\left(^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}\right)c^2 \geq \left(m_{e^-} + m_{\overline{\nu}_e}\right)c^2 + E_{kin} \tag{8.1.60c}$$

Freie Neutronen, also Neutronen, die nicht in einem Kern sind, zerfallen mit einer Zeitkonstante von $\tau_n = \frac{t_{1/2}}{\ln(2)} = 879.4(4)$ s ($t_{1/2} = 1268.7(8)$ s ([Zyl+20] und [Par20a]) mit der Reaktion

$$n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{8.1.61}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Damit ist auch klar, dass die Masse des Protons mindestens $c^2 \cdot 511$ keV leichter ist als die Masse des Neutrons.

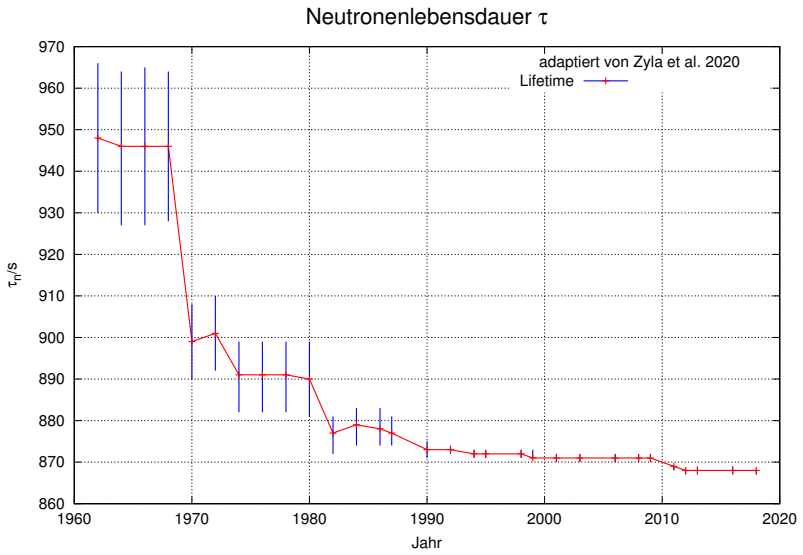


Abb. 8.17.: Zeitliche Entwicklung des Messwertes der Neutronenlebensdauer nach P. A. Zyla u. a., „Review of Particle Physics“ [Zyl+20].

Abbildung 8.17 zeigt die zeitliche Entwicklung der Schätzwerte und der Genauigkeit der Lebensdauer der Neutronen.

8.1.4.2.2. Umwandlung von p in n Die Ausführungen beziehen sich auf Abbildung 8.16, rechte Seite.

$$p \to n + e^+ + \nu_e + E_{kin} \tag{8.1.62a}$$

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + e^+ + \nu_e \tag{8.1.62b}$$

$$\Delta E = M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) - M\left({}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}\right) c^2 \geq \left(m_{e^+} + m_{\nu_e}\right) c^2 + E_{kin} \tag{8.1.62c}$$

Bei diesen Reaktionen sind die Baryonenzahl B und die Leptonenzahl L erhalten.

8.1.4.2.3. Baryonenzahl und Leptonenzahl bei β-Zerfällen Sowohl Neutronen wie Protonen sind Baryonen. Jedes Teilchen zählt als $B = 1$. Elektron und Neutrino sind Leptonen, auch hier zählt jedes Teilchen $L = 1$. Positron und Antineutrino sind Antileptonen, ihre Leptonenzahl ist $L = -1$.
In Gleichung (8.1.60a) sind dies auf der linken Seite ein Neutron und keine Leptonen, also ist

$$B = 1 \text{ und } L = 0 \tag{8.1.63}$$

Auf der rechten Seite haben wir ein Proton, also $B = 1$, ein Elektron ($L = 1$) und ein Antineutrino ($L = -1$). In der Summe also auch

$$B = 1 \text{ und } L = 0 \tag{8.1.64}$$

In Gleichung (8.1.62a) ist die Situation analog, nur dass hier das Neutrino das Lepton und das Positron das Antilepton ist.

8.1.4.3. Fermi-Theorie des β-Zerfalls

Enrico Fermi publizierte 1933 eine Theorie des β-Zerfalls basierend auf quantenmechanischen Zuständen im Inneren der Kerne und für die emittierten Elektronen [Fer33; Fer34]. Die folgende Argumentation folgt Demtröder [Dem10].
Enrico Fermi geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen bei der Energie E im Intervall dE zu finden durch

$$W(E)dE = g_e\, g_{\overline{\nu}}\, W_{if} dE \tag{8.1.65}$$

ist. dabei sind g_e und $g_{\overline{\nu}}$ die statistischen Gewichte des Elektrons und des Antineutrinos. Mit statistischen Gewichten ist dabei die Anzahl der bei der Energie $p_i^2/(2m)$ zugänglichen Zustände gemeint. W_{if} ist die Wahrscheinlichkeit (das Matrixelement) für den Übergang des Ausgangszustandes (i: initial state) in den Endzustand (f: final state), also für den Übergang ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}$.
Die Anzahl zugänglicher Zustände für grosse Impulse $p \gg 0$ ist proportional zum Volumen einer Kugelschale mit der Dicke dp und dem Radius p, also

$$g = 4\pi p^2 dp \tag{8.1.66}$$

wobei natürlich relativistisch $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ und $dE = c^2\, p/E$ ist. Den unbekannten Proportionalitätsfaktor können wir am Ende über eine Normierung bestimmen. Damit können die Energie- in Impulsintervalle umgerechnet werden.
Wir wissen, dass wir drei Zerfallsprodukte haben. Da die Gesamtenergie gegeben ist, kann die Energie von zwei Objekten (in Grenzen) frei gewählt werden. Hier nehmen wir diese Freiheit für p_e und $p_{\overline{\nu}}$ in Anspruch.

$$g_e = 4\pi p_e^2 dp_e \tag{8.1.67a}$$
$$g_{\overline{\nu}} = 4\pi p_{\overline{\nu}}^2 dp_{\overline{\nu}} \tag{8.1.67b}$$

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ erhalten wir für kleine Massen $m_{\overline{\nu}} \ll p_{\overline{\nu}}/c$

$$E_{\overline{\nu}} = c\, p_{\overline{\nu}} \tag{8.1.68}$$

Wenn $E_0 = E_{\overline{\nu}} + E_e$ die für das Elektron und das Antineutrino insgesamt zur Verfügung stehende Energie ist, gilt

$$p_{\overline{\nu}}^2 = \frac{1}{c^2}\left(E_0 - E_e\right)^2 \tag{8.1.69}$$

Da p_e und E in einer funktionellen Abhängigkeit stehen, kann mit einem Korrekturfaktor a_1 die Wahrscheinlichkeit auch so geschrieben werden:

$$W(p_e)dp_e = a_1\, W_{if} p_e^2 \frac{1}{c^2}\left(E_0 - E_e\right)^2 dp_e = a_1\, W_{if} p_e^2 p_{\overline{\nu}}^2 dp_e \tag{8.1.70}$$

Aus der relativistischen Energie-Impulsbeziehung $E = \sqrt{m_e^2c^4 + c^2p_e^2}$ erhalten wir

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$dE = \frac{c^2 p_e}{\sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2}} dp_e = \frac{c^2 p_e}{E} dp_e \Longrightarrow E\, dE = c^2 p_e\, dp_e \tag{8.1.71}$$

und andererseits

$$p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} \tag{8.1.72}$$

Wir teilen in Gleichung (8.1.70) $p_e^2 dp_e$ in einen Faktor p_e und einen Faktor $p_e\, dp_e$ auf. Weiter schieben wir alle konstanten Faktoren inklusive a_1 in den Faktor a_2 und erhalten

$$W(E)dE = a_2\, W_{if}\, E\sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}\, (E_0 - E_e)^2\, dE \tag{8.1.73}$$

Wir ersetzen nun $E = E_e + m_0 c^2$ und erhalten für die Zählrate $N(E_e)$ im Energieintervall dE_e (und der Konstanten a_3)

$$N(E_e)dE_e = a_3\, W_{if} \left(E_e + m_e c^2\right) \sqrt{E_e^2 + 2 m_e c^2 E_e}\, (E_0 - E_e)^2\, dE_e \tag{8.1.74}$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (8.1.70) die Vorhersage

$$\sqrt{\frac{N(p_e)}{p_e^2}} \propto E_0 - E_e \tag{8.1.75}$$

Diese Überlegung steckt hinter der Darstellung in Abbildung 8.18 nach Enrico Fermi und Franz Kurie.

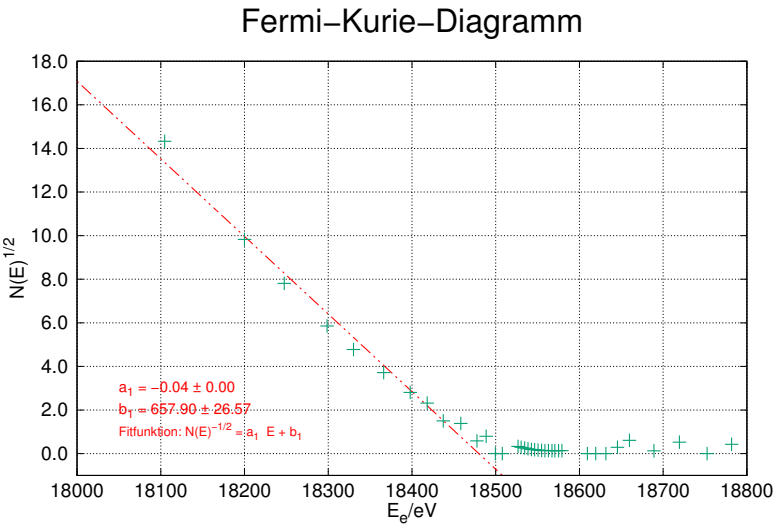


Abb. 8.18.: Fermi-Kurie-Diagramm des β-Zerfalls von ${}^3_1\mathrm{H}$, nach [Wei+93]

Eine genaue Analyse der maximal beobachteten Elektronenenergie kann zu Aussagen über die Neutrinomasse führen. Abbildung 8.19 zeigt dazu einen Ausschnitt aus Abbildung 8.18.

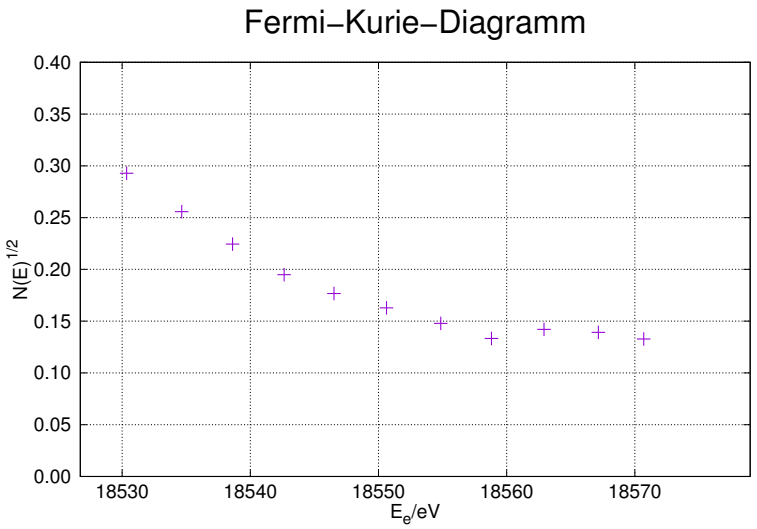


Abb. 8.19.: Fermi-Kurie-Diagramm des β-Zerfalls von ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$, nach [Wei+93]

Die Abweichung zu hohen Energien kann unter anderem von der nicht verschwindenden Dunkelzählrate der Detektoren herrühren.

8.1.4.4. K-Einfang

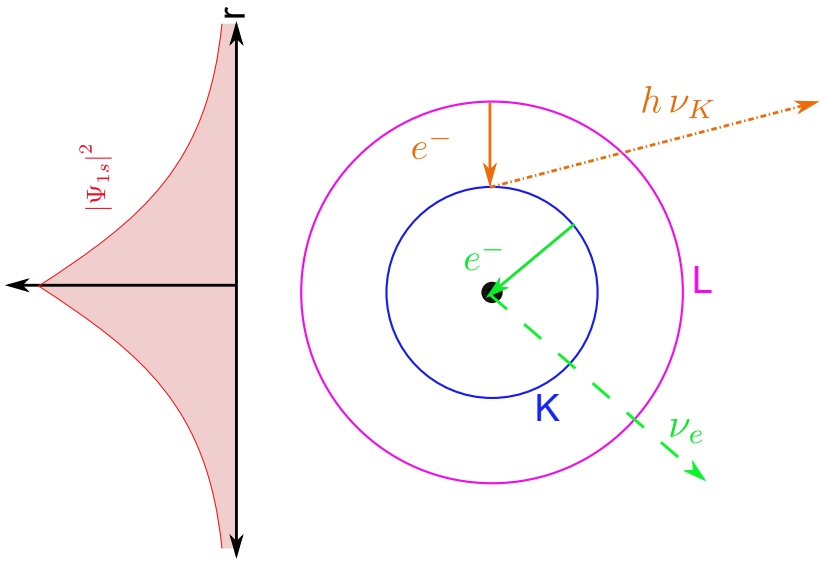


Abb. 8.20.: K-Einfang, nach Demtröder [Dem10, Band 4, Abb. 3.27]

Beim K-Einfang nach Abbildung 8.20 reagiert ein Elektron im Kern mit einem Proton zu einem Neutron. Dies ist möglich, da der innerste Zustand, der Grundzustand der Elektronen im Coulomb-Potential, am Ort des Kerns eine nicht verschwindende Amplitude hat.

Im Kern gibt es die folgende Reaktion

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$e^- + p = n + \nu_e \tag{8.1.76a}$$

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} + e^- \longrightarrow {}_{Z-1}{}^{A}\mathrm{Y} + \nu_e \tag{8.1.76b}$$

In einem zweiten Schritt wird das fehlende Elektron in der K-Schale durch eines z.B. aus der L-Schale ersetzt, unter Aussendung eines γ-Quants mit einer wohldefinierten Energie.
Es gilt dann

$$\Delta E = \Delta M\, c^2 > E_{B,e}(1s) \geq h\nu_k \tag{8.1.77}$$

Weiter ist auch

$$\Delta E = E_{kin}\left({}_{A-1}{}^{A}\mathrm{Y}\right) + E_{kin}\left(\nu_e\right) \tag{8.1.78}$$

Dabei ist, wie bei jedem 2-Körper-Stoss die kinetische Energie des leichten Teilchens (das ν_e) viel grösser als die kinetische Energie des schwereren Teilchens, also

$$E_{kin}\left(\nu_e\right) \gg E_{kin}\left({}_{A-1}{}^{A}\mathrm{Y}\right) \tag{8.1.79}$$

8.1.4.5. Energiebilanzen und Zerfallstypen

β^--Zerfall

$$\Delta M = M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) - M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+\right) > m_e \tag{8.1.80}$$

Zerfall in das positive Ion ${}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+$

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+ + e^- + \overline{\nu}_e \tag{8.1.81}$$

$$\left[M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) - M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+\right)\right]\cdot c^2 = m_e c^2 + E_{kin}\left(e\right) + E_{kin}\left(\overline{\nu}_e\right) \tag{8.1.82}$$

β^+-Zerfall

$$\Delta M = M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+\right) - M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right) > m_e \tag{8.1.83}$$

Zerfall des positiven Ions ${}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+$

$${}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+ \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + e^+ + \nu_e \tag{8.1.84}$$

$$\left[M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+\right) - M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)\right]\cdot c^2 = E_{kin}\left(e^+\right) + E_{kin}\left(\nu_e\right) + m_e c^2 \tag{8.1.85}$$

K-Einfang

$$\Delta M < 0 \quad \text{und} \quad |\Delta M| < m_e \tag{8.1.86}$$

$${}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+ + e^- \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \nu_e \tag{8.1.87}$$

$$\left[M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}^+\right) + m_e - M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)\right]\cdot c^2 = \left[M\left({}_{Z+1}{}^{A}\mathrm{Y}\right) - M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)\right]\cdot c^2 = E_{kin}\left(\nu_e\right) + h\cdot\nu_K \tag{8.1.88}$$

8.1.5. Zerfallsketten

Kerne zerfallen mit den möglichen Moden (α-Teilchen, β-Teilchen, oder was sonst möglich ist) bis am Ende der Kette ein stabiler Kern erscheint. Die Kerne jenseits von Blei ($Z > 82$) zerfallen entlang von vier verschiedenen Zerfallsketten.

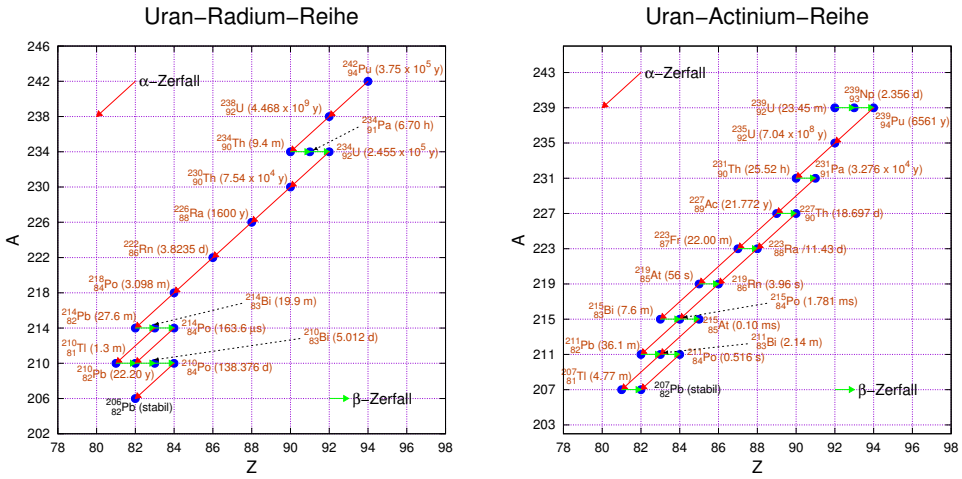


Abb. 8.21.: Zerfallsreihen von Uran nach Radium (links) und Actinium (rechts). Daten aus [Dem10, Abb. 3.12] und National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/[Nat17]

Die linke Seite der Abbildung 8.21 zeigt die URAN-RADIUM-REIHE, die über $^{238}_{92}\mathrm{U}$ läuft und bei $^{205}_{82}\mathrm{Pb}$ endet. Ein α-Zerfall lässt $N - Z \stackrel{\alpha}{=} \text{const}$. Da die Steigung nicht ganz stimmt, korrigieren β-Zerfälle die Lage. Wenn zwischen zwei Kernen zwei Wege möglich sind, also eine Schleife vorhanden ist, erlaubt dies, die Theorien zweier Zerfallsarten gleichzeitig zu testen. Z.B. zerfällt $^{214}_{83}\mathrm{Bi}$ sowohl über $^{214}_{84}\mathrm{Po}$ nach $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ wie auch über $^{210}_{82}\mathrm{Pb}$. Im ersten Fall folgte auf einen β-Zerfall ein α-Zerfall, im zweiten Fall folgt auf den α-Zerfall der β-Zerfall. Die rechte Seite der Abbildung 8.21 zeigt die URAN-ACTINIUM-REIHE, die über das aus der Kerntechnik bekannte Isotop $^{235}_{92}\mathrm{U}$ nach $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ läuft. Hier gibt es 5 elementare Schleifen und 3 zusammengesetzte Schleifen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

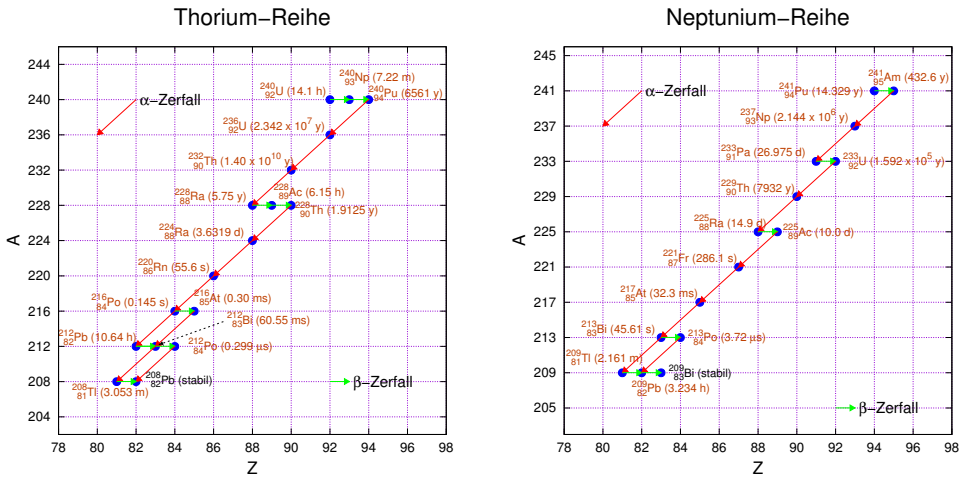


Abb. 8.22.: Zerfallsreihen von Uran nach Thorium (links) und Neptunium (rechts). Daten aus [Dem10, Abb. 3.12] und National Nuclear Data Center, information extracted from the NuDat 2 database, http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/[Nat17]

Die linke Seite von Abbildung 8.22 zeigt die URAN-THORIUM-REIHE, die über $^{236}_{92}\mathrm{U}$ nach $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ läuft. In dieser Zerfallsreihe gibt es zwei Schlaufen. Die rechte Seite von Abbildung 8.22 zeigt die NEPTUNIUM-REIHE. Sie läuft über $^{237}_{93}\mathrm{Np}$ nach $^{209}_{82}\mathrm{Pb}$. Im Gegensatz zu den anderen drei Reihen enthält diese kein technisch wichtiges Uranisotop. Sie zeigt auch nur eine Schlaufe.
Die Zielkerne der vier Reihen sind $^{205}_{82}\mathrm{Pb}$, $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$, $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ und $^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

9. Mensch und Strahlung

Bei der Wechselwirkung von Strahlung mit Materie können einerseits quantitative physikalische Grössen (wie Energieeintrag pro Sekunde) oder mit der biologischen Wirkung gewichtete Grössen verwendet werden.
Eine erste physikalische Grösse ist die TEILCHENFLUSSDICHTE:

$$\Phi = \frac{d^2N}{dA \cdot dt} \qquad [\Phi] = 1 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \tag{9.0.1}$$

Sie gibt an, wie viele Teilchen pro Zeiteinheit und Einheitsfläche auftreten. Der Teilchenfluss ist im Fernfeld im Abstand r immer proportional zu r^{-2} (Erhaltung des Teilchenflusses).
Mit der AKTIVITÄT wird die Gesamtzahl der Zerfälle in einer Probe angegeben.

$$[A] = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfälle s}^{-1} = 1 \text{ s}^{-1} \tag{9.0.2}$$

Diese Grösse ist unabhängig vom Volumen oder der Masse. Die Einheit ist benannt nach Henri Becquerel.
Ionisierende Strahlung, die absorbiert wird, deponiert eine gewisse Energie pro Masse. Dies wird durch die ENERGIEDOSIS beschrieben:

$$[D] = 1 \text{ Gy} = 1 \text{ J kg}^{-1} \tag{9.0.3}$$

Die Einheit ist benannt nach Louis Gray. Die Wirkung ionisierender Strahlung auf Zellen und Erbgut ist abhängig von der Strahlungsart. Die DOSISLEISTUNG

$$H = D \cdot Q \qquad [H] = 1 \text{ Sv} \tag{9.0.4}$$

Diese Einheit ist benannt nach Rolf Sievert. Die Dosisleistung ist mit der Energiedosis über den Gewichtsfaktor Q verknüpft (Siehe Tabelle 9.1).

Q	Strahlungsart
1	Röntgen-, Gammastrahlen und Elektronen
2.3	thermische Neutronen
10	schnelle Neutronen, Protonen und einfach geladene Ionen
20	α-Teilchen und schwere Ionen

Tab. 9.1.: Gewichtsfaktoren für ionisierende Strahlung

Nach K. Stierstadt [Sti10a, Abb. 5.10] setzt sich die NATÜRLICHE STRAHLENBELASTUNG in Deutschland aus den folgenden Komponenten zusammen:

0.9 mSv a^{-1} Radon in Gebäuden

0.4 mSv a^{-1} terrestrische Strahlung (siehe auch Tabelle 9.2)

0.3 mSv a^{-1} Nuklide im Körper (ausser Radon)

0.3 mSv a^{-1} kosmische Strahlung (siehe auch Abbildung 9.1).

0.2 mSv a^{-1} Radon im Freien (siehe auch Tabelle 9.2)

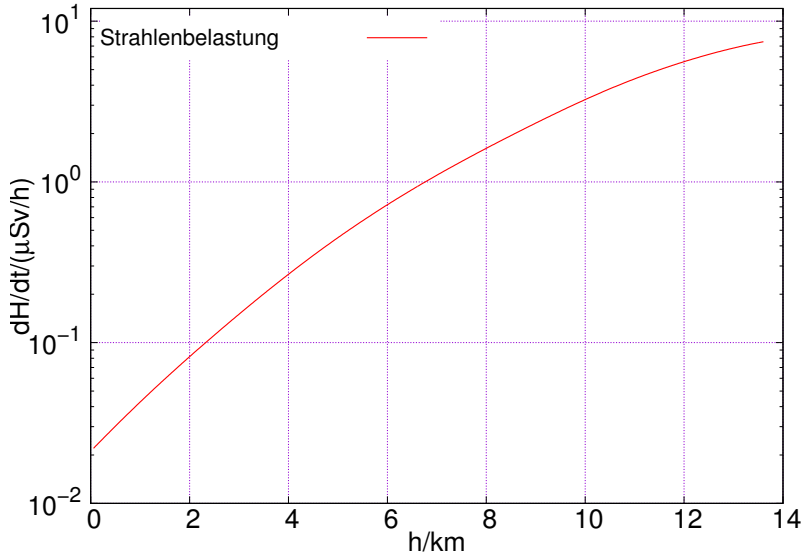


Abb. 9.1.: Höhenstrahlung auf der Erde nach Demtröder [Dem10, Abb8.2]

Abbildung 9.1 zeigt, dass die Strahlenbelastung mit der Höhe zunimmt. Dies gilt insbesondere auch für FLUGREISEN.

Aussenbereiche		Belastung in Häusern	
Gestein	$A/(\text{Bq kg}^{-1})$	Quelle	A
Granit	1000	Radon	≈ 50 Bq $\text{m}^{-3}_{\text{Luft}}$
Tonschiefer	700	Leitungswasser	$1-30$ Bq dm^{-3}
Sandstein	350	Kalium im Körper	4500 Bq
Basalt	250		
Gartenerde	400		

Tab. 9.2.: Radioaktivität in der Umwelt

Eine weitere wichtige Komponente der Strahlenbelastung ist die MEDIZINISCHE STRAHLENBELASTUNG. Dazu gehören

2.0 mSv a^{-1} Mittelwert über die Bevölkerung bei Röntgenuntersuchungen

0.1 mSv a^{-1} Nuklearmedizinische Therapien

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Zur TECHNISCHEN STRAHLENBELASTUNG nach K. Stierstadt [Sti10a, Kap. 5.2.2] zählen Leuchtziffern, uranhaltige Glasuren von Porzellan und Kacheln, Rauchmelder, Schweisselektroden, Glühstrümpfe für Gaslaternen, Füllstandsmesser, Herzschrittmacher oder Fernsehröhren, unter anderem. Dies führt zu einer Belastung von 0.01 mSv a^{-1}.
Zur KERNTECHNISCHEN STRAHLENBELASTUNG gehören die Emissionen aus Kernkraftwerken, Beschleunigern, dem Uranbergbau. Im Mittel über die gesamte Bevölkerung war die Belastung nach K. Stierstadt [Sti10a, Kap. 5.2.3] 0.03 mSv a^{-1}.

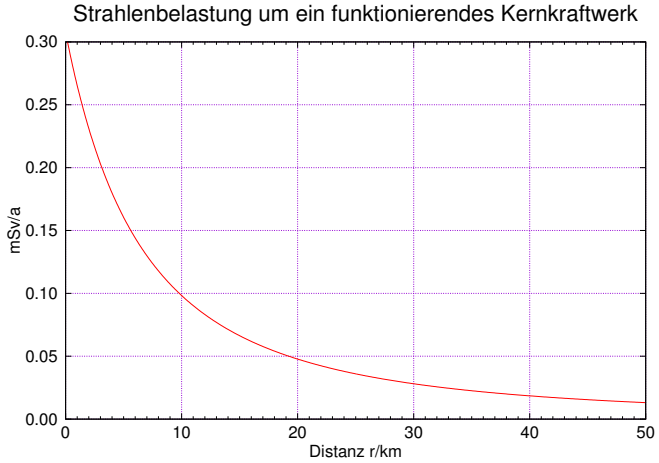


Abb. 9.2.: Dosisleistung in der Nähe eines Kernkraftwerkes nach K. Stierstadt [Sti10a, Abb. 5.12]

Abbildung 9.2 zeigt die zusätzliche Strahlenbelastung um ein Kernkraftwerk im Normalbetrieb.

Quelle	Strahlungsart	$(dH/dt)_{eff}/(\text{mSv a}^{-1})$
Äussere Exposition	γ, p, n	
- Höhenstrahlung		0.3
-Erdboden, Gebäude		0.4
Innere Exposition	${}^{3}_{1}\text{H}$, ${}^{14}_{6}\text{C}$	0.01
Inhalation,	${}^{22}_{11}\text{Na}$, ${}^{40}_{19}\text{K}$, β, γ	0.17
Nahrungsaufnahme	Uran α, β, γ	$0.1 - 1.4$
	Rd, Th α, β, γ	0.4
Medizin	γ, β	$0.5 - 1.6$
Kohle- und KK-Werke	γ, β	< 0.003
Beruf		< 0.3
Total		$2.7 - 4.3$

Tab. 9.3.: Arten der Strahlenbelastung.

Zusammengefasst ergibt sich nach W. Demtröder [Dem10] die folgende Belastung:

- Natürliche Belastung: 2.4 mSv a^{-1}

- Medizin: 1.9 mSv a^{-1}

- Gesamt: 4.3 mSv a^{-1}

Tabelle 9.3 schlüsselt nochmals die Strahlung auf.

9.1. Wechselwirkung von Strahlung und Gewebe

9.1.1. Dosimeter

9.1.1.1. Füllhalter-Dosimeter

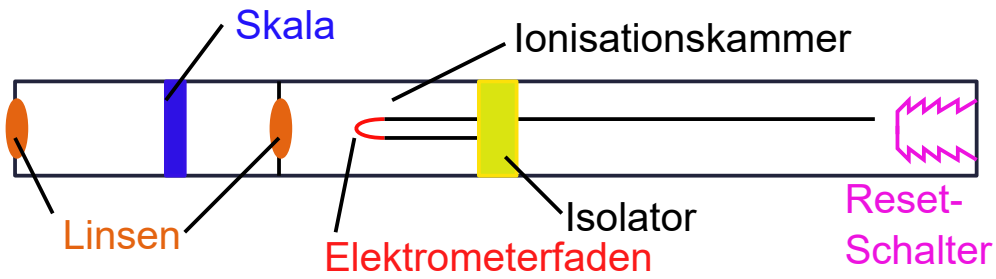


Abb. 9.3.: Aubau eines Dosimeters nach H. Kiefer und W. Koelzer [KK92] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.1].

Füllhalter-Dosimeter wie in Abbildung 9.3 gezeigt werden zur Überwachung der Strahlenexposition verwendet. Das Dosimeter funktioniert wie ein Elektrometer aus der Vorlesung Elektrizität und Magnetismus. In der Ionisationskammer wird das Gas durch ionisierende Strahlung in einen Atomrumpf und ein Elektron aufgespalten. Die Ladung einer dieser Teilchensorten lädt den Elektrometerfaden auf. Dieser lenkt sich gegen seine Elastizität aus. Die Auslenkung ist ein Mass für die auf dem Elektrometerfaden gespeicherte Ladung. Diese ist proportional zur Dosisleistung H.

Ausgelesen wird das Füllhalter-Dosimeter über das Mikroskop bestehend aus den zwei Linsen.

Füllhalter-Dosimeter sind heute von elektronischen Dosimetern (siehe Abschnitt ??).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

9.1.1.2. Elektronisches Dosimeter

Abb. 9.4.: Ein elektronisches Dosimeter, so wie es im Fortgeschrittenenpraktikum Physik an der Uni Ulm verwendet wir.

Elektronische Dosimeter wie in Abbildung 9.4 gezeigt sind die heute üblichen Dosimeter. Einer der Ersten der die Empfindlichkeit von MOS-Transistoren auf ionisierende Strahlung untersuchte war D. C. Sullivan [Sul65]. Aufbauend auf diesen und ähnlichen Erkenntnissen haben W. J. Poch und A. G. Holmes-Siedle [PH70] die Langzeitwirkung von ionisierender Strahlung auf MOS-Transistoren untersucht. In der Publikation von A. Holmes-Siedle [Hol74] wird der Gebrauch von «Floating Gate»-MOS-Transistoren als Dosimeter erwähnt. J. Kassabov; N. Nedev und N. Smirnov [KNS91] gibt eine Darstellung der Änderung der Leitfähigkeit des Kanals eines «Floating Gate»-MOS-Transistors in Abhängigkeit von der Dosisleistung. Eine neue Untersuchung von S. D. Ilić u. a. [Ili+21] befasst sich mit dem Gebrauch eines kommerziellen MOS-Transistors als Dosimeter.

Im Wesentlichen erzeugt ionisierende Strahlung Ladungen auf dem hochisolierten Gate des MOS-Transistors. Zum Auslesen wird dann einfach der Kanalwiderstand gemessen. Mit den notwendigen Kalibrierungen und Korrekturen ergibt sich dann Dosisleistung

9.1.2. Jod

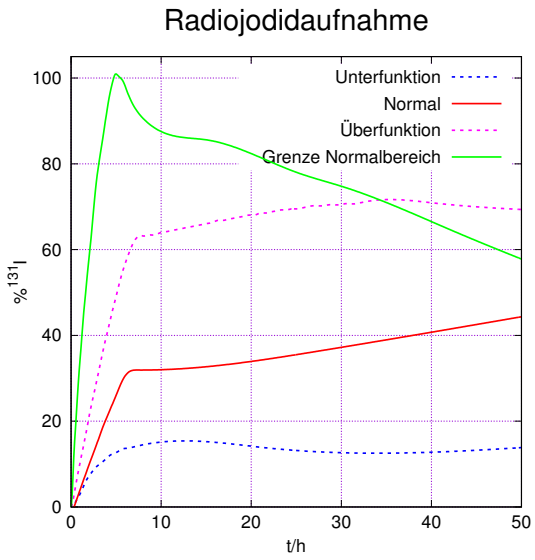


Abb. 9.5.: Radiojodaufnahme der Schilddrüse nach W. Demtröder [Dem10, Band 4, Abb. 8.7].

Die Schilddrüse ist im menschlichen Körper das einzige Organ, das Jod in messbaren Mengen aufnimmt. Die Funktion der Schilddrüse kann sehr leicht über die Gabe von radioaktivem Jod überprüft werden (siehe Abbildung 9.5). Durch Messung der Zerfallsprodukte ausserhalb des Körpers kann die normale Funktion, aber auch die Über- oder die Unterfunktion bestimmt werden.

Ist die Schilddrüse bösartig verändert kann der Tumor über eine Gabe einer genau bemessenen Dosis von radioaktivem Jod sehr gut und mit wenig Nebenwirkungen durch ionisierende Strahlung zerstört werden.

Bei einem Reaktorunfall tritt oftmals eine grössere Menge von radioaktivem Jod aus. Dieses wird über die nächsten Tage von Menschen im Umkreis des havarierten Reaktors in der Schilddrüse aufgenommen. Um dies zu verhindern gibt man den Betroffenen eine hohe Dosis nicht radioaktiven Jods um die Schilddrüse zu sättigen. So wird verhindert, dass das radioaktive Jod eingebaut wird und den Organismus über längere Zeit schädigt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

9.1.3. PET: Positronen-Emissions-Tomographie

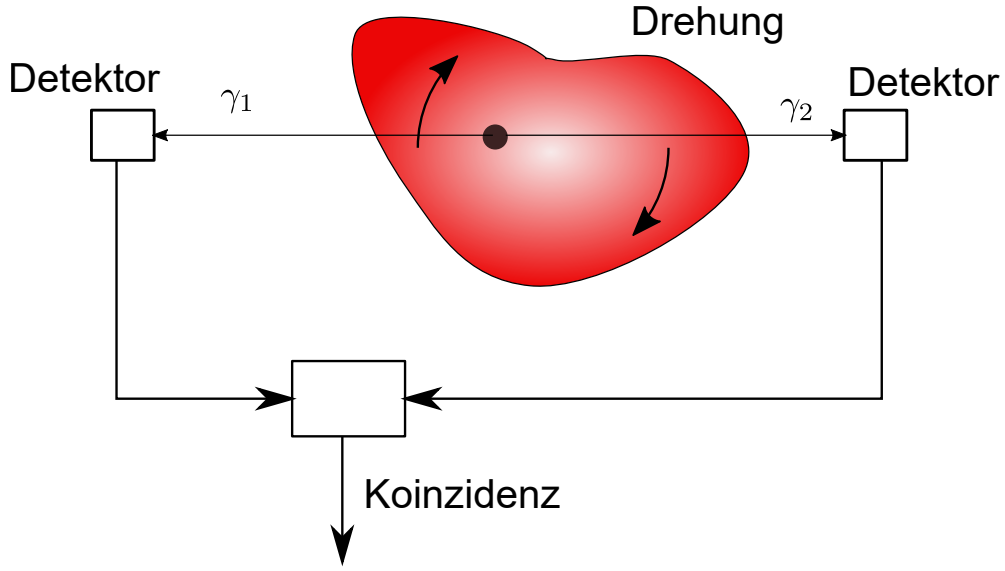


Abb. 9.6.: PET: Positronen-Emissions-Tomographie nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.9].

Um zum Beispiel einen Hirntumor genau zu lokalisieren kann einer erkrankten Person ein Mittel gegeben werden, dessen Atom einen β^+-Zerfall machen [Wik21j]. Wenn dieses Mittel spezifisch an die zu untersuchende Stelle bindet, dann werden die entstehenden Positronen sich innerhalb von wenigen Nanometern mit Elektronen aus Atomhüllen annihilieren. Da der Gesamtimpuls der beiden Teilchen nahe bei Null ist ergeben sich zwei antiparallel emittierte γ-Quanten jeweils mit einer Energie von 511 keV. Durch eine Koinzidenzschaltung kann die Richtung der Emission festgestellt werden. Werden die Detektoren (oder alternativ der Mensch) gedreht, gibt es eine neue Verbindungslinie. Aus vielen Verbindungslinien kann die dreidimensionale Position des Ortes, an dem das Mittel gebunden hat, bestimmt werden.

9.2. Regulierungen

Die Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlen können Sie bei der Universität Ulm erhalten (*Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlung (Strahlenschutzverordnung - StrlSchV)*, Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz [Bun18].

9.3. Anwendungen

9.3.1. Suche nach Spurenelementen

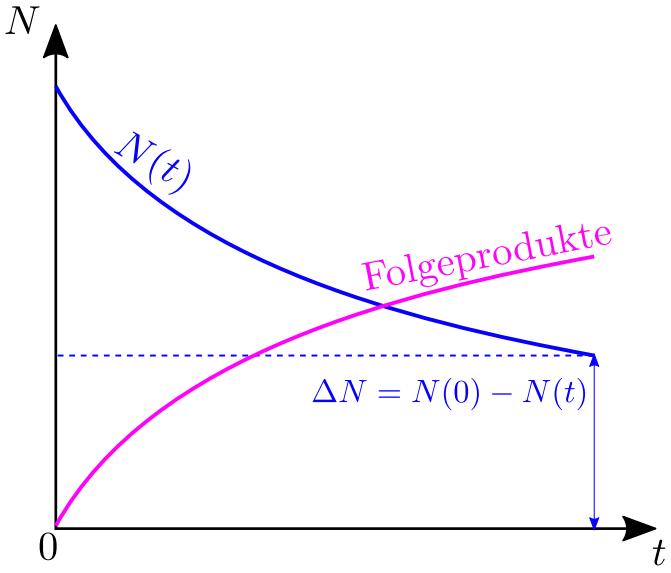


Abb. 9.7.: Suche nach wenigen Atomen nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.10].

Die Suche nach Spurenelementen bedeutet die Suche nach wenigen Atomen. Weil jedes zerfallende Atom α-, β- oder γ-Teilchen mit genügend grosser Energie entsendet, können sehr wenige bis einzelne Atome nachgewiesen werden. Durch eine Aktivierung (z.B. Bestrahlung mit Neutronen) sind wirklich wenige Isotope zu bestimmen. Die Isotopenzusammensetzung kann ein Hinweis sein, z.B. wo Zinn abgebaut wurde.
Es gibt heute jedoch Alternativen, die keine radioaktive Aktivierung benötigen. E. Bulska und A. Ruszczyńska [BR17] weisen auf die folgenen Techniken hin.

- Atomspektroskopie (engl. Flame Atomic Absorption Spectroscopy (FAAS))
- Induktiv gekoppelte Plasma-Absorptionsspektroskopie (engl. Inductively coupled plasma atomic emission spectrometry (ICPAES) oder Inductively coupled plasma optical emission spectrometry (ICPOES))
- Induktiv gekoppelte Plasma-Massenspektroskopie (engl. engl. Inductively coupled plasma mass spectrometry (ICPMS))
- Laserablation kombiniert mit induktiv gekoppelte Plasma-Massenspektroskopie (engl. Laser ablation inductively coupled plasma mass spectrometry (LA-ICPMS))
- elektrochemische Techniken
- Totalreflexion-Röntgenfluoreszenz (engl. Total Reflection X-ray Fluorescence (TXRF))
- Aktivierungsanalyse (radioaktiv aktivierte Elemente)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

9.3.2. Altersbestimmung

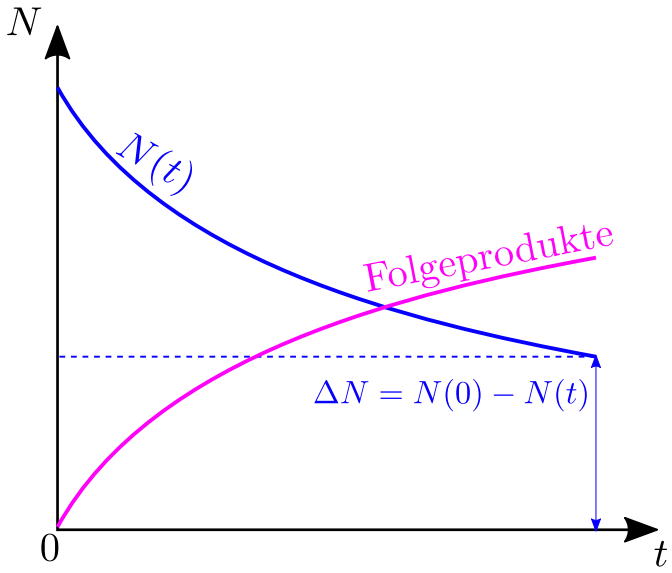


Abb. 9.8.: Altersbestimmung nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.11].

Das exponentielle Zerfallsgesetz für radioaktive Atome (siehe Gleichungen (7.2.3) oder (7.2.4)) erlaubt über lange Zeiten eine ausreichend genaue Altersbestimmung. Abbildung 9.8 zeigt den Zusammenhang zwischen der Zahl $N(t)$ der instabilen Atome und den Folgeprodukten.

9.3.2.1. $^{14}_{6}$C -Methode

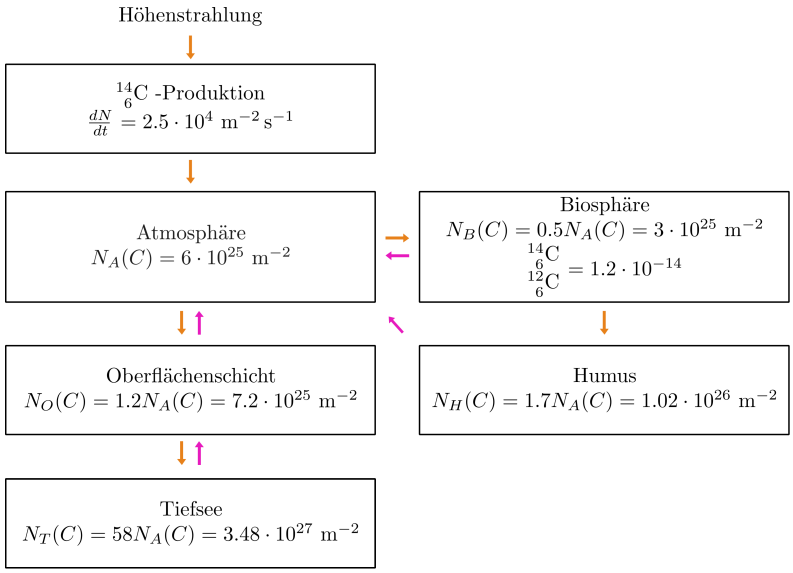


Abb. 9.9.: $^{14}_{6}$C-Methode nach H. Willkomm [Wil76] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.12]

Eine häufig angewandte Technik ist die $^{14}_{6}$C -Methode. Abbildung 9.9 zeigt die

zu berücksichtigenden Prozesse (nach H. Willkomm [Wil76]). Die Quelle des $^{14}_{6}\mathrm{C}$ -Methode ist die HÖHENSTRAHLUNG. Diese erzeugt in der Atmosphäre eine sich nur langsam ändernde Konzentration von $^{14}_{6}\mathrm{C}$. Die Atmosphäre ist im Austausch mit der Biosphäre (PHOTOSYNTHESE) und mit der Oberflächenschicht des Meeres. Sterbende Lebewesen tragen das $^{14}_{6}\mathrm{C}$ in den Humus ein. Dieser wiederum gibt das Gas an die Atmosphäre zurück. Schliesslich tauscht sich die Meeresoberfläche mit der Tiefsee aus. Abbildung 9.9 zeigt die $^{14}_{6}\mathrm{C}$ -Konzentrationen in den verschiedenen Reservoirs. In jedem Reservoir nimmt die Menge des $^{14}_{6}\mathrm{C}$ nach den Zerfallsgesetzen ab (siehe Gleichungen (7.2.3) oder (7.2.4)).
Lebewesen (Bäume, Pflanzen, die Fauna) bauen $^{14}_{6}\mathrm{C}$ während ihrer Lebenszeit ein, und zwar mit dem Anteil, den $^{14}_{6}\mathrm{C}$ in der Atmosphäre, im Humus oder im Meer hat. Mit dem Ableben wird der Nachschub neuen $^{14}_{6}\mathrm{C}$ gestoppt. Je länger ein Lebewesen verschieden ist, desto geringer ist der Anteil von $^{14}_{6}\mathrm{C}$. Mit Hilfe der Zerfallsgesetze kann das Alter bestimmt werden, sofern die Ausgangskonzentration von $^{14}_{6}\mathrm{C}$ bekannt ist.
Die Ausgangskonzentration von $^{14}_{6}\mathrm{C}$ kann mit Hilfe der DENDROCHRONOLOGIE kalibriert werden. Einerseits wird in jedem Jahrring die Menge $^{14}_{6}\mathrm{C}$ des entsprechenden Jahres eingebaut. In späteren Jahren kommt kein $^{14}_{6}\mathrm{C}$ mehr dazu. Andererseeits kann über das Abzählen der Jahrringe das Alter auf ein Jahr genau bestimmt werden.

9.3.2.2. Alter von Gesteinen

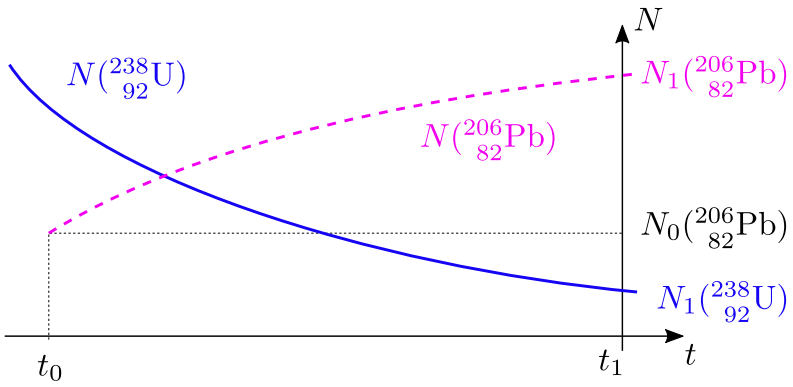


Abb. 9.10.: Altersbestimmung von Gesteinen nach W. Demtröder [Dem10, Abb 8.13]

Die Altersbestimmung für Steine funktioniert analog wie die $^{14}_{6}\mathrm{C}$ -Methode. Die Zeitskalen sind sehr viel länger. Es wird angenommen, dass die Menge an $^{238}_{92}\mathrm{U}$ und an $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ bei der Bildung des Sonnensystems bekannt sind. Dann kann aus dem Verhältnis $N\left(^{238}_{92}\mathrm{U}\right)/N\left(^{206}_{82}\mathrm{Pb}\right)$ das Alter von Gesteinen bestimmt werden. Der ursprüngliche Gehalt von $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ wird über den Anteil von $^{204}_{82}\mathrm{Pb}$ bestimmt. $^{204}_{82}\mathrm{Pb}$ ist kein Endprodukt einer Zerfallsreihe. Dessen Menge muss deshalb konstant sein. Durch Modellbildung kann das Verhältnis $N\left(^{206}_{82}\mathrm{Pb}\right)/N\left(^{204}_{82}\mathrm{Pb}\right)$ beim Entstehen der schweren Elemente abgeschätzt werden. Weitere Methoden können bei Wikipedia [Wik21e] oder J. Grotzinger und T. Jordan [GJ17, pp. 201-212] nachgelesen werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

10. Kernreaktionen

In diesem Kapitel sollen KERNREAKTIONEN besprochen werden. Diese Vorgänge werden auch als REAKTIVE STREUUNG beschrieben.

10.1. Grundlagen

Als erstes Beispiel betrachten wir die reaktive Hochenergiestreuung eines Protons an einem Proton. Der sogenannte Hochenergieprozess

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+ \tag{10.1.1}$$

erzeugt aus zwei kollidierenden Protonen ein Proton, ein Neutron und ein positives PION. Die Massenenergie der Produkte ist höher als die Massenenergie der Edukte, das heisst für die kinetische Energie der kollidierenden Protonen gilt

$$\begin{aligned} 2m_pc^2 + E_{kin,tot}(p,p) = m_pc^2 + m_nc^2 + m_{\pi^+}c^2 + E_{kin,tot}(p,n,\pi^+) \\ \Longrightarrow E_{kin,tot}(p,p) > (m_n + m_{\pi^+} - m_p)c^2 \end{aligned} \tag{10.1.2}$$

Der Überschuss ist dann die gesamte kinetische Energie der Produkte. Die Notation ist nicht einheitlich. Manchmal wird auch anstelle von

$$a + X \longrightarrow Y + b \tag{10.1.3a}$$

auch

$$X(a,b)\,Y \tag{10.1.3b}$$

geschrieben.
Wir interessieren uns hier vor allem für die Spaltung grösserer Kerne. Wir verwenden dazu die Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (6.5.14) oder (6.5.16)). Gleichung (7.0.2) sagt voraus, dass schwere Kerne zu einem Rotationsellipsoid deformiert sind. Im Abschnitt 6.5.5 wurde argumentiert, dass deformierte Kerne oszillieren können. Es ist deshalb zu erwarten, dass schwere deformierte Kerne durch spontane Oszillationen instabil werden können und spalten. Diese SPONTANE KERNSPALTUNG wurde beobachtet. Der folgende Ablauf wird angenommen

1. Der sphärische Kern oszilliert und wird elliptisch
2. Die Oberflächenenergie nimmt zu und die Coulombenergie nimmt ab
3. Wenn in diesem Prozess die negative Bindungsenergie negativ wird (die Bindung zu einer Abstossung wird) kann der Kern zerfallen.

Ein Kern bleibt stabil, wenn

$$\left|\Delta E_0^C\right| < \left|\Delta E_0^S\right| \tag{10.1.4}$$

ist. Mit den Gleichungen (6.5.91) und (6.5.92) können wir einen SPALTBARKEITSPARAMETER definieren

$$X_S = \frac{\Delta E^C}{\Delta E^S} = \frac{\frac{2\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)}{\frac{4\epsilon^2}{45} + O(\epsilon^3)} \approx \frac{1}{2}\frac{E_0^C}{E_0^S} \tag{10.1.5}$$

X_S ist ein Mass dafür ob sich ein Kern spontan spaltet. Wir kennen die Grenze noch nicht. Nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker (Gleichungen (6.5.14) oder (6.5.16)) können wir auch

$$X_S = \frac{a_C Z^2 A^{(-\frac{1}{3})}}{2a_S A^{2/3}} = \frac{a_C}{2a_S}\frac{Z^2}{A} \tag{10.1.6}$$

schreiben. Näherungsweise wird für $\frac{Z^2}{A} \geq 51$ der Spaltbarkeitsparameter $X_S \geq 1$. Die Grenze erhält man, wenn man in Gleichung (10.1.6) $X_S = 1$ setzt und nach Z auflöst. Wir beachten dabei dass $Z > 0$ sein muss.

$$Z_G = \frac{a_S}{a_C}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{a_C}{a_S}N}\right) \tag{10.1.7}$$

Mit den Gleichungen (6.5.14) und (6.5.16) erhalten wir

$$Z_G(N) = 25.6723 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 0.0779049N}\right) \qquad \text{W. Demtröder [Dem10]} \tag{10.1.8a}$$

$$Z_G(N) = 23.3333 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 0.0857143N}\right) \qquad \text{A. Das und T. Ferbel [DF09]} \tag{10.1.8b}$$

Abbildung 10.1 zeigt die Grenze spontaner Spaltung nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker. Wir erinnern uns daran, dass die Bethe-Weizsäcker-Gleichung (Gleichungen (6.5.14) oder (6.5.16)) eine halbwegs passable empirische Approximation ist, mehr nicht. Wir lernen aus der Abbildung 10.1 dass eine hohe Zahl von Protonen im Vergleich zur Zahl der Neutronen die spontane Spaltung fördert. Und weiter lernen wir, dass solche Ereignisse wahrscheinlich auf der Protonenachse oberhalb der stabilen Isotope zu finden sein werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

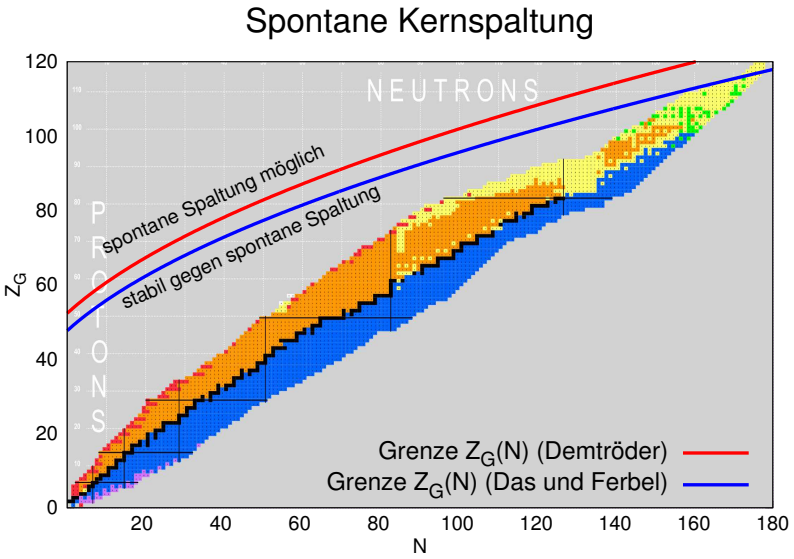


Abb. 10.1.: Bereich möglicher spontaner Kernspaltung (Erstellt mit Daten aus Nucleus-Win[Wap12]). Gezeigt werden die beiden Approximationen der Bethe-Weizsäcker-Gleichung nach W. Demtröder ([Dem10], rot) und nach A. Das und T. Ferbel ([DF09], blau).

Tabelle 10.1 zeigt die gemessene Spaltbarkeitsparameter.

Nuklid	X_S	$T_{1/2}$(Spaltung)	$T_{1/2}$(α-Zerfall)
$^{232}_{90}$Th	0.68	$> 10^9$ a	$1.4 \cdot 10^{10}$ a
$^{235}_{92}$U	0.70	$\sim 10^{17}$ a	$7 \cdot 10^8$ a
$^{238}_{92}$U	0.693	$\sim 10^{16}$ a	$4 \cdot 10^9$ a
$^{242}_{94}$Pu	0.71	$\sim 10^{11}$ a	$\sim 4 \cdot 10^5$ a
$^{252}_{98}$Cf	0.74	$6 \cdot 10^1$ a	2.2 a
$^{254}_{100}$Fm	0.76	246 d	3.4 d
$^{255}_{102}$No	0.80	? d	180 s

Tab. 10.1.: Spaltbarkeitsparameter

10.1.1. Kategorien von Kernreaktionen

10.1.1.1. Inelastische Streuung

Wenn bei einer Streuung einer oder mehrere der beteiligten Objekte den inneren Anregungszustand ändern wird dies inelastische Streuung genannt.

$$a(E) + X \longrightarrow X^* + a(E - \Delta E) \tag{10.1.9}$$

Dabei ist $\Delta E = \Delta E_1 + E_{\text{Rückstoss}}(X^*)$ wobei ΔE_1 die Anregungsenergie ist. Die Abregung geschieht dann über

$$X^* \longrightarrow X + \gamma \tag{10.1.10}$$

10.1.1.2. Reaktive Streuung

Unter einer reaktiven Streuung versteht man eine Streuung, bei der eines oder mehrere der beteiligten Teilchen ihren Charakter ändern.

$$a + X \longrightarrow Y + b \qquad (\text{auch } b_1 + b_2 + \dots) \tag{10.1.11}$$

Ein Beispiel für eine reaktive Streuung mit zwei möglichen Resultaten gibt Gleichung (10.1.12)

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + n \\ p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \nearrow \\ p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} + p \end{array} \tag{10.1.12}$$

10.1.1.3. Induzierte Spaltung

Otto Hahn und Fritz Straßmann [HS39] (Experiment, Hahn erhielt den Nobelpreis 1944) fanden im Jahre 1939 experimentell eine zu einer Kettenreaktion ausbaubare Kernspaltung. Lise Meitner und Otto Frisch [MF39] fanden eine theoretische Erklärung der experimentellen Befunde. Die untersuchte Reaktion war

$$n + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{U}^* \longrightarrow Y_1^* + Y_2^* + \nu n \tag{10.1.13}$$

Es gelten die folgenden Erhaltungsgrössen:

$$A + 1 = A_1 + A_2 + \nu \qquad Z = Z_1 + Z_2 \tag{10.1.14}$$

Die Energieverteilung der Spaltprodukte folgt der Verteilung

$$N(E) = C \sinh\left[\left(\frac{E_{kin}}{b \cdot \mathrm{MeV}}\right)^{1/2}\right] \cdot \exp\left(-\frac{E_{kin}}{b \cdot \mathrm{MeV}}\right) \tag{10.1.15}$$

Die Energieverteilung der Spaltneutronen nach Gleichung (10.1.15) ist in Abbildung 10.2 gezeigt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

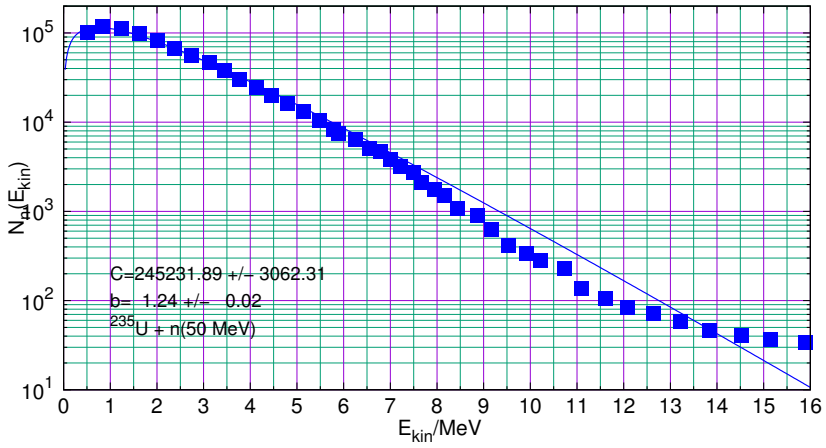


Abb. 10.2.: Energieverteilung der Spaltneutronen bei der Kernspaltung nach [Sta+95, Fig. 5a]. Die Theorielinie stammt Gleichung (10.1.15).

Die Frage, wann eine Kernspaltung ablaufen kann wurde im Abschnitt 10.1 besprochen. Die Antwort der Bethe-Weizsäcker-Gleichung ist: Zuerst oszilliert der Kern, die Coulombenergie nimmt ab und gleichzeitig die Oberflächenenergie zu. Wenn $\Delta E_0^C < \Delta E_0^S$ ist der Kern stabil.

Targetkern X	Compoundkern $X+n$	E_C/MeV	E_b/MeV	$(E_C - E_b)$ /MeV
$^{233}_{92}$U	$^{234}_{92}$U	5.8	7.0	−1.2
$^{235}_{92}$U	$^{236}_{92}$U	5.3	6.4	−1.1
$^{234}_{92}$U	$^{235}_{92}$U	5.8	5.3	+0.5
$^{238}_{92}$U	$^{239}_{92}$U	6.1	5.0	+1.1
$^{231}_{91}$Pa	$^{234}_{91}$Pa	6.2	5.5	+0.7
$^{232}_{90}$Th	$^{233}_{90}$Th	6.8	5.5	+1.3

Tab. 10.2.: Compoundkerne bei der Kernspaltung

Tabelle 10.2 zeigt mögliche Zwischenprodukte, die bei einer Kernspaltung auftreten können.

10.2. Stossinduzierte Kernspaltung

Für die Kernenergie ist die stossinduzierte Kernspaltung sehr wichtig. Ihr Reaktionsschema ist

$$a + X \longrightarrow (aX^*) \longrightarrow Y_1 + Y_2 + \nu \cdot n \tag{10.2.1}$$

wobei ν die Anzahl Neutronen ist, die bei der Reaktion freigesetzt werden. Ein Beispiel für eine solche Reaktion ist

$$n(E) + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U}^* \longrightarrow {}^{Z_1}_{A_1}\mathsf{Y}_1 + {}^{Z_2}_{A_2}\mathsf{Y}_2 + \nu \cdot n \tag{10.2.2}$$

mit $A_1 + A_2 = 239 - \nu$ und $Z_1 + Z_2 = 92$. Die Schwelle für diese Reaktion ist 1.5 MeV.

10.2.1. Stossinduzierte Spaltung leichter Kerne

In der zeitlichen Abfolge wurde 1932 zuerst die stossinduzierte Spaltung eines leichten Kerns durch John Cockcroft und Ernest Walton entdeckt

$$p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \longrightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be}^{*} \longrightarrow \alpha + \alpha + Q \tag{10.2.3}$$

Die Reichweite der α-Teilchen in Luft beträgt 8.3 cm. Dies entspricht einer kinetischen Energie von $E_\alpha = 8.63$ MeV.

Damit ist die freigesetzte Energie («Wärmetönung»)

$$Q = 2E_\alpha = 17.26 \text{ MeV} \tag{10.2.4}$$

Auch andere leichte Kerne können stossinduziert gespalten werden. Abbildung 10.3 zeigt die Streuquerschnitte für die Spaltung von mittelschweren Kernen.

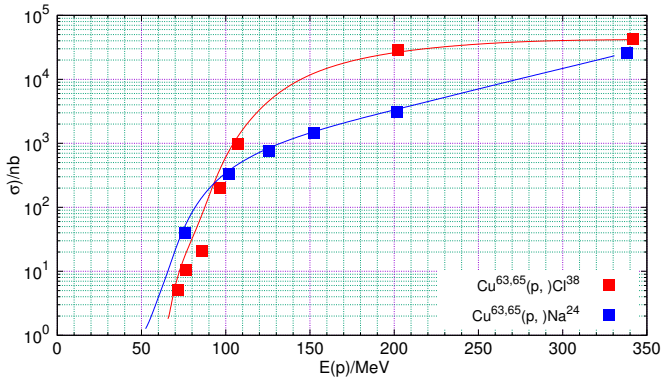


Abb. 10.3.: Spaltquerschnitte mittelschwerer Kerne (nach Batzel and Seaborg [BS51])

10.2.2. Stossinduzierte Kernreaktionen mit α-Teilchen

Die beiden Unterkapitel zeigen Beispiele für stossinduzierte Kernreaktionen ausgelöst durch α-Teilchen.

10.2.2.1. (α,p)-Reaktion

Bei (α,p)-Reaktionen (nach Ernest Rutherford) reagiert ein α-Teilchen (auch ein ${}^{4}_{2}\mathrm{He}^{++}$ oder einfach ein ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ -Atom.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$
\begin{aligned}
{}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X} &\longrightarrow {}^{A+4}_{Z+2}\mathrm{Y}^{*} &&\longrightarrow {}^{A+3}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + Q && \text{(10.2.5a)}\\
\alpha + {}^{14}_{7}\mathrm{N} &\longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + p && && \text{(10.2.5b)}\\
\alpha + {}^{10}_{5}\mathrm{B} &\longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N}^{*} &&\longrightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + p + 4.04\ \mathrm{MeV} && \text{(10.2.5c)}\\
\alpha + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} &\longrightarrow {}^{31}_{15}\mathrm{P}^{*} &&\longrightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + p + 2.26\ \mathrm{MeV} && \text{(10.2.5d)}\\
\alpha + {}^{32}_{16}\mathrm{Al} &\longrightarrow {}^{36}_{18}\mathrm{Ar}^{*} &&\longrightarrow {}^{35}_{17}\mathrm{Cl} + p - 2.10\ \mathrm{MeV} && \text{(10.2.5e)}
\end{aligned}
$$

Abbildung 6.6 in W. Demtröder *Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik* [Dem10, Abb. 6.6] zeigt ein Beispiel einer Reaktion nach Gleichung (10.2.5b). Die freigesetzte Energie folgt im Allgemeinen der Gleichung

$$Q = E_{kin}(\alpha) + [M(\alpha) + M(X) - M(Y) - M(p)]\,c^2 \tag{10.2.6}$$

10.2.2.2. (α,n)-Reaktion

Bei einer Reaktion von α-Teilchen mit Beryllium lautet die Gleichung beispielsweise

$$\alpha + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C}^{*} \longrightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + n(E_{kin}) \tag{10.2.7}$$

Eine Messung dazu zeigt Abbildung 10.4.

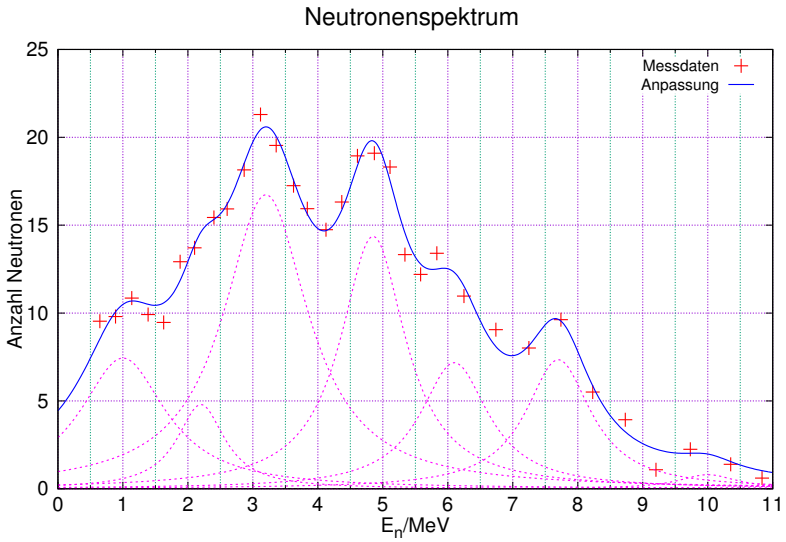


Abb. 10.4.: Neutronenspektrum bei der Reaktion ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}(\alpha, n){}^{12}_{6}\mathrm{C}$ nach B. G. Whitmore und W. B. Baker [WB50, Fig. 1].

Weitere Beispiele für (α,n)-Reaktionen sind

$$\alpha + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \longrightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B}^{*} \longrightarrow {}^{10}_{5}\mathrm{B} + n \tag{10.2.8a}$$
$$\alpha + {}^{11}_{5}\mathrm{B} \longrightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N}^{*} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + n \tag{10.2.8b}$$
$$\alpha + {}^{19}_{9}\mathrm{F} \longrightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na}^{*} \longrightarrow {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + n \tag{10.2.8c}$$
$$\alpha + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{31}_{15}\mathrm{P}^{*} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{B} + n \tag{10.2.8d}$$

10.2.3. Stossinduzierte Radioaktivität

Irène Joliot-Curie und Frédéric Joliot-Curie fanden im Jahre 1934 die stossinduzierte Radioaktivität mit der Reaktion

$$\alpha + {}^{10}_{5}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N}^{*} \longrightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + n \tag{10.2.9a}$$
$${}^{13}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \beta^{+} + \nu \quad (\tau = 9.96 \text{ min}) \tag{10.2.9b}$$

Eine ähnliche Reaktion gibt es auch bei

$$\alpha + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{31}_{15}\mathrm{P}^{*} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + n \tag{10.2.10a}$$
$${}^{30}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + \beta^{+} + \nu \quad (\tau = 2.5 \text{ min}) \tag{10.2.10b}$$

10.2.3.1. (n,γ)-Reaktionen

Die meisten Radionuklide werden durch Neutroneneinfangreaktionen im Kernreaktor erzeugt

$${}^{23}_{11}\mathrm{Na} + n \longrightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na}^{*} \xrightarrow{\gamma} {}^{24}_{11}\mathrm{Na} \tag{10.2.11a}$$
$${}^{24}_{11}\mathrm{N} \xrightarrow[1.39\ \mathrm{MeV}\,(\tau=14.96\ \mathrm{h})]{\beta^{-}} {}^{24}_{12}\mathrm{Mg}^{*} \longrightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Mg}^{*} + \gamma \tag{10.2.11b}$$

Die Bestrahlung kann zum Beispiel auch diese Reaktion erzeugen

$${}^{59}_{27}\mathrm{Co} + n \xrightarrow[\sigma=3700\ \mathrm{b}]{} {}^{60}_{27}\mathrm{Co}^{*} \xrightarrow{\gamma_1,\beta^{-}} {}^{60}_{28}\mathrm{Ni}^{*} \tag{10.2.12a}$$
$${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}^{*} \longrightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \gamma_2 + \gamma_3 \tag{10.2.12b}$$

Schnelle Neutronen lösen in der Regel eine (n,p)-Reaktion aus. Es kann aber auch zu (α, γ)-Reaktionen kommen.

10.2.3.2. Aktivierung und Aktivität

Wir verwenden die folgenden Definitionen:

ϕ die Neutronenflussdichte

N_0 die Anzahl stabiler Mutterkerne

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

σ_a der AKTIVIERUNGSQUERSCHNITT

und erhalten die folgende Differentialgleichung für die Aktivierung

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi (N_0 - N) \tag{10.2.13}$$

Radionuklide zerfallen mit der Zerfallskonstante λ

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi (N_0 - N) - \lambda N = \sigma_a \phi N_0 - (\sigma_a \phi + \lambda) N \tag{10.2.14}$$

Wenn $N_0 \gg N$ ist erhalten wir

$$\frac{dN}{dt} = \sigma_a \phi N_0 - \lambda N \tag{10.2.15}$$

Am Ende der Bestrahlungszeit t_B haben wir

$$N(t_B) = \frac{\sigma_a \phi N_0}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t_B}\right) \tag{10.2.16}$$

aktivierte Kerne. Den gesamten Verlauf zeigt Abbildung 10.5.

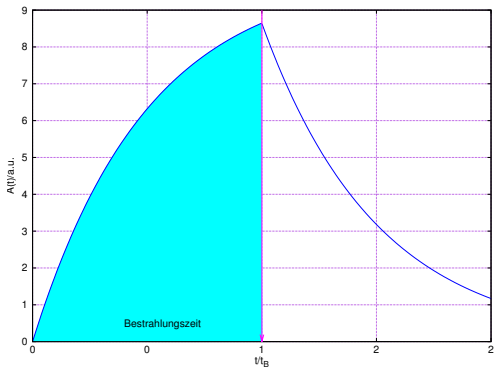


Abb. 10.5.: Aktivierung einer Probe über die Bestrahlungszeit t_B. Die Aktivität $A(t)$ baut sich wie $1 - e^{-\lambda t}$ auf. Sie zerfällt dann mit $e^{-\lambda(t-t_B)}$ (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 6.12]).

10.2.4. Schwelle

Die meisten Kernreaktionen laufen erst oberhalb einer Schwelle ab. Insbesondere bei positiv geladenen Teilchen muss die Coulombbarriere überwunden werden. Die Reaktion wird durch das Bohrsche Compoundkern-Modell (nach Niels Bohr) beschrieben. Die Edukte stossen zusammen und bilden einen kurzlebigen Zwischenkern, den Compoundkern. Die Kernreaktion hat die Schritte

1. Fusion
2. Spaltung

Der Vorgang kann als Prozess mit einer Schwelle beschrieben werden. Ein Beispiel für die Fusionsreaktion ist

$$\begin{aligned} d + d \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{*} &\rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + n + 3.25\ \mathrm{MeV} \\ &\longrightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + p + 4.0\ \mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{10.2.17}$$

Ein weiterer möglicher Prozess ist

$$p + {}^{6}_{3}\mathrm{Li} \longrightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Be}^{*} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} + 22.4\ \mathrm{MeV} \tag{10.2.18}$$

Bei diesem Prozess muss die

1. Energie des Eingangskanals die Schwelle überschreiten.

2. Dann wird der Ausgangskanal geöffnet.

Die Energiebetrachtung der Reaktion

$$a + X \longrightarrow Y + b \tag{10.2.19}$$

muss die Schwerpunktsbewegung beinhalten. Wir haben die Beziehungen

$$\text{vorher} \qquad E_{kin}(X) = 0 \qquad p_X = 0 \tag{10.2.20a}$$

$$E_{kin}(a) = \frac{1}{2} m_a v_a^2 \qquad |\boldsymbol{p_a}| = m_a v_a \tag{10.2.20b}$$

$$\text{nachher} \qquad E_{kin}(Y) = \frac{1}{2} m_Y v_Y^2 \qquad |\boldsymbol{p_Y}| = m_Y v_Y \tag{10.2.20c}$$

$$E_{kin}(b) = \frac{1}{2} m_b v_b^2 \qquad |\boldsymbol{p_b}| = m_b v_b \tag{10.2.20d}$$

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist

$$v_S = \frac{m_X v_X + m_a v_a}{m_X + m_a} = \frac{m_a v_a}{m_X + m_a} \tag{10.2.21}$$

Die Energie der Schwerpunktsbewegung beträgt

$$E_{kin,S} = \frac{1}{2}(m_X + m_a) \cdot v_S^2 = \frac{m_a^2 v_a^2}{2(m_X + m_a)} \tag{10.2.22}$$

Sei Q die benötigte Wärmetönung der Reaktion. Dann ist im Laborsystem

$$E_S = Q + E_{kin,S} = Q + \frac{p_a^2}{2(m_X + m_a)} = E_{kin,a}^{min} \tag{10.2.23}$$

Mit der minimal nötigen Energie

$$E_{kin,a}^{min} = \frac{1}{2m_a} p_{a,min}^2 \tag{10.2.24}$$

ergibt sich für die Wärmetönung

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$Q + E_{kin,a}\frac{m_a}{m_X + m_a} = E_{kin,a} \tag{10.2.25a}$$

$$Q = E_{kin,a}\left(1 - \frac{m_a}{m_X + m_a}\right) = E_{kin,a}\frac{m_X}{m_X + m_a} \tag{10.2.25b}$$

Mit dem Impulssatz haben wir

$$m_a v_a = m_b v_b \cos\theta + m_y v_y \cos\varphi \tag{10.2.26a}$$

$$0 = m_b v_b \sin\theta - m_y v_y \sin\varphi \qquad v_b, v_y > 0 \tag{10.2.26b}$$

$$m_y^2 v_y^2 = m_b^2 v_b^2 + m_a^2 v_a^2 - 2 m_a m_b v_a v_b \cos\theta \tag{10.2.26c}$$

$$\text{mit } \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{10.2.26d}$$

Für die Energie haben wir

$$\frac{1}{2}m_a v_a^2 + \underbrace{Q}_{\text{fehlt im Ausgang}} = \frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_y v_y^2 \tag{10.2.27}$$

Mit $\frac{1}{2}m_a v_a^2 = \frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_y v_y^2 - Q$ erhalten wir für die Wärmetönung

$$Q = \frac{1}{2}m_b v_b^2 - \frac{1}{2}m_a v_a^2 + \frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_a v_a^2 - \tag{10.2.28a}$$

$$- \frac{1}{2}2 m_a m_b v_a v_b \cos\theta \tag{10.2.28b}$$

$$= m_b v_b^2 - m_a m_b v_a v_b \cos\theta \tag{10.2.28c}$$

und

$$Q = \left(\frac{m_a}{m_y} - 1\right) E_a + \left(\frac{m_b}{m_y} + 1\right) E_b - \frac{2\sqrt{m_a m_b}}{m_y}\sqrt{E_a E_b}\cos\theta \tag{10.2.29}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\sqrt{E_b} = \frac{\sqrt{m_a m_b}}{m_y + m_a} \cdot \sqrt{E_a} \cdot \left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \frac{m_y(m_b + m_y)}{m_a \cdot m_b}\left(\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y}\right)}\right] \tag{10.2.30}$$

Es darf nur reelle positive Werte für E_b geben, also muss in Gleichung (10.2.30) die eckige Klammer positiv sein. Wenn $\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y} \geq 0$ ist, ist die Wurzel grösser als $\cos(\theta)$: Es gibt nur eine Lösung zum Vorzeichen «+». Wenn $\frac{Q}{E_a} + 1 - \frac{m_a}{m_y} < 0$ ist, gibt es zwei mögliche Lösungen. Dann ist die minimale Anregungsenergie $E_a^{min} = \frac{m_y}{m_a - m_y} Q$. Nur oberhalb dieser Anregungsenergie existieren Lösungen.

10.2.5. Abweichung von der Kugelgestalt im Bethe-Weizsäcker-Modell

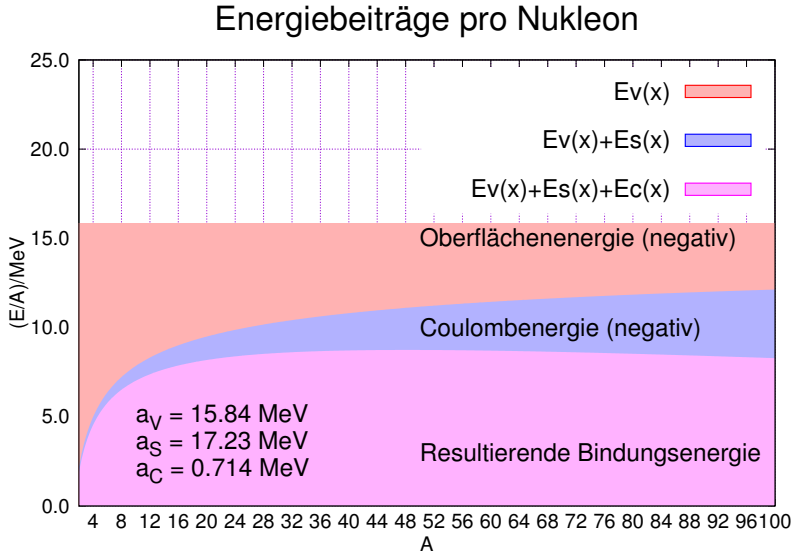


Abb. 10.6.: Relative Beiträge der einzelnen Energieterme im Bethe-Weizsäcker-Modell (Gleichung (6.5.14)) ([Nach Dem10, Band 4, Abb 2.32]).

Abbildung 10.6 zeigt die relativen Beiträge der verschiedenen Terme in der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (nach Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker) (6.5.14). Die Volumenenergie wie auch die Fermibeiträge und die Paarenergie hängen nur von der Anzahl der Nukleonen ab, nicht aber von der Form der Kerne. die beiden Summanden

$$E_S = -a_S A^{2/3} \qquad \text{Oberflächenenergie} \tag{10.2.31a}$$

$$E_C = -a_C Z^2 A^{-1/3} \qquad \text{Coulombenergie} \tag{10.2.31b}$$

hängen von der Form der Kerne ab. Wir modellieren die Kerne als Ellipsoid. Dieses ist durch die relative Halbachse c entlang der Rotationssymmetrie und die beiden weiteren relativen Halbachsen $a < b < c$ senkrecht dazu charakterisiert.

Wenn $a = b = c$ ist haben wir eine Kugel. Wir verwenden nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (2.6)] die Konvention

$$a \cdot b \cdot c = 1 \tag{10.2.32}$$

Die Gleichung des Ellipsoids lautet dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \tag{10.2.33}$$

oder mit $a^2 = 1/(b\,c)$

$$b\,c x^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \tag{10.2.34}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Nach [Wik20] ist die Oberfläche für ein allgemeines Ellipsoid näherungsweise

$$S \approx 4\pi r^2 \left(\frac{(a\,b)^{8/5} + (a\,c)^{8/5} + (b\,c)^{8/5}}{3} \right)^{5/8} \tag{10.2.35}$$

Mit Gleichung (10.2.32) und $r = 1$ erhalten wir

$$S \approx 4\pi \left(\frac{b^{-8/5} + (b\,c)^{8/5} + c^{-8/5}}{3} \right)^{5/8} \tag{10.2.36}$$

Bei einem Rotationsellipsoid ist $b = c$. Wir erhalten

$$S \approx 4\pi \left(\frac{2b^{-8/5} + (b)^{16/5}}{3} \right)^{5/8} = \frac{4\pi}{b} \left(\frac{2 + (b)^{24/5}}{3} \right)^{5/8} \tag{10.2.37}$$

Zweitens brauchen wir einen Ausdruck für die Coulombenergie eines Rotationsellipsoids. Hier können wir im Artikel von B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (2.5)] verwenden:

$$E_C(a,b,c) = \left\langle r_1^2 \right\rangle E_C(1,1,1) \tag{10.2.38}$$

wobei $E_C(1,1,1)$ die potentielle Energie einer kugelförmigen homogenen Ladungsverteilung ist. Für den Vorfaktor $\langle r_1^2 \rangle$ ergibt sich nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (3.12)] die Näherungslösung

$$\left\langle r_1^2 \right\rangle \approx 1 - \frac{1}{45}\left(\epsilon^4 - \epsilon^2\,\epsilon'^2 + \epsilon'^2\right) - \frac{2}{2835}\left(\epsilon^2 + \epsilon'^2\right)\left(31\epsilon^4 - 46\epsilon^2\epsilon'^2 + 31\epsilon'^2\right). \tag{10.2.39}$$

Dabei ist die numerische Exzentrizität nach B. C. Carlson [Car61, Gleichungen (3.4)] durch

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \text{ und } \epsilon' = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} \leq \epsilon \tag{10.2.40}$$

gegeben. Mit Gleichung (10.2.40) wird Gleichung (10.2.39)

$$\begin{aligned}\left\langle r_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2835 b^6 c^{12}} \big(&30b^{10}c^8 - 28b^8c^{10} - 92b^8c^4 + 2708b^6c^{12} + 245b^6c^6 \\ &+159b^4c^8 - 30b^4c^2 - 219b^2c^4 + 62\big).\end{aligned} \tag{10.2.41}$$

Die relevanten Terme aus der Bethe-Weizsäcker-Gleichung (6.5.14) ergeben mit den Korrekturfaktoren $S/(4\pi)$ und $\langle r_1^2 \rangle$

$$\begin{aligned}E'_B &\approx -a_S A^{2/3} \frac{S}{4\pi} - \left\langle r_1^2 \right\rangle a_C Z^2 A^{-1/3} \\ &= -a_S A^{2/3} \left(\frac{b^{-8/5} + (b\,c)^{8/5} + c^{-8/5}}{3} \right)^{5/8}\end{aligned} \tag{10.2.42}$$

10.2.6. Reaktionsquerschnitt

$\dot{N}_k$ Zahl der Teilchen im Ausgangskanal k

$\phi_a(i)$ Teilchenfluss im Eingangskanal i

n_X Targetkerndichte

V Reaktionsvolumen

$$\dot{N}_k = \sigma_{ik}(E) n_X V \phi_a(i) \tag{10.2.43}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d}{d\Omega}\left(\sigma_{ik}(\vartheta, E)\right) = \frac{1}{n_X V \phi_a(i)} \frac{d\dot{N}_k(\vartheta)}{d\Omega} \tag{10.2.44}$$

10.2.7. Massenverteilung der Spaltprodukte

Die wahrscheinlichste Spaltung ergibt Fragmente mit leicht unterschiedlichen Massen.
Erhaltungsgrössen

$$A_1 + A_2 + \underbrace{\nu}_{\text{Anzahl neue Neutronen beim Spaltprozess}} = A + \overbrace{1}^{\text{Einlaufendes Neutron}} \tag{10.2.45}$$

$$Z_1 + Z_2 = Z \tag{10.2.46}$$

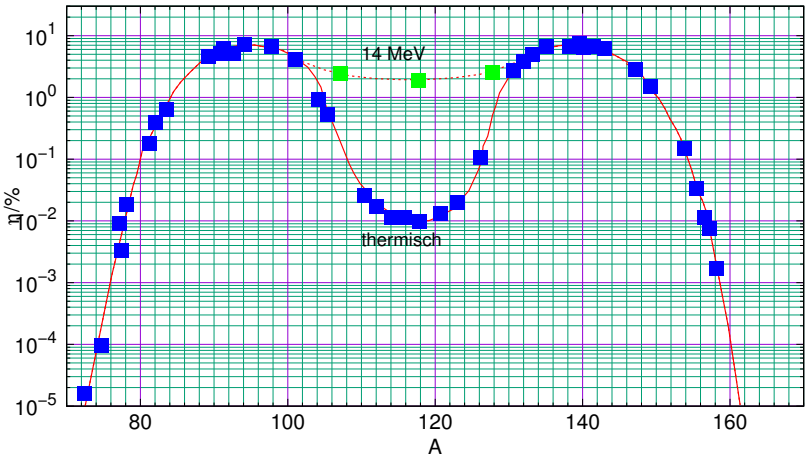


Abb. 10.7.: Massenverteilung der Spaltprodukte bei der Kernspaltung (nach [Dem10, Abb. 6.18]).

Abbildung 10.7 zeigt die Massenverteilung der Spaltprodukte.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

10.2.8. Energieausbeute

Näherungsweise ist die Energieverteilung der Spaltneutronen durch Gleichung (10.1.15) gegeben.

$$N(E) = C \cdot \sinh\left[\left(\frac{E_{kin}}{\text{MeV}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot e^{-\frac{E_{kin}}{\text{MeV}}}$$

Die entstehenden Bruchstücke senden γ-Strahlen aus und gleichen so die Nukleonenverteilung durch β^--Emission aus. Manchmal werden auch Neutronen emittiert. Tabelle 10.3 zeigt die Energiebilanz. Die Energien wurden durch die Messung der Flugzeitmessung bestimmt.

E_{kin} (Spaltprodukte)	167 MeV
E_{kin} (Spaltneutronen)	6 MeV
direkte γ-Strahlung während Spaltung verzögert	7 MeV
γ-Strahlung der Spaltprodukte	6 MeV
β^--Strahlung der Spaltprodukte	5 MeV
ν-Strahlung	10 MeV
	201 MeV

Tab. 10.3.: Energiebilanz einer Spaltreaktion

10.3. Erhaltungssätze

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, welche Erhaltungssätze bei einer Kernspaltung gelten.

- Erhaltung der Nukleonenzahl

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \tag{10.3.1}$$

- Ladungserhaltung

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \qquad (\text{auch } q_1 + q_2 = q_3 + q_4) \tag{10.3.2}$$

- Drehimpulserhaltung

$$\boldsymbol{J}(a+X) = \boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_X + \boldsymbol{L}_{aX} = \boldsymbol{J}(b+Y) = \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_Y + \boldsymbol{L}_{bY} \tag{10.3.3}$$

- Eine Wechselwirkung mit der Reichweite R gibt $\boldsymbol{L}_{aX}^{max}$

$$|\boldsymbol{L}_{aX}| = p_a \cdot b < \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{aX}}^{\boldsymbol{max}} = p_a \cdot R \tag{10.3.4}$$

b ist der Stossparameter. Wegen $L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ und $p_a = \sqrt{2m_aE_{kin}}$ ist

$$\boldsymbol{L}_{aX}^{max} = \hbar\sqrt{\ell_{max}(\ell_{max}+1)} \leq R\sqrt{2m_aE_{kin}} \tag{10.3.5}$$

und daraus

$$\ell_{max}(\ell_{max}+1) \leq \frac{R^2}{\hbar}(2m_aE_{kin}) \tag{10.3.6}$$

und

$$\ell_{max}^2 + \ell_{max} - \frac{R^2}{\hbar}(2m_aE_{kin}) \leq 0 \tag{10.3.7}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\ell_{max_{1,2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8\frac{R^2}{\hbar}m_aE_{kin}}}{2} \underbrace{=}_{\text{Physik}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{R}{\hbar}m_aE_{kin}} - 1\right) \tag{10.3.8}$$

- Wenn $\hbar^2 < 8R^2m_aE_{kin}$ ist haben wir die nullte Ordnung und

$$\ell_{max} \leq R\sqrt{2m_aE_{kin}} - \frac{1}{2} \tag{10.3.9}$$

mit m_a der reduzierten Masse.

- Mit $a = n$, $X = p$, $R = 2.6$ fm und $\mu = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg ergibt sich

$$\Rightarrow \ell_{max}^{\text{lab}} \leq 0.6\sqrt{E_{kin}/\text{MeV}} - \frac{1}{2} \tag{10.3.10}$$

- Im Schwerpunktssystem ist

$$\ell_{max}^{S} \leq 0.4\sqrt{E_{kin}^{S}/\text{MeV}} - \frac{1}{2} \tag{10.3.11}$$

- Beispiel: Wenn $E_{kin} = 1$ MeV ist, ist $\ell_{max}^{lab} \leq 0.6 - 0.5 = 0.1$. Damit ist klar, dass es nur S-Streuung gibt.

10.3.1. Paritätserhaltung

Bei einem kugelsymmetrischen Potential haben wir

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta,\varphi) \tag{10.3.12}$$

Eine Spiegelung am Ursprung ergibt, dass $R(r)$ gerade ist und dass

$$Y_\ell^m(\pi-\vartheta,\varphi+\pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \tag{10.3.13}$$

- Zustände mit geradem ℓ haben gerade Parität
- Zustände mit ungeradem ℓ haben ungerade Parität

Bei der starken Wechselwirkung ist

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$P_{a+X} = P_a \cdot P_X \cdot (-1)^{\ell_{aX}} = P_{b+Y} = P_b \cdot P_Y \cdot (-1)^{\ell_{bY}} \tag{10.3.14}$$

Proton-Neutron-Streuung

$$I_a = I_X = \frac{1}{2} \tag{10.3.15a}$$

$$P_a = P_X = P_b = P_Y \tag{10.3.15b}$$

Dann ist $(-1)^{\ell_{aX}} = (-1)^{\ell_{bY}}$ und damit $\Delta\ell = \ell_{aX} - \ell_{bY}$, also gerade. Dann muss $\Delta\ell = 2$ sein. Es müssten also ΔI_a und ΔI_X beide gleichzeitig umklappen: Dies ist sehr unwahrscheinlich.

11. Kernenergie

Die folgenden Abschnitte sollen einen kurzen Überblick über die realisierte und geplante Erzeugung elektrischer Energie mit Kernspaltung und Kernfusion geben. Der Abschnitt ist im Wesentlichen qualitativ und gibt Beispiele für Geräte.

11.1. Kernspaltung

Die von Otto Hahn und Fritz Straßmann gefundene Kernspaltung sowie die Erklärung von Lise Meitner und Otto Frisch wurden beide im Jahre 1939 in wissenschaftlichen Artikeln veröffentlicht. [HS39; MF39]. Dies ermöglichte im Prinzip allen, den Effekt zu nutzen. Wirklich erkannt und konsequent durchgeführt haben diese Forschung und Entwicklung die U.S.A. und das Vereinigte Königreich von Grossbritannien. Die Forschung wurde schnell in den USA konzentriert, weit weg vom Kriegsgeschehen in Europa und Asien. Viele der intelligentesten Menschen in Kontinentaleuropa wurden durch die Naziherrschaft und deren Eroberungsfeldzüge gezwungen, den Kontinent Richtung die U.S.A. zu verlassen. Dies waren unter vielen anderen Albert Einstein, Enrico Fermi, Hans Bethe, Otto Frisch, Otto Stern, Victor Weisskopf und Eugene Wigner.

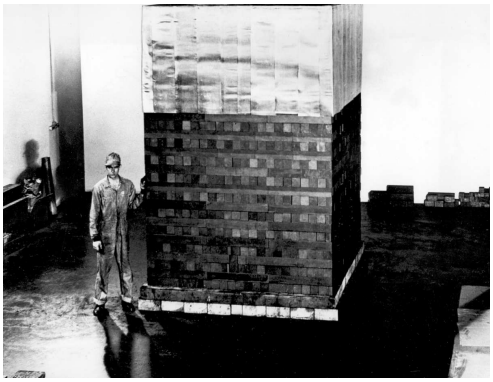


Abb. 11.1.: Stapelversuch beim Chicago Pile-1 unter der Leitung von Enrico Fermi (ENERGY.GOV, Public domain, via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HD.5A.025_(10692802156).jpg).

In Chicago unter den Tribünen des Stagg Field Stadions hat eine Gruppe um Enrico Fermi Versuchsaufbauten zu Reaktoren gebaut. Die Forschungen hatten ergeben, dass Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten abgebremst werden mussten um in $^{235}_{92}\mathrm{U}$ effizient Spaltreaktionen für Kettenreaktionen zu starten. Dieses Abbremsen in einem MODERATOR musste zuerst erkundet werden. Diese wurde mit 29 verschiedenen Anordnungen erprobt. Abbildung 11.1 zeigt einen ersten Versuch.

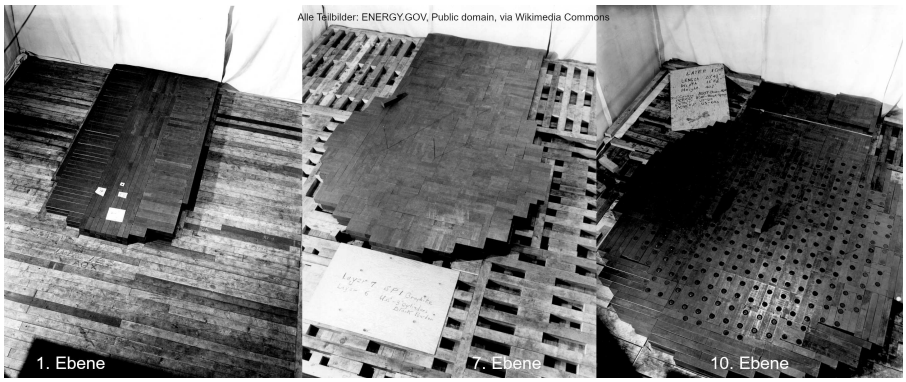


Abb. 11.2.: Die drei Bilder zeigen die 1., 7. und 10. Schicht des Chicago Pile-1 unter der Tribüne des Stagg Field Stadium (Alle drei Teilbilder ENERGY.GOV, Public domain, via Wikimedia Commons)

Aus diesen Stapelversuchen kristallisierte sich dann die Anordnung der Graphitplatten, des Urans und der sonstigen Einrichtungen heraus. Die Abbildung 11.2 zeigt die ersten Schichten des Reaktors im Stagg Field Stadium. Mit ihm gelang dem Team von Enrico Fermi die erste kontrollierte nukleare Kettenreaktion.

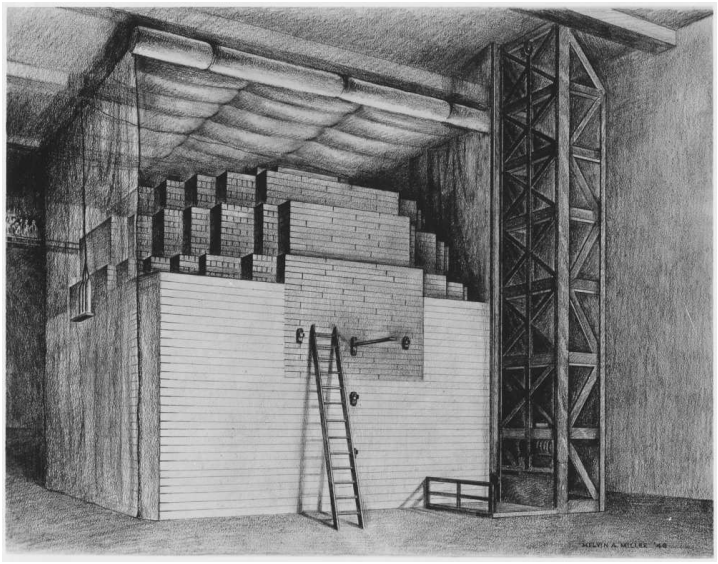


Abb. 11.3.: Erster Uranreaktor Chicago Pile-1 im Stagg Field Stadium in Chicago, um 1942. Zeichnung Melvin A. Miller of the Argonne National Laboratory (Public domain, via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stagg_Field_reactor.jpg)

Der gesamte endgültige Aufbau unter den Tribünen des Stagg Field Stadiums in Chicago ist in Abbildung 11.3 gezeigt. Bemerkenswert ist, dass die dort arbeitenden Menschen nicht geschützt waren. Der Umgang mit so grossen Mengen radioaktivem Material musste erst noch gelernt werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

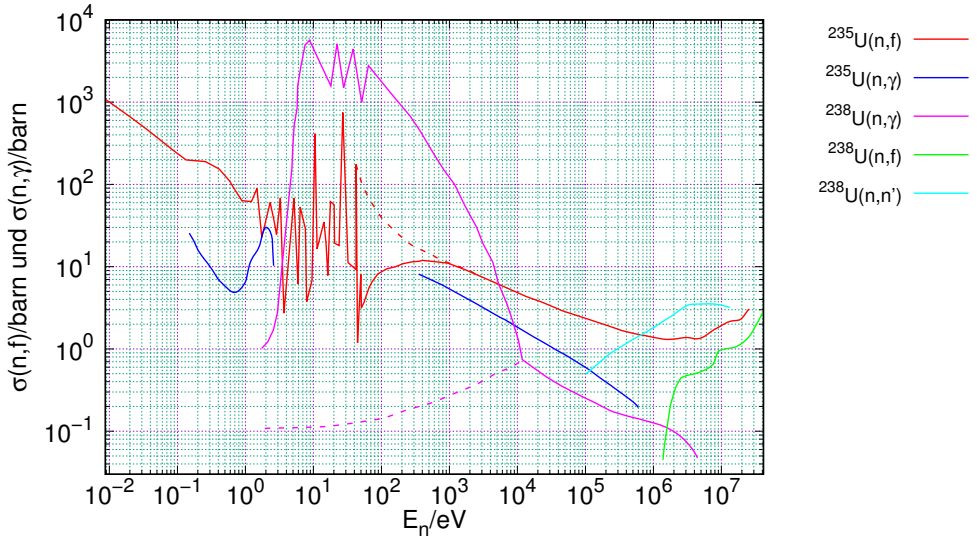


Abb. 11.4.: Streuquerschnitte für $^{238}_{92}\mathrm{U}$ und $^{235}_{92}\mathrm{U}$ für die (n, f)-, (n, γ)- und (n, n')- Reaktionen. (n, f) bedeutet die neutroneninduzierte Spaltung. (nach W. Demtröder [Dem10, Abb. 8.17]).

G. I. Bell und S. Glasstone [BG70] US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States) (US Atomic Energy Commission) beschreiben die Theorie von Kernreaktoren. Interessant ist auch die Abschätzung der kritischen Masse [Nas00] von Werner Heisenberg, beschrieben durch M. S. el Naschie. Abbildung 11.4 zeigt die Streuquerschnitte für Kernspaltung von $^{238}_{92}\mathrm{U}$ und $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Es ist klar, dass kleine Geschwindigkeiten der Neutronen nur bei $^{235}_{92}\mathrm{U}$ zu grossen Querschnitten führen. Deshalb ist es wichtig, Neutronen durch Streuung abzubremsen. Diese Aufgabe übernimmt ein MODERATOR. Ein Moderatormaterial ist ein Material, das Neutronen effizient ab´bremst ohne Reaktionen einzugehen. Aus der Mechanik wissen wir, dass bei einem Stoss eines bewegten Objekts mit einem ruhenden Objekt dann die Energie gleichmässig verteilt wird wenn die beiden Massen gleich sind. Deshalb muss ein Moderator aus leichten Atomkernen bestehen. Typische Moderatormaterialien sind

leichtes Wasser In H_2O streuen die Protonen im Molekül besonders effizient

schweres Wasser In D_2O oder DOH streut das $^{2}_{1}\mathrm{H}$ wegen der geänderten Wechselwirkung die Neutronen besonders gut. Dieser Moderator wird heute kaum mehr gebraucht, da er zu teuer ist.

Graphit In graphitmoderierten Reaktoren ist es die Streuung an $^{12}_{6}\mathrm{C}$ die die Neutronen abbremst.

Neben der Moderation oder Abbremsung der Neutronen braucht ein Reaktor auch die Möglichkeit, den Neutronenfluss zu steuern. Mögliche Materialien für STEUERSTÄBE sind nach [Wik21b]:

seltene Erden Neben anderen seltenen Erden ist HAFNIUM ein neuerdings häufiger verwendetes Material mit grossem Absorptionsquerschnitt für Neutronen.

höchster Absorptionsquerschnitt Die grössten Absorptionsquerschnitte für Neutronen haben die Materialien SILBER, INDIUM und KADMIUM. Bei Silber ist ein Problem, dass es nicht so häufig in der Erdkruste vorkommt

Bor BOR hat für einen weiten Bereich von Neutronenenergien einen grossen Absorptionsquerschnitt

Kobalt ist auch ein möglicher Kandidat.

Zirkon kann auch in Legierungen verwendet werden.

Lithium kann als flüssiges Metall sowohl moderieren wie auch Wärme abtransportieren.

Xenon Das Edelgas entsteht besonders wenn ein Reaktor abgeschaltet wird. Xenon hat einen grossen Absorptionsquerschnitt für Neutronen.

In der Regel werden keine reinen Materialien sondern Legierungen verwendet, wie kubisches Bornitrid, borierter Stahl, Borkarbid, Zirkondiborid, Titandiborid, Hafniumdiborid oder Disprosiumtitanat sind mögliche Materialien.

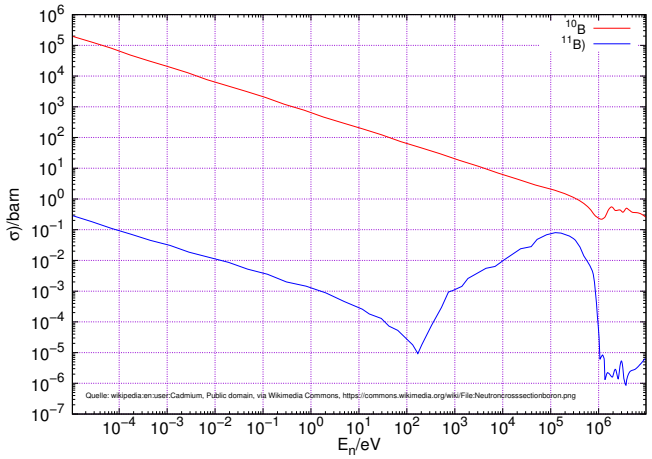


Abb. 11.5.: Absorptionsquerschnitte von $^{10}_{5}$B und $^{11}_{5}$B für Neutronen (nach wikipedia:en:user:Cadmium, Public domain, via Wikimedia Commons, Neutroncrosssectionboron.png).

Abbildung 11.5 zeigt die Streuquerschnitte von Bor für Neutronen. $^{10}_{5}$B hat bei einer Neutronenenergie von 1 eV einen Absorptionsquerschnitt von 464 b. $^{235}_{92}$U hat bei der gleichen Energie einen Streuquerschnitt für Spaltung von 62 b. Deshalb ist verständlich, dass Bor den Fluss von Neutronen regulieren kann.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

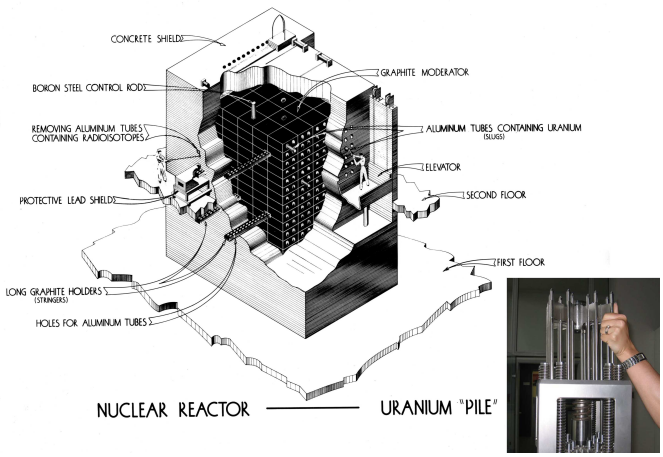


Abb. 11.6.: Kontrollstäbe in einem Reaktor von 1943 und rechts: Bild von Kontrollstäben für einen Druckwasserreaktor (von Wikipedia, links: doe-oakridge, Public domain, via Wikimedia Commons, Nuclear_Reactor_Uranium_Pile_(30502443888).jpg und rechts:Nic Ransby, Public domain, via Wikimedia Commons, PWR_control_rod_assemby.jpg).

Abbildung 11.6 zeigt, wie in einem Reaktor die Steuerstäbe eingebaut werden. Die Linke Seite zeigt eine Skizze eines Reaktors von 1943, die rechte Seite ein Bild von Steuerstäben für einen Druckwasserreaktor. Die Steuerstäbe in graphitmoderierten Reaktoren wie auch in Druckwasserreaktoren werden von oben eingefahren. Dies hat den Vorteil, dass sie im Störfall einfach fallen gelassen werden können.

Abb. 11.7.: Modell von Brennstäben im Siedewasserreaktor von Gundremmingen (Blöcke B und C) (eigene Bilder aus Deutschen Museum München)

In Siedewasserreaktoren werden die Steuerstäbe von unten eingeführt (siehe Abbildung 11.7). Die Dampfblasen im oberen Teil des Siedewasserreaktors verringern mit zunehmender Höhe die Moderationsleistung und verringern die Rate der Kernspaltungen. Die Steuerstäbe von unten kompensieren diesen Effekt zum Teil. Der Nachteil ist, dass sie im Störfall aktiv eingeschoben werden müssen, die Gravitation hilft nicht.

11.1.1. Wie viel Uran braucht es?

Im Betrieb erzeugt das spaltbare Material, also ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, zwischen zwei und drei Neutronen pro Spaltung. Diese Neutronen haben eine mittlere freie Weglänge ℓ_f für die Spaltreaktion. Wenn die Menge von ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ klein ist, wenn also der Durchmesser in der Grössenordnung der mittleren freien Weglänge ℓ_f ist, werden die meisten Neutronen den Reaktorkern verlassen ohne eine weitere Spaltung zu auszulösen. Die Verluste sind proportional zur Oberfläche, während die Anzahl der möglichen Spaltungen mit dem Volumen steigt. Deshalb ist es notwendig, dass eine Mindestmasse an spaltbarem Material vorhanden ist um die Kettenreaktion aufrechtzuerhalten. Wenn pro Spaltung $2 \leq \nu \leq 3$ Neutronen erzeugt werden und wenn der Faktor $0 \leq a \leq 1$ der erzeugten Neutronen verloren geht, kann eine Gleichung für die kritische Grösse aufgestellt werden. Wir brauchen zusätzlich die mittlere Freie Weglänge ℓ_f und die mittlere Geschwindigkeit der Neutronen $\langle v_n \rangle := v$ um die Rate der Reaktionen zu berechnen $\lambda = \frac{v}{\ell_f}$. Zusätzlich muss jedes reagierende Neutron aus dem System entfernt werden. Wir schreiben für die Anzahl Neutronen n im System

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}n(t) &= (n(t)\cdot\nu - n(t)\cdot\nu\cdot a - n(t))\,\frac{v}{\ell_f} \\ &= (\nu\cdot(1-a)-1)\cdot\frac{v}{\ell_f}\cdot n(t) = \lambda(\nu,a)n(t) \quad (11.1.1)\end{aligned}$$

$\lambda(\nu,a) = (\nu\cdot(1-a)-1)\cdot\frac{v}{\ell_f}$ ist die Rate, die sowohl negativ wie auch positiv. Der Grund ist, dass jedes Neutron, das eine Spaltung erzeugt entfernt wird. Die Lösung ist

$$n(t) = n(0)\exp\left((\nu\cdot(1-a)-1)\cdot\frac{v}{\ell_f}\cdot t\right) \quad (11.1.2)$$

Wenn $\nu\cdot(1-a)-1<0$ ist, also $a>\frac{\nu-1}{\nu}$, dann verschwinden zu viele Neutronen aus dem Reaktorkern, die Anzahl Spaltungen nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Ist andererseits $\nu\cdot(1-a)-1>0$ ist, also $a<\frac{\nu-1}{\nu}$, steigt die Anzahl der Neutronen exponentiell an und der Reaktor zerstört sich selber. Mit den Steuerstäben muss das sehr delikate Gleichgewicht eingestellt werden. Dies ist, da die Zeitkonstanten sehr klein sind, so nicht möglich.

Die kritische Masse eines Reaktors ist viel grösser als die kritische Masse einer Bombe. Der Grund ist, dass das spaltbare Material in einem Reaktor viel weniger dicht angeordnet ist. Der Moderator und der Platz für die Steuerstäbe erhöhen die Menge des benötigten Materials. C.-K. Lee [Lee73] gibt eine Rechnung für einen zylindrischen Reaktor. Es gibt andere Paper, die an der Universität Ulm leider nicht zugänglich sind. C.-K. Lee verwendet die international übliche Theorie der Diffusion von Neutronen in zwei Geschwindigkeitsklassen. Diese Theorie ist auch von G. I. Bell und S. Glasstone [BG70] verwendet worden.

Für Bomben wird eine Kugelgeometrie verwendet. Im American Journal of Physics hat C. F. Chyba und C. R. Milne [CM14] eine einfache Gleichung für kritischen Radius abgeleitet. Diese Gleichung [CM14, Gl. (10)] lautet

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$R_C = \frac{1}{\sqrt{3\eta}} \frac{(2\alpha(\nu-1)+1)^{1/3}}{(2\alpha(\nu-1)+1)^{1/3}-1} \ell_f \tag{11.1.3}$$

Hier ist ν die Anzahl Neutronen pro Spaltreaktion. $\nu-1$ ist die Zahl, die nach einem Spaltvorgang noch übrig ist (das eine ist ja aus dem System entfernt worden). α ist ein Korrekturfaktor für die Neutronendichte, die ja nicht konstant ist in der Kugel. ℓ_f ist die mittlere freie Weglänge für die Spaltreaktion der Neutronen ($\ell_s < \ell_f$ wäre die mittlere freie Weglänge für die Streuung). $\eta = \frac{\ell_f}{\ell_s}$ ist die Anzahl Streuungen eines Neutrons bis es eine Spaltreaktion eingeht. Verwendet wurde hier [CM14, Gl. (8) und (9)] dass die Neutronendichte sich wie

$$n(r) \propto \frac{\sin(r/d)}{r/d} \qquad \text{mit} \quad d = \sqrt{\frac{\ell_f \ell_t}{3(\nu-1)}} \tag{11.1.4}$$

ist mit ℓ_t der gesamten freien Weglänge der Neutronen. Diese Gleichung überschätzt nach Angabe von C. F. Chyba und C. R. Milne den kritischen Radius. Im gleichen Journal hat B. C. Reed [Ree15] eine weitere Abschätzung angegeben. Zusätzlich hat er aussen liegende Neutronenreflektoren berücksichtigt.

spaltbares Material	ohne Reflektor	Al	BeO	$^{238}_{92}$U
$^{235}_{92}$U $\rho = 19.2 \cdot 10^3$ kg m^{-3}	45.9 kg $R_c = 8.3$ cm	22.0 kg $R_c = 6.5$ cm	8.6 kg $R_c = 4.8$ cm	16.5 kg $R_c = 5.9$ cm
$^{239}_{94}$Pu $\rho = 19.8 \cdot 10^3$ kg m^{-3}	16.7 kg $R_c = 5.9$ cm	9.7 kg $R_c = 4.9$ cm	4.9 kg $R_c = 3.9$ cm	7.2 kg $R_c = 4.4$ cm

Tab. 11.1.: Kritische Massen von $^{235}_{92}$U und $^{239}_{94}$Pu ohne und mit Neutronenreflektoren. Angegeben sind auch die kritischen Radien R_c. Die Daten stammen von B. C. Reed [Ree15, Tab. I und II].

Tabelle 11.1 gibt einige Zahlenwerte für die kritischen Massen von $^{235}_{92}$U und $^{239}_{94}$Pu . Von letzterem reichen 16.7 kg, also eine Kugel mit einem Durchmesser von 11.8 cm. Dies ist etwas weniger als die Spannbreite einer Hand! Mit BeO reichen sogar 4.9 kg mit einem Durchmesser von 7.8 cm. Hier muss noch die wahrscheinlich nochmals 4 cm dicke Hülle aus dem ziemlich leichten ($\rho = 3 \cdot 10^3$ kg m^{-3}) Berylliumoxid mit eingerechnet werden.

In einem weiteren Artikel im American Journal of Physics hat B. C. Reed [Ree18] ein Modell zur Berechnung der Sprengkraft der einer Kernspaltungsbombe veröffentlicht.

11.1.2. Steuerung durch verzögerte Neutronen

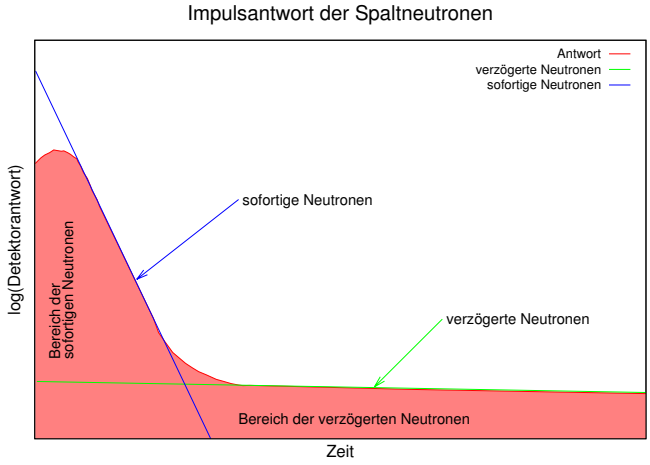


Abb. 11.8.: Impulsantwort der Spaltneutronen nach G. I. Bell und S. Glasstone [BG70, Abb. 10.6].

Zur Regelung von Reaktoren braucht es die verzögerten Neutronen. Abbildung 11.8 zeigt eine Messung von G. I. Bell und S. Glasstone [BG70, Abb. 10.6]. Die Autoren haben in eine unterkritische Masse von ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ einen Neutronenpuls gesandt und den zeitlichen Verlauf der durch Spaltung erzeugten Neutronen gemessen. Wie schon besprochen entstehen bei jeder Spaltung $2 \leq \nu \leq 3$ Neutronen. Diese Neutronen sind die SOFORTIGEN NEUTRONEN. Mit ihnen ist es fast unmöglich einen Reaktor zu regeln, da dessen Trägheit ein eher unstabiles System ergibt. G. I. Bell und S. Glasstone geben in ihrem Artikel eine detaillierte Analyse des Regelverhaltens eines Reaktors an. Die VERZÖGERTEN NEUTRONEN in Abbildung 11.8 erst ermöglichen die Regelung. Sie werden von instabilen Spaltprodukten emittiert und treten bis einige Minuten nach dem Puls auf.

Ein Reaktor wird mit den sofortigen Neutronen soweit hochgefahren (über die Steuerstäbe) dass er immer noch leicht unterkritisch ist. Dann wird er mit den verzögerten Neutronen kritisch gehalten.

11.1.3. Reaktoren

Im folgenden werden einige Reaktortypen vorgestellt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

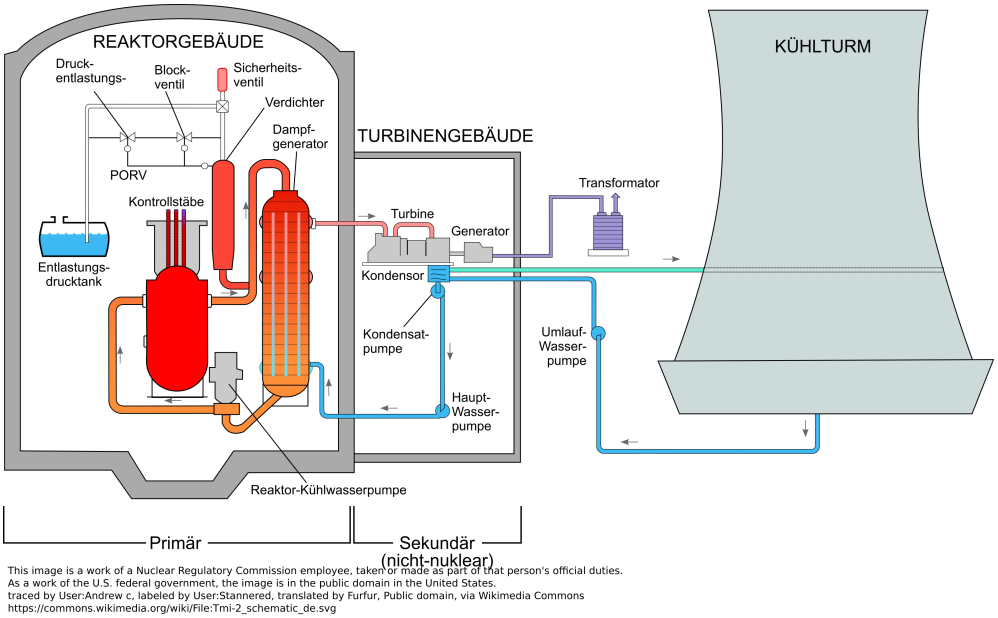
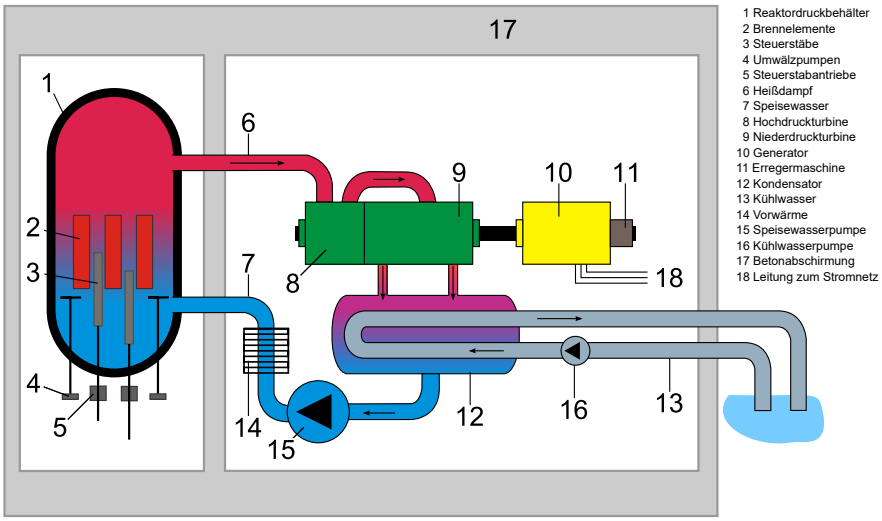


Abb. 11.9.: Schnitt durch einen Druckwasserreaktor (von Wikipedia, Public Domain)

Die meisten Reaktoren in Betrieb sind Druckwasserreaktoren wie einer schematisch in Abbildung 11.9 gezeigt ist. Der Vorteil von Druckwasserreaktoren ist, dass die Turbinen nicht mit radioaktiv kontaminiertem Kühl- und Moderatorwasser in Kontakt kommen. Weiter können die Steuerstäbe unter Mithilfe der Gravitation eingefahren werden. Wie heute üblich sind die Reaktoren mit einer oder mehreren hermetisch dichten Hüllen von der Umwelt getrennt. Um den thermischen Wirkungsgrad zu erhöhen wird der Druck des Abdampfs durch die Kondensatpumpe unter den Atmosphärendruck gesenkt. Das Wasser kondensiert dann einige 10 K unter dem üblichen Siedepunkt von 373.15 K.

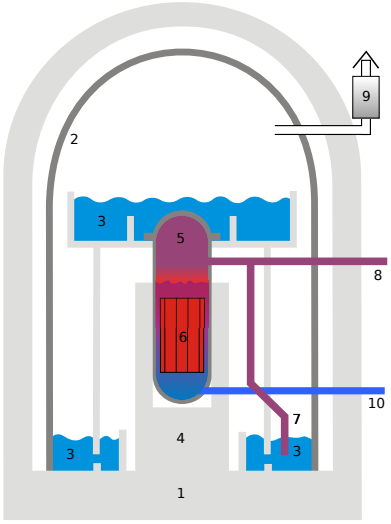


Robert Steffens, SVG: Marlus Gancher, Antonsusi, GFDL <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Boiling_water_reactor_german.svg

Abb. 11.10.: Prinzipbild eines Siedewasserreaktors wie er in Gundremmingen bis Ende 2021 in Betrieb sein wird (von Wikipedia, Robert Steffens, SVG: Marlus Gancher, Antonsusi, GFDL).

Block C in Gundremmingen ist der letzte noch bis Ende 2021 laufende Siedewasserreaktor (siehe Abbildung 11.10). Hier läuft das radioaktiv kontaminierte Wasser durch die Turbine. Dem Vorteil der durch die Dampfphase verbesserten Steuerbarkeit steht die Kontamination der Turbine und der Hilfsantriebe gegenüber. Das mit der Umgebung ausgetauschte Kühlwasser ist aber auch hier getrennt vom kontaminierten Kreislauf. Und weiter müssen die Steuerstäbe aktiv in den Reaktor eingefahren werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti



Stefan-Xp, CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reaktorgeb%C3%A4ude.svg

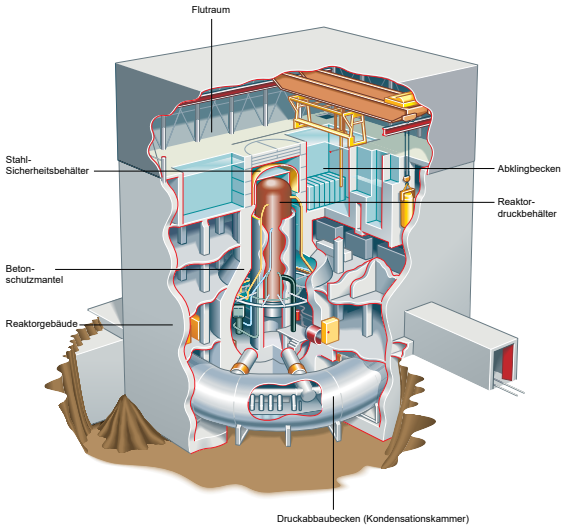
Abb. 11.11.: Schnitt durch ein Reaktorgebäude. 1: äussere Abschirmung, gegen äussere Einwirkungen, aus Beton mit Stahleinlagen, etwa 1.2 m stark, 2: Stahl-Sicherheitsbehälter (Containment), etwa 4 cm stark, 3: Druckabbaubecken, gefüllt mit Wasser, 4: Abschirmung der radioaktiven Strahlung, 5: Reaktordruckgefäss, aus 20 cm Spezialstahl, 6: gasdicht verschweisste Brennstäbe, aus 0.605 mm starkem Zirkonium enthaltend Uran-Pellets mit einem Durchmesser von 8.19 mm, 7: Dampfablassleitung, 8: Frischdampfabführung, 9: gefiltertes Druckentlastungssystem, 10: Frischwasserzuführung. (von Wikipedia Stefan-Xp).

Abbildung 11.11 zeigt einen Schnitt durch ein Reaktorgebäude mit den unterschiedlichen Hüllen. Das Wasserbecken oben dient auch zum Wechseln der abgebrannten Brennstäbe.

Abb. 11.12.: Containment eines Kernreaktors (eigenes Bild aus dem Deutschen Museum München)

Das Containment in Gundremmingen ist in dem Modell aus dem Deutschen Mu-

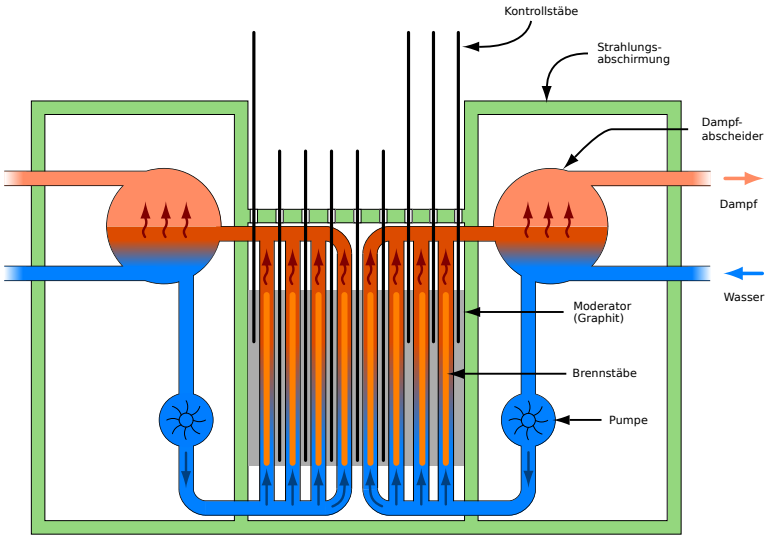
seum in München in Abbildung 11.12 gezeigt.



NRC, Public domain, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mark_I_Containment.svg

Abb. 11.13.: Siedewasserreaktor vom Typ Mark-I, wie er auch in Fukushima stand (von Wikipedia, NRC, Public domain).

Die Katastrophenreaktoren in Fukushima waren Siedewasserreaktoren so wie sie in Abbildung 11.13 gezeigt werden.

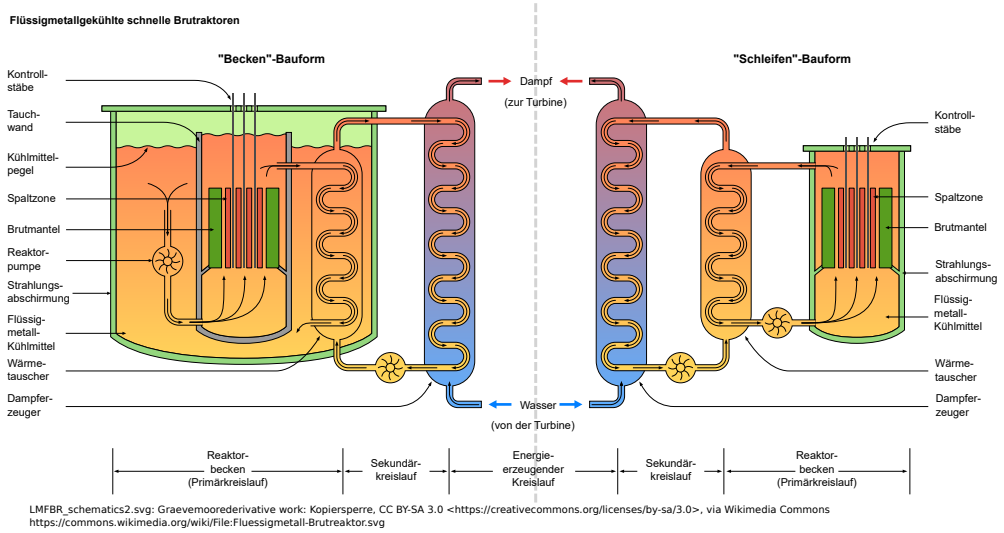


SoftwareHippie, Felix König, Fireice~commonswiki, Sakurambo, Emoscopes, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RBMK_reactor_schematic_de.svg

Abb. 11.14.: Schema eines graphitmoderierten Reaktors wie er in Tschernobyl verwendet wurde (von Wikipedia, SoftwareHippie, Felix König, Fireice commonswiki, Sakurambo, Emoscopes).

Abbildung 11.14 zeigt das Prinzip des graphitmoderierten Reaktors von Tschernobyl. Nachdem der Reaktor überkritisch wurde, platzten die Kühlwasserleitungen. Wasser im Kontakt mit erhitztem Graphit erzeugt das sogenannte Stadtgas (in Deutschland mit erhitzten Kohlen erzeugt). Diese leicht entzündliche Gas explodierte, zerstörte den Reaktor und verteilte radioaktive Stoffe bis in die hohe

Atmosphäre.



LMFBR_schematics2.svg: Graevemooderivative work: Kopiersperre, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fluessigmetall-Brutreaktor.svg

Abb. 11.15.: Schema von Brutreaktoren. Links die Beckenbauform, rechts die Schleifenbauform. (von Wikipedia, LMFBR_schematics2.svg: Graevemooderivative work: Kopiersperre).

Abbildung 11.15 zeigt das Prinzip eines Brutreaktors. Dieser erzeugt neben Wärme auch sehr viel mehr Plutonium wie übliche Reaktortypen. Plutonium kann für Brennelemente (Mischoxid) oder wie Uran für Bomben verwendet werden. Diese Reaktoren sind im Versuchsbetrieb, aber noch nicht in der grosstechnischen Produktion von elektrischer Energie.

11.2. Kernfusion

Die experimentellen Fusionsreaktoren versuchen die Coulombabstossung von Wasserstoff zu überwinden, so dass die beiden Kerne verschmelzen können. Die erhöhte Bindungsenergie von leichten Atomkernen mit grösseren Nukleonenzahlen setzt Energie frei, die über thermische Kraftwerke in elektrische Energie umgewandelt werden soll.
Eine mögliche Reaktion ist

$$ {}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3_1\mathrm{H} + p + 3\ \mathrm{MeV} \tag{11.2.1} $$

Weitere mögliche Reaktionen werden im folgenden Abschnitt 18 über die Sonne besprochen.
Damit die kinetische Energie die Coulomb-Barriere übertreffen kann muss gelten

$$ E_{kin} \geq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0(a_1+a_2)} \approx \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0(A_1^{1/3}+A_2^{1/3})} \tag{11.2.2} $$

Hier sind a_i die Radien der zu verschmelzenden Kerne approximiert durch $a_i = r_0 A_i^{1/3}$. Für Wasserstoff kann

$$ a_1 = a_2 = 1.5\ \mathrm{fm} $$

gesetzt werden. Weiter ist $Z_1 = Z_2 = 1$. Dann muss die kinetische Energie

$$E_{kin} \geq 0.5 \text{ MeV} = 8 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

sein. Dies entspricht einer Temperatur von

$$T \approx \frac{E_{kin}}{K} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Nun ist in Gleichung (11.2.2) $a \propto A^{\frac{1}{3}}$. Bei leichten Atomen ist $A \propto Z$. Mit einer hier nicht berechneten Konstante $\tilde{C}$ bekommen wir

$$E_{kin} \geq \tilde{C}(Z_1 Z_2)^{2/3} \tag{11.2.3}$$

Abbildung 11.16 zeigt die minimale kinetische Energie für verschiedene Z_1 und Z_2.

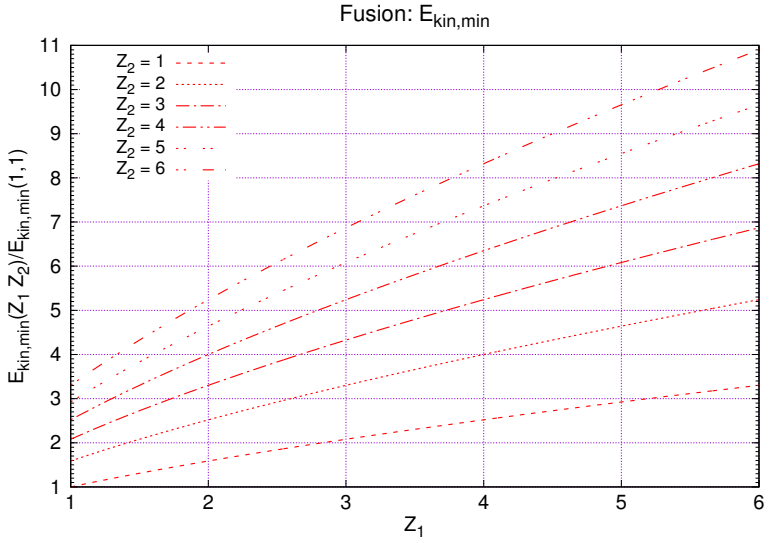


Abb. 11.16.: Minimale kinetische Energie nach Gleichung (11.2.3) zur Überwindung der Coulomb-Barriere, verglichen mit der minimalen kinetischen Energie bei zwei p.

11.2.1. Fusionsreaktoren

Um die Coulombabstossung zu überwinden werden erstens Gase im Plasmazustand (Kerne und Elektronen sind getrennt, aber im gleichen Raumbereich) verwendet. Zweitens sind Temperaturen von 10^7 K und mehr nötig um eine genügend grosse kinetische Energie zu erreichen. Es gibt aber keine Gefässe, die diese Temperaturen aushalten. Deshalb werden Magnetfelder verwendet um das Plasma einzuschliessen. Da es keine Felder über einigen T gibt, müssen die Geräte für den magnetischen Einschluss entsprechend gross sein. Für mehr Informationen siehe auch The ITER Organization [The18] und EUROfusion consortium+ [EUR18].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

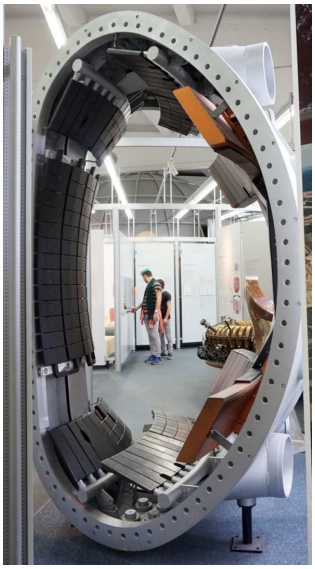


Abb. 11.17.: Segment des Tokamaks des Asdex Upgrade 2 (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ASDEX_Upgrade_model_2.jpg, Tiia Monto [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)])

Die grossen Forschungsgeräte für die Fusionsforschung verwenden heute Tokamaks. Abbildung 11.17 zeigt ein Segment des Tokamaks. Die Menschen im Hintergrund können als Längenmassstab dienen.

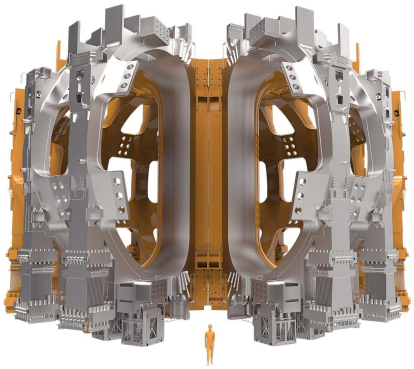


Abb. 11.18.: Grössenvergleich Mensch um ITER-Tokamak (Credit © ITER Organization, http://www.iter.org/)

Die Spulen des ITER (siehe Abbildung 11.18) sind um einiges grösser als die des Asdex Upgrade 2-Tokamaks in Abbildung 11.17. Die Form aber ist ähnlich.

Abb. 11.19.: Der Tokamak des ITER-Projektes (Credit © ITER Organization, http://www.iter.org/)

Der Tokamak des ITER-Projekts ist also einiges grösser, wie Abbildung 11.19 zeigt. Mit diesem Tokamak möchte man eine positive Energiebilanz erreichen.

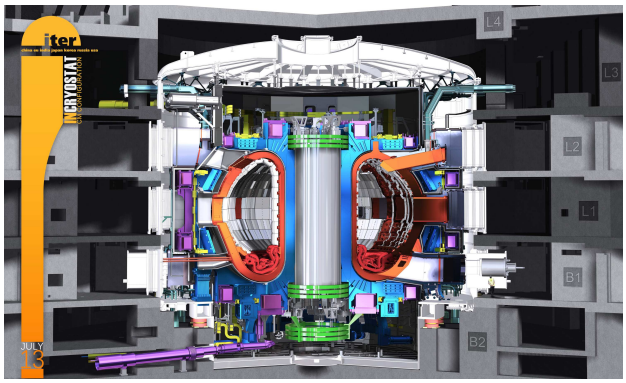


Abb. 11.20.: Darstellung des ITER-Tokamaks mit dem umgebenden Gebäude (Credit © ITER Organization, http://www.iter.org/).

Wie ein Kernreaktor muss auch ein Tokamak in ein Gebäude eingebaut werden. Abbildung 11.20 gibt einen Eindruck der Grösse.

11.2.1.1. Magnetfelder in einem Tokamak

Tokamaks verwenden eine Überlagerung toroidalen und poloidalen Magnetfeldern. Die oben gezeigten Spulen erzeugen ein toroidales Magnetfeld. Im Plasma kann über eine horizontal liegende Transformatorwindung ein Strom induziert werden. Dieser erzeugt die poloidale Komponente. Zusammen ergibt sich ein sich windendes Magnetfeld, das das Plasma eingeschlossen hält.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

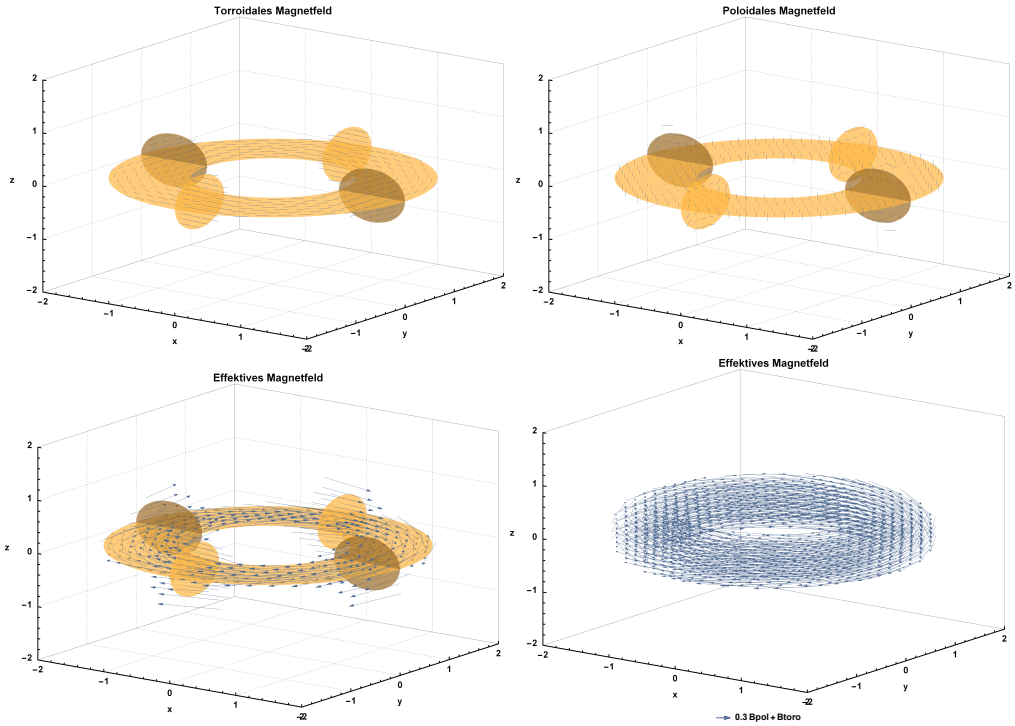


Abb. 11.21.: Darstellung der Magnetfelder in einem Tokamak. Oben links: Toroidales Magnetfeld, oben rechts: Poloidales Magnetfeld, unten links: Effektives Magnetfeld, unten rechts: effektives Magnetfeld ohne Darstellung der Ringgeometrie.

Die einzelnen normierten magnetischen Induktionen in Abbildung 11.21 wurden mit den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\frac{B_{tor}(x,y,z)}{B_0} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.2.4a}$$

$$\frac{B_{pol}(x,y,z)}{B_0} = \begin{pmatrix} -\frac{yz}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-1.5\right)^2+y^2}} \\ -\frac{1.z\left(\sqrt{x^2+y^2}-1.5\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-1.5\right)^2+y^2}} \\ \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}-1.5\right)^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{11.2.4b}$$

11.2.2. Weitere Konzepte für Fusionsreaktoren

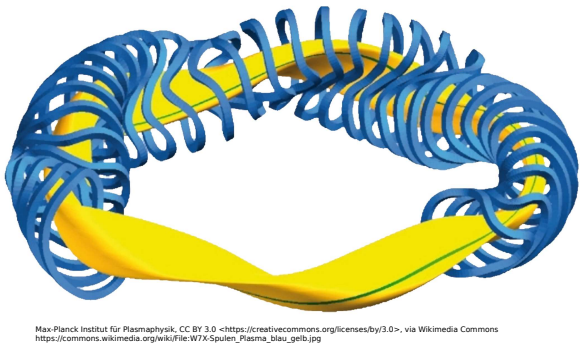


Abb. 11.22.: Prinzip des Stellerators (von Wikipedia, Max-Planck Institut für Plasmaphysik).

Je einfacher eine Maschine ist, desto besser lässt sie sich in der Regel beherrschen. Im Jahre 1958 stellte Lyman Spitzer [Spi58] das Konzept eines Stellerators vor. Dieses wurde optimiert und führte zum Wendelstein 7X Design in Abbildung 11.22. In einem Stellerator wird nur eine Sorte Spule verwendet. Die Spulen sind aber sehr viel komplizierter geformt.

11.2.3. Roadmap für Fusionsreaktoren

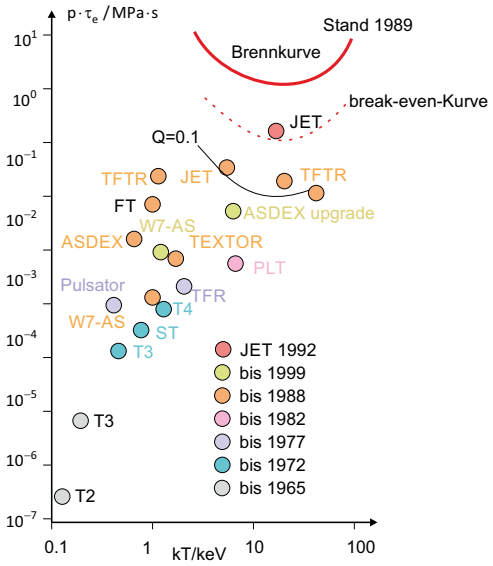


Abb. 11.23.: Roadmap der Kernfusion nach Pinkau et al. [PSW89].

Abbildung 11.23 zeigt eine schon etwas ältere Roadmap für die kontrollierte Fusion. Viel hat sich aber bis heute nicht an der Roadmap geändert.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

11.2.4. Transurane

Eine Art extrem endotherme Fusionsreaktion ist zur Herstellung von Transuranen notwendig. Wie im Abschnitt 11.2.1 diskutiert wird eine kinetische Energie benötigt, die die Coulomb-Barriere überwinden kann. Wichtig ist weiter, dass diese Energie in einen Compoundkern transferiert werden muss und dass sie dort genügend lange konzentriert bleibt bevor der Compoundkern zerfällt. Eine mögliche Reaktion (unter vielen) ist

$$^{22}_{10}\mathrm{Ne} + ^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow ^{260}_{102}\mathrm{No}^* \longrightarrow ^{256}_{102}\mathrm{No} + 4n \tag{11.2.5}$$

Die GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH [GSI21] ist eine der führenden Institutionen zur Erzeugung und zur Erforschung neuer Transurane.

11.3. Das Abfallproblem

Jedes gross- und auch kleintechnische Gerät zur ENERGIEUMWANDLUNG aus Masse erzeugt eine Vielzahl von aktivierten Kernen. Die nähern sich über einen oder mehrere Schritte dem Grundzustand an. Die Zeitkonstante kann von sehr viel kleiner als eine Sekunde bis zu Jahrmilliarden reichen. Dieser Abschnitt basiert auf dem Buch von K. Stierstadt, *Atommüll - wohin damit?* [Sti10a] und B. L. Cohen, „The Disposal of Radioactive Wastes from Fission Reactors“ [Coh77].
Ebenso entstehen instabile Kerne in der Medizin (Radiotherapie, Röntgengeräte) wie auch in der Technik (Röntgengeräte).

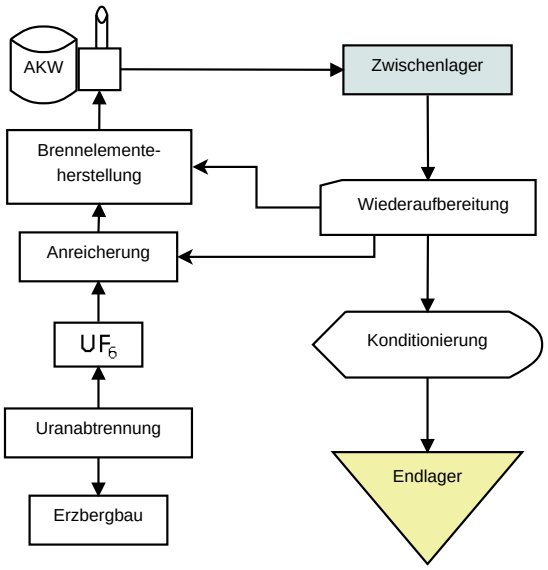


Abb. 11.24.: Abfallzyklus der Kernspaltung

Abbildung 11.24 zeigt schematisch den Stoffffluss aus Kernkraftwerken. Abgebrannte Brennelemente werden in einem ersten Schritt im Reaktorgebäude in ein Abklingbecken gebracht. Hochreines Wasser kühlt die Elemente, moderiert die Neutronen und schirmt die Arbeitenden von ionisierender Strahlung ab. Gleichzeitig kann über eine Spurenanalyse des Wassers diagnostiziert werden, ob die Brennelemente strukturell in Ordnung sind.

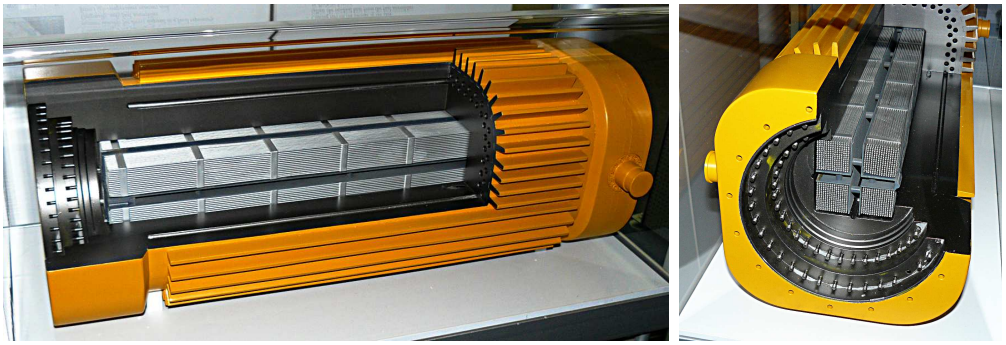


Abb. 11.25.: Modell eines Castors (eigenes Bild aus dem Deutschen Museum München)

Nachdem die kurzlebigen Atomkerne grösstenteils zerfallen sind, werden die Brennelemente unter Wasser in CASTOR-BEHÄLTER verpackt. Abbildung 11.25 zeigt ein Bild eines Castor-Modells. Castoren werden dann in einem Zwischenlager aufbewahrt, bis die Aktivität soweit gefallen ist, dass sie transportiert werden können. In einer Wiederaufbereitungsanlage wird Plutonium extrahiert und $^{235}_{92}\mathrm{U}$ wieder auf den Sollwert angereichert. Spaltprodukte werden abgetrennt und wieder in Castoren verpackt. Die Standorte der Kernkraftwerke bekommen dann die Spaltprodukte zur weiteren Lagerung zurück. Mangels einer gesellschaftlich akzeptierten Lösung zur Lagerung der aktivierten radioaktiven Abfälle werden auch diese Castoren auf Kernkraftwerksgelände gelagert. Plutonium wird entweder zusammen mit Uran zu Brennelementen verarbeitet, oder aber von Kernwaffenmächten zur Herstellung oder Wartung ihres Arsenals verwendet.

Neben diesen Abfallprodukten direkt aus dem Reaktor gibt es aus dem Druckgefäss, bei Siedewasserreaktoren aus den Turbinen, bei Röntgengeräten aus den Röntgenröhren und noch aus vielen anderen Geräten aktivierte Materialien. Fusionsreaktoren sind nach dem Betrieb radioaktiv kontaminiert, da die bei den Kernreaktionen entstehenden Neutronen, überflüssige schnelle Protonen aber auch γ-STRAHLUNG alle Materialien in der Nähe des TOKAMAKS aktivieren. Diese Materialien müssen genau so zwischengelagert werden. Sowohl für die Produkte aus Kernkraftwerken wie auch aus der Technik oder geplanten Fusionsreaktoren gibt es kein gesellschaftlich akzeptiertes Endlagerkonzept.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

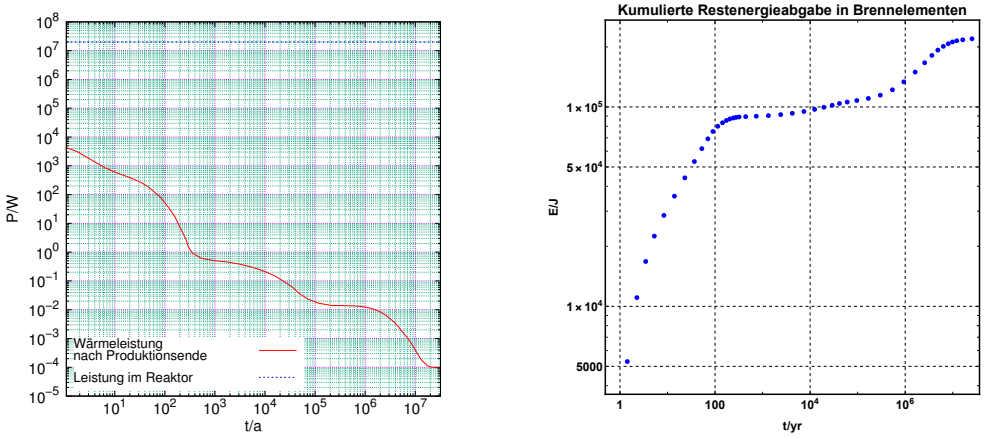


Abb. 11.26.: Links: Restwärmeleistung von Brennelementen nach B. L. Cohen [Coh77] und K. Stierstadt [Sti10a]. Rechts die kumulierte Restenergie über den berechneten Zeitraum.

Teil II.

Teilchenphysik

12. Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung

Die Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung sind die ersten Teilchen des Standardmodells, die hier in diesem Skript besprochen werden. Alle Teilchen des Standardmodells haben die folgenden Eigenschaften (siehe auch [Ble13, Kap. 9, p. 380]).

1. Alle Elementarteilchen können erzeugt oder vernichtet werden.

2. Jegliche Elementarteilchen des gleichen Typs sind vollkommen ununterscheidbar.

3. Zu allen Teilchen gibt es Antiteilchen, einige wenige sind ihr eigenes Antiteilchen.

Nach [Ble13, Kap. 9, p. 380] gelten die folgenden Aussagen der Quantenfeldtheorien

1. Materie und Strahlung sind Erscheinungsformen von Wellen oder, allgemeiner, Feldern.

2. Wellenfelder können im leeren Raum existieren, an- und abgeregt werden.

3. Die Wellenfelder sind quantisiert.

4. Wellenfelder bestehen aus Feldquanten, also aus Elementarteilchen.

5. Feldquanten sind ununterscheidbar.

6. Prozesse zwischen Elementarteilchen bewegen diese in neue Zustände. Diese Prozesse funktionieren ausschliesslich über die An- oder Abregung von Feldern, d.h. der Erzeugung oder Vernichtung (oder der Emission oder Absorption) von Elementarteilchen.

7. Jede elektromagnetische Wechselwirkung (hier), starke oder schwache Wechselwirkung (früher und später) beruht darauf, dass ein Teilchen ein weiteres Teilchen emittiert und dieses vom zweiten absorbiert wird.

8. die ausgetauschten Teilchen können nur virtuelle Zustände einnehmen, d. h. Zustände die den relativistischen Energiesatz $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ verletzen.

9. Ein von einem Teilchen ausgesandtes virtuelles Teilchen kann von diesem selbst wieder absorbiert werden. Dies ist die Selbstenergie oder Strahlungskorrektur. Jedes Teilchen ist also von einer Wolke aller möglichen virtuellen Teilchen umgeben. Es kann selber zeitweilig in einem virtuellen Zustand sein und dann anders auf externe Felder reagieren (Renormalisierung von Massen und Ladungen).

10. Auch das Vakuum kann spontan Teilchen in virtuellen Zuständen hervorbringen (Vakuumpolarisation, Vakuumfluktuation).

12.1. Photon

Das PHOTON ist das Quant der ELEKTROMAGNETISCHEN WECHSELWIRKUNG. Albert Einstein beschrieb in „Zur Quantentheorie der Strahlung“ [Ein17] die quantenmechanischen Prozesse der elektromagnetischen Strahlung. Insbesondere beschrieb er die INDUZIERTE EMISSION. Mehr dazu können Sie in O. Marti und M. Gonçalves *Atomphysik* [MG19, Kap. 3.2.2.1.] oder J. Bleck-Neuhaus *Elementare Teilchen* [Ble13, Kasten 9.1] erfahren. Grundlage Einsteins ist die BOLTZMANN-STATISTIK

$$\frac{n^*}{n_0} = e^{-E/(k_B T)} \tag{12.1.1}$$

und das PLANCKSCHE STRAHLUNGSGESETZ

$$\varrho_\nu(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi\,\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} d\nu \tag{12.1.2}$$

Weiter verwendet Albert Einstein die Quantenbedingung

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega \tag{12.1.3}$$

Ein angeregtes Elektron (auf einem Energieniveau oberhalb seines Grundzustandes) in einem Atom wird nach Albert Einstein durch den Prozess der SPONTANEN EMISSION abgeregt. Dieser Prozess hat die Rate

$$\frac{dn^*}{dt} = -An^* \tag{12.1.4}$$

und ist unabhängig von der Feldstärke des STRAHLUNGSFELDES. Angeregt wurde das Elektron durch die INDUZIERTE ABSORPTION. Dieser Prozess hat die Rate

$$\frac{dn^*}{dt} = +B\,\varrho(\nu, T)\,n \tag{12.1.5}$$

Die induzierte Absorption ist proportional zum Strahlungsfeld ϱ). Im Gleichgewicht muss die Summe aller Raten verschwinden:

$$\sum \left(\frac{dn^*}{dt}\right) = 0 \tag{12.1.6}$$

Die Gesetze der Absorption und der Emission müssen mit dem Planckschen Strahlungsgesetz vereinbar sein. Die Konsequenz ist:

- Die oben genannten Gesetze gelten nur für

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$h\nu \gg k_B T. \tag{12.1.7}$$

- Es existiert eine notwendige Bedingung:

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi\, h\, \nu^3}{c^3} \tag{12.1.8}$$

Albert Einstein erkannte, dass die Gesetze der optischen Absorption und der Emission mit dem Planckschen Strahlungsgesetz kompatibel werden, wenn ein dritter Prozess vorhanden ist:

$$\frac{dn^*}{dt} = -B\, \varrho(\nu, T)\, n^* \tag{12.1.9}$$

Dieser Prozess ist die von Albert Einstein theoretisch entdeckte induzierte Emission. Bei der Behandlung der Absorption und Emission kann die Frequenz des Wellenfeldes eliminiert werden ([Ble13, p. 387]). Wir ersetzen dabei $\nu \longrightarrow \frac{E}{h}$. Dann ist $\varrho(\nu, T)d\nu \longrightarrow$ die Dichte der Teilchen mit einer Energie im Intervall $dE = hd\nu$ multipliziert mit der dazugehörigen Energie $E = h\nu$.
Einsteins Gesetze könnten auch allein mit Teilchen ohne elektromagnetisches Feld formuliert werden.
Nach Paul Dirac wir der Strahlungs-Hamiltonoperator (siehe (3.2.3)) so geschrieben

$$\hat{\mathrm{H}}_{rad} = \sum_{k,\sigma} (\hat{\mathrm{n}}_{k,\sigma} + 1)\, \hbar\omega_k \tag{12.1.10}$$

Diese Gesetze sind auch heute die Grundlage der Behandlung elektromagnetischer Strahlung.
Das Photon hat einen Spin

$$s_{h\nu} = s_\gamma = \hbar. \tag{12.1.11}$$

Somit ist es ein Boson.

12.2. Elektron

Während das Photon das Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung ist, ist das Elektron das materiebehaftete und mit einer Ladung versehene leichteste Teilchen der Familie der Leptonen. Mehr dazu gibt es auch im Abschnitt 3.2.
Das Elektron hat eine Masse, eine Ladung und einen Spin von

$$m_e = 9.109\,383\,70 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 510.998\,950\ \mathrm{keV/c^2} \tag{12.2.1a}$$
$$q_e = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{12.2.1b}$$
$$s_{z,e} = \frac{1}{2}\hbar \tag{12.2.1c}$$

Das Elektron ist ein Fermion, genau wie alle anderen Teilchen mit halbzahligem Spin. Es besitzt ein mit dem Spin verknüpftes magnetisches Moment

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \frac{e}{2m_e} \boldsymbol{s} \tag{12.2.2}$$

mit dem g-Faktor

$$-g_s = 2.002\,319\,304\,362\,2. \tag{12.2.3}$$

Die Abweichung

$$a_e = \frac{g_s - 2}{2} = 0.001\,159\,652\,180\,273(28) \tag{12.2.4}$$

ist das ANOMALE MAGNETISCHE MOMENT. Schliesslich ist das ELEKTRON durch die LEPTONENZAHL

$$L = 1 \tag{12.2.5}$$

charakterisiert.

12.3. Feynman-Diagramme

Feynman-Diagramme dienen zur graphischen Veranschaulichung komplizierter quantenmechanischer Rechnungen. Sie erlauben, mit Hilfe der Graphentheorie quantenmechanische Berechnungen zu strukturieren und zu vereinfachen.

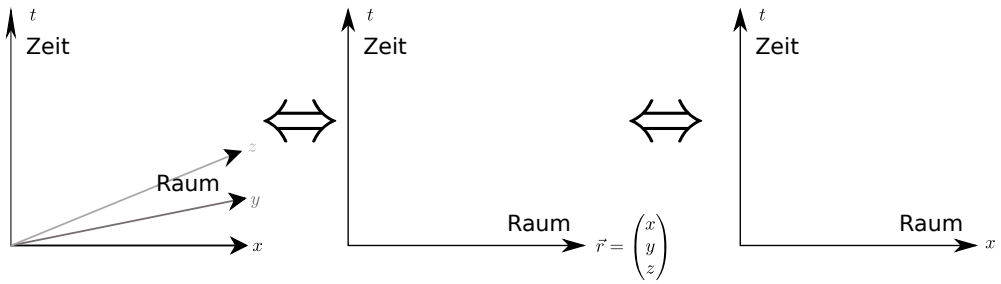


Abb. 12.1.: Koordinatensysteme bei Feynmandiagrammen. Links ist das vierdimensionale Raum-Zeit-Koordinatensystem gezeigt. In der Mitte sind die drei Raumkoordinaten als eine Achse gezeigt mit dem Vektor $\boldsymbol{r}$. Rechts die übliche Darstellung mit einer Raum- und der Zeitkoordinate.

Abbildung 12.1 zeigt das verwendete Koordinatensystem. Es lehnt sich an die Minkowski-Diagramme aus der speziellen Relativitätstheorie an. Die drei Raumkoordinaten werden als eine Koordinate angegeben. Häufig werden die Koordinaten nicht gezeichnet.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

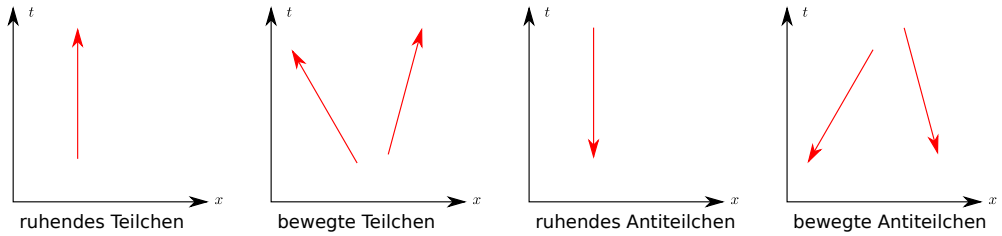


Abb. 12.2.: Weltlinien in Feynmandiagrammen. Links ist ein ruhendes Teilchen zu sehen. In der Mitte sind bewegte Teilchen gezeigt. Wenn wie hier $c = 1$ angenommen ist, können die Teilchen maximal um $\pm 45°$ verkippt sein. Die zweite Abbildung von rechts zeigt ein ruhendes Antiteilchen, ganz rechts sind zwei bewegte Antiteilchen. Formal laufen Antiteilchen in der Zeit zurück.

Teilchen werden in Feynmandiagrammen als Weltlinien im Sinne der Minkowski-Diagramme dargestellt (Abb. 12.2). Ein ruhendes Teilchen hat eine nach oben zeigende Weltlinie. Ein bewegtes Teilchen hat eine Weltlinie, die irgendwo zwischen «nach oben» und einem Winkel von $\pm 45°$ gegen die Senkrechte (t-Achse) entspricht. Antiteilchen laufen in Feynman-Diagrammen in der Zeit rückwärts. Wenn ein Teilchen und nein Antiteilchen annihilieren ergibt sich so eine Kette von gerichteten Strecken, die den gleichen Umlaufsinn haben. Weiter unten wird dies hoffentlich klarer. Ein ruhendes Antiteilchen hat eine nach unten laufende Weltlinie. Ein bewegtes Antiteilchen ist wieder um bis zu $\pm 45°$ zur senkrechten geneigt, aber jetzt von unten gezählt. Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und sind deshalb exakt um $\pm 45°$ geneigt.

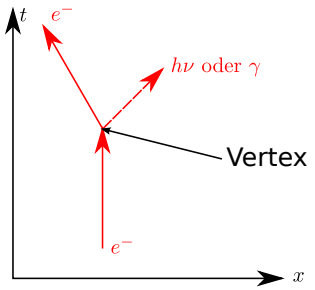


Abb. 12.3.: Ein Vertex ist ein Punkt, an dem sich eine Weltlinie in mehrere aufspaltet, oder umgekehrt. Hier emittiert ein ruhendes Elektron ein Photon nach rechts und bewegt sich dann wegen der Impulserhaltung nach links.

Wenn ein Teilchen mit einem anderen reagiert oder wie in Abbildung 12.3 ein Teilchen sich in zwei aufspaltet (hier emittiert ein Elektron ein Photon) wird der Verbindungspunkt an dem die Reaktion oder Aufspaltung passiert VERTEX (KNOTEN) genannt. Dieser Begriff stammt aus der Graphentheorie. An Vertices (die Mehrzahl von Vertex) geschehen Reaktionen, die Linien dazwischen transportieren die Teilchen. Es wird auch gesagt, dass die Teilchen propagiert wird. Deshalb werden die Verbindungslinien Propagatoren genannt.

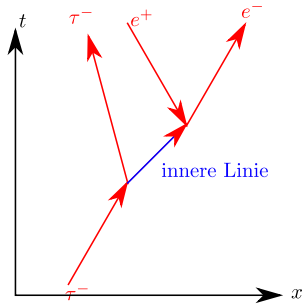


Abb. 12.4.: Eine Linie, die zwei Vertices (Knoten) verbindet heisst eine innere Linie.

Eine Linie, die zwei Vertices (Knoten) verbindet, wird eine INNERE Linie genannt (siehe Abbildung 12.4). In dieser Abbildung liegt der Input (Ausgangssituation) unten und der Output (Endsituation) oben. Die Linien, die vom Input zu Knoten oder von Knoten zu Outputs führen werden ÄUSSERE LINIEN genannt. Eine innere Linie liegt auch vor, wenn ein Vertex (Knoten) über eine Schlaufe mit sich selber verbunden ist. Alle inneren Linien werden zur Berechnung der Streuung benötigt, die äusseren Linien sind dazu irrelevant.

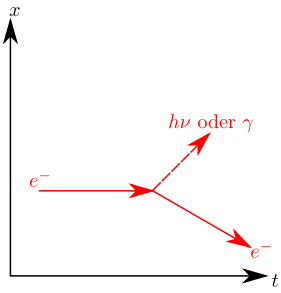


Abb. 12.5.: Orientierung der Feynman-Diagramme mit der Zeit nach rechts und dem Ort nach oben.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Feynman-Diagramme zu zeichnen. Abbildung 12.3 verwendete eine Orientierung analog zu den Minkowski-Diagrammen. Oftmals wenn mehrere Reaktionen hintereinander dargestellt werden sollen würde dies sehr hohe Diagramme ergeben. Deshalb ist es auch üblich, die Diagramme an der Winkelhalbierenden der beiden Achsen zu spiegeln. Die Zeit wird dann nach rechts dargestellt, die Raumkoordinaten nach oben (siehe Abbildung 12.5). Ich werde in diesem Skript beide Darstellungsarten verwenden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

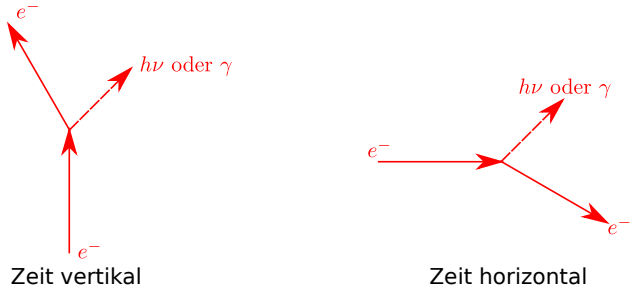


Abb. 12.6.: Feynman-Diagramme ohne Achsen. Links mit der Zeitachse nach oben, rechts mit der Zeitachse nach rechts.

Häufig werden Feynman-Diagramme ohne die Achsen gezeichnet. Abbildung 12.6 zeigt beide Orientierungsvarianten ohne Achsen. Der gezeigte Vorgang ist der gleiche wie in den Abbildungen 12.3 und 12.5. Bei dieser Art Darstellung muss die Achsenlage aus den dargestellten Vorgängen abgeleitet werden.

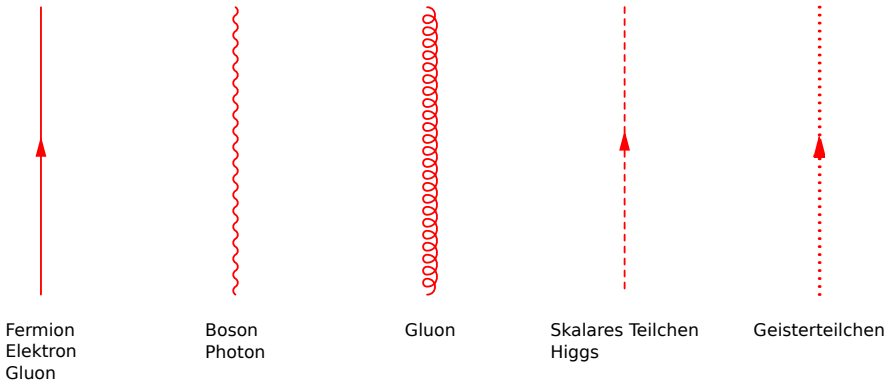


Abb. 12.7.: Teilchentypen in einem Feynman-Diagramm.

Die verschiedenen Arten von Teilchen in einem Feynman-Diagramm werden durch unterschiedliche Linientypen dargestellt. (siehe Abbildung 12.7. Fermionen werden durch eine gerade Linie mit einem Pfeil dargestellt (links, es könnte auch ein Elektron oder Quark sein). Bosonen werden durch Wellenlinien dargestellt (zweites Bild von links, es könnte auch ein Photon sein). Gluonen werden durch eine Spiralfeder dargestellt (mittleres Bild). Skalare Teilchen werden durch eine gestrichelte Linie symbolisiert (zweites Bild von rechts, es könnte auch ein Higgs sein). Geisterteilchen werden durch eine punktierte Linie dargestellt (ganz rechts).

F. van der Veken [Vek21] hat ein sogenanntes «Cheat Sheet» zu Feynman-Diagrammen zusammengestellt.

12.4. Zweite Quantisierung, Fortsetzung

Die folgenden Ausführungen folgen U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.3].

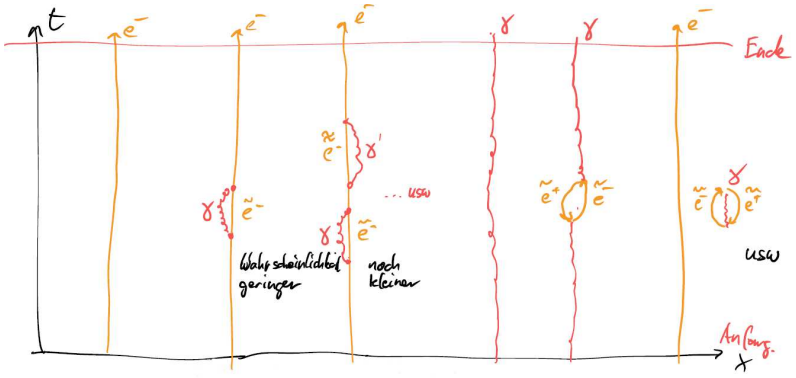


Abb. 12.8.: Feynman-Diagramme in höherer Ordnung (nach Richard Feynman)

Alle Graphen in Abbildung 12.8 sind mögliche Graphen. Aus der Beziehung

$$\Delta E \cdot \Delta T \leq \frac{\hbar}{2} \tag{12.4.1}$$

ersieht man, das für kurze Zeiten sehr viel Energie zur Verfügung stehen kann. Teilchen, für die die relativistische Energie-Impulsbeziehung verletzt ist, heissen VIRTUELLE TEILCHEN. So wird beim zweiten Elektron von links zwischenzeitlich ein Photon erzeugt und wieder absorbiert. Ausser der Energieerhaltung müssen alle anderen Erhaltungssätze gelten, also Impuls, Drehimpuls, Leptonenzahl und so weiter.

Auch ein Photon kann kurzfristig z. B. in ein Elektron-Positron aufspalten. Es ist sogar möglich dass induziert von einem Elektron ein Elektron-Positron-Photonen-Komplex entsteht ganz rechts in Abbildung 12.8.

Je mehr Knoten (VERTEX) es gibt, desto höher ist die Ordnung und desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit. Für eine Bewegung vom «Anfang» bis zum «Ende » müssen mit ihren Wahrscheinlichkeiten aufsummiert werden. Es zeigt sich, dass das Resultat unendlich ist.

Es gibt zwei Auswege:

1. Gekonnte Ignoranz: Wir sagen, dass das gemessene Elektron schon das mit allen Korrekturen ist, dass das reale Elektron nicht bekannt ist.

2. Gekonntes Abschneiden: Das Problem rührt vom Faktor $1/r$ im COULOMB-POTENTIAL her. Wir verwenden $1/(r+a)$ mit $a > 0$ und vermeiden damit die Summationsprobleme. Nach der Summation nehmen wir den Grenzwert $\lim_{a\to 0}$. Dieser Prozess heisst RENORMALISIERUNG.

   Möchte man sanft abschneiden, kann auch der Faktor $\exp\left(-(r-r_0)/a\right)$ verwendet werden, wieder mit dem Grenzwert $\lim_{a\to 0}$.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

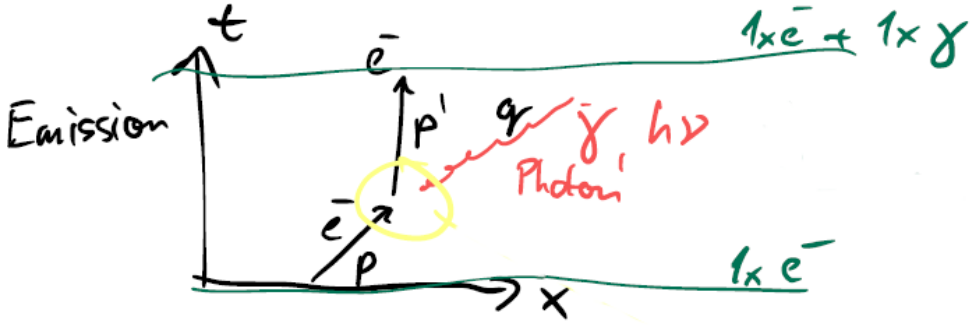


Abb. 12.9.: Emission im Feynmanbild (nach Richard Feynman).

Bei der Emission eines Photons (siehe Abbildung 12.9) wird ein Elektron mit dem Impuls p vernichtet ($\hat{a}_p$) und eines mit dem Impuls $p-q$ erzeugt ($\hat{a}^\dagger_{p-q}$). Gleichzeitig wird ein Photon mit dem Impuls q erzeugt ($\hat{c}^\dagger_q$). Das führt auf den Emissionshamiltonoperator

$$\hat{H}_{Emission} = \hat{a}^\dagger_{p-q}\hat{a}_p\hat{c}^\dagger_q \tag{12.4.2}$$

Am Anfang (unten) und am Ende (oben) haben wir reelle Teilchen, zwischendurch nicht messbare virtuelle Teilchen.

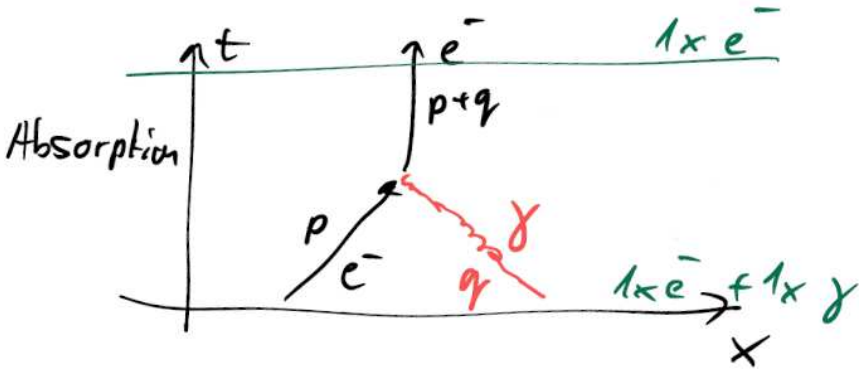


Abb. 12.10.: Absorption im Feynmanbild (nach Richard Feynman)

Analog kann die Absorption eines Photons verstanden werden (siehe Abbildung 12.10). es wird ein Elektron mit dem Impuls p vernichtet ($\hat{a}_p$) und eines mit dem Impuls $p+q$ erzeugt ($\hat{a}^\dagger_{p+q}$). Gleichzeitig wird ein Photon mit dem Impuls q vernichtet ($\hat{c}_q$). Das führt auf den Absorptionshamiltonoperator

$$\hat{H}_{Absorption} = \hat{a}^\dagger_{p+q}\hat{c}_q\hat{a}_p \tag{12.4.3}$$

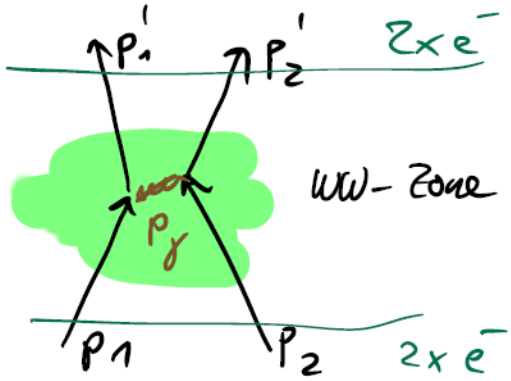


Abb. 12.11.: Streuung im Feynmanbild (nach Richard Feynman)

Zusammen ergibt sich der Streuprozess zweier Elektronen. ein Elektron sendet ein Photon mit dem Impuls q aus und ändert seinen eigenen Impuls um den gleichen Betrag. Ein zweites Elektron absorbiert das Photon und nimmt dessen Impuls q auf.
In Gleichungen lautet der Streuprozess:

$$\boldsymbol{p}_{p_1} = \boldsymbol{p}_{p_1'} + \boldsymbol{p}_\gamma \qquad E_{p_1} = E_{p_1'} + E_\gamma \qquad \text{Emission} \tag{12.4.4a}$$

$$\boldsymbol{p}_{p_2} + \boldsymbol{p}_\gamma = \boldsymbol{p}_{p_2'} \qquad E_{p_2} + E_\gamma = E_{p_2'} \qquad \text{Absorption} \tag{12.4.4b}$$

Addition

$$\boldsymbol{p}_{p_1} + \boldsymbol{p}_{p_2} = \boldsymbol{p}_{p_1'} + \boldsymbol{p}_{p_2'} \qquad E_{p_1} + E_{p_2} = E_{p_1'} + E_{p_2'} \tag{12.4.4c}$$

Im Schwerpunktssystem ist $\boldsymbol{p_1} = -\boldsymbol{p_2}$ (das ist die Definition des Schwerpunktssystem). Dann ist auch $\boldsymbol{p_1'} = -\boldsymbol{p_2'}$. Damit ist aber $E_\gamma = 0$. Andererseits muss der Impuls des Photons nicht null sein, wenn der Streuwinkel $\theta \neq 0$ ist:

$$\boldsymbol{p}_\gamma = \boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_1'} = \boldsymbol{p_2'} - \boldsymbol{p_2} \overset{\theta \neq 0}{\neq} 0 \tag{12.4.5}$$

Dann ist mit dem Cosinussatz

$$\left|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_1'}\right| = \sqrt{\boldsymbol{p_1}^2 - 2\boldsymbol{p_1}\boldsymbol{p_1'}\cos(\theta) + \boldsymbol{p_1'}^2} \tag{12.4.6}$$

oder

$$\left|\boldsymbol{p}_\gamma\right| = |\boldsymbol{p_1}| \sqrt{2\left(1 - \cos(\theta)\right)} \tag{12.4.7}$$

Damit müsste die klassisch quantenmechanische Energie des Photons

$$E_{\gamma,\,klass} = c\,|\boldsymbol{p_1}| \sqrt{2\left(1 - \cos(\theta)\right)} \neq 0 \tag{12.4.8}$$

Wir können

$$E_\gamma = E_{\gamma,\,klass} + \Delta E_\gamma \tag{12.4.9}$$

schreiben. $|\Delta E_\gamma|$ ist dabei die geborgte Energie. die Wahrscheinlichkeit, ein solches

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Teilchen zur Zeit t zu finden ist

$$P(t) = \frac{|\Delta E|}{\hbar} \exp\left(-\frac{|\Delta E|}{\hbar} t\right) dt \tag{12.4.10}$$

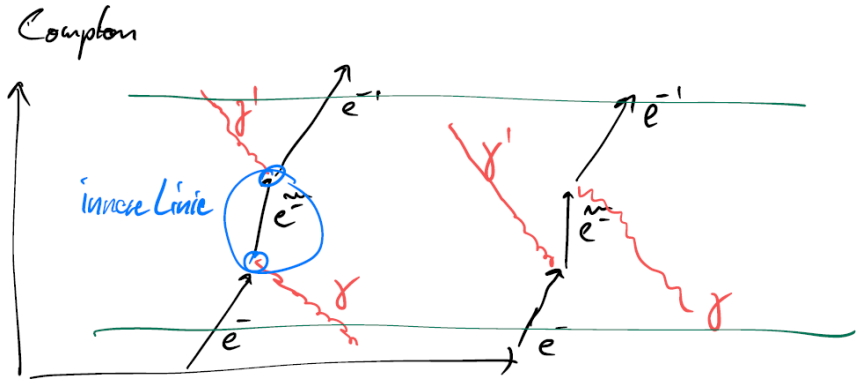


Abb. 12.12.: COMPTONEFFEKT im Feynmanbild (nach Richard Feynman).

12.5. Virtuelle Teilchen

M. McIrvin [McI94] gibt in seiner FAQ über virtuelle Teilchen eine gute Beschreibung, was damit gemeint ist. Er erklärt insbesondere, wie attraktive Kräfte (und auch die intuitiv einfachen repulsiven Kräfte) zustande kommen. Die folgende Darstellung stammt aus dieser Arbeit. Wir nehmen an, dass das Photon hier von links kommt und dass das Teilchen am Ort rechts ein Positron ist.

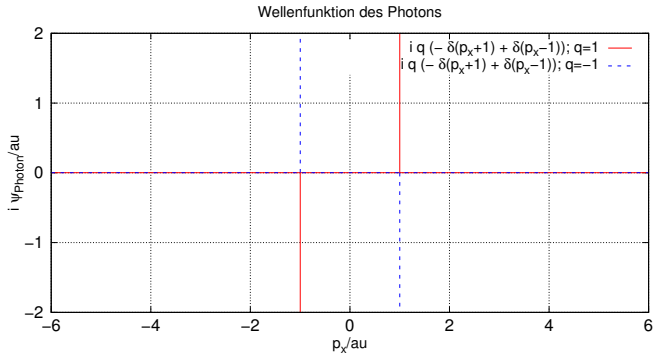


Abb. 12.13.: Vereinfachte Wellenfunktion im Impulsraum von Photonen, die von einem Elektron mit der Ladung $q = \pm e$ ausgehen (nach [McI94]).

Das aussendende Teilchen links in Abbildung 12.13 hat entweder eine positive Ladung (rote Farbe) oder eine negative Ladung (blau).

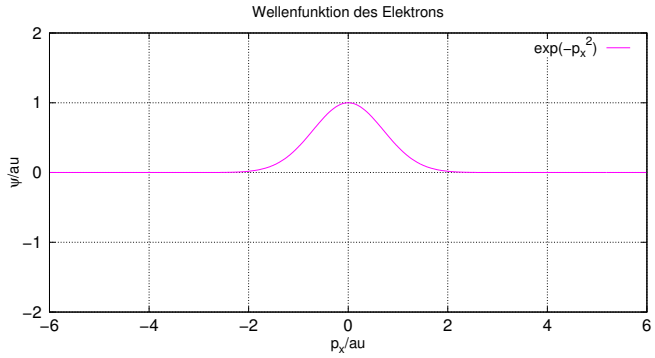


Abb. 12.14.: Wellenfunktion eines Elektrons im Impulsraum (nach [McI94]).

Abbildung 12.14 zeigt die Wellenfunktion des empfangenden Teilchens.

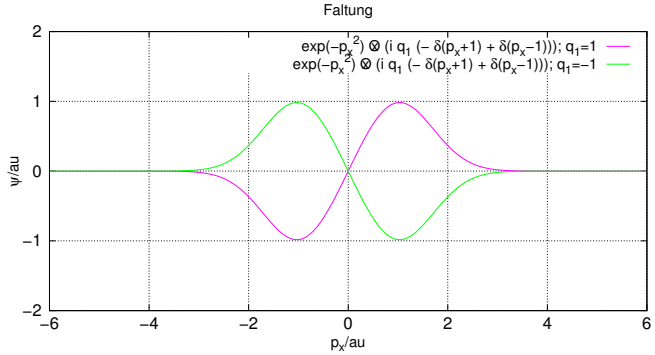


Abb. 12.15.: Die Wechselwirkung ist durch die Faltung der Elektronenwellenfunktion mit der Photonenwellenfunktion gegeben (nach [McI94]).

Die Wechselwirkung (Faltung) der Wellenfunktionen des Photons aus der Abbildung 12.13 mit dem Positron aus Abbildung 12.14 ist in Abbildung 12.15 gezeigt.

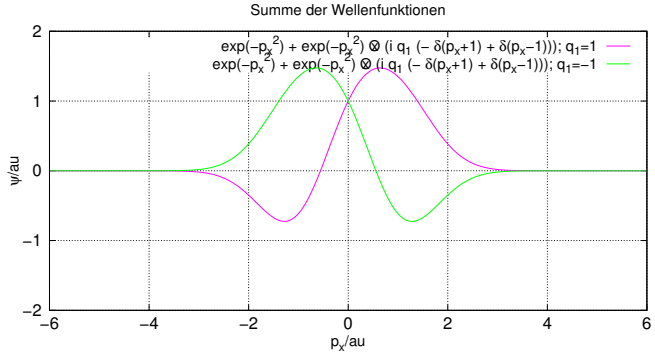


Abb. 12.16.: Addition der nicht wechselwirkenden Wellenfunktion des Elektrons mit der wechselwirkenden Wellenfunktion erster Ordnung (nach [McI94]).

Die Überlagerung der ungestörten Wellenfunktion aus Abbildung 12.14 mit der

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

gestörten Wellenfunktion erster Ordnung aus Abbildung 12.16 ergibt die asymmetrische Wellenfunktion aus Abbildung 12.16.

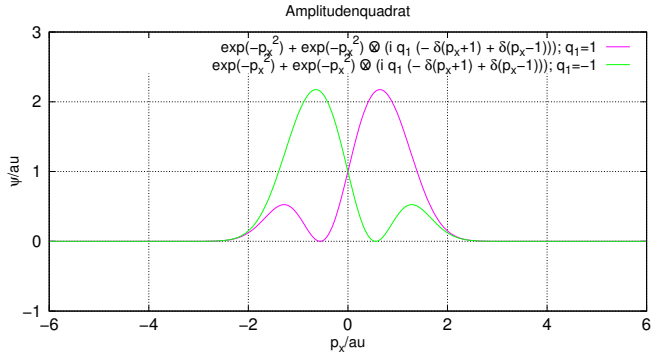


Abb. 12.17.: Amplitudenquadrat (Erwartungswert) der Summe der nicht wechselwirkenden Wellenfunktion des Elektrons mit der wechselwirkenden Wellenfunktion erster Ordnung (nach [McI94]).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Resultates ist in Abbildung 12.17 gezeigt. So wie unsere Annahmen waren ergibt sich für ein positives sendendes Teilchen ein Nettompuls nach rechts, also die Abstossung. Für ein negatives sendendes Teilchen ergibt sich ein Nettoimpuls nach links, die Anziehung. In der Rechnung hier bis und mit erster Ordnung wurden einige Feinheiten übergangen. Die korrekte Rechnung ist viel komplizierter.
Abbildungen 12.15 bis 12.17 berücksichtigen nur die möglichen Feynmandiagramme bis zur ersten Ordnung. M. McIrvin [McI94] erklärt, dass man aber alle Diagramme und alle Symmetrien berücksichtigen. Dann stellt sich heraus, dass bei der Summation einer geraden Anzahl virtueller Photonen immer einen Faktor $+1$ ergibt, während die Summation einer ungeraden Anzahl von Photonen je nachdem ob beide Teilchen die gleiche Ladung haben oder nicht dem Faktor $+1$ oder -1 ergeben. Durch diese Interferenzen ergibt sich dann die Abstossung gleichnamiger Ladungen und die Anziehung ungleichnamiger Ladungen. Nur durch die Voraussetzung einer unendlichen Summe über alle virtuellen Photonen der beiden geladenen Teilchen umgeht man das Problem, dass das eine Teilchen ja nicht weiss, dass es jetzt in eine Kraftwechselwirkung eintreten wird.
Die Ausführung hier sollte die Ideen erläutern. Sie ist aber keineswegs ein Rezept zur Berechnung. Fragen Sie die Theoretikerin oder den Theoretiker Ihres Vertrauens!
Die Arbeit von O. Passon; T. Zügge und J. Grebe-Ellis „Pitfalls in the teaching of elementary particle physics“ [PZG18] beleuchtet Probleme dieses Zugangs insbesondere beim Unterricht in Gymnasien.

12.6. Rechnen mit Feynman-Diagrammen

In der Quantenelektrodynamik sind Teilchen und Felder duale Objekte. Deshalb kann die elektromagnetische Wechselwirkung gegeben durch das Feld $(\phi, A_x, A_y, A_z)^T$ durch ein Teilchen ersetzt werden.
Richard Feynman fand eine graphische Methode zur Berechnung der unendlichen

Summen. Um die Streuung zu berechnen geht man nach U. Ellwanger [Ell15, Kap. 5.3], J. Bleck-Neuhaus [Ble13] oder T. G. Abbott [Abb21] wie folgt vor:

1. Jeder Vertex (Punkt, in dem ein Photon absorbiert oder emittiert wird) trägt eine Kopplungskonstante g und eine δ-Distribution (oder -Funktion) bei. Letztere erzwingt die Erhaltung von Energie und Impuls.

   Elektron-Photon:
   $$g = \frac{q_e}{\sqrt{\varepsilon_0}\, c\, \hbar} \tag{12.6.1}$$

2. Jede innere Linie (virtuelles Teilchen) trägt einen Faktor namens Feynman-Propagator (nach Richard Feynman)
   $$\mathcal{P}(\tilde{E}, \tilde{p}) = -\hbar \left[\tilde{E}^2 - \left((c\,\tilde{p})^2 + \tilde{m}^2 c^4\right)\right]^{-1} \tag{12.6.2}$$

   bei. $[(\tilde{E}^2 - \tilde{p}^2 c^2) - \tilde{m}^2 c^4]^{-1}$ heisst der Energienenner. $\tilde{m}$ ist die **reelle** Masse des virtuellen Austauschteilchens. $\tilde{E}$ und $\tilde{p}$ sind Energie und Impuls im **virtuellen** Zustand.

   Bei virtuellen Teilchen ist $\tilde{E}^2 \neq \tilde{p}^2 c^2 + \tilde{m}^2 c^4$! Der Feynman-Propagator gibt also die Virtualität oder die Abweichung der Gesamtenergie vom klassischen Wert an. Oftmals ist für das virtuelle Teilchen $\tilde{E} = 0$.

3. Für jeden Vertex multipliziert man das Resultat mit dem jeweiligen Kopplungsfaktor g. Für jede innere Linie wird mit einem entsprechenden Feynman-Propagator $\mathcal{P}$ multipliziert.

4. Am Ende wird über alle nicht beobachtbaren Variablen integriert. Damit erhält man das Übergangsmatrixelement M_{fi} für Feynmans Goldene Regel.

5. Feynmans Goldene Regel ergibt die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit: $\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_E$, wobei $\rho_E = dN/dE$ die Zustandsdichte ist.

6. Wegen den δ-Funktionen bleibt nach der Integration der sogenannte Energienenner $([(\Delta\tilde{E})^2 - (\Delta\tilde{\boldsymbol{p}})^2 c^2] - \tilde{m}^2 c^4)^{-1}$ übrig. $\Delta\tilde{E}$ und $\Delta\tilde{\boldsymbol{p}}$ sind die Energie- und Impulsüberträge.

7. Die Streuamplitude A ist das Produkt der Kopplungsfaktoren, der Feynman-Propagatoren und des Faktors, der für $|\boldsymbol{p_i}|^2 \ll m_e^2 c^2$ die Grösse $4 m_e^2 c^3 \hbar$ hat.

8. Der differenzielle Streuquerschnitt ist dann $d\sigma/d\Omega = P = A^2 (256\pi^2 m_e^2)^{-1}$.

Abbildung 12.18 zeigt die Anwendung für die Streuung von einem Elektron an einem Positron.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

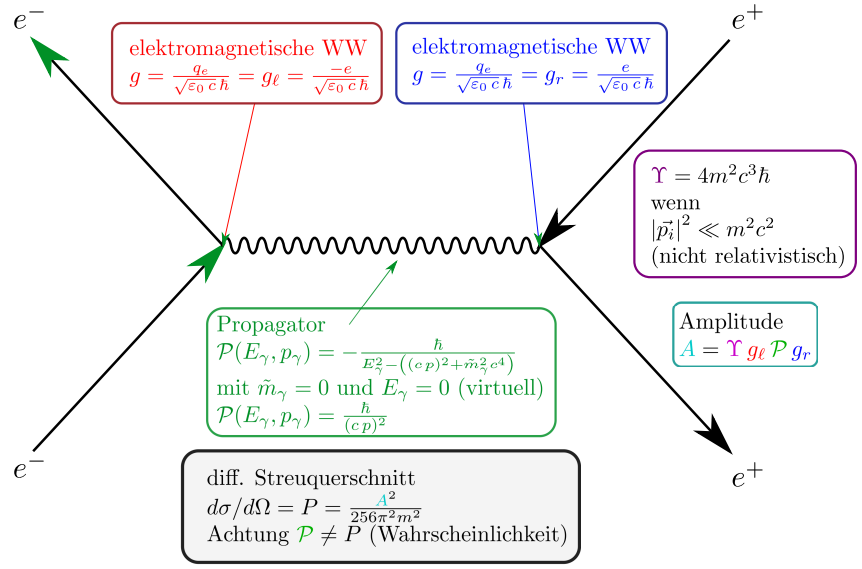


Abb. 12.18.: Berechnung eines einfachen Feynman-Diagramms für die elektromagnetische Wechselwirkung.

Wenn das Austauschteilchen die schwache Wechselwirkung repräsentiert, könnte die Berechnung wie in Abbildung 12.19 gehen.

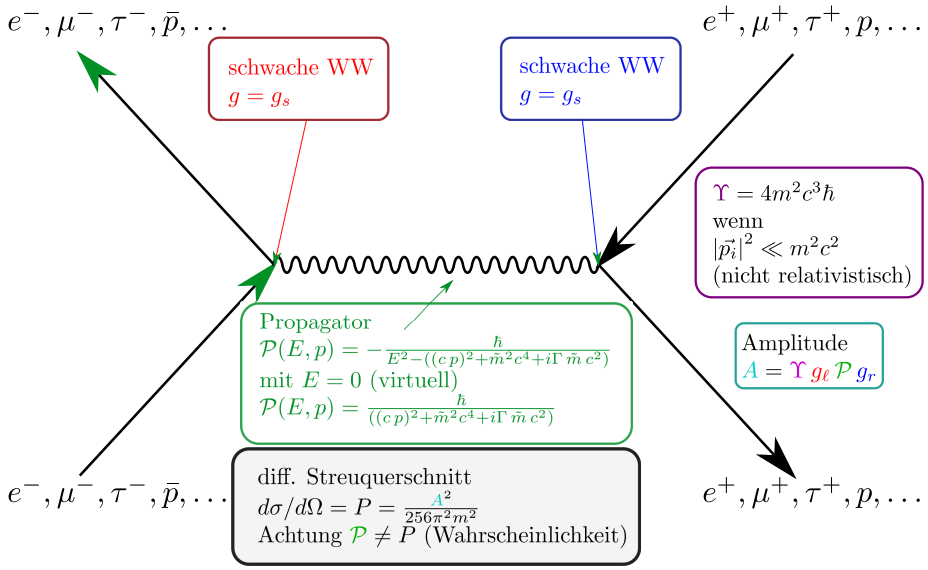


Abb. 12.19.: Berechnung eines einfachen Feynman-Diagramms für die schwache Wechselwirkung.

In T. G. Abbott [Abb21] findet sich auch eine Begründung der Berechnung nach Richard Feynman. Weitere ausgezeichnete Informationen finden Sie bei [Pot21], https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html ([Pot21, Lecture 5]). A. J. Barr [Bar21] könnte auch helfen.

12.7. Weitere Leptonenfamilien

Das erste bekannte Lepton war das Elektron. Es folgte das Positron, vorhergesagt von Paul Dirac und Ralph Fowler [DF28] und erstmals gemessen von Charles Anderson [And33].

12.7.1. Myonen

Myonen μ wurden in Untersuchungen kosmischer Strahlung zuerst gefunden (siehe R. Brown u. a. [Bro+49]). Diese Teilchen gehören zur Familie der Leptonen.

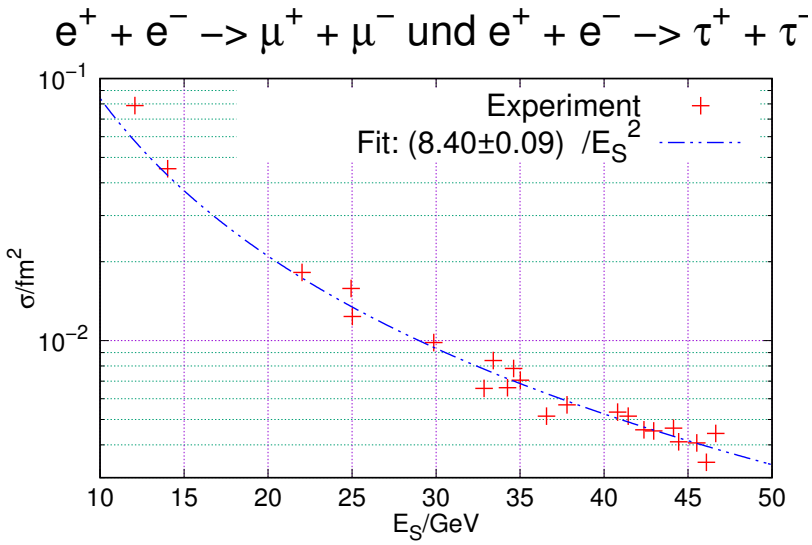


Abb. 12.20.: Stösse von Elektronen und Positronen für die Reaktionen nach Myonen oder nach Tau (nach W. Demtröder [Dem10, abb. 7.4]).

Abbildung 12.20 zeigt die Streuquerschnitte der Reaktionen $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ sowie der Reaktion $e^- + e^+ \to \tau^- + \tau^+$.
Die Eigenschaften des Myons sind:

- Masse $m_\mu = 1.883\,531\,6 \cdot 10^{-28}$ kg $= 105.658\,38$ MeV/c^2
- Ladung $q_\mu = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19}$ C
- Spin $s_{z,\mu} = \frac{1}{2}\hbar$

  Das Myon ist ein Fermion.
- Magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}_{\mu,s} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu}\boldsymbol{s}$ mit $-g_\mu = 2.002\,331\,841\,4$
- anomales magnetisches Moment (Theorie) $a_\mu = 0.001\,165\,918\,1$
- anomales magnetisches Moment (Experiment) $a_\mu = 0.001\,165\,920\,61(41)$ J. Pretz und [Abi+21; Alb+21a; Alb+21b; Pre21]
- Leptonenzahl $L = 1$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

In der Literatur wird oftmals nicht g sondern

$$a = \frac{g-2}{2} \tag{12.7.1}$$

angegeben. Dann ist

$$g = 2\,(1+a) \tag{12.7.2}$$

12.7.2. Tau

Das schwerste (und kurzlebigste) Lepton ist das Tau. Seine Eigenschaften sind:

- Masse $m_\tau = 3.168 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1.777$ GeV/c^2
- Ladung $q_\tau = -e = -1.602\,18 \cdot 10^{-19}$ C
- Spin $s_{z,\tau} = \frac{1}{2}\hbar$

  Das Tau ist ein Fermion.
- anomales magnetisches Moment (Experiment) $a_\tau = -0.052$ bis 0.013 Y. Özgüven u. a. [Özg+17]
- Magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}_{\tau,s} = -g_\tau \frac{e}{2m_\tau}\boldsymbol{s}$ mit $g_\tau = -1.896$ bis 2.026 Y. Özgüven u. a. [Özg+17]
- Leptonenzahl $L = 1$

12.7.3. Symmetrien der Leptonenfamilien

Die bekannten Leptonen zeigen die gleiche Symmetrie wie gewisse Quarks. Dies legte nahe, die Leptonen wie die Quarks in FAMILIEN einzuteilen. Leptonen können mit der SCHWACHEN WECHSELWIRKUNG die Familie wechseln. Mögliche Reaktionen sind:

$$e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+ \tag{12.7.3a}$$
$$e^- + e^+ \longrightarrow \tau^- + \tau^+ \tag{12.7.3b}$$
$$\tau^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau \tag{12.7.3c}$$
$$\tau^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau \tag{12.7.3d}$$
$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \tag{12.7.3e}$$
$$\tau^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \tag{12.7.3f}$$
$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \tag{12.7.3g}$$
$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{12.7.3h}$$

Die Massen der drei ladungsbehafteten Leptonen sind

$$m_\tau = 1777 \text{ MeV}/c^2 \tag{12.7.4a}$$
$$m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2 \tag{12.7.4b}$$
$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \tag{12.7.4c}$$

Die Zahl der Leptonen ist erhalten, und zwar einzeln für alle Leptonenfamilien.

Elektronen-Familie $\sum L_e = \text{const}$

Myonen-Familie $\sum L_\mu = \text{const}$

Tau-Leptonen-Familie $\sum L_\tau = \text{const}$

Die folgenden Reaktionen sind Beispiele für die Erhaltung der Leptonenzahl

$$n \longrightarrow p + e + \overline{\nu} \qquad L_e \qquad 0 = 0 + 1 - 1 \tag{12.7.5a}$$
$$e^+ + e^- \longrightarrow \nu + \overline{\nu} \qquad L_e \qquad (-1) + 1 = 1 + (-1) \tag{12.7.5b}$$
$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e \qquad L_e \qquad 0 = 1 + 0 + (-1)$$
$$L_\mu \qquad 1 = 0 + 1 + 0 \tag{12.7.5c}$$
$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \nu_\tau + \overline{\nu}_\mu \qquad L_\mu \qquad 0 = 1 + 0 + (-1)$$
$$L_\tau \qquad 1 = 0 + 1 + 0 \tag{12.7.5d}$$

Die Erhaltung der Leptonenzahl L einer Familie mit den durch i numerierten Teilchen wird so formuliert:

$$\sum_i L_i = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta L = 0 \tag{12.7.6a}$$

Beispiel

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_e \tag{12.7.6b}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

	Lepton	Leptonenzahl	m/MeV	Lebensdauer
1	e^-	$L_e = +1$	0.511	∞
	e^+	$L_e = -1$	0.511	∞
	ν_e	$L_e = +1$	$< 10^{-6}$	∞
	$\bar{\nu}_e$	$L_e = -1$	$< 10^{-6}$	∞
2	μ^-	$L_\mu = +1$	105.7	$2.2 \cdot 10^{-6}$ s
	μ^+	$L_\mu = -1$	105.7	$2.2 \cdot 10^{-6}$ s
	ν_μ	$L_\mu = +1$	< 0.25	∞?
	$\bar{\nu}_\mu$	$L_\mu = -1$	< 0.25	∞?
3	τ^-	$L_\tau = +1$	1777	$3 \cdot 10^{-13}$ s
	τ^+	$L_\tau = -1$	1777	$3 \cdot 10^{-13}$ s
	ν_τ	$L_\tau = +1$	< 35	∞?
	$\bar{\nu}_\tau$	$L_\tau = -1$	< 35	∞?

Tab. 12.1.: Leptonenfamilien

Tabelle 12.1 zeigt nochmals eine Zusammenfassung der Leptonenfamilien.

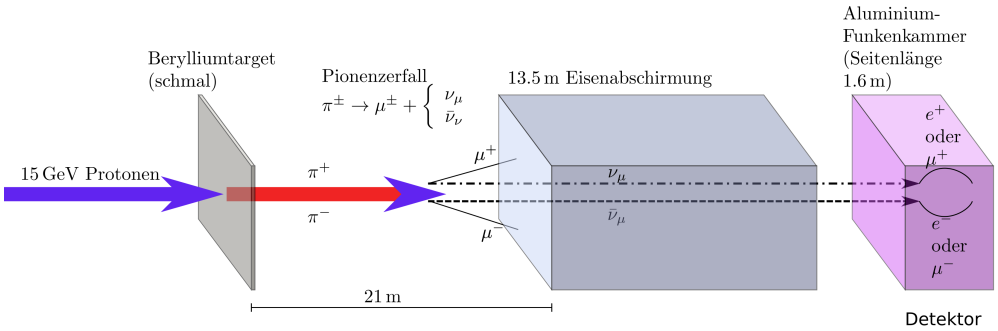


Abb. 12.21.: Aufbau der Apparatur zum Nachweis der Existenz zweier Neutrinosorten nach [Dan+62] und [Dem10].

Abbildung 12.21 zeigt eine Skizze des experimentellen Aufbaus, mit dem G. Danby u. a. (Artikel „Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos“ [Dan+62]) zeigen konnten, dass es mindestens zwei Neutrinosorten gibt, also ν_μ und ν_e. Der Nachweis beruht auf der Tatsache, dass Pionen in Myonen zerfallen mit den Reaktionen

$$\pi^+ m \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \tag{12.7.7a}$$
$$\pi^+ m \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu. \tag{12.7.7b}$$

Das heisst, in den Reaktionen nach Gleichung (12.7.7) werden da Myonneutrino ν_μ oder sein Antiteilchen $\overline{\nu}_\mu$ erzeugt. Die Myonen werden von der Eisenabschirmung blockiert. Einige wenige Neutrinos reagieren mit den Neutronen oder Protonen von Aluminium der Funkenkammer:

$$\nu_\mu + n \longrightarrow \mu^- + p \tag{12.7.8a}$$
$$\overline{\nu}_\mu + p \longrightarrow \mu^+ + n.s \tag{12.7.8b}$$

Wären Elektronenneutrinos und Myonenneutrinos gleich, müssten nach [Dan+62, Gleichungen (2) und (3)] auch die Reaktionen

$$\nu_\mu + n \longrightarrow e^- + p \tag{12.7.9a}$$
$$\overline{\nu}_\mu + n \longrightarrow e^+ + n \tag{12.7.9b}$$

auftreten. Die Bahnkrümmungen der geladenen Teilchen im Magnetfeld der Funkenkammer lassen aber eindeutig die Massen von Myonen und Elektronen unterscheiden. G. Danby u. a. [Dan+62] fanden nur Myonen und schlossen deshalb, dass Elektronenneutrinos sich von Myonneutrinos unterscheiden.
Weil Elektronen- und Myonneutrinos unterschiedlich sind kann aus den Reaktionen auch die Leptonenzahl der Neutrinos abgeleitet werden. Aus dem Zerfall des Neutrons $n \longrightarrow p + \beta^- + \overline{\nu}_e$ folgt $L(e^-) = 1$

$$L(\overline{\nu}_e) = -1 \tag{12.7.10}$$

Wenn die Myon-Leptonenzahl des negativen Myons $L_\mu(\mu^-) = 1$ ist, ist entsprechend die Myonleptonenzahl des dazugehörigen μ-Neutrinos

$$L(\overline{\nu}_\mu) = -1 \tag{12.7.11}$$

Für jede Leptonenfamilie gibt es eine Leptonenzahl, also eine für Elektronen L_e, eine für Myonen L_μ und eine für Taus L_τ. Es gilt also für alle Prozesse mit Leptonen

$$\sum L_e = \text{const} \tag{12.7.12a}$$
$$\sum L_\mu = \text{const} \tag{12.7.12b}$$
$$\sum L_\tau = \text{const} \tag{12.7.12c}$$

Dann ist auch die Gesamtleptonenzahl

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau = \text{const} \tag{12.7.13}$$

konstant.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

13. Starke Wechselwirkung

13.1. Hadronen

Mit dem Begriff HADRONEN werden alle Teilchen zusammengefasst, die durch die STARKE WECHSELWIRKUNG miteinander agieren. PROTONEN und NEUTRONEN sind die ersten Beispiele dazu. Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, p. 479] bedeutet Hadron im Griechischen «schwer». Die Hadronen werden in die Baryonen und die Mesonen eingeteilt. Die Baryonen (vom Griechischen für «schwer») haben die Masse des Protons oder sie sind schwerer. Baryonen haben einen halbzahligen Spin. Die Zugehörigkeit zu der Gruppe MESONEN wird durch einen halbzahligen Spin angezeigt. Das Wort Mesonen bedeutet im Griechischen «mittel». Die ersten gefundenen Mesonen waren leichter als das Proton, aber es gibt auch schwerere.
Hadronen können sich relativ leicht in andere Hadronen umwandeln. Das einzige scheinbar stabile freie Hadron ist das Proton, die Lebensdauer des Protons liegt nach den gegenwärtigen Messungen über $7.7 \cdot 10^{33}$ a $= 2.43 \cdot 10^{41}$ s (K. Abe u. a. [Abe+17]). Wenn das Proton stabil ist, wird die BARYONENZAHL erhalten.
Die Gruppe der Hadronen enthält sehr viele Mitglieder, man spricht vom TEILCHEN-ZOO. Die suche nach der Unterliegenden Struktur führte dann zu den Quarks (siehe Abschnitt 13.3).

13.1.1. Pion

J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] berichtet, dass Werner Heisenberg im Jahre 1932 vorschlug, dass ein Austauschteilchen die Kraft zwischen Proton und Neutron vermittelte. Er wandte dabei ein Verfahren aus der Quantenchemie an, bei dem ein hin- und hertunnelndes ELEKTRON die chemische Bindung vermittelte. Tunnelnde Teilchen befinden sich in einem verbotenen Energiebereich, in der Tunnelbarriere ist die relativistische Energie- und Impulsbeziehung nicht erfüllt, die Teilchen sind also dort virtuell!
Hideki Yukawa schlug im Jahre 1935 vor, dass es ein solches Teilchen geben müsse. Er machte dabei die folgenden Annahmen für ein Teilchen, das eine Kraft zwischen Neutron und Proton vermittelt:

Ladungserhaltung Die Ladungserhaltung erfordert, dass das Teilchen geladen ist $q = \pm e$.

Drehimpuls Da sowohl Proton wie Neutron Fermionen sind, muss das gesuchte Teilchen einen ganzzahligen Spin haben (Null eingeschlossen), also ein Boson sein.

Masse Das konstante Potential im Kern limitiert die Reichweite der Kraft auf (1 bis 2) fm. Daraus schloss Hideki Yukawa dass die Masse etwa 100 MeV/c^2 sein müsse.

Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] ergibt eine Dimensionsbetrachtung, dass die Verbindung zwischen einer Länge a und einer Masse m mittels Naturkonstanten nur mit der Compton-Wellenlänge möglich ist (klassischer Elektronenradius).

$$a = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \Longrightarrow mc^2 = \frac{\hbar c}{a} \tag{13.1.1}$$

Mit $a = 2$ fm ergibt sich $mc^2 = 100$ MeV. Aus der Energie-Zeit-Unschärfe ergibt sich , dass das Teilchen etwa seine Compton-Wellenlänge weit kommt, also $c\,\Delta t \approx n$.

Hideki Yukawa schlug das nach ihm benannte Potential für die Wechselwirkung vor,

$$V(r) = \frac{g}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \tag{13.1.2}$$

g ist die Kopplungskonstante und a die Reichweite. Das Potential nach Gleichung (13.1.2) ergibt mit der KLEIN-GORDON-GLEICHUNG eine konsistente Lösung, bei der die Massenenergie des Austauschteilchens gerade der Bindungsenergie entspricht.

Der Energienenner im Feynman-Diagramm (siehe Abschnitt 13.1.2) ist nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 11.1.1.] das Resultat der Fouriertransformation des Yukawa-Potentials.

Das von Hideki Yukawa postulierte Teilchen wurde 1947 gefunden (1937 gab es die Entdeckung des Myons, das fälschlicherweise als Yukawa-Teilchen interpretiert wurde). Die Eigenschaften des Yukawa-Teilchens, jetzt Pion π genannt sind

- Masse $m_{\pi^\pm} = 2.488\,072\,1 \cdot 10^{-28}$ kg $= 139.570\,61$ MeV/c^2 und
  das neutrale $m_{\pi^0} = 2.406\,184 \cdot 10^{-28}$ kg $= 134.977$ MeV/c^2
- Ladung $q_{\pi^\pm} = \pm e = \pm 1.602\,18 \cdot 10^{-19}$ C und
  $q_{\pi^0} = 0$
- Spin $s_{\pi^{\pm,0}} = 0$

  Die geladenen wie auch die ungeladenen Pionen sind Bosonen.
- Magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}_{\pi^{\pm,0}} = 0$
- Baryonenzahl $B = 0$ (da es eine Kraft zwischen p oder n und p und n vermittelt, die alle $B = 1$ haben)
- Lebensdauer $\tau_{\pi^\pm} = 26(1)$ ns (schwache Wechselwirkung) und $\tau_{\pi^0} = 0.0853(25)$ fs $= 8.52(25) \cdot 10^{-17}$ s (R. Miskimen [Mis11])
- Parität $P_{\pi^+} = P_{\pi^0} = P_{\pi^-} = -1$

Die folgende Liste gibt einige der möglichen Reaktionen an, die zu einer Bildung von Pionen führen:

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\gamma + p \longrightarrow \pi^+ + n \qquad E_\gamma \gtrapprox 150 \text{ MeV} \tag{13.1.3a}$$
$$\gamma + n \longrightarrow \pi^- + p \qquad E_\gamma \gtrapprox 150 \text{ MeV} \tag{13.1.3b}$$
$$p + p \longrightarrow \pi^0 + p + p \qquad E_p \gtrapprox 180 \text{ MeV} \tag{13.1.3c}$$
$$p + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^0 + p + n \qquad E_p \gtrapprox 600 \text{ MeV} \tag{13.1.3d}$$
$$p + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + p + p \qquad E_p \gtrapprox 800 \text{ MeV} \tag{13.1.3e}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Überall ist die Anzahl der erzeugten Pionen durch die Ladungs- und die Energieerhaltung limitiert.
Das neutrale Pion kann nicht in einer Blasenkammer detektiert werden. Es wird auch nicht abgebremst.
Schliesslich ist die Parität aller Pionen negativ, ein Hinweis darauf, dass Pionen zusammengesetzte Teilchen sind.

13.1.2. Δ- und ρ-Teilchen

Wenn Pionen mit Protonen oder Neutronen kollidieren entstehen weitere Teilchen. Nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.1.7. [Ble13] treten die folgenden Teilchen auf

$$\pi^+ + p \longrightarrow \Delta^{++} \qquad \longrightarrow \pi^+ + p \quad (100\ \%) \tag{13.1.4a}$$
$$\left.\begin{matrix}\pi^0 + p \\ \pi^+ + n\end{matrix}\right\} \longrightarrow \Delta^+ \qquad \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\pi^0 + p & (66.6\ \%) \\ \pi^+ + n & (33.3\ \%)\end{matrix}\right. \tag{13.1.4b}$$
$$\left.\begin{matrix}\pi^- + p \\ \pi^0 + n\end{matrix}\right\} \longrightarrow \Delta^0 \qquad \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\pi^- + p & (33.3\ \%) \\ \pi^0 + n & (66.6\ \%)\end{matrix}\right. \tag{13.1.4c}$$
$$\pi^- + n \longrightarrow \Delta^- \qquad \longrightarrow \pi^- + n \quad (100\ \%) \tag{13.1.4d}$$

Das Δ^+- Teilchen kann als Resonanz des Protons aufgefasst werden. Mit seiner Lebensdauer von $\tau_\Delta = 6 \cdot 10^{-24}$ s ist keine Trajektorie mehr sichtbar. Die Breite des Maximums bei einer Variation der Energie ergibt die Lebensdauer (analog zur natürlichen Linienbreite bei angeregten Elektronen in einem Atom). Da verschiedene Anregungsmechanismen zum gleichen Resonanzteilchen führen (Gleichung (13.1.4)) muss das Δ in seinen verschiedenen Ausprägungen der Ladung jeweils als eigenes Teilchen angesehen werden. Die Masse des Δ ist mit 1232 MeV/c^2 grösser als die der Nukleonen Proton und Neutron.
In den Reaktionen von Pionen mit Nukleonen gibt es weitere Zeichen für Teilchen

$$\pi^+ + p \longrightarrow p + \rho^+ \qquad \text{bei einer Energie } E_{\pi^-} \approx 2 \text{ GeV} \tag{13.1.5a}$$
$$\gamma + p \longrightarrow p + \rho^0 \qquad \text{bei einer Energie } E_\gamma \approx 2.8 \text{ GeV} \tag{13.1.5b}$$

Die Masse ist $m_\rho \approx 770$ MeV/c^2. Die Halbwertsbreite der Resonanz ergibt $\tau_\rho = 4 \cdot 10^{-24}$ s.
Weiter wurden auch Antiprotonen und Antineutronen beobachtet, getreu der Aussage, dass es zu Jedem Teilchen auch ein Antiteilchen gibt. Ordnung in das Chaos

brachte die Quark-Theorie (siehe Abschnitt 13.2.4).

13.1.3. Isospin, Baryonenzahl und Ladung

Dieser Abschnitt ist eine Wiederaufnahme der Abschnitte 6.2 und 6.6.2. Der Abschnitt beruht auf J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13].
Die «3»-Komponente des Isospins ist mit der Baryonenzahl B und der Ladung eines Teilchens q über

$$\frac{q}{e} = T_3 + \frac{B}{2} \tag{13.1.6}$$

verknüpft. Für ein Proton $T_3 = \frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = 1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = 1$, für das Neutron mit $T_3 = -\frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = 1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = 0$. Diese Gleichung gilt für alle Hadronen, wenn wir $B = 0$ für Hadronen mit ganzzahligem Spin (Mesonen) setzen und für Hadronen mit halbzahligem Spin (Baryonen) $B = 1$ setzen. Beim Antiproton (d. h. wir multiplizieren Isospin und Baryonenzahl mit -1) ist $T_3 = -\frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = -1$ ergibt sich $\frac{q}{e} = -1$.
Aus dem Gesagten ergibt sich, dass ein Neutron nicht nur durch sein $T_3 = -\frac{1}{2}$ sondern auch durch seine Baryonenzahl $B = 1$ bestimmt ist. Eine der beiden Kenngrössen reicht nicht.
Bei den Δ-Teilchen haben wir den Isospin $T = \frac{3}{2}$. Das Δ ist ein Isospin-Quadruplett. Wenn $T = \frac{3}{2}$ ist, ergeben sich mit den Baryonenzahlen die Ladungen nach Tabelle 13.1.

T_3	B	$\frac{q}{e}$	Teilchen
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$	Δ^{++}
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	Δ^{+}
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$	Δ^{0}
$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$	Δ^{-}

Tab. 13.1.: Der Isospin der Δs ist $T = \frac{3}{2}$. Gezeigt sind die 3-Komponente des Isospins, die Baryonenzahl und die Ladung.

Bei den ρ-Teilchen haben wir den Isospin $T = 1$ und als Mesonen die Baryonenzahl $B = 0$. Das ρ ist ein Isospin-Triplett. Wenn $T = 1$ ist, ergeben sich mit den Baryonenzahlen die Ladungen nach Tabelle 13.2.

T_3	B	$\frac{q}{e}$	Teilchen
1	0	$1 + \frac{0}{2} = 1$	ρ^{+}
0	0	$0 + \frac{0}{2} = 0$	ρ^{0}
-1	0	$-1 + \frac{0}{2} = -1$	ρ^{-}

Tab. 13.2.: Der Isospin der ρs ist $T = 1$. Gezeigt sind die 3-Komponente des Isospins, die Baryonenzahl und die Ladung.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] betont, dass diese Darstellung analog zu der Darstellung der Vielelektronenniveaus in der Atomphysik sei. Die Analogie ist nicht perfekt, da selbst bei einer Isospin-Invarianz es immer Störungen durch die elektromagnetische Wechselwirkung (Ladungen) gibt.

Wenn zwei Teilchen interagieren, dann kann der resultierende Isospin mit der bekannten Drehimpulsarithmetik bestimmt werden. In Gleichung (13.1.4) sind die auftretenden Δs angegeben bei der Streuung von Pionen an Nukleonen. Die Pionen sind ein Isospin-Triplett, die Nukleonen ein Dublett. Die Rechnung für den Operator $\hat{\mathrm{T}}_3$ ist analog zur Rechnung für den Operator $\hat{\mathrm{j}}_z$ aus der Atomphysik. Wenn zwei Teilchen mit $T = 1$ und $T = \frac{1}{2}$ wechselwirken, kann entweder $T = \frac{3}{2}$ oder $T = \frac{1}{2}$ resultieren. $T_3 = \pm\frac{3}{2}$ ergibt sich nur, wenn beide Isospins parallel sind. Es gibt also nur je eine Möglichkeit, und die war $|\Delta^{++}\rangle \Leftrightarrow |\pi^+ p\rangle$ oder $|\Delta^-\rangle \Leftrightarrow |\pi^- n\rangle$. Es gibt in Gleichung (13.1.4) nur je eine Möglichkeit für dieses Resultat, in Übereinstimmung mit dem Isospin-Formalismus

Die nächste Stufe ist nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] in jedem Falle eine Überlagerung von hier zwei Möglichkeiten der Realisierung, einerseits durch die Projektion von $T = 1 + \frac{1}{2}$ auf $T_3 = \frac{1}{2}$ und andererseits de beiden Möglichkeiten zu $T = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, also auch $T_3 = \frac{1}{2}$. Tabelle 13.3 listet die sich aus dem Isospinformalismus (eigentlich Spinformalismus) ergebenden Kombinationen auf.

T_3	Reaktion	Wahrscheinlichkeit	aus Zustand	Linearkombination
$\frac{3}{2}$	$\|\Delta^{++}\rangle \Leftrightarrow \|\pi^+ p\rangle$	1		
$\frac{1}{2}$	$\|\Delta^+\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\,\|\pi^0 p\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\|\pi^+ n\rangle$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$T = \frac{3}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$ $T = \frac{1}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$	$\|\pi^0 p\rangle$ $\|\pi^+ n\rangle$
$-\frac{1}{2}$	$\|\Delta^0\rangle \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\,\|\pi^0 n\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\|\pi^- p\rangle$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$T = \frac{3}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$ $T = \frac{1}{2}$ mit $T_3 = \frac{1}{2}$	$\|\pi^0 n\rangle$ $\|\pi^- p\rangle$
$-\frac{3}{2}$	$\|\Delta^-\rangle \Leftrightarrow \|\pi^- n\rangle$	1		

Tab. 13.3.: Ursprung der Wellenfunktionen bei der Bildung der Δ. Die Wahrscheinlichkeit ist das Quadrat der Gewichte. Die Erklärung ist im Text.

Die Zustände zu $T_3 = \frac{1}{2}$ können im Experiment nicht als Überlagerung detektiert werden. Nach J. Bleck-Neuhaus, Kap. 11.2.2. [Ble13] sind die Wechselwirkungen bei der Bildung der Teilchenspuren und die Magnetfelder dafür verantwortlich, dass nur die Projektionen auf eine der beiden Komponenten gemessen werden, aber mit einer Wahrscheinlichkeit, die dem Quadrat des Gewichtes entspricht. Dies ist auch das experimentell gefundene Resultat in Gleichung (13.1.4).

13.2. Symmetrien

Die Physik der Elementarteilchen ist die Physik der Symmetrieoperationen. Eugene Wigner [Wig37] zeigte, dass aus den Symmetrien des Kern-Hamiltonoperators die Spektren bis zum Molybdän qualitativ erklärbar sind. Bunji Sakita [Sak64] beschrieb darauf aufbauend dass die Elementarteilchen über Symmetrien der speziellen unitären Gruppe SU(6) in sechs komplexen Dimensionen beschrieben werden können.

13.2.1. Lie-Gruppen und -Algebren

Diese Aussagen beruhen auf der Anwendung von Lie-Gruppen und Lie-Algebren [Böh11]. Lie-Gruppen wurden von Sophus Lie eingeführt.Eine gute Einführung ist das Buch von Schwindt [Sch13]. Etwas weitergehend ist das Buch von Stillwell (Naive Lie Theory) [Sti10b]. Das Standardmodell [Sei09], grosse vereinheitlichte Theorien (Grand Unified Theories, GUT [Sei09] und String-Theorien [Zwi09] sind Anwendungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren.

Eine Gruppe ist eine Menge G und eine Abbildung, so dass

$$G \times G \to G \quad \text{und} \quad (g_1 g_2) \to g_3 = g_1 \times g_2 \quad \text{mit} \quad g_1, g_2, g_3 \in G \tag{13.2.1}$$

Ist die Operation $\times$, heisst die Gruppe eine multiplikative Gruppe, ist die Operation $+$, handelt es sich um eine additive Gruppe.

Es gelten die folgenden Beziehungen

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 \qquad \forall g_1, g_2, g_3 \in G \qquad \text{Assoziativität} \tag{13.2.2}$$

$$ge = eg = g \qquad \forall g \in G \qquad \text{Neutralelement} \tag{13.2.3}$$

$$\forall g \in G \Rightarrow \exists g^{-1} \text{ mit} \qquad g^{-1} g = g g^{-1} = e \qquad \text{Inverses Element} \tag{13.2.4}$$

und für Abelsche Gruppen

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 \qquad \forall g_1, g_2 \in G \qquad \text{Kommutativität} \tag{13.2.5}$$

Lie-Gruppen sind Mannigfaltigkeiten, d.h. sie sind kontinuierlich, hinreichend stetig und differenzierbar.

13.2.1.1. Darstellung einer Gruppe

Zu jeder Gruppe G kann man einen Tangentialraum $T(G)$ definieren [Sti10b, Kap. 5]. Als Beispiel betrachten wir die Gruppe $SO(2)$, die spezielle orthogonale Gruppe in zwei Dimensionen. Diese beschreibt die Drehungen um den Koordinatenursprung in der komplexen Ebene.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

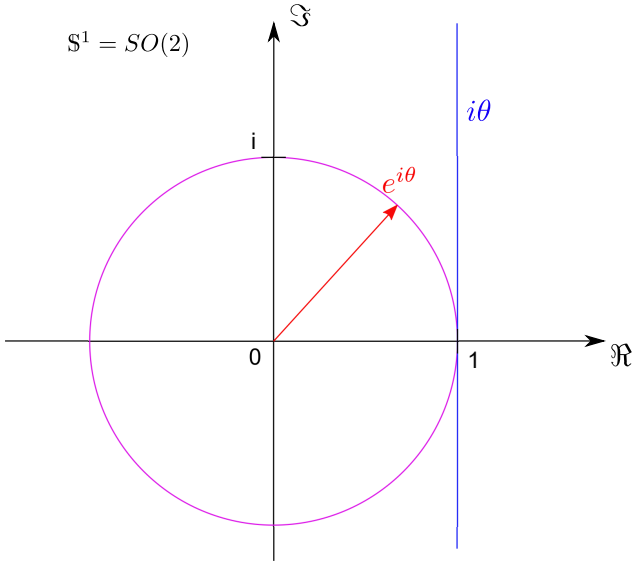


Abb. 13.1.: Tangentialraum zur Gruppe $SO(2)$.

Die Elemente der Gruppe in Abbildung 13.1 sind die Zahlen z mit $zz^* = 1$. Dies sind die Zahlen

$$z(\theta) = e^{i\theta} \text{ mit } \theta \in \mathbb{R} \tag{13.2.6}$$

Die Menge der Zahlen mit $zz^* = 1$ beschreibt eine stetige Kurve in $\mathbb{C}$. Aus der Mechanik weiss man, dass die Geschwindigkeit senkrecht zum Radius-Vektor der gekrümmten Bahn steht [Mar14, Kap. 4.1.2.4].
Eine Darstellung einer Gruppe ist eine Kombination aus einer Gruppe G und einem Vektorraum V. Elemente aus G wirken auf V als lineare Operatoren. Wir bezeichnen die Darstellung mit $T(G)$. Sie soll eine Abbildung von G in den Raum der linearen Selbstabbildungen $\hom(V, V)$ eines Vektorraumes V.

$$T : G \to \hom(V, V) \quad \text{mit} \quad T(g_1, g_2) = T(g_1)T(g_2) \quad g_i \in G \tag{13.2.7}$$

Bei endlichen Dimensionen kann die Abbildung mit Matrizen dargestellt werden. Die triviale Darstellung ist $T(g) = \mathbb{1}$ $g \in G$.

13.2.1.2. Definition einer Lie-Algebra

Eine Lie-Algebra L ist ein Vektorraum, dessen Elemente lineare Operatoren sind. Nach Stillwell [Sti10b, Kap. 4.4] ist eine allgemeine Lie-Algebra ein Vektorraum mit einer bilinearen Operation $[\,,\,]$, die die Eigenschaften

$$[\,X, Y\,] + [\,Y, X\,] = 0 \tag{13.2.8a}$$
$$[\,X, [\,Y, Z\,]\,] + [\,Y, [\,Z, X\,]\,] + [\,Z, [\,X, Y\,]\,] = 0 \tag{13.2.8b}$$

hat.
Diese Eigenschaften erfüllt zum Beispiel der Kommutator

$$\forall A, B \in L \Longrightarrow [\,A, B\,] \in L \tag{13.2.9}$$

Jedes Element dieser Lie-Algebra der Dimension n kann als Linearkombination von n Basisoperatoren E_i geschrieben werden

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i \tag{13.2.10}$$

Der Vektorraum der Lie-Algebra L kann ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit reellen α_i oder über $\mathbb{C}$ mit komplexen α_i sein.
Zu ein und derselben Lie-Gruppe G kann es Lie-Algebren mit Vektorräumen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ geben. Dies ist eine Frage der DARSTELLUNG.
Wenn

$$[\, A, B \,] = 0 \; \forall A, B \in L \tag{13.2.11}$$

ist, ist die Lie-Algebra ABELSCH. Die DARSTELLUNG der LIE-ALGEBRA ist analog zur Darstellung der Lie-Gruppe. Für einen Operator $A \in L$ definiert man

$$T : L \to \hom(V, V) \;\; \text{mit} \;\; T(A_1, A_2) = T(A_1)T(A_2) \;\; A_i \in L \tag{13.2.12}$$

Auch wenn L reell ist, kann V komplex sein.
Zu jeder Lie-Gruppe G gibt es eine Lie-Algebra L_G, so dass jedes Element $g \in G$, das kontinuierlich mit dem Neutralelement e verbunden ist, als

$$g = \exp(A), \quad A \in L_G \tag{13.2.13}$$

geschrieben werden kann. umgekehrt gilt dass

$$\exp(A) \in G \;\; \forall A \in L_G \tag{13.2.14}$$

Die Basisoperatoren $E_i \in L_G$ sind die Erzeugenden von G.

13.2.1.2.1. Beispiel Sei $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\mathbb{R}^+$ sei die Zusammenhangskomponente mit dem Neutralelement $e = 1$. Dann gilt

$$\forall g \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow g = \exp(\lambda) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.2.15}$$

$\mathbb{R}$ ist ein eindimensionaler Vektorraum.
Bei $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sind alle Elemente in der Zusammenhangskomponente des Neutralelementes $e = 1$.

13.2.1.2.2. Exponentieren einer quadratischen Matrix Sei A eine $n \times n$-quadratische Matrix. Dann ist

$$e^A = \mathbb{1} + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{13.2.16}$$

Zum Beispiel erhält man mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{13.2.17}$$

die Drehmatrix

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{13.2.18}$$

Wenn A eine Diagonalmatrix ist mit den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dann ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{a_n} \end{pmatrix} \tag{13.2.19}$$

Schliesslich gelten die Relationen

$$\frac{d}{dt} e^{t\,A} = A e^{t\,A} \tag{13.2.20}$$

und mit den Matrizen A, B und C

$$A = B\,C\,B^{-1} \Longrightarrow e^A = B\,e^C\,B^{-1} \tag{13.2.21}$$

13.2.1.3. Lie-Algebren und Darstellungen

Die Darstellung von G kann einen beliebigen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ verwenden. Wir haben dann für die Lie-Algebra zum Beispiel

$$T(\lambda) = \lambda \mathbb{1}, \quad \lambda \in L_G \tag{13.2.22}$$

analog zur Beziehung $T(g) = g\mathbb{1},\ g \in G$.

Für eine Lie-Algebra kann es mehrere Darstellungen geben.

Die zur unitären Lie-Gruppe $U(1)$ gehörige Lie-Algebra

$$L = u(1) = \{\lambda i | \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{13.2.23}$$

Da $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, ist L eine reelle Lie-Algebra, auch wenn die Zahlen komplex sind. So wie L definiert ist, ist L isomorph zu $\mathbb{R}$.
Die Lie-Gruppe $G = U(1)$ gehört zur Lie-Algebra $L = u(1)$ mit

$$U(1) = \{\exp(i\lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{13.2.24}$$

Im Gegensatz zur Lie-Algebra $u(1)$ ist die Lie-Gruppe $U(1)$ weder zu $\mathbb{R}$, noch zu $\mathbb{R}^+$ oder zu $\mathbb{R}\{0\}$ isomorph, da $U(1)$ 2π-periodisch ist ($\exp(i\lambda) = \exp(i(\lambda + 2\pi n)), n \in \mathbb{Z}$).
Für die Lie-Gruppe $U(1)$ können verschiedene Darstellungen gefunden werden. Die einfachste ist für $\mathbb{C}^1$. Hier bewirkt die Gruppe einfach eine Multiplikation. Wir haben $T(g) = g$: Damit wird eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ einfach mit $\exp(i\lambda)$ multipliziert.

Die unitäre Lie-Gruppe $U(1)$ kann in zwei reellen Dimensionen im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ durch Drehmatrizen dargestellt werden.

$$T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right) = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \tag{13.2.25}$$

Die zu dieser Darstellung der unitären Lie-Gruppe $U(1)$ gehörige Darstellung der Lie-Algebra ist

$$T\left(i\lambda\right) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.2.26}$$

Dass $T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right) = \exp\left(T\left(i\lambda\right)\right)$ ist, kann mit der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion gezeigt werden.
Drehungen in der Ebene werden üblicherweise durch die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2)$ beschrieben. Die obige Ableitung zeigt, dass die beiden Lie-Gruppen $U(1)$ und $SO(2)$ isomorph sind.

13.2.1.4. Isomorphismen

Das bedeutet, dass die gleiche Lie-Gruppe (oder zwei isomorphe Lie-Gruppen) gleichzeitig die folgenden Operationen beschreiben:

1. Die Multiplikation einer Zahl $z \in \mathbb{C}^1$ mit einem Phasenfaktor $\exp\left(i\lambda\right)$

2. Die Drehung eines Vektors $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ in der Ebene

Die Gruppe aller linearer Abbildungen der Ebene (d.h., die Abbildungen, die die Länge eines Vektors nicht ändern) bilden die orthogonale Gruppe $O(2)$. Sie umfasst die Drehungen, Spiegelungen an einer Achse und die Punktspiegelung am Ursprung.
Die spezielle orthogonale Lie-Gruppe $SO(2)$ ist eine Untergruppe von $O(2)$

$$SO(2) \subset O(2) \tag{13.2.27}$$

Wird die orthogonale Gruppe $O(2)$ durch Matrizen dargestellt, gilt für alle Matrizen $A = T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right)$

$$|\det A| = 1 \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } O(2) \tag{13.2.28a}$$

$$\det A = 1 \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } SO(2)$$

$$\Rightarrow \text{Drehungen} \tag{13.2.28b}$$

$$\det A = -1 \quad A \text{ ist eine Matrix aus der Darstellung von } O(2) backslash SO(2)$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelungen} \tag{13.2.28c}$$

Dies kann auch anders formuliert werden: Die Zusammenhangskomponente $O(2)$ mit $\det = +1$ beschreibt die Drehungen, die Zusammenhangskomponente $O(2)$ mit $\det = -1$ beschreibt die Spiegelungen.
Die Lie-Gruppe $SO(2)$ verhält sich zu $O(2)$ wie $\mathbb{R}^+$ zu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

13.2.1.5. Isomorphismen im unendlichdimensionalen Funktionenraum

Die beiden oben gezeigten Darstellungen der unitären Lie-Gruppe $U(1)$ sind bei weitem nicht die einzig möglichen Darstellungen.
Beispielsweise kann eine Darstellung von $U(1) \cong SO(2)$ im unendlichdimensionalen Funktionenraum $PR_\phi(\mathbb{R}^2)$ der Funktionen, die $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ abbilden. Diese Funktionen sind am Ort (r, ϕ) in eine Taylorreihe bezüglich ϕ entwickelt werden kann

$$f(r, \phi + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} f(r, \phi) \tag{13.2.29}$$

Wir verwenden die Darstellung

$$T(i\lambda) = \lambda \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{13.2.30}$$

und erhalten

$$T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right) = \exp\left(T\left(i\lambda\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} \tag{13.2.31}$$

Die Darstellung $T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right)$ dreht Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ um den Winkel λ.

$$T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right) f = \tilde{f} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(r, \phi) = f(r, \phi + \lambda) \tag{13.2.32}$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \left[T\left(\exp\left(i\lambda\right)\right)\right] f &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \phi^n}\right] f(r, \phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial \phi^n} f(r, \phi)\right) = f(r, \phi + \lambda) \end{aligned} \tag{13.2.33}$$

Die Erzeugende $E_1 = i \in u(1)$ hat hier die Gestalt

$$T(E_1) = \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{13.2.34}$$

Durch eine Multiplikation mit $-i\hbar$ ergibt die Drehimpulsoperatoren in zwei Dimensionen.

13.2.2. Translationen

Hier betrachten wir eine ADDITIVE GRUPPE in zwei Dimensionen mit den Erzeugenden E_1 und E_2. Translationen sind in zwei Dimensionen keine LIE-GRUPPE.
Aber in einem unendlichdimensionalen Vektorraum $PR_{x,y}(\mathbb{R}^2)$ der Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ die die reelle Ebene auf komplexe Zahlen abbilden und bei denen für die Erzeugenden die Kommutatorbeziehung

$$[\, E_1, E_2 \,] = 0 \tag{13.2.35}$$

gilt gibt es eine Darstellung einer Lie-Gruppe und (mindestens) eine Lie-Algebra. Eine mögliche Darstellung einer Lie-Algebra ist

$$T_2(E_1) = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad T_2(E_2) = \frac{\partial}{\partial y} \tag{13.2.36}$$

Da die gemischten zweiten Ableitungen kommutieren, ist (13.2.35) erfüllt. Hätten wir noch mit $-i\hbar$ multipliziert, hätten wir die IMPULSOPERATOREN.

Die Impulsoperatoren sind

$$p_k = -i\hbar T_2(E_k) \quad \text{oder in 3D:} \quad p_k = -i\hbar T_3(E_k) \tag{13.2.37}$$

Wir können weiter schreiben

$$\begin{aligned} T_2\left(\exp\left(\alpha E_1 + \beta E_2\right)\right) &= \exp\left(T_2\left(\alpha E_1 + \beta E_2\right)\right) \\ &= \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\beta \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\overset{\text{Taylor für exp}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\alpha^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial y^\ell}\right) \end{aligned} \tag{13.2.38}$$

und dadurch die dazugehörige Lie-Gruppe erhalten.
Nach Taylor ist nun

$$f(x+\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \left.\frac{\partial^k f(v)}{\partial v^k}\right|_{v=x} \tag{13.2.39}$$

Der Vergleich mit (13.2.38) zeigt, dass

$$T_2\left(\exp\left(\alpha E_1 + \beta E_2\right)\right) f = \tilde{f} \qquad \tilde{f}(x,y) = f(x+\alpha, y+\beta) \tag{13.2.40}$$

Die Beziehungen hier sagen nichts anderes, als dass die Impulsoperatoren mit der Translation verknüpft sind. Dies führt zu den von Emmy Noether entdeckten NOETHER'SCHEN THEOREMEN über Symmetrien und Erhaltungsgrössen.

13.2.3. Drehimpulse in 3 Dimensionen - nicht Abelsche Lie-Gruppen

Wir definieren eine Lie-Algebra $L = so(3)$ in drei reellen Dimensionen mit den drei Erzeugenden E_1, E_2 und E_3, die die folgenden Beziehungen erfüllen sollen:

$$\begin{aligned} &[\,E_i, E_j\,] = -\varepsilon_{i,j,k} E_k \\ &[\,E_1, E_2\,] = -E_3 \qquad [\,E_2, E_3\,] = -E_1 \qquad [\,E_3, E_1\,] = -E_2 \end{aligned} \tag{13.2.41}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Eine mögliche Darstellung in $\mathbb{R}^3$ ist

$$T_3(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; T_3(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T_3(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.2.42}$$

Dabei ist

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & (i,j,k) \text{ sind eine gerade Permutation von } (1,2,3); \\ -1, & (i,j,k) \text{ sind eine ungerade Permutation von } (1,2,3); \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{13.2.43}$$

der ϵ-Tensor oder das Levi-Civita-Symbol[1]. Durch Rechnen sieht man, dass

$$\exp(\lambda T(E_1)) = R_x(\lambda) \qquad \text{Drehung um die } x\text{-Achse} \tag{13.2.44}$$
$$\exp(\lambda T(E_2)) = R_y(\lambda) \qquad \text{Drehung um die } y\text{-Achse} \tag{13.2.45}$$
$$\exp(\lambda T(E_3)) = R_z(\lambda) \qquad \text{Drehung um die } z\text{-Achse} \tag{13.2.46}$$

Die $R_i(\lambda)$ sind die Drehmatrizen im kartesischen dreidimensionalen Raum. Zu dieser Lie-Algebra $so(3)$ gehört die nicht-abelsche Lie-Gruppe $SO(3)$
Analog zu zwei Dimensionen kann eine weitere Darstellung gefunden werden, die auf einem unendlichdimensionalen Funktionenraum $PR_{x,y,z}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$ beruht. Die Darstellung der Lie-Algebra ist dann

$$T_\infty(E_1) = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \tag{13.2.47a}$$
$$T_\infty(E_2) = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \tag{13.2.47b}$$
$$T_\infty(E_3) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \tag{13.2.47c}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Relationen (13.2.47c) bis (13.2.47b) die Kommutationsrelation $[E_i, E_j] = -\varepsilon_{i,j,k}E_k, \quad i,j,k \in \{1,2,3\}$ aus (13.2.41) erfüllen. Dies ist also eine äquivalente Darstellung (siehe [MG19, Gl. (6.3.3) - (2.3.5)]) zu der mit den Drehungen

Die Drehimpulsoperatoren sind

$$L_k = -i\hbar T_\infty(E_k) \tag{13.2.48}$$

Wieder wird klar, dass die beiden Darstellungen ein- und derselben Lie-Gruppe Drehungen mit Drehimpulsoperatoren verknüpfen.

[1] F. Freistetter [Fre21] hat eine gute Begründung gegeben.

Rechnet man die nicht in kartesischen Koordinaten, sondern in Kugelkoordinaten, dann sieht man, dass

$$T_\infty(E_3) = \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{13.2.49}$$

ist, analog zum zweidimensionalen Fall. $\exp\left(\alpha T_\infty\left(E_3\right)\right)$ erzeugt also eine Drehung von Funktionen (z.B. Wellenfunktionen) um die z-Achse und den Winkel α.
Allgemein wird eine Drehachse durch den Winkelvektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ angegeben. Die Drehachse zeigt in die Richtung $\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}/\left|\boldsymbol{\alpha}\right|$, der Drehwinkel ist $\alpha = \left|\boldsymbol{\alpha}\right|$. Eine beliebige Drehung ist dann

$$T_\infty\left(\boldsymbol{\alpha}\right) = \exp\left[\alpha_1 T_\infty\left(E_1\right) + \alpha_2 T_\infty\left(E_2\right) + \alpha_3 T_\infty\left(E_3\right)\right] \tag{13.2.50}$$

Beachten sie, dass die Wahl der z-Richtung willkürlich ist. Erst die Messapparatur legt sie fest.
Es gibt eine weitere (die Dritte hier!) Darstellung der Lie-Algebra $so(3)$ mit dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^2$.

$$T_2\left(E_1\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2\left(E_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2\left(E_3\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{13.2.51}$$

Diese Matrizen hängen mit den Pauli-Spin-Matrizen σ_k zusammen

$$T_3(E_k) = \frac{i}{2}\sigma_k \tag{13.2.52}$$

Die Darstellung $T_2(E_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, erfüllt die gleichen Kommutationsrelationen wie $T_3(E_i)$ (siehe Gleichung (13.2.42)).

$$\left[\, E_i, E_j \,\right] = -\varepsilon_{i,j,k} E_k, \quad \{i,j,k\} \in \{1,2,3\}$$

In dieser Darstellung erhält man für die exponentierten Erzeugenden

$$\exp\left(\alpha_1 T_2\left(E_1\right)\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{13.2.53}$$

$$\exp\left(\alpha_2 T_2\left(E_2\right)\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{13.2.54}$$

$$\exp\left(\alpha_3 T_3\left(E_1\right)\right) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\frac{\alpha_3}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\alpha_3}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{13.2.55}$$

Aus der Darstellung einer Lie-Algebra kann die Darstellung der Lie-Gruppe berechnet werden. Wir hatten vorher schon aus der Lie-Algebra $so(3)$ die Drehungen, also die Lie-Gruppe $SO(3)$ berechnet. Hier wurde nun aus der **identischen** Lie-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Algebra $so(3)$ die Lie-Gruppe $SU(2)$ konstruiert.

Im Prinzip sind die Matrizen aus (13.2.53) bis (13.2.55) Drehmatrizen, aber: α_i tritt in jeder Winkelfunktion (dazu gehört auch $\exp(i\beta)$!) mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ auf. Dies heisst, dass in dieser Darstellung die Lie-Gruppe $SU(2)$ 4π-periodisch ist.

Aber die aus der selben Lie-Algebra konstruierte Lie-Gruppe $SO(3)$ ist 2π-periodisch.

13.2.4. Spinvektoren (magnetisches Moment) und Spinzustand

Das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ eines Spins ist mit dem Spinvektor $|\chi\rangle$ auf komplizierte Weise verknüpft. Wird der Raum gedreht, gibt $\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i T_3(E_i)\right)$ die Koordinaten im gedrehten Koordinatensystem an. Bei dieser Drehung um den $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ muss auch der Spinzustand gedreht werden. Diese Drehung wird jedoch nicht durch die $SO(3)$- Symmetrie sondern durch die $SU(2)$-Symmetrie gegeben, also durch $\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i T_2(E_i)\right)$ gegeben. Einer Drehung in 2 (komplexen) Dimensionen um den Winkel φ entspricht eine Drehung in drei reellen Dimensionen um den Winkel 2φ.

Der Spinvektor $|\chi\rangle$ wird also bei einer Drehung des Raumes um 2π in den Vektor $-|\chi\rangle$ überführt. Nun beschreiben aber die Vektoren $|\chi\rangle$ und $-|\chi\rangle$ den gleichen Spinzustand und damit das gleiche magnetische Moment. Der Grund ist, dass der Unterschied ein Phasenfaktor $\exp(i\pi)$ ist und dass Phasenfaktoren bei der Berechnung von Observablen entfallen. Da die messbare Grösse der Spinzustand ist, der mit dem magnetischen Moment verbunden ist, hat alles seine Richtigkeit.

Die 2π und 4π-Problematik taucht erst auf, wenn verschränkte Zustände erzeugt und manipuliert werden.

13.2.5. Mesonen

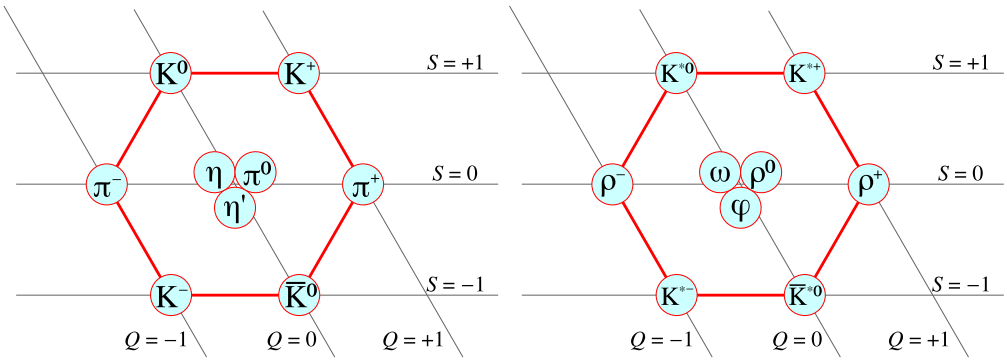


Abb. 13.2.: Mesonennonett. Die linke Seite zeigt die pseudoskalaren Mesonen mit $S = 0$ und $P = -1$, also $J^P = 0^-$. Die rechte Seite zeigt die Vektormesonen mit $S = 1$ und $P = -1$, also $J^P = 1^-$. (links: User:E2m, User:Stannered [Public domain], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13/Meson_nonet_-_spin_1.svg, rechts: User:E2m, User:Stannered [Public domain], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/Meson_nonet_-_spin_0.svg).

Abbildung 13.2 zeigt die Mesonen-Nonetts für $S = 0$ und $S = 1$. Der Spin des Nonetts deutet auf eine innere Struktur, die Quarks, hin. Die Bezeichnung J^P bezieht sich auf den Gesamtdrehimpuls J, der ja aus dem Bahndrehimpuls L und dem Spin S nach den üblichen Regeln der Quantenmechanik berechnet wird. Die Koordinaten bei der Darstellung sind die Ladung Q und die Seltsamkeit oder Strangeness, eine zuerst experimentell beobachtete Dimension, die mit der Quark-Theorie aus dem nächsten Abschnitt dann die Begründung fand.

13.3. Quarks

Die Vielfalt der beobachteten Teilchen verwirrte die Welt der Physik zu Beginn der 60-er Jahre. Murray Gell-Mann („A schematic model of baryons and mesons“ [Gel64]) und George Zweig (*CERN preprint 8182/TH401 (1964)* [Zwe64]) stellten ihre Idee vor, die Teilchen mit gruppentheoretischen Methoden zu charakterisieren. Damit konnten Sie verschiedene offene Fragen klären und gleichzeit Vorhersagen für neue Teilchen machen.
Das schwerwiegendste Problem war das magnetische Moment des Neutrons. Es war bekannt, dass jedes geladene Teilchen mit einem Spin $\neq 0$ ein magnetisches Moment hatte. Verwirrend war aber, dass das Neutron n als ungeladenes Teilchen ebenso ein magnetisches Moment hatte. Die bekannte Kopplung zwischen den drei Grössen Ladung, Spin und magnetisches Moment war hier verletzt.
Wenn aber die Regel allgemein gelten sollte, dass magnetische Momente nur bei spinbehafteten geladenen Teilchen auftreten sollten, musste das Neutron n notwendigerweise zusammengesetzt sein. Wenn es aus $\mathfrak{n}$ geladenen Teilchen zusammengesetzt sein sollte, gilt

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\sum_1^n q_i = 0 \qquad\qquad \sum_1^n \boldsymbol{\mu_i} \neq 0 \tag{13.3.1}$$

Diese Teilchen sollten dann sowohl das NEUTRON wie auch das PROTON beschreiben. Eine mögliche Realisierung könnte mit zwei Teilchen erreicht werden

$$u: \quad I_u = \frac{1}{2}, \quad q_u = \frac{2}{3}e \quad T = 1 \quad T_3 = 1 \quad B = \frac{1}{3} \tag{13.3.2a}$$

$$d: \quad I_d = \frac{1}{2}, \quad q_d = -\frac{1}{3}e \quad T = 1 \quad T_3 = -1 \quad B = \frac{1}{3} \tag{13.3.2b}$$

Die beiden Teilchen, das UP-QUARK, dargestellt durch den Buchstaben u, und das DOWN-QUARK, dargestellt durch den Buchstaben d, müssen wegen den möglichen Drehsymmetrien den Spin $s_{u,d} = \frac{1}{2}\hbar$ haben (siehe Abschnitt 13.2.3). Damit sich aber die beobachteten Ladungen von NEUTRON und PROTON ergeben, muss die Ladung ein Bruchteil der Elementarladung sein. Dies führt dann auf die Frage, was denn Ladung ist. Ohne Antwort auf diese Frage ergibt sich

Proton Das Proton hat die Wellenfunktion

$$|p\rangle = |uud\rangle \tag{13.3.3}$$

Nach Wolfgang Pauli muss der Spin der up-Quarks u antiparallel sein. Damit ergeben sich für den Drehimpuls und die Ladung des Protons

$$I_p = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2} \tag{13.3.4a}$$

$$q_p = \left(2 \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) e \qquad = 1e \tag{13.3.4b}$$

Neutron Das Neutron hat die Wellenfunktion

$$|n\rangle = |ddu\rangle \tag{13.3.5}$$

Nach Wolfgang Pauli muss der Spin der down-Quarks d antiparallel sein. Damit ergeben sich für den Drehimpuls und die Ladung des Neutrons

$$I_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2} \tag{13.3.6}$$

$$q_n = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\right) e \qquad = 0e \tag{13.3.7}$$

Allgemein ergeben sich die folgenden Regeln:

Baryonen bestehen aus drei Quarks. Ihr Spin I ist halbzahlig.

Mesonen bestehen aus zwei Quarks. Ihr Spin I ist ganzzahlig.

Hadronen werden durch die Quantenzahlen I (SPIN, eigentlich die 3-Komponente), T (ISOSPIN, die «Familie»),T_3 (3-KOMPONENTE DES ISOSPINS), Q (LADUNG), B (BARYONENZAHL), S (SELTSAMKEIT oder STRANGENESS), C (CHARM), q_c (FARBLADUNG) beschrieben. Es kommen dann noch B' die BOTTOMNESS oder BEAUTY und T' die TOPNESS oder TRUTH als mögliche Quantenzahlen dazu.

Diese Beschreibung (ohne Bottomness und Topness) ist isomorph zur SPEZIELLEN LIE-GRUPPE SU(3). Sie wird im weiteren Verlauf des Textes erklärt.

Es ergab sich die Notwendigkeit, ein weiteres Quark einzuführen, da einige der beobachteten Hadronen sich seltsam benahmen. Deshalb wurde die Eigenschaft SELTSAMKEIT oder STRANGENESS eingeführt. Diese ist ein weiteres Quark, abgekürzt als s-Quark mit seinem Antiteilchen, dem $\overline{s}$-Quark.

Das s-Quark hat eine Ladung $q_s = -\frac{1}{3}e$, einen Spin $s = \frac{\hbar}{2}$, eine Strangeness $S = -1$. Wie alle anderen Quarks auch hat es eine positive Parität. Die Baryonenzahl ist $B = \frac{1}{3}$.

13.3.1. Experimentelle Hinweise

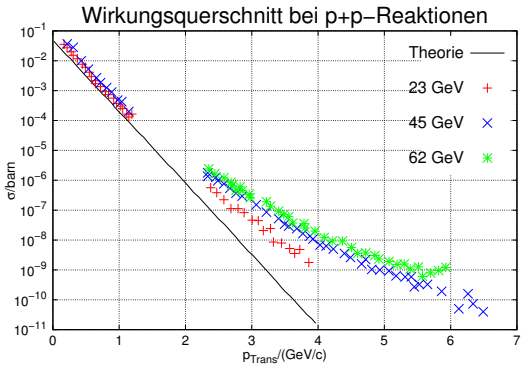


Abb. 13.3.: Streuung $p + p \longrightarrow$ Hadronen (nach Jacob und Landshoff [JL78])

Abbildung 13.3 zeigt experimentell gemessene Streuquerschnitte von $p + p \longrightarrow$ Hadronen-Reaktionen (oder Streuung). Die ausgezogene Linie beschreibt eine Theorie, bei der das Proton ein nicht teilbares einzelnes Teilchen ist. Es muss also aus den Daten geschlossen werden, dass ein Proton eine innere Struktur hat.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

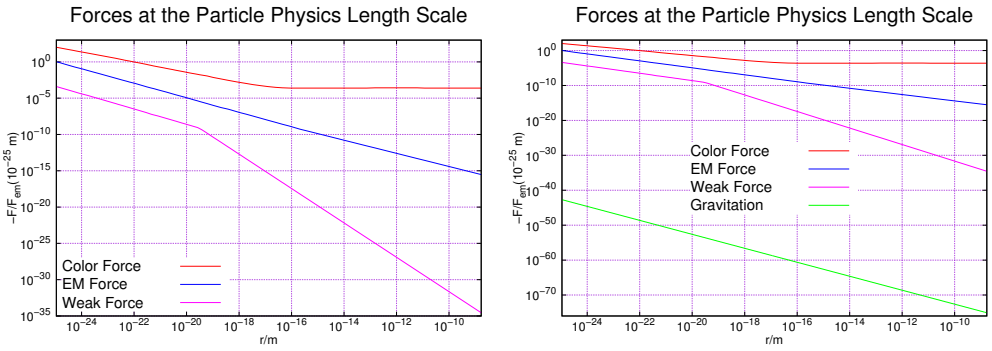


Abb. 13.4.: Stärke und Reichweite fundamentaler Kräfte (nach [Dem10, Abb. 7.25a]). Links ohne die Gravitation, rechts mit ihr.

Abbildung 13.4 skizziert die Stärke und die Reichweite der bekannten FUNDAMENTALEN KRÄFTE. Die Stärke der Kräfte sind auf die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung bei zwei Einheitsladungen im Abstand von 10^{-25} m normiert. Links ist die Gravitation ausgelassen, rechts ist sie dabei.

13.3.2. Hadronen und Quarks

Die in Abschnitt 13.2.5 gezeigten Mesonen sind ein Ausschnitt aus einem ganzen Zoo von Mesonen. Die Struktur der Abbildung 13.2 ergibt sich aus der Quark-Theorie. Im Jahre 2019 waren 139 Mesonen bekannt und für weitere 74 gab es Hinweise (Particle Data Group [Par20b]). Angegeben sind unter anderem der Isospin T, der Gesamtspin I^P, mit P der Parität sowie die Ladung Q/e, die Strangeness S und der Charm C.

Name	Symb.	Quarks	$\overline{\text{Symb.}}$	$\overline{\text{Quarks}}$	$m/(\text{MeV}/\text{c}^2)$	T	I^P	Q/e	S	C
Pion	π^+	$u\bar{d}$	π^-	$d\bar{u}$	139.570 39(16)	1	0^-	+1	0	0
Pion	π^0	$\frac{\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	π^0	$\frac{\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	134.9768(5)	1	0^-	0	0	0
η-Meson	η	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}\right)}{\sqrt{6}}$	η	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}\right)}{\sqrt{6}}$	547.862(17)	0	0^-	0	0	0
η'-Meson	$\eta' = \eta(958)$	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}\right)}{\sqrt{3}}$	η'	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}\right)}{\sqrt{3}}$	957.78(6)	0	0^-	0	0	0
η (Charm)	$\eta_C = \eta_C(1S)$	$c\bar{c}$	η_C	$c\bar{c}$	2983.9(5)	0	0^-	0	0	0
Kaon	K^+	$u\bar{s}$	K^-	$s\bar{u}$	493.677(17)	$\frac{1}{2}$	0^-	+1	+1	0
Kaon	K^0	$d\bar{s}$	$\overline{K^0}$	$s\bar{d}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	+1	0
K-Short	K_S^+	$\frac{\left(d\bar{s}-s\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	K_S^+	$\frac{\left(d\bar{s}-s\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	undef.	0
K-Long	K_L^0	$\frac{\left(d\bar{s}+s\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	K_L^0	$\frac{\left(d\bar{s}+s\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	497.611(13)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	undef.	0
D-Meson	D^+	$c\bar{d}$	D^-	$d\bar{c}$	1869.65(5)	$\frac{1}{2}$	0^-	+1	0	+1
D-Meson	D^0	$c\bar{u}$	$\overline{D^0}$	$u\bar{c}$	1864.83(5)	$\frac{1}{2}$	0^-	0	0	+1
D (seltsam)	D_S^+	$c\bar{s}$	D_S^-	$s\bar{c}$	1964.34(7)	0	0^-	+1	+1	+1

Tab. 13.4.: Tabelle einiger pseudoskalarer Mesonen (nach Particle Data Group [Par20b]).

Tabelle 13.4zeigt einige der pseudoskalaren Mesonen. Angegeben sind unter anderem der Isospin T, der Gesamtspin I^P, mit P der Parität sowie die Ladung Q/e,

die Strangeness S und der Charm C.

Name	Symb.	Quarks	$\overline{\text{Symb.}}$	$\overline{\text{Quarks}}$	$m/(\text{MeV}/c^2)$	T	I^P	Q/e	S	C
ρ-Meson	$\rho^+ = \rho(770)^+$	$u\bar{d}$	ρ^-	$d\bar{u}$	775.26(25)	1	1^-	+1	0	0
ρ-Meson	$\rho^0 = \rho(770)^0$	$\frac{\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	ρ^0	$\frac{\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	775.26(25)	1	1^-	0	0	0
ω-Meson	$\omega = \omega(782)$	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	ω	$\frac{\left(u\bar{u}+d\bar{d}\right)}{\sqrt{2}}$	547.862(17)	0	1^-	0	0	0
ϕ-Meson	$\phi = \phi(1020)$	$s\bar{s}$	ϕ	$s\bar{s}$	1019.461(16)	0	1^-	0	0	0
J/ψ	$J/\psi = J/\psi(1S)$	$c\bar{c}$	J/ψ	$c\bar{c}$	3096.900(6)	0	1^-	0	0	0
Kaon	$K^{*+} = K^*(892)^+$	$u\bar{s}$	K^{*-}	$s\bar{u}$	891.76(25)	$\frac{1}{2}$	1^-	+1	+1	0
Kaon	$K^{*0}0K^*(892)^0$	$d\bar{s}$	$\overline{K}^{*0}$	$s\bar{d}$	895.55(20)	$\frac{1}{2}$	1^-	0	+1	0
D-Meson	$D^{*+} = D^*(2007)^+$	$c\bar{d}$	D^{*-}	$d\bar{c}$	2010.26(5)	$\frac{1}{2}$	1^-	+1	0	+1
D-Meson	$D^{*0} = D^*(2007)^0$	$c\bar{u}$	$\overline{D}^{*0}$	$u\bar{c}$	2006.85(5)	$\frac{1}{2}$	1^-	0	0	+1
D (seltsam)	D_S^{*+}	$c\bar{s}$	D_S^{*-}	$s\bar{c}$	2112.1(4)	0	1^-	+1	+1	+1

Tab. 13.5.: Tabelle einiger Vektormesonen (nach Particle Data Group [Par20b]).

Tabelle 13.5 zeigt die Daten einer Auswahl der Vektormesonen.

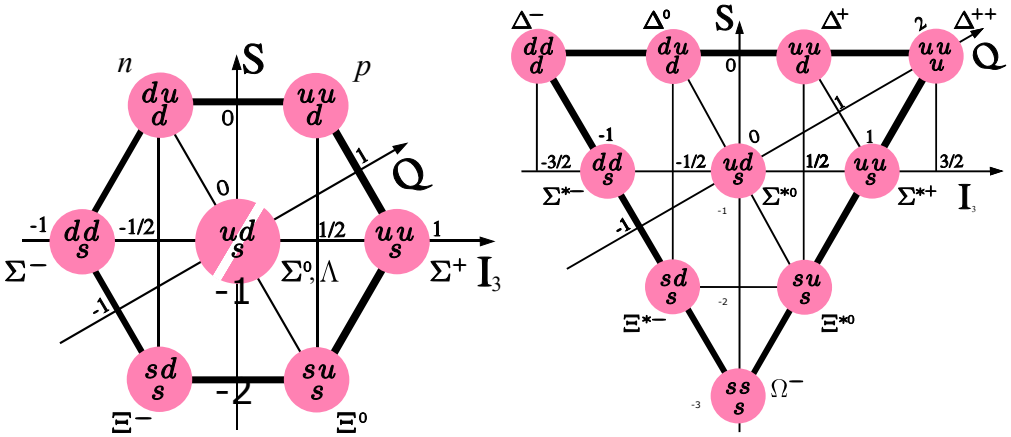


Abb. 13.5.: Links BARYONENOKTETT (Trassiorf [Public domain or Public domain], from Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Baryon-decuplet.svg) und rechts das BARYONENDEKUPLETT (Trassiorf [Public domain or Public domain], from Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/Baryon-octet.svg).

Wie schon angedeutet beruht die Quarktheorie auf der Anwendung von Symmetrieeigenschaften von Lie-Gruppen. Abbildung 13.5 zeigt links das BARYONENOKTETT. Beim BARYONENOKTETT haben die Teilchen einen Spin und eine Parität von $I^P = \left(\frac{1}{2}\right)^+$. Beim BARYONENDEKUPLETT rechts haben die Teilchen einen Spin und eine Parität $I^P = \left(\frac{3}{2}\right)^+$. Gewisse Quarkkombinationen kommen sowohl im BARYONENOKTETT wie auch im BARYONENDEKUPLETT vor. Dann können die entsprechenden Teilchen im BARYONENOKTETT als Grundzustand und im BARYONENDEKUPLETT im angeregten Zustand aufgefasst werden. Zum Beispiel kann das Δ^0 $|\Delta^0\rangle = |ddu\rangle$ als angeregter Zustand des NEUTRONS $|n\rangle = |ddu\rangle$ verstanden werden. Analog verhält es sich mit dem Proton $|p\rangle = |uud\rangle$ und dem

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Teilchen Δ^+.

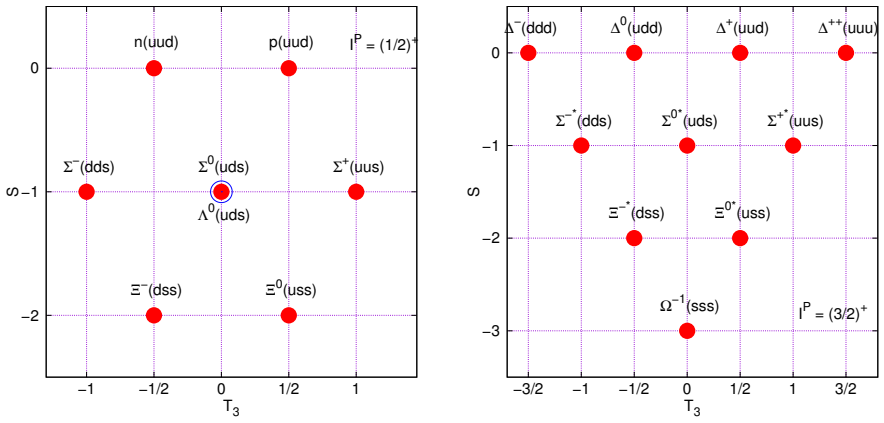


Abb. 13.6.: Quarkmodell für Baryonen (siehe auch[Dem10, Abb. 7.15]).

Abbildung 13.6 zeigt den Inhalt von Abbildung 13.5 noch auf eine andere Art und Weise. Aus der Existenz zum Beispiel des $|\Delta^-\rangle = |ddd\rangle$ mit seinen drei parallelen Quarkspins muss geschlossen werden, dass es noch eine weitere innere Quantenvariable gibt, die bei jedem der drei DOWN-QUARKS unterschiedlich ist. Diese Innere Variable muss drei unterschiedliche Zustände haben. Da das Farbsehen der Menschen auf den Grunfarben rot, grün und blau beruht, also auf drei verschiedenen Rezeptoren, wurde diese innere Variable als FARBLADUNG bezeichnet mit den Eigenwerten ROT, GRÜN und BLAU. Beim Δ^- muss jedes down-Quark eine andere Farbe haben. Aus der Physiologie wissen wir dann, dass die resultierende Farbe bei additiver Farbmischung WEISS ist. In anderen Worten: Die Farbladung manifestiert sich nicht, analog zur Ladung null des NEUTRONS.

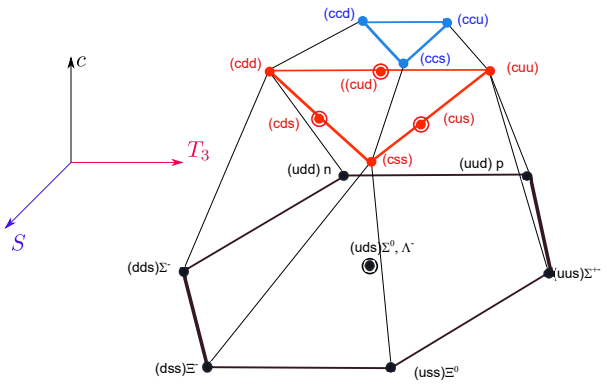


Abb. 13.7.: Baryonenmultiplett bis Charm (siehe auch [Dem10, Abb. 7.16]

Wenn die Quantenzahl CHARM mit berücksichtigt wird, wird der Raum der Teilchen dreidimensional. Damit ergibt sich das in Abb. 13.7 gezeigte BARYONEN-SUPERMULTIPLETT.
Die FARBLADUNG und damit die FARBKRAFT hat die folgenden Eigenschaften:

- Gluonen (das analoge zu Photonen für die Farbkraft) müssen Farbe austauschen.

- Messbare Teilchen sind farblos.
- Die starke Wechselwirkung ist nicht vollständig kompensierte Farbkraft. Dies ist analog zu den London Dispersionskräften oder dem anziehenden Teil der van-der-Waals-Kräfte.
- Schliesslich sagen Symmetrieüberlegungen in abstrakten Lie-Gruppen dass es die gleiche Anzahl Leptonenfamilien wie Quarkfamilien geben muss.

13.3.3. Warum gibt es drei Quarks?

Dieser Abschnitt ist eine Erinnerung an die Drehimpulsarithmetik. Die folgenden Ausführungen folgen Jan-Markus Schwindt [Sch13]
Drehimpulse $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)^T = (L_1, L_2, L_3)^T$:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k \qquad \epsilon_{ijk}\text{: Levi-Civitta-Symbol} \tag{13.3.8}$$

$$\left[\boldsymbol{L}^2, L_i\right] = 0 \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{13.3.9}$$

Definition der Levi-Civitta-Symbole

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von } (1\,2\,3) \text{ ist;} \\ -1, & \text{wenn } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von } (1\,2\,3) \text{ ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{13.3.10}$$

Das Gleiche gilt auch für die verallgemeinerten Drehimpulse

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\} \tag{13.3.11}$$

$$\left[\boldsymbol{J}^2, J_i\right] = 0 \qquad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{13.3.12}$$

und den Aufsteige- und Absteigeoperatoren

$$J_+ \left|j,m,\alpha\right\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\ \left|j,m+1,\alpha\right\rangle \tag{13.3.13}$$

$$J_- \left|j,m,\alpha\right\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\ \left|j,m-1,\alpha\right\rangle \tag{13.3.14}$$

Hier ist α eine weitere Quantenzahl, die neben dem Drehimpuls den Zustand charakterisiert, z.B. n im Zentralpotential

13.3.3.1. Spin

Der Spin ist eine Zustandsgrösse in einem zweidimensionalen komplexen Hilbertraum.

$$s_z = \pm\frac{1}{2}\hbar = m_s \qquad s = \frac{1}{2}\hbar \qquad \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \text{ 2D-Hilbertraum} \tag{13.3.15}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Eigenzustände sind $|z+\rangle = (1,0)^T$ und $|z-\rangle = (0,1)^T$ zu $m_s = \pm\frac{\hbar}{2}$. Wir können eine Spinmatrix definieren

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{13.3.16}$$

Diese kann als Summe zweier nicht-hermitescher Matrizen aufgefasst werden:

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{13.3.17}$$

Dabei ist S_+ eine Matrix, die den Spinzustand (Eigenwert) um $\hbar$ erhöht. S_- erniedrigt ihn um $\hbar$.

$$S_-|z+\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar|z-\rangle \tag{13.3.18a}$$

$$S_+|z+\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \tag{13.3.18b}$$

$$S_-|z-\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \tag{13.3.18c}$$

$$S_+|z-\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar|z+\rangle \tag{13.3.18d}$$

Diese Aufspaltung ist analog zu der bekannten Aufspaltung $\cos\beta = (e^{i\beta} + e^{-i\beta})/2$ und $\sin\beta = (e^{i\beta} - e^{-i\beta})/(2i)$ der Winkelfunktionen.

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{13.3.19a}$$

$$Sy- = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \tag{13.3.19b}$$

Weiter gilt

$$\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3\hbar}{4}\mathbb{1} \tag{13.3.20}$$

Die gesamte Wellenfunktion aus Ortsteil und Spinteil wird im Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\psi \otimes \mathcal{H}_\chi \qquad |x\pm\rangle = |x\rangle \otimes |z\pm\rangle \tag{13.3.21}$$

beschrieben. Dabei symbolisiert χ den Spin und ψ die Ortswellenfunktion. $\mathcal{H}_{\psi,\chi}$ ist der jeweils dazugehörige Hilbertraum.

Der Zustand eines Elektrons wird durch eine Ortswellenfunktion mit zwei Komponenten oder durch zwei Ortswellenfunktionen ψ_+ und ψ_- beschrieben. ψ_+ beschreibt den Zustand eines Elektrons mit dem Spin «up». Entsprechend beschreibt ψ_- den Zustand eines Elektrons mit dem Spin «down».

Die Wellenfunktionen sind normiert:

$$\int d^3\boldsymbol{r}\left(\psi_+^*(\boldsymbol{r}),\psi_-^*(\boldsymbol{r})\right)\cdot\begin{pmatrix}\psi_+(\boldsymbol{r})\\ \psi_-(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}=\int d^3\boldsymbol{r}\left(|\psi_+|^2+|\psi_-|^2\right)=1 \tag{13.3.22}$$

Formal werden Sie durch

$$|\Psi\rangle=|\psi\rangle\otimes|\chi\rangle \qquad |\chi\rangle=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{13.3.23}$$

beschrieben.
Bei der Drehimpulsaddition werden vormal zwei Hilberträume der jeweiligen Drehimpulse zu einem neuen Hilbertraum verknüpft.

$$|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle:=|j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle \qquad \mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2 \tag{13.3.24}$$

Der Gesamtdrehimpuls entlang der Richtung i ist

$$J_i:=J_{1i}+J_{2i}=J_{1i}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes J_{2i} \tag{13.3.25}$$

Ebenso ergibt sich das Quadrat des Drehimpulses zu

$$\boldsymbol{J}^2=J_x^2+J_y^2+J_z^2 \tag{13.3.26}$$

Ausgeschrieben erhalten wir

$$[J_i,J_j]=i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}J_k \tag{13.3.27a}$$

$$\left[\boldsymbol{J}^2,J_i\right]=0\quad\forall i\in\{x,y,z\} \tag{13.3.27b}$$

Weiter ergeben sich die Beziehungen

$$\left[\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_1^2\right]=\left[\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_2^2\right]=\left[\boldsymbol{J}_1^2,\boldsymbol{J}^2\right]=\left[\boldsymbol{J}_2^2,\boldsymbol{J}^2\right]=0 \tag{13.3.28}$$

und

$$\left[\boldsymbol{J}^2,J_{1i}\right]\neq 0 \tag{13.3.29a}$$

$$\left[\boldsymbol{J}^2,J_{2i}\right]\neq 0 \tag{13.3.29b}$$

Die Kombination zweier Zustände führt auf einen Zustand der neben den einzelnen Gesamtdrehimpulsen durch den Gesamtdrehimpuls und die Grösse seiner 3-Komponente charakterisiert ist. Es ist üblich, die Schreibweise

$$|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\longrightarrow|(j_1,j_2),j,m\rangle \tag{13.3.30}$$

zu verwenden. Bei der Kombination von mehr als zwei Drehimpulsen kann das Verfahren auch nacheinander angewandt werden.
Die so entstehenden Koeffizienten (Gewichte) heissen Clebsch-Gordan-Koeffizienten (nach Rudolf Clebsch und Paul Gordan). Eine Tabelle dazu findet sich in „Review of Particle Physics“ [Zyl+20] oder in *Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and D Functions* [Par21].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

13.3.4. Austauschteilchen

Bei einer über Austauschteilchen vermittelten Wechselwirkung muss bei der starken Wechselwirkung der Drehimpuls und die Parität erhalten sein. Die Analyse ergibt, dass die Austauschteilchen den Drehimpuls und die Parität

$$I = 0 \tag{13.3.31a}$$
$$P = -1 \tag{13.3.31b}$$

haben müssen. Das heisst, die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung sind Pseudoskalare. Dies ist analog zum Drehimpuls, der ein axialer Vektor ist.

Wir wissen, dass Pionen die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung zwischen Protonen und/oder Neutronen sind. Dabei gilt

$$\pi^- \hat{=} (\bar{u}d) \qquad T = 1 \qquad T_3 = -1 \tag{13.3.32a}$$
$$\pi^+ \hat{=} (u\bar{d}) \qquad T = 1 \qquad T_3 = +1 \tag{13.3.32b}$$
$$\pi^0 \hat{=} (u\bar{u} + d\bar{d}) \qquad T = 1 \qquad T_3 = 0 \tag{13.3.32c}$$

In der Sprache der Brackets lauten die Gleichungen

$$\left|\pi^-\right\rangle = |\bar{u}d\rangle \tag{13.3.33a}$$
$$\left|\pi^+\right\rangle = \left|u\bar{d}\right\rangle) \tag{13.3.33b}$$
$$\left|\pi^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|u\bar{u}\rangle + \left|d\bar{d}\right\rangle\right\} \tag{13.3.33c}$$

Wird die Strangeness dazugenommen, dann gibt es neben dem π^0 noch zwei weitere Mesonen mit $T_3 = 0$ und $S = 0$:

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{|u\bar{u}\rangle + \left|d\bar{d}\right\rangle - 2\,|s\bar{s}\rangle\right\} \tag{13.3.34a}$$
$$|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{|u\bar{u}\rangle + \left|d\bar{d}\right\rangle + |s\bar{s}\rangle\right\} \tag{13.3.34b}$$

Weiter gilt

$$\left|\left|\pi^0\right\rangle\right|^2 = |\,|\eta\rangle\,|^2 = |\,|\eta'\rangle\,|^2 = 1 \tag{13.3.35}$$

Weiter gibt es seltsame Teilchen, Teilchen deren Strangeness ungleich null ist. Dies sind

$$K^+ \hat{=} \quad (u\bar{s})q \quad = 1 \cdot eS \quad = +1 \tag{13.3.36a}$$
$$K^- \hat{=} \quad (\bar{u}s)q \quad = -1eS \quad = -1 \tag{13.3.36b}$$
$$K^0 \hat{=} \quad (d\bar{s})q \quad = 0eS \quad = +1 \tag{13.3.36c}$$
$$\bar{K^0} \hat{=} \quad (\bar{d}s)q \quad = 0eS \quad = -1 \tag{13.3.36d}$$

Angegeben ist hier das Teilchen und seine Quarks, die Ladung und die Strangeness s.

13.3.5. Charm

Bei einer Elektron-Positron-Streuung entsteht ein massereiches Teilchen, das Ψ genannt wurde.

$$e^+ + e^- \longrightarrow \Psi + \text{ Hadronen} \tag{13.3.37}$$

Dieses Ψ kann wieder in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen.

$$\Psi \longrightarrow e^+ + e^- \tag{13.3.38}$$

Analysiert man die Masse des Ψ, kann diese nicht mit den bekannten up-, down- und strange-Quarks erklärt werden. Man muss schliessen, dass es neben u, d und s noch ein c Quark gibt, das CHARM-QUARK. Die Lebensdauer des Ψ ist viel länger als die Zeit, die man mit der STARKEN WECHSELWIRKUNG bei gegebener Masse erwarten würde. Deshalb muss der Prozess ein Prozess der SCHWACHEN WECHSELWIRKUNG sein.

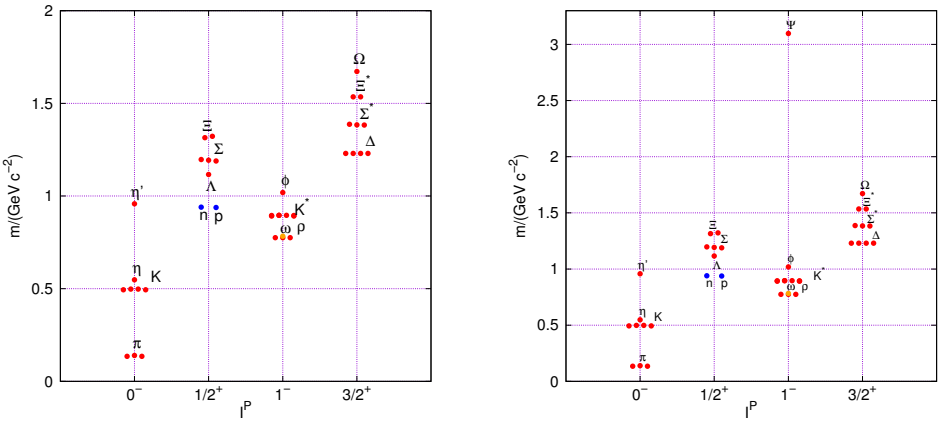


Abb. 13.8.: Klassifizierung von Hadronen nach Spin und Parität I^P und Masse m (siehe auch[Dem10, Abb. 7.12]). Die rechte Darstellung ist identisch mit der linken, ausser dass das Ψ-Meson (mit dem Charm-Quark) mit berücksichtigt ist. Alle Punkte die in der Nähe eines Spinwertes I liegen haben diesen Wert. Die Punkte sind auseinander gezogen worden um die Vielfachheit zu zeigen.

Abbildung 13.8 zeigt, dass die Massen der Hadronen sich in etwa gruppieren. Wenn wir die Gruppe aus Δ, Σ^*, Ξ^* und Ω nehmen, so sieht es aus, wie wenn wir

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

gleichabständige Energieniveaus hätten. Dies kann aber auch erklärt werden, dass nach und nach die leichten u und d-Quarks durch das schwerere s-Quark ersetzt werden. Die Δ hätten dann kein s-Quark, die Σ^* eines, die Ξ^* zwei und das Ω bestünde aus drei s-Quarks. So ist es in Wirklichkeit auch. Da im Wesentlichen die BINDUNGSENERGIEN zwischen den Quarks gleich ist, ergibt der Energieunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilchen dieser Gruppe die Masse des Strange-Quarks.

Auf der rechten Seite ist das Ψ/J-Meson mit seiner wesentlich höheren Masse angezeigt. Dieses meson besteht aus einem c- und einem $\bar{c}$-Qurk. Damit muss das Charm-Quark eine wesentlich höhere Masse als das Strange-Quark haben.

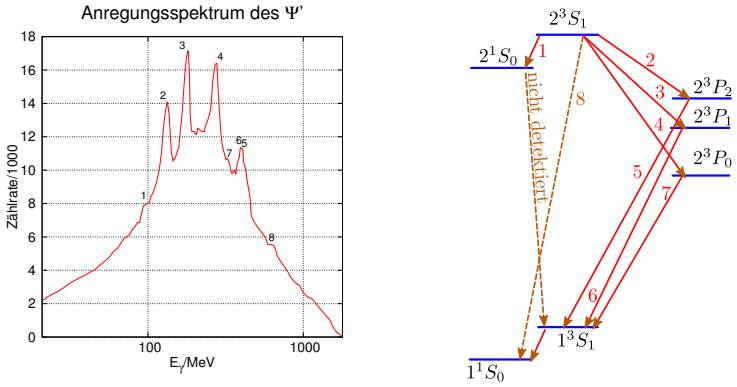


Abb. 13.9.: γ-Spektrum des Ψ' nach E. D. Bloom und C. W. Peck „Physics with the crystal ball detector“ [BP83, Abb. 3] und [Dem10, Abb. 7.13]. Die rechte Seite zeigt das Termspektrum nach [BP83, Abb. 3, Inset].

Abbildung 13.9 zeigt das gemessene Anregungsspektrum des Ψ-Mesons und das dazugehörige Termschema, nach E. D. Bloom und C. W. Peck „Physics with the crystal ball detector“ [BP83, Abb. 3]. Das Termschema für angeregte Zustände von Quarks ist gleich aufgebaut wie jenes für angeregte Elektronenzustände in Atomen.

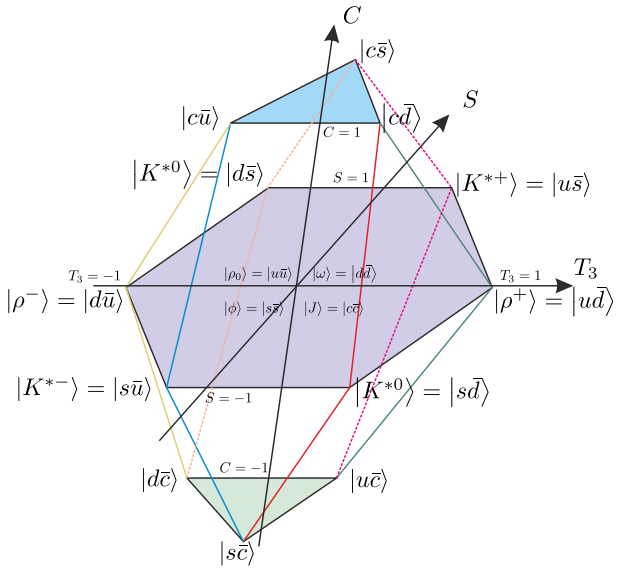


Abb. 13.10.: Mesonensupermultiplett für Mesonen mit der Spinquantenzahl $I = 1$ (nach S. L. Glashow „Quarks with color and flavor“ [Gla75] und W. Demtröder [Dem10, Abb. 7.18]).

Abbildung 13.10 zeigt eine Darstellung der Mesonen mit Strangeness und Charm nach S. L. Glashow „Quarks with color and flavor“ [Gla75]. Die Darstellung der weiteren Quarkfamilien würde einen fünfdimensionalen Raum benötigen.

13.3.6. Quarks und Farbladungen

Murray Gell-Mann und Kazuhiko Nishijima konnten Die Ladung Q und die 3-Komponente des Isospins T_3 Mit den Quarkquantenzahlen und der Baryonenzahl verknüpfen.

$$Q = \frac{1}{2}(B + U - D + S + C) \tag{13.3.39a}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(U - D) \tag{13.3.39b}$$

In Gleichung (13.3.39) bedeuten

B die Baryonenzahl,

U die Differenz $U = n(u) - n(\bar{u})$,

D die Differenz $D = n(d) - n(\bar{d})$,

S die Seltsamkeit $S = n(\bar{s} - n(s)$ und

C der Charm $C = n(c) - n(\bar{c})$

Wie schon angedeutet gibt es noch zwei weitere Quarkquantenzahlen. Damit gibt es die gleiche Anzahl Familien bei Quarks und bei Leptonen. Diese Quantenzahlen sind:

B' die Bottomness (auch Beauty), also die Differenz $B' = n(\bar{b}) - n(b)$ und

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

T' die Topness[2] (auch Truth), also die Differenz $T' = n(t) - n(\bar{t})$

Die Quarks t und c sind vom u-Typ, die Quarks s und b vom d-Typ. Der Typ des Quarks wird auch FLAVOUR genannt.
Die beiden Teilchen Ω^- und Δ^{++} in Abbildung 13.6 bestehen aus drei gleichen Quarks. Nach Wolfgang Pauli ist dies nur möglich, wenn es eine weitere Quantenzahl gibt.
Ein weiter Hinweis gab das Verhältnis der Streuquerschnitte der Reaktionen $e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$ im Vergleich zu $e^- + e^+ \longrightarrow$ Hadronen. Die Streuquerschnitte, in dem Zusammenhang auch «Branching Ration» ($\mathcal{BR}$) oder Verzweigungsverhältnis genannt, sollten proportional zum Quadrat der Summe der Ladung der beteiligten Teilchen sein. Dies heisst, es wird erwartet, dass

$$\frac{\mathcal{BR}\left(e^- + e^+ \longrightarrow \text{Hadronen}\right)}{\mathcal{BR}\left(e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+\right)} = \left(\frac{\sum\limits_{\forall \text{Flavour}} Q_i}{e}\right)^2$$

sein sollte. Beobachtet wird jedoch, dass

$$\frac{\mathcal{BR}\left(e^- + e^+ \longrightarrow \text{Hadronen}\right)}{\mathcal{BR}\left(e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+\right)} = 3\left(\frac{\sum\limits_{\forall \text{Flavour}} Q_i}{e}\right)^2 \tag{13.3.40}$$

gefunden wurde. Das experimentelle Resultat von Gleichung (13.3.40) deutet auf eine weitere Quantenzahl mit drei Eigenvektoren hin. Diese Quantenzahl ist die FARBLADUNG mit den Ladungen r (rot), g (grün) und b (blau). Die Antiladungen existieren auch, nämlich $\overline{r} = c$ (Cyan), $\overline{g} = m$ (magenta) und $\overline{b} = y$ (yellow, gelb). Weiter gibt es die Eigenschaft, dass alle beobachtbaren Partikel farblos sein müssen.
Die Kräfte zwischen den Quarks werden durch GLUONEN vermittelt. Diese Wechselwirken mit der Farbladung. Wie ein Proton in ein Neutron übergehen kann am Beginn des Austausches und ein Neutron dann ein Proton wird können Gluonen sowohl farblos oder farbig geladen sein.

Beispiel:

$$\pi^+ = \begin{cases} u_r \bar{d}_r \\ u_g \bar{d}_g \\ u_b \bar{d}_b \end{cases} \tag{13.3.41a}$$

quantenmechanische korrekte Summe der Zustände:

$$\Rightarrow \left|\pi^+\right\rangle = \frac{1}{3}\left\{\left|u_r \bar{d}_r\right\rangle + \left|u_g \bar{d}_g\right\rangle + \left|u_b \bar{d}_b\right\rangle\right\} \tag{13.3.41b}$$

13.4. Quarkfamilien und -eigenschaften

Die folgenden allgemeinen Regeln gelten für Quarks und deren Wechselwirkungen:

[2] Oftmals wird die Topness auch mit T bezeichnet. Die Notation hier soll eine Verwechslung mit dem Isospin vermeiden.

1. Ein Quark wird durch den Quarktyp und die Farbladung festgelegt. Es gibt also z.B. die drei möglichen Up-Quarks u_r, u_g und u_b, also eine rote, grüne und blaue Version.

2. Der Quarktyp kann sich nur durch die schwache Wechselwirkung ändern. Beim Zerfall des Neutrons in ein Proton wandelt sich ein Down-Quark in ein Up-Quark um.

3. Die Farbladung ändert sich, wenn Gluonen wechselwirken. Sowohl die Farbe des Ausgangsquarks wie auch auch die des Zielquarks ändern sich beim Austausch eines Gluons.

Familie		Ladung	Flavour	Masse/MeV
1.	d	$-\frac{1}{3}e$	$T_3 = -\frac{1}{2}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$
	$\overline{d}$	$+\frac{1}{3}e$	$T_3 = +\frac{1}{2}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$
	u	$+\frac{2}{3}e$	$T_3 = +\frac{1}{2}$	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$
	$\overline{u}$	$-\frac{2}{3}e$	$T_3 = -\frac{1}{2}$	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$
2.	s	$-\frac{1}{3}e$	$S = -1$	93^{+11}_{-5}
	$\overline{s}$	$+\frac{1}{3}e$	$S = +1$	93^{+11}_{-5}
	c	$+\frac{2}{3}e$	$C = +1$	1270 ± 20
	$\overline{c}$	$-\frac{2}{3}e$	$C = -1$	1270 ± 20
3.	b	$-\frac{1}{3}e$	$B' = -1$	4180^{+30}_{-20}
	$\overline{b}$	$+\frac{1}{3}e$	$B' = +1$	4180^{+30}_{-20}
	t	$+\frac{2}{3}e$	$T' = +1$	$172\,760 \pm 300$
	$\overline{t}$	$-\frac{2}{3}e$	$T' = -1$	$172\,760 \pm 300$

Tab. 13.6.: Quarkfamilien mit Massen, FLAVOUR-QUANTENZAHLEN und Massen (nach [Zyl21] und [Wik22d]).

Tabelle 13.6 gibt eine Zusammenfassung der möglichen Quarks und deren Antiteilchen mit ihren Ladungen, ihren FLAVOUR-QUANTENZAHLEN und ihren Massen.

Nach der Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung von Paul Dirac gibt es neben beobachtbaren Elektronen und Positronen einen See virtueller Elektronen und Positronen, die durch Fluktuationen die Korrekturterme der Quantenelektrodynamik bewirken. Analog gibt es VALENZQUARKS und (virtuelle) SEEQUARKS.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

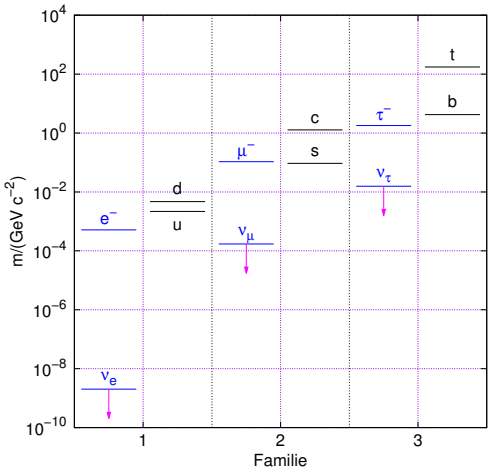


Abb. 13.11.: Massen von Quarks und Leptonen

Abbildung 13.11 zeigt die Massen aller Leptonen und aller Quarks. Die Massen der Neutrinos sind die obere Schranke für deren Massen.

Bemerkung:
Die PROTONENMASSE 938 MeV/c^2 ist viel grösser als die Summe der Quarkmassen von $2m_u + m_d < 35$ MeV/c^2. Ein erster Grund dafür ist, dass die Quarks auf einen Bereich von etwa 1 fm beschränkt sind. Ein weiterer Grund ist, dass die Gluonen mit berücksichtigt werden müssen. Und dann haben wir kein statisches System sondern ein dynamisches.
A. Walker-Loud [Wal18] gibt an, dass der Einschluss der Quarks bei einem PROTONENRADIUS von 0.8751 fm für die drei Quarks zusammen über die Heisenberg'sche Unschärferelation auf eine kinetische Energie von 170 MeV führt. Eine über den Daumen gepeilte Grösse ist 1 fm für die drei Quarks auf $\approx$ 300 MeV. Diese ist die richtige Grössenordnung, aber einen Faktor drei falsch.
A. Walker-Loud [Wal18] führt weiter aus, dass die Wechselwirkung so stark ist, dass der Formalismus der FEYNMAN-DIAGRAMME nicht mehr funktioniert. Es müsse dann die Methode der «LATTICE QCD» verwendet werden. Dies meint, dass analog zu finiten Elemente-Berechnungen bei partiellen Differenzialgleichungen die Gleichungen auf der QUANTENCHROMODYNAMIK auf einem Gitter gelöst werden. Nach A. Walker-Loud [Wal18] kamen die Autoren Y.-B. Yang u. a. [Yan+18] zum Schluss, dass es vier Beiträge gäbe:

Quark-Kondensat Das QUARK-KONDENSAT trage 9 % zur Protonenmasse bei. Mit dem Quark-Kondensat ist die Mischung aus zwei up- und einem down-Quark sowie dem See aus virtuellen Quarks. Der Beitrag verschwände, hätten Quarks keine Masse.

Energie der Quarks Der Beitrag der Energie der Quarks zur Protonenmasse sei 32 %. Dieser Beitrag stammt von der kinetischen Energie der Quarks

Stärke des gluonischen Feldes Das GLUONISCHE FELD trage 37 % zur Protonenmasse bei. Damit ist die kinetische Energie der Gluonen gemeint.

Anomaler Beitrag der Gluonen Der ANOMALE BEITRAG DER GLUONEN schliesslich liefere 23 % der Protonenmasse. Dieser Beitrag ist ein reiner Quantenef-

fekt. Er bezieht sich auf die Massenskala der Quantenchromodynamik (QCD) und enthält die Beiträge aller kondensierter Quarks mit allen sechs Flavours, beginnend mit dem up-Quark bis zu dem schwersten Quark, dem top-Quark.

Die Protonenmasse besteht also zu (90 bis 96) % aus der Konsequenz von Quanteneffekten. Allein die Massen der Quarks werden über den Higgs-Mechanismus erzeugt (siehe Abschnitt 15.2).
A. Walker-Loud bemerkt, dass damit mindestens 90 % der sichtbaren Materie im Kosmos Quanteneffekte seien.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

14. Schwache Wechselwirkung

Das Charakteristikum der schwachen Wechselwirkung ist, dass sie Erhltungssätze verletzt, die für die anderen Wechselwirkungen (ELEKTROMAGNETISCHE WECHSELWIRKUNG, STARKE WECHSELWIRKUNG und GRAVITATION gelten.Die nicht erhaltenen Quantenzahlen sind

- die Parität,
- die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie
- und die Zeitumkehrsymmetrie.

Nur das Produkt aus allen drei zusammen ist erhalten. Soweit wir wissen erhält die schwache Wechselwirkung die ENERGIE, den IMPULS und den DREHIMPULS. Durch die Verletzung von Erhaltungssätzen sind die Prozesse der schwachen Wechselwirkung sehr unwahrscheinlich. Die manifestiert sich in der (relativ) langen nLebensdauer von Zuständen, die durch die SCHWACHE WECHSELWIRKUNG zerfallen. Ein Beispiel eines Zerfalls eines Teilchens durch die SCHWACHE WECHSELWIRKUNG ist der Zerfall des freien Neutrons in ein Proton.

$$n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \qquad \tau \approx 879.4(60)\ \text{s} \tag{14.0.1a}$$

$$(dud) \longrightarrow (udu) + e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.0.1b}$$

Neutronen in Kernen können stabil sein, wenn die Gesamtenergie des Kerns beim Zerfall des Neutrons höher wird als die durch den schwachen Zerfall freiwerdende Energie. Die Reaktion kann auch auf dem Niveau der Quarks beschrieben werden:

$$d \xrightarrow[\text{WW}]{\text{Schwache}} u + e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.0.2}$$

Ein weiteres Beispiel für einen Zerfall durch die SCHWACHE WECHSELWIRKUNG ist

$$\Sigma^+(uus) \xrightarrow[\text{schwach}]{} p(uud) + \pi^0(u\overline{u} + d\overline{d}) \qquad \tau \approx 8 \cdot 10^{-11}\ \text{s} \tag{14.0.3}$$

Hier wandelt sich ein strange-Quark (s) in ein down-Quark (d) um. Der nächste Zerfall

$$\Delta^+(uud) \xrightarrow[\text{stark}]{} p(uud) + \pi^0(u\overline{u} + d\overline{d}) \qquad \tau \approx 6 \cdot 10^{-24}\ \text{s} \tag{14.0.4}$$

hat eine sehr viel kürzere Lebensdauer. Weiter werden keine Quark-Flavours umgewandelt. Die relevante Wechselwirkung ist die STARKE WECHSELWIRKUNG.
Seien die Lebensdauern oder Zeitkonstanten der drei Wechselwirkungen durch τ_{stark}, τ_{schwach}, τ_{em} und $\tau_{\text{Gravitation}}$ bezeichnet. Weiter seien die Kopplungskonstanten jeweils α_{stark}, α_{schwach}, α_{em} und $\alpha_{\text{Gravitation}}$. Wir kennen die Verhältnisse

$$\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{stark}}} = 10^{-6} \tag{14.0.5a}$$

$$\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{em}}} = 10^{-4} \tag{14.0.5b}$$

Daraus leitet sich die Beziehung

$$\frac{\tau_{\text{stark}}}{\tau_{\text{schwach}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{stark}}}\right)^2 \tag{14.0.6}$$

ab. Dann ist

$$\frac{\tau_{\text{em}}}{\tau_{\text{schwach}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{schwach}}}{\alpha_{\text{em}}}\right)^2 = \left(10^{-4}\right)^2 = 10^{-8} \Longrightarrow \tau_{\text{schwach}} = 10^8 \tau_{\text{em}} \tag{14.0.7}$$

Wenn die relative Stärke der Gravitationskopplungskonstante im Vergleich zur starken Wechselwirkung durch

$$\frac{\alpha_{\text{Gravitation}}}{\alpha_{\text{stark}}} = 10^{-41} \tag{14.0.8}$$

gegeben wäre ([Wik22b]), wäre die Lebensdauer eines gravitationsbedingen Zerfalls

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\text{Gravitation}}}{\tau_{\text{stark}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{stark}}}{\alpha_{\text{Gravitation}}}\right)^2 &= \left(10^{41}\right)^2 = 10^{82} \\ \Longrightarrow \tau_{\text{Gravitation}} = 10^{82}\tau_{\text{stark}} &\approx 10^{82} \cdot (10^{-24} \text{ bis } 10^{-23}) \text{ s} \\ &= (10^{58} \text{ bis } 10^{59}) \text{ s} = (3 \cdot 10^{50} \text{ bis } 3 \cdot 10^{51}) \text{ a} \end{aligned} \tag{14.0.9}$$

Dies ist wesentlich länger als die bisherige Lebensdauer des Universums von $< 1.4 \cdot 10^{10}$ a.

14.1. Parität

Links und rechts sind in der Natur nicht äquivalent (siehe Abbildung 14.1). Wir nennen dies Paritätsverletzung.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

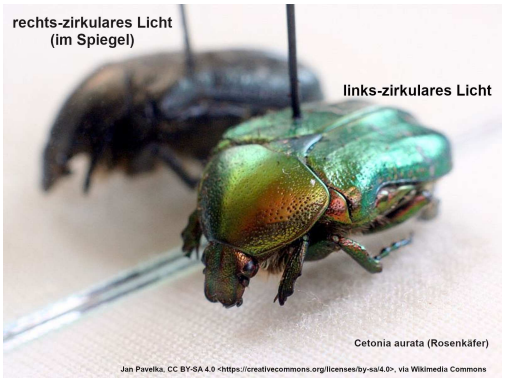


Abb. 14.1.: Rosenkäfer (Cetonia aurata) im zirkular polarisierten Licht. Bei links-zirkularem Licht glänzt der Panzer, bei rechts-zirkularem Licht ist er dunkel. Der Spiegel hinter dem Käfer ändert die Händigkeit des Lichts (Credit: Jan Pavelka, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Cetonia_in_mirror.jpg).

Das Bild des Rosenkäfers in Abbildung 14.1 zeigt, dass die Natur nicht immer gleich auf Linkshändigkeit und Rechtshändigkeit bei der Wechselwirkung mit Licht reagiert.
Und die Physik, ist sie punktsymmetrisch!? Die folgenden Beobachtungen zeigen, dass dies nicht immer so ist.

- Desoxyribonukleinsäure (DNA) (Erbsubstanz) ist nur rechtshändig
- Neutrinos sind linkshändig
- Antineutrinos sind rechtshändig

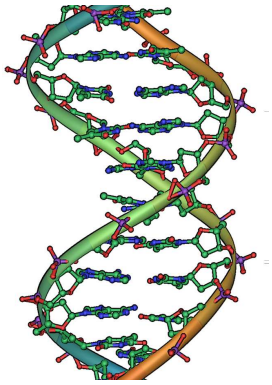


Abb. 14.2.: DNA als symmetriebrechendes Objekt. (Adaptiert von Michael Ströck (mstroeck) [GFDL (www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons)

Abbildung 14.2 zeigt einen Cartoon der DNA, ein in der Regel nur rechtshändig vorkommendes Biopolymer.

14.1.1. Definition

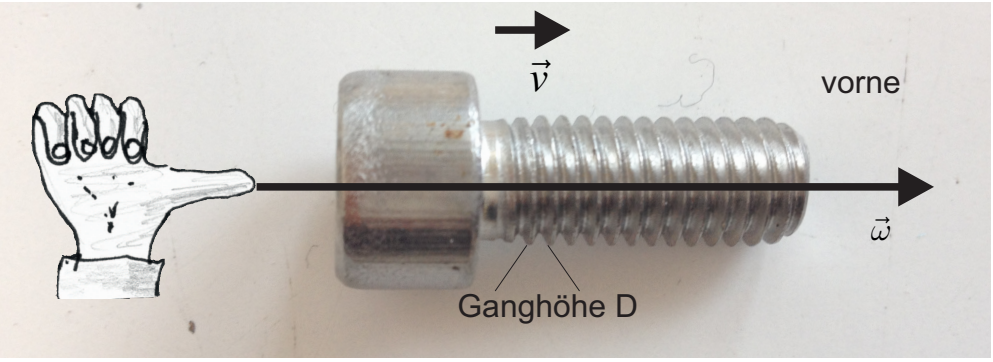


Abb. 14.3.: Definition der Parität (Nach einer Idee aus [Ble13])

Hinter dem Begriff der PARITÄT steht die Frage nach dem Drehsinn einer Schraube. Abbildung 14.3 zeigt anhand einer realen Schraube was gemeint ist. Wichtig ist der Drehsinn repräsentiert durch die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, die Ganghöhe des Schraubengewindes D und die resultierende Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Daraus ergeben sich die folgenden Beobachtungen und Definitionen:

Rechtsschraube Geschwindigkeit bei Rechtsschraube $\boldsymbol{v} = +D\frac{\omega}{2\pi}$

Linksschraube Geschwindigkeit bei Linksschraube $\boldsymbol{v} = -D\frac{\omega}{2\pi}$

Parität Die Parität ist so definiert:

$$P = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{\omega}|\,|\boldsymbol{v}|} = \begin{cases} +1, & \text{Rechtsschraube, gerade Parität;} \\ -1, & \text{Linksschraube, ungerade Parität.} \end{cases} \tag{14.1.1}$$

Die folgenden Überlegungen zur PARITÄT sind [Ble13] entnommen.
Der PARITÄTSOPERATOR ist folgendermassen definiert:

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) = \hat{\mathrm{P}}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(-\boldsymbol{r}) \tag{14.1.2}$$

Wir der PARITÄTSOPERATOR zweimal auf eine Wellenfunktion angewandt, muss sich die originale Wellenfunktion ergeben:

$$\hat{\mathrm{P}}^2\psi(\boldsymbol{r}) = \hat{1}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}) \tag{14.1.3}$$

Deshalb müssen die Eigenwerte des Paritätsoperators ± 1 sein, also entweder

$$\psi_+(\boldsymbol{r}) = +1\cdot\psi_+(\boldsymbol{r}) \tag{14.1.4a}$$
$$\psi_-(\boldsymbol{r}) = -1\cdot\psi_-(\boldsymbol{r}) \tag{14.1.4b}$$

Der PARITÄTSOPERATOR ist hermitesch und unitär:

$$\hat{\mathrm{P}} = \hat{\mathrm{P}}^\dagger = \hat{\mathrm{P}}^{-1} \tag{14.1.5}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Bewegungsgleichungen sind spiegelsymmetrisch. Das heisst:

$$\left[\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{H}}\right] = 0 \tag{14.1.6}$$

Durch den PARITÄTSOPERATOR wird ein Operators $\hat{\mathrm{O}}$ nach $\overline{\hat{\mathrm{O}}}$ transformiert

$$\overline{\hat{\mathrm{O}}}\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) = \hat{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{O}}\psi(\boldsymbol{r})\right) \tag{14.1.7}$$

Es gilt die Operatoridentität

$$\overline{\hat{\mathrm{O}}}\hat{\mathrm{P}} = \hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{O}} \Longrightarrow \overline{\hat{\mathrm{O}}} = \hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{O}}\hat{\mathrm{P}} \tag{14.1.8}$$

Wird der Operator des Ortsvektors $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{y}}, \hat{\mathrm{z}})^T$ paritätstransformiert, ändert sich das Vorzeichen des transformierten Operators $\hat{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{r}}$. Vektoren, die unter einer Paritätstransformation das Vorzeichen ändern heissen POLARE VEKTOREN.
Der Operator des Drehimpulses $\hat{\boldsymbol{\ell}} = \left(\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z\right)^T$ hingegen ändert bei einer Paritätstransformation $\hat{\mathrm{P}}\hat{\boldsymbol{\ell}}$ sein Vorzeichen nicht. Solche Vektoren werden AXIALE VEKTOREN genannt.
Die gleiche Mathematik steckt auch in PSEUDOZAHLEN. Bitte lesen Sie dazu die Ausführungen im Anhang C.3.

14.1.1.1. Beispiel elektrisches Dipolmoment

- Das magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ist ein axialer Vektor.
- Das elektrische Dipolmoment $\boldsymbol{p}_{el} = q\boldsymbol{r}$ ist ein polarer Vektor.
- Der Erwartungswert von $\hat{\boldsymbol{p}}_{el}$ in einem Zustand $|\psi\rangle$ mit definierter Parität P ist null: $\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle = 0$
- Wir haben $\hat{\mathrm{P}}\,|\psi\rangle = P\,|\psi\rangle$ und $\left|\overline{\psi}\right\rangle = \hat{\mathrm{P}}\,|\psi\rangle$
- Umformung von $\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle$

$$\left\langle\overline{\psi}\right|\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\left|\overline{\psi}\right\rangle = \left\langle\hat{\mathrm{P}}\psi\right|\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\left|\hat{\mathrm{P}}\psi\right\rangle = P^*\,\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle\,P = P^2\,\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle \tag{14.1.9}$$

$$\left\langle\overline{\psi}\right|\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\left|\overline{\psi}\right\rangle = \left\langle\hat{\mathrm{P}}\psi\right|\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\left|\hat{\mathrm{P}}\psi\right\rangle = \langle\psi|\,\hat{\mathrm{P}}^\dagger\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\hat{\mathrm{P}}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,-\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle = -\,\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle \tag{14.1.10}$$

  Also haben wir

$$\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle = -\,\langle\psi|\,\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\,|\psi\rangle = 0 \tag{14.1.11}$$

  Wir erinnern uns: $\hat{\boldsymbol{r}}$ ändert das Vorzeichen unter einer Paritätstransformation!

- oder

$$\left\langle\overline{\psi}\right|\hat{\boldsymbol{p}}_{el}\left|\overline{\psi}\right\rangle = \int \overline{\psi}^*\, e\,\boldsymbol{r}\,\overline{\psi} d^3\boldsymbol{r} = e\int\left|\overline{\psi}(\boldsymbol{r})\right|\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r} \tag{14.1.12}$$

  und $\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) = \psi(-\boldsymbol{r}) = \pm\psi(\boldsymbol{r})$ sowie $\left|\overline{\psi}\right|(\boldsymbol{r})^2 = |\psi(-\boldsymbol{r})|^2 = |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \Longrightarrow |\psi(\boldsymbol{r})|^2$ ist eine gerade Funktion

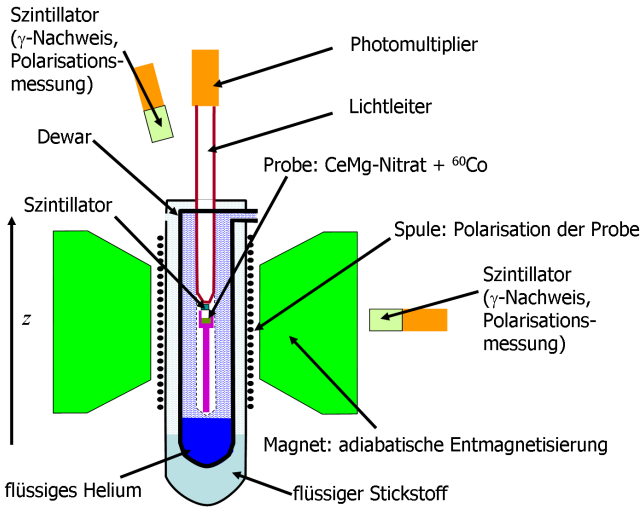
$$\int\left|\overline{\psi}(\boldsymbol{r})\right|^2\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r} = P^2\int|\psi(\boldsymbol{r})|^2\,\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r} = \int|\psi(\boldsymbol{r})|^2\,\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r} \tag{14.1.13}$$

$$\int \left|\overline{\psi}(\boldsymbol{r})\right|^2 \boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r} = \int |\psi(-\boldsymbol{r})|^2 \boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r}$$
$$= \int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 (-\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r} = -\int |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r} \quad (14.1.14)$$

Das heisst: $|\psi(\boldsymbol{r})|^2 \boldsymbol{r} = -|\psi(-\boldsymbol{r})|^2 (-\boldsymbol{r})$ ist ungerade!

14.1.2. Messung

Um die Paritätsverletzung zu messen ist es notwendig einen durch die schwache Wechselwirkung verursachten Zerfall zu untersuchen. Dabei bietet sich an, Drehimpulse oder davon abgeleitete Vektoren zu messen. Chien-Shiung Wu führte das erste Experiment durch, in dem die Paritätsverletzung gemessen wurde. Dieses Experiment wurde in der Arbeit C. S. Wu u. a. „Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay“ [Wu+57] publiziert.



Pen88, Copyrighted free use, via Wikimedia Commons,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/88/Wu-Experiment_wikipedia.png

Abb. 14.4.: Experiment zur Paritätsverletzung von Chien-Shiung Wu [Wu+57] (Credit: Pen88, Copyrighted free use, via Wikimedia Commons).

Abbildung 14.4 zeigt den experimentellen Aufbau. Ein KRYOSTAT ermöglicht es, ein Material mit magnetischen Kernmomenten, hier ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$, möglichst gut zu polarisieren. Das Material befindet sich in einer ebenfalls magnetisierbaren Matrix. Szintillatoren erlauben, emittierte γ-Quanten zu detektieren und so die Ausrichtung (Polarisation) der Zerfallsprodukte zu messen. Durch eine Umkehr des magnetischen Feldes wird eine Paritätstransformation erzeugt. Dabei wird die Reaktion

$${}^{60}_{27}\mathrm{Co} \longrightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + e^- + \overline{\nu}_e \quad (14.1.15)$$

Der resultierende Nickelkern ist angeregt. In der übenwiegenden Mehrheit der Fälle (99.88 %) zerfällt die Anregung in zwei Stufen jemeils unter Aussendung eines γ-Quants. Die Energien sind $E_{\gamma,4\to2} = 1.173\,228$ MeV für den Übergang vom $J^\pi = 4^+$- Niveau ins $J^\pi = 2^+$-Niveau ($\tau = 3.3$ ps) und $E_{\gamma,2\to0} = 1.332\,501$ MeV ($\tau =$

0.735 ps) (Daten nach [Nat17]). Die restlichen Zerfälle des $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ enden im $J^\pi = 2^+$-Niveau.

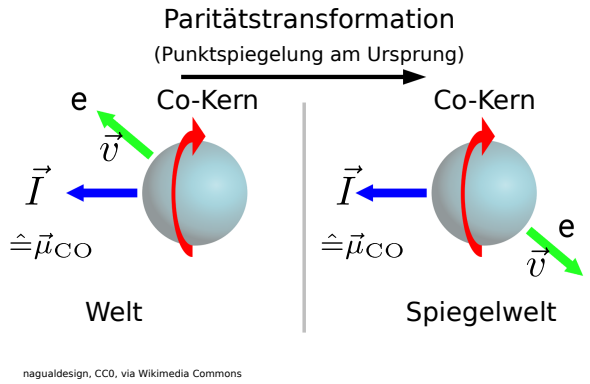


Abb. 14.5.: Paritätstransformation beim Co-Kern (Credit: nagualdesign, CC0, via Wikimedia Commons).

Durch die Umkehrung des Magnetfeldes (siehe Abb. 14.5 auf dem Massstab der Kerne) kehrt sich im Experiment auch die Richtung der maximalen Elektronenemission um. Dies darf bei einer paritätserhaltenden Reaktion nicht geschehen.

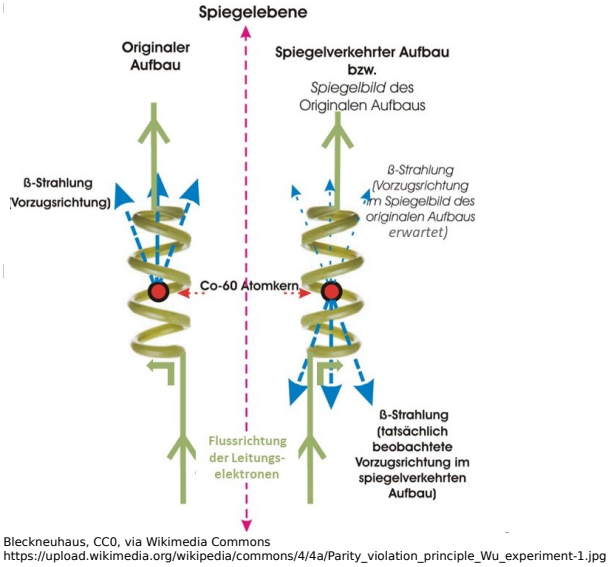


Abb. 14.6.: Prinzip des Experiments zur Paritätsverletzung nach Chien-Shiung Wu [Wu+57] (Credit: Bleckneuhaus, CC0, via Wikimedia Commons).

Abbildung 14.6 zeigt den Effekt mit den verwendeten Magnetfeldern. Erwartet wurde, dass die Paritätstransformation die Emissionsrichtung nicht ändert. Gemessen wurde eine maximale Verletzung der Paritätserhaltung.

Zur Analyse wird die Helizität verwendet. Ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und dem Spin $\boldsymbol{s}$ hat die Helizität

$$H = \frac{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{s}| \cdot |\boldsymbol{v}|} \tag{14.1.16}$$

Wenn der Spin eines Elektrons mit der Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}| = v$ parallel zu seiner Flugrichtung ausgerichtet ist, ist $H_{e^-} = 1$. Wenn dieses Teilchen in ein Inertialsystem mit $v^* > v$ transformiert wird, ändert sich die Helizität

$$H_{e^-,v} = 1 \Rightarrow H_{e^-,v^*>v} = -1 \tag{14.1.17}$$

Die Helizität hängt also von der Wahl des Bezugssystems ab. Wenn jedoch die Masse $m_0 = 0$ ist, das heisst wenn $v = c$ ist, gilt diese Aussage nicht mehr.
Es können nur Neutrinos ν mit $H = -1$ beobachtet werden. Neutrinos mit positiver Helizität können existieren, aber sie wechselwirken nicht mit normaler Materie.

14.1.3. Universalprinzip bei der Umwandlung von Teilchen

Jedes Teilchen zerfällt in leichtere Teilchen, wenn dies nicht durch Erhaltungssätze verboten ist.

Teilchen	Grund
$h\nu$	stabil, da $m_0 = 0$
$\bar{\nu}_e$	stabil, weil kein leichteres Lepton vorhanden ist
e^-	stabil, weil es das leichteste geladene Teilchen ist
p	stabil(wahrscheinlich) weil es das leichteste Baryon ist

Tab. 14.1.: Tabelle der nach heutigem Wissensstand stabilen Teilchen

Daraus ergeben sich die nach heutigem Wissenstand die in Tabelle 14.1 aufgeführten stabilen Teilchen. Instabile Teilchen zerfallen nach drei verschiedenen Mechanismen. Diese drei beobachteten Zerfallsmöglichkeiten entsprechen den drei Wechselwirkungen (ohne die Gravitation).

$$\Delta^{++} \longrightarrow p^+ + \pi^+ \qquad \text{starke WW} \qquad \tau \approx 10^{-23}\ \text{s} \tag{14.1.18a}$$
$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{elektromag. WW} \qquad \tau \approx (10^{-16}\ \text{bis}\ 10^{-3})\ \text{s} \tag{14.1.18b}$$
$$\Sigma^- \longrightarrow n + \pi^- \qquad \text{schwache WW} \qquad \tau \approx 1.48 \cdot 10^{-10}\ \text{s} \tag{14.1.18c}$$

Gleichung (14.1.18) listet drei Beispiele für alle drei Zerfallsarten auf.
Die beiden Erhaltungsgrössen Leptonenzahl L und Baryonenzahl B sind nach heutigem Wissensstand empirische Erhaltungsgrössen. Es gibt keine Begründung aus allgemeinen Symmetrieüberlegungen wie zum Beispiel nach Emmy Noether bei der Energie.

$$\tau_p > 9 \cdot 10^{32}\ \text{a} \tag{14.1.19}$$

Trotz der fehlenden theoretischen Begründung ist die Baryonenzahl B sehr gut erhalten. Nach Gleichung (14.1.19) ist die Lebensdauer eines Protons länger als die Lebensdauer des Universums.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

14.2. Ladungskonjugation (C-Symmetrie)

Nach [Ble13] gilt die folgende Argumentation

- Ladungsparität bedeutet:
$$\left[\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{H}}\right] = 0 \tag{14.2.1}$$
wegen $\hat{\mathrm{C}}^2 = \hat{1}$ sind die Eigenwerte $C = \pm 1$.

- Analog zur Parität: Wenn die Ladungsparität definiert ist, muss $Q_{tot} = 0$ sein!

- Photon: $C_\gamma = -1$ weil elektromagnetische Felder bei der Ladungskonjugation die Richtung wechseln.

  Das neutrale Pion π^0 hat $C_\pi = +1$, da es sonst nicht in 2 Photonen zerfallen kann.

  Das Positronium: hat $C_{e^+e^-} = \pm 1$ abhängig von Bahndrehimpuls und Gesamtspin.

  - $L = S = 0$ (Singulett) folgt $C_{e^+e^-} = +1 \Longrightarrow$ Zerfall in 2γ
  - $L = 0, S = 1$ (Triplett) folgt $C_{e^+e^-} = -1 \Longrightarrow$ Zerfall in $3\gamma \Longrightarrow$ mehr Vertices $\Longrightarrow$ längere Lebensdauer (Faktor 1000)

- Allgemein ist der Eigenwert von $\hat{\mathrm{C}}$ für ein System von mehreren Teilchen gegeben durch
$$\eta_C = (-1)^J \tag{14.2.2}$$
wobei $J = L + S, \ldots, |L - S|$ der Gesamtdrehimpuls des Systems ist und L dessen Gesamtbahndrehimpuls sowie S dessen Gesamtspin. Die Addition folgt nach den Regeln der Drehimpulsaddition.

Beim Übergang Neutrino $\longrightarrow$ Antineutrino müsste die linkshändige Helizität in die linkshändige Helizität übergehen.

$\boldsymbol{v}$ ist ein Vektor, $\boldsymbol{s}$ ein Pseudovektor. Deshalb ändert die Helizität das Vorzeichen.

Die C-Symmetrie ist also verletzt!

Alle Prozesse der schwachen Wechselwirkung verletzen die C-Symmetrie.

14.3. CP-Symmetrie

CP-Symmetrie bei der Neutrino-Antineutrino-Transformation

	ν_e		$\overline{\nu}_e$
	$H=-1$		$H=+1$
C	v	$\rightarrow$	v
	s	$\rightarrow$	s
P	v	$\rightarrow$	$-v$
	s	$\rightarrow$	s
CP	v	$\rightarrow$	$-v$
	s	$\rightarrow$	s

Wenn man also die C-Symmetrie mit der P-Symmetrie kombiniert, ist die Neutrino-Antineutrino-Transformation kompatibel.

14.4. Zeitumkehr (T-Symmetrie)

Bis auf die Gesetze der Thermodynamik sind die Gesetze der Physik (Mechanik, Elektrizitätslehre, Atomphysik, Optik) in der Zeit umkehrbar. Auch wenn die Entropie nur zunehmen kann, sind die zugrunde liegenden Gesetze zeitumkehrinvariant.
Nach J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 12.4.1.] wird die Zeitumkehrsymmetrie quantenmechanisch durch den Operator $\hat{\mathrm{T}}$ beschrieben. Der Operator $\hat{\mathrm{T}}$ bewirkt

$$t \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} -t \tag{14.4.1}$$

Ein Ortsvektor ändert sich unter $\hat{\mathrm{T}}$ nicht. Die Geschwindigkeit jedoch ändert das Vorzeichen $\boldsymbol{v} \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} -\boldsymbol{v}$, da in ihr ja die Zeit steckt. Der Drehimpuls als Kreuzprodukt eines Ortsvektors und eines Impulsvektors ändert ebenso sein Vorzeichen $\boldsymbol{L} \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} -\boldsymbol{L}$.
Die Zeitumkehr führt bei der zeitabhängigen Schrödingergleichung auf eine andere Gleichung (siehe A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.])

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{H}}\psi(\boldsymbol{r},t) \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},-t) = \hat{\mathrm{H}}\psi(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.2}$$

In Gleichung 14.4.2 wurde angenommen, dass der Hamiltonoperator als hermitescher Operator reell ist. Die Schrödingergleichung kann nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] invariant unter dem Zeitumkehroperator $\hat{\mathrm{T}}$ gemacht werden, wenn wir verlangen, dass

$$\psi(\boldsymbol{r},t) \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} \psi^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.3}$$

ist. Dann ist die konjugiert komplexe Schrödingergleichung

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{H}}\psi^*(\boldsymbol{r},t)$$

Mit dem Zeitumkehroperator ergibt sich dann

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{H}}\psi(\boldsymbol{r},t) \xrightarrow{\hat{\mathrm{T}}} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\boldsymbol{r},-t) = \hat{\mathrm{H}}\psi^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.4}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Hier ist die Form der Schrödingergleichung invariant, wenn die Zeitumkehroperation für Wellenfunktionen wie in Gleichung (14.4.3) definiert ist. Der Zeitumkehroperator ist nach A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] ein ANTILINEARER OPERATOR. Da Wellenfunktionen in der Quantenmechanik komplex sein müssen, können sie keine Eigenfunktionen von $\hat{\mathrm{T}}$ sein.
A. Das und T. Ferbel [DF09, Kap. 11.3.] führen weiter aus, dass wegen dem Prinzip der «DETAILED BALANCE» der Betrag des Transfermatrixelements für den Vorwärtsprozess gleich sei wie der Betrag des Transfermatrixelements des Rückwärtsprozesses, also

$$|M_{i\to f}| = |M_{f\to i}| \tag{14.4.5}$$

Daraus folge nach FERMIS GOLDENER REGEL, dass die Wahrscheinlichkeiten nur noch von den Zustandsdichten der jeweiligen Ausgangszuständen abhänge. Mit der Definition

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{T}}\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.6}$$

ist die Zeitumkehrtransformation eines Operators $\hat{\mathrm{O}}$

$$\overline{\hat{\mathrm{O}}}\overline{\psi}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathrm{O}}\psi(\boldsymbol{r})\right) = \hat{\mathrm{O}}^\dagger\psi^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.7}$$

Bei Erwartungswerten oder Übergangsmatrixelementen gilt

$$\langle\psi|\,\hat{\mathrm{O}}\,|\varphi\rangle = \langle\varphi|\,\hat{\mathrm{O}}^\dagger\,|\psi\rangle^* \tag{14.4.8}$$

Messbare Grössen sind durch hermitesche Operatoren $\hat{\mathrm{O}}^\dagger = \hat{\mathrm{O}}$ gegeben. Der Hamiltonoperator genügt dieser Anforderung. Deshalb ist die Quantenmechanik zeitumkehrinvariant.
Doppelte Anwendung des Zeitumkehroperators ergibt

$$\hat{\mathrm{T}}^2\psi(\boldsymbol{r},t) = \hat{\mathrm{T}}\psi^*(\boldsymbol{r},-t) = \psi^*(\boldsymbol{r},-t)^* = \hat{1}\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r},t) \tag{14.4.9}$$

Das deutet auf die Eigenwerte ± 1 hin.
Bei Spinoren (Spins) wird ein System durch zwei Wellenfunktionen beschrieben

$$\psi_1(\boldsymbol{r},t) = \psi_\uparrow(\boldsymbol{r},t) \tag{14.4.10a}$$
$$\psi_2(\boldsymbol{r},t) = +\psi_\downarrow(\boldsymbol{r},t) \tag{14.4.10b}$$

Die Pfeile beschreiben den Spinzustand. Die Anwendung des Zeitumkehroperators ergibt

$$\hat{\mathrm{T}}\left(\psi_1(\boldsymbol{r},t)\right) = \psi_\downarrow^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.11a}$$
$$\hat{\mathrm{T}}\left(\psi_2(\boldsymbol{r},t)\right) = -\psi_\uparrow^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{14.4.11b}$$

Auch hier ergeben sich konjugiert komplexe Wellenfunktionen sowie die Umkehr der Spinkomponenten. Die Änderung des Vorzeichens ergibt sich aus der für Spinoren in $U(2)$ übliche halbe Winkel.

14.5. CPT-Symmetrie

C	Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie	
P	Parität	(14.5.1)
T	Zeitumkehr	

Dadurch dass die Helizität des Neutrinos festgelegt ist werden Elektronen bevorzugt gegen den Spin des Neutrinos emittiert.

Es gibt keine in sich konsistente Theorie, bei der die CPT-Symmetrie verletzt ist

$\hat{C}$-Symmetrie ist verletzt, da beim Übergang Neutrino $\rightarrow$ Antineutrino linkshändig in linkshändig übergehen müsste ($\boldsymbol{s}$ ist axial, $\boldsymbol{v}$ aber polar)

Alle Prozesse der schwachen WW verletzen die C-Symmetrie

Die $\hat{C} \cdot \hat{P}$-Symmetrie gilt für Neutrinos.

14.5.1. K^0-Mesonen

Die Zerfälle der Kaonen verletzen auch die $\hat{C} \cdot \hat{P}$-Symmetrie.

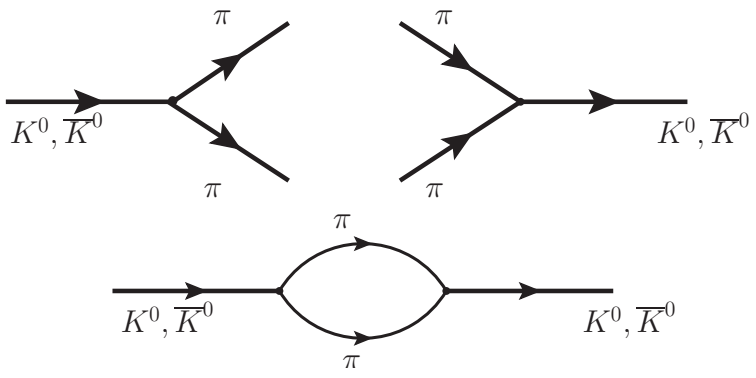


Abb. 14.7.: Feynman-Diagramme des Kaon-Zerfalls (nach [Ble13]).

- Der untere Prozess ermöglicht zum Beispiel eine Umwandlung $\overline{K}^0 \rightarrow K^0$ oder $K^0 \rightarrow \overline{K}^0$.
- Da der Energieunterschied zwischen K^0 und $\overline{K}^0$ sehr klein ist ($\Delta E = \left(m_{K^0} - m_{\overline{K}^0}\right) c^2 \ll 1$ eV, sind die Schwebungen sichtbar (Strangenessoszillation). Ausser der Schwachen Wechselwirkung sind alle anderen WW gleich.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

- Kurzlebiges Kaon K_S^0

$$K_S^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- \\ \searrow \pi^0 + \pi^0 \end{cases} \tag{14.5.2}$$

langlebiges Kaon

$$K_L^0 \begin{cases} \nearrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \searrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \end{cases} \tag{14.5.3}$$

- K_L^0 und K_S^0 haben die gleiche Masse, aber unterschiedliche Lebensdauern

Parität

$$(14.5.2): \qquad P = +1 \tag{14.5.4a}$$
$$(14.5.3): \qquad P = -1 \tag{14.5.4b}$$

Da (14.5.2) und (14.5.3) möglich sind $\longrightarrow$ CP-Verletzung
Quarkmodell

$$K^0 = (d\bar{s}) \qquad \bar{K}^0 = (\bar{d}s) \tag{14.5.5}$$

Schwache WW erlaubt $K^0 \longrightarrow \overline{K}^0$ mit ($s \leftrightarrow \bar{s}$, $d \leftrightarrow \bar{d}$) unter Austausch zweier W-Bosonen

$\Rightarrow$ Mischzustände

$$\left|K_1^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|K^0\right\rangle + \left|\overline{K}^0\right\rangle\right\} \qquad \text{und} \quad \hat{C}\cdot\hat{P}\left|K_1^0\right\rangle = +1\left|K_1^0\right\rangle \tag{14.5.6}$$
$$\left|K_2^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|K^0\right\rangle - \left|\overline{K}^0\right\rangle\right\} \qquad \text{mit} \quad \hat{C}\cdot\hat{P}\left|K_2^0\right\rangle = -1\left|K_2^0\right\rangle \tag{14.5.7}$$

Hier wäre

$$\left|K_1^0\right\rangle = \left|K_S^0\right\rangle \tag{14.5.8a}$$
$$\left|K_2^0\right\rangle = \left|K_L^0\right\rangle \tag{14.5.8b}$$

Experiment

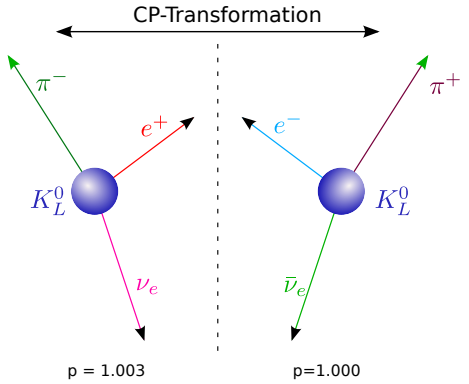


Abb. 14.8.: Semileptonischer Zerfall des K_L^0-Teilchen. Die Variante mit dem π^- ist leicht wahrscheinlicher. (Zeichnung nach [Dem10, Abb. 7.38])

1. Flugstrecke, bei der die Zeit zum Durchlaufen $\tau \gg \tau_{K_S^0}$ ist

   $\Rightarrow$ Es sollten nur 3π-Zerfälle auftreten. Aber mit Wahrscheinlichkeit $p = 3 \cdot 10^{-3}$ gibt es auch 2π-Zerfälle

2. zu 40.55 % aller Zerfälle ([Zyl21] und P. A. Zyla u. a. [Zyl+20])

$$K_1^0 \longrightarrow \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.5.9a}$$
$$\searrow$$
$$\pi^- + e^+ + \nu_e \tag{14.5.9b}$$

   oder zu 27.04 % aller Zerfälle

3.

$$K_1^0 \longrightarrow \pi^+ + \mu^- + \overline{\nu}_\mu \tag{14.5.10a}$$
$$\searrow$$
$$\pi^- + \mu^+ + \nu_\mu \tag{14.5.10b}$$

   (14.5.10a) ist um 1.0033 häufiger als (14.5.10b) $\Rightarrow$ CP-Verletzung

$\Rightarrow$ CP-Verletzung erlaubt absolut das Ladungsvorzeichen zu bestimmen
M. Thomson [Tho11] gibt in seinem Online-Handout https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/handouts/Handout_12_2011.pdf einen guten Überblick über die korrekte quantenmechanische Formulierung der CP-Symmetrie und ihrer Verletzung.
$\Rightarrow$ Wenn $\hat{C}\hat{P}$ verletzt ist, muss auch $\hat{T}$ verletzt sein. Aber: Keine experimentelle Bestätigung

z.B. isoliertes Neutron $\Rightarrow$ $\boldsymbol{s}$ ist einzige Vorzugsrichtung, d.h. ein magnetisches Drehmoment muss entlang $\boldsymbol{s}$ liegen.

$$\text{Energie:} \quad W = -\boldsymbol{d}_n \cdot \boldsymbol{E} \propto \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} \tag{14.5.11}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\hat{P}\,(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{E}) \longrightarrow (\boldsymbol{s}, -\boldsymbol{E}) \tag{14.5.12a}$$

$$\hat{T}\,(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{E}) \longrightarrow (-\boldsymbol{s}, \boldsymbol{E}) \tag{14.5.12b}$$

Wenn das Neutron ein elektrisches Dipolmoment hätte, wäre dies nach [Dem10, p. 210] ein Beweis für die die Verletzung der $\hat{\mathrm{T}}$-Symmetrie. Wenn der Spin oder das E-Feld umgepolt werden ergibt sich ein Energieunterschied von $\Delta W = 2W$. Norman Ramsey hat dies genau nachgemessen und kann eine obere Schranke für das elektrische Dipolmoment des Neutrons von $d_n < 2.3 \cdot 10^{-46}$ C m angeben.

Grösse	$\hat{P}$	$\hat{C}$	$\hat{T}$
Ortsvektor $\boldsymbol{r}$	$-\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r}$
Zeit t	t	t	$-t$
Impuls $\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{p}$
Drehimpuls $\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{L}$	$-\boldsymbol{L}$
Spin $\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{s}$	$-\boldsymbol{s}$
elektr. Feld $\boldsymbol{E}$	$-\boldsymbol{E}$	$-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}$
magn. Feld $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}$	$-\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}$

Tab. 14.2.: Symmetrieoperationen und Messgrössen.

14.6. G-Symmetrie

Die $\hat{\mathrm{C}}$-Symmetrie ist nur für neutrale, also ladungslose Teilchen definiert. Sie kann zur sogenannten $\hat{\mathrm{G}}$-Symmetrie erweitert werden. Bei der $\hat{\mathrm{G}}$-Symmetrie können auch geladene Teilchen (Mesonen) Eigenzustände sein. Der Symmetrieoperator ist durch

$$\hat{\mathrm{G}} = \hat{\mathrm{C}} e^{i\pi T_2} \tag{14.6.1}$$

definiert. $\hat{\mathrm{C}}$ ist dabei der Operator der Ladungskonjugation nach Kap. 14.2 definiert. T_2 ist die «2»-Komponente des Isospins, analog zur «2»-Komponente des Spins (die y-Komponente). $\exp(i\pi T_2)$ rotiert die T_3 um die «2»-Achse um den Winkel π. Das Vorzeichen von T_3 kehrt sich um.
Der $\hat{\mathrm{G}}$-Operator verknüpft die Ladungskonjugation (Teilchen-Antitteilchen-Transformation) mit einem Vorzeichenwechsel für die «3»-Komponente des Isospins. In der STARKEN WECHSELWIRKUNG ist der Isospin und die Ladungskonjugation erhalten. Deshalb ist die $\hat{\mathrm{G}}$-Symmetrie auch erhalten.
Die PIONEN bilden ein Triplett. Die $\hat{\mathrm{G}}$-Symmetrie wirkt immer auf alle Elemente eines Multipletts. Multipletts mit einer gemittelten Ladung von Null (gilt für die elektrische Ladung Q, die Baryonenzahl B und die Hyperladung $Y = B + S + C + B' + T'$) sind Eigenzustände von $\hat{\mathrm{G}}$.

Allgemein gilt für den Eigenwert η_G (sofern er existiert)

$$\eta_G = \eta_C(-1)^T \overset{\eta_C=(-1)^J}{=\!=\!=} (-1)^{J+T} \tag{14.6.2}$$

wobei $J = L+S, \ldots, |L-S|$ und L der Gesamtbahndrehimpuls des Systems und S dessen Gesamtspin ist.

14.7. Angabe des Symmetriezustandes

In Datensammlungen wie R. C. Weast und M. J. Astle *Handbook of Chemistry and Physics* [WA80, Mesonen und Baryonentabelle im Abschnitt F], M. Tanabashi u. a. [Tan+18b, p. 1738], Particle Data Group [Par20b] oder Particle Data Group [Par20a] werden die Symmetriezustände wie folgt angegeben

Baryonen $T(J^P)$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I(J^P)$). T (I) ist der Isospin, J der GesamtSpin, bei einfachen Teilchen ist des der Spin und P ein Symbol. $+$ bedeutet dass der Eigenwert $\eta_P = +1$ ist. $-$ bezeichnet dementsprechend den Eigenwert $\eta_P = -1$.

geladene Mesonen $T^G(J^P)$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I^G(J^P)$). Die Bedeutungen sind wie bei den Baryonen. Zusätzlich ist G der Eigenwert des $\hat{\text{G}}$-Operators, also $+$ für $\eta_G = +1$ und $-$ für $\eta_G = -1$.

ungeladene Mesonen $T^G(J^{PC})$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I^G(J^{PC})$). Die Bedeutungen sind wie bei den Baryonen oder den geladenen Mesonen. Zusätzlich ist C der Eigenwert des $\hat{\text{C}}$-Operators, also $+$ für $\eta_C = +1$ und $-$ für $\eta_C = -1$.

Leptonen J Leptonen werden nur durch ihren Spin beschrieben

Photon $T(J^{PC}$ (oder wenn der Isospin mit I bezeichnet wird $I(J^{PC})$) Die Bezeichnungen entsprechen denen bei Baryonen oder (un-)geladenen Mesonen. In Zahlen $T(J^{PC}) = 0, 1(1^{--})$ [Zyl21].

Graviton $J = 2$ [Zyl21].

Bosonen J bei ungeladenen oder geladenen Eichbosonen (ausser dem Photon)

14.8. Antimaterie

Nach [Ble13]

Antimaterie ist die Sorte *elektrisch geladener* Leptonen, die beim Zerfall des *langlebigen* Kaons *häufiger* auftritt

Dies kann das Verhalten der Materie beim Urknall und das Überwiegen von Materie erklären.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

14.9. Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung

- Die schwache Wechselwirkung wird durch **W-** und **Z-Bosonen** vermittelt

- Schwache Wechselwirkungen, bei denen elektrische Ladung ausgetauscht wird: Reaktionen geladener Ströme

$$n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.9.1}$$

Abbildung 14.9 zeigt das Feynman-Diagramm des Neutronenzerfalls mit einem geladenen schwachen Strom.

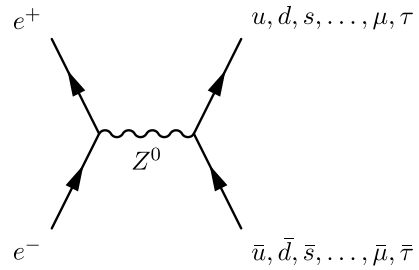


Abb. 14.9.: Schwacher geladener Strom bei Zerfall eines Neutrons

$$\tau^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau \tag{14.9.2}$$

Abbildung 14.10 zeigt das Feynman-Diagramm des τ^--Zerfalls in ein μ^-.

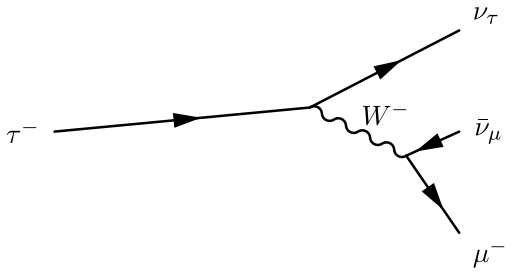


Abb. 14.10.: Schwacher geladener Strom beim τ-Zerfall.

$$\tau^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau \tag{14.9.3}$$

Abbildung 14.11 zeigt das Feynman-Diagramm des τ^--Zerfalls in ein e^-.

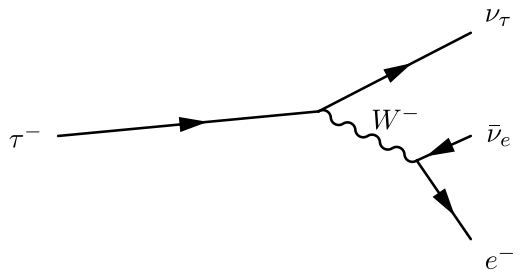


Abb. 14.11.: Schwacher geladener Strom beim τ-Zerfall, hier in ein Elektron und ein Antielektronneutrino.

- Prozesse ohne Ladungsänderung: Reaktionen der neutralen Ströme

$$e^+ + e^- \longrightarrow Z^0 \longrightarrow u + \overline{u} \quad \text{oder} \quad (d + \overline{d}) \quad \text{oder} \quad \ldots \tag{14.9.4}$$

Abbildung 14.12 zeigt den schwachen Strom bei der Elektron-Positron-Annihilation. Anstelle des Z^0 könnte auch ein γ ausgetauscht werden. In der elektroschwachen Wechselwirkungstheorie sind Z^0 und γ Mischzustände zweier reiner Teilchen W^0 und B.

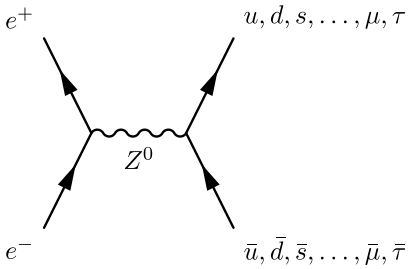


Abb. 14.12.: Schwacher Neutraler Strom bei der Elektron-Positron-Annihilation.

Streuung

$$\nu_\mu + p \longrightarrow \nu_\mu + p \tag{14.9.5}$$

Abbildung 14.13 zeigt den schwachen neutralen Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

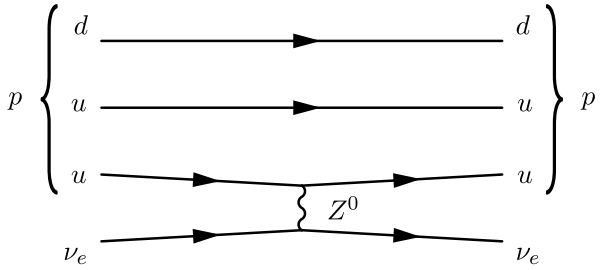


Abb. 14.13.: Schwacher neutraler Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^- \tag{14.9.6}$$

Abbildung 14.13 zeigt den schwachen neutralen Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Proton.

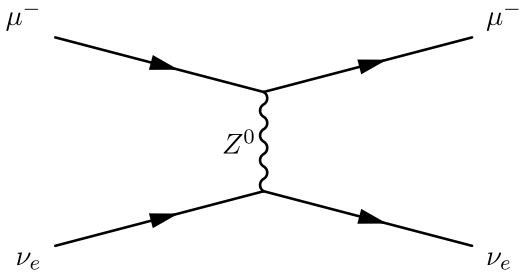


Abb. 14.14.: Schwacher neutraler Strom bei der Streuung eines Neutrinos an einem Myon.

Nach Hideki Yukawa ist

$$R \approx 2 \cdot 10^{-18}\ \text{m} \tag{14.9.7}$$

dann ist

$$m \geq \frac{\hbar}{R \cdot c} \approx 1.5 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} \hat{=} 80\ \text{GeV} \tag{14.9.8}$$

14.9.1. β-Zerfall und Streuung von Neutrinos

Neutronenzerfall (β-Zerfall) auf Quarkniveau

$$d \longrightarrow u + W^{*-} \tag{14.9.9}$$

$$W^{*-} \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.9.10}$$

Ladung

$$q_{W^-} = -e \tag{14.9.11}$$

Wenn genügend Bindungsenergie vorhanden ist geht auch

$$u \longrightarrow d + W^{*+} \tag{14.9.12a}$$
$$W^{*+} \longrightarrow e^+ + \nu_e \tag{14.9.12b}$$

Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung

Streuung von Neutrinos mit virtuellen W-Bosonen

$$e^-_{ein} \longrightarrow \nu_{e,aus} + W^{*-} \qquad \nu_{e,ein} + W^{*-} \longrightarrow e^-_{aus} \tag{14.9.13}$$
$$\nu_{e,ein} \longrightarrow e^-_{aus} + W^{*+} \qquad e^-_{ein} + W^{*+} \longrightarrow \nu_{e,aus} \tag{14.9.14}$$

14.9.2. Reelle W- und Z-Bosonen

$$e^- + e^+ \longrightarrow Z^0 \tag{14.9.15}$$

1982 (Simon van der Meer und Carlo Rubbia)[Arn+83]

$$p + \overline{p} \longrightarrow W^\pm + X \tag{14.9.16}$$

(X: sind weitere Teilchen)
Quarks

$$u + \overline{d} \longrightarrow W^+ \qquad \longrightarrow e^+ + \nu_e \tag{14.9.17a}$$
$$d + \overline{u} \longrightarrow W^- \qquad \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e \tag{14.9.17b}$$
$$u + \overline{u} \longrightarrow Z^0 \qquad \longrightarrow \begin{cases} e^+ + e^- \\ \mu^+ + \mu^- \end{cases} \tag{14.9.17c}$$

Boson	Masse in GeV/c^2	Resonanzbreite Γ in GeV
$W^\pm$	80.2 ± 0.26	2.08 ± 0.07
Z^0	91.18 ± 0.004	2.497 ± 0.004

Nach U. Ellwanger[Ell15] ist

- W^+ und W^--Bosonen koppeln nur an linkshändige Fermionen (alle Quarks und alle Leptonen einschliesslich Neutrinos).
- W^+ und W^--Bosonen koppeln nur an rechtshändige fermionische Antiteilchen (alle Quarks und alle Leptonen einschliesslich Neutrinos).
- Linkshändige Quarks und Leptonen haben einen schwachen Isospin.
- Quarks und Leptonen sind in drei Familien eingeteilt

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \tag{14.9.18}$$

  Genau so wie sich Proton und Neutron als zwei Teilchen mit dem Isospin $T = \frac{1}{2}$ und unterschiedlichen T_3-Komponenten auffassen lassen, lassen sich

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

zum Beispiel u und d über einen schwachen Isospin unterscheiden: $T_{w,3}(u) = \frac{1}{2}$, $T_{w,3}(d) = -\frac{1}{2}$.

- Emission und Absorption eines $W^{\pm}$ wandelt ein Lepton immer in ein Lepton der gleichen Familie um.
- Die Emission oder Absorption eines $W^{\pm}$ kann ein Quark auch in ein Quark einer anderen Familie umwandeln. Kopplungsstärken werden durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix beschrieben.
- $W^{\pm}$-Bosonen können in Quark/Antiquarks oder leptonisch zerfallen.
- Die schwache Feinstrukturkonstante kann mit der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante mit dem Weinbergwinkel verknüpft werden

$$\alpha_w = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_w} \approx 3.4 \cdot 10^{-2} \Longrightarrow \theta_W \approx 0.47 \tag{14.9.19}$$

- Rechtshändige Quarks und Leptonen haben keinen schwachen Isospin. Rechtshändige Neutrinos wurden nie beobachtet.
- Quantenfeldtheorie: bosonische Austauschteilchen haben die Masse 0.

  Woher rührt die Masse der $W^{\pm}$ und der Z^0-Bosonen?

15. Standardmodell

Das heutige Wissen über Elementarteilchen wird mit dem sogenannten Standardmodell beschrieben. Es ist jedoch klar, dass das Modell noch nicht endgültig ist. Es werden Erweiterungen gesucht.

Erhaltungsgrösse	E.M. WW	schwache WW	starke WW
Energie	ja	ja	ja
Impuls	ja	ja	ja
Drehimpuls	ja	ja	ja
Baryonenzahl B^*	ja	ja	ja
Leptonenzahl L^*	ja	ja	ja
Parität P	ja	nein	ja
Ladungsquantenzahl C	ja	nein	ja
Produkt $C \cdot P$	ja	nein	ja
Zeitspiegelinvarianz T	ja	nein	ja
Produkt $C \cdot P \cdot T$	ja	ja	ja

Tab. 15.1.: Tabelle der Erhaltungsgrössen und der Wechselwirkungen, die sie erfüllen (Mit * markierten rot unterlegten Grössen beruhen auf einem empirischen Befund.).

Tabelle 15.1 zeigt die im Standardmodell berücksichtigten Erhaltungsgrössen. Weiter ist angegeben, welche Erhaltungsgrössen von welchen Wechselwirkungen erhalten oder verletzt werden.

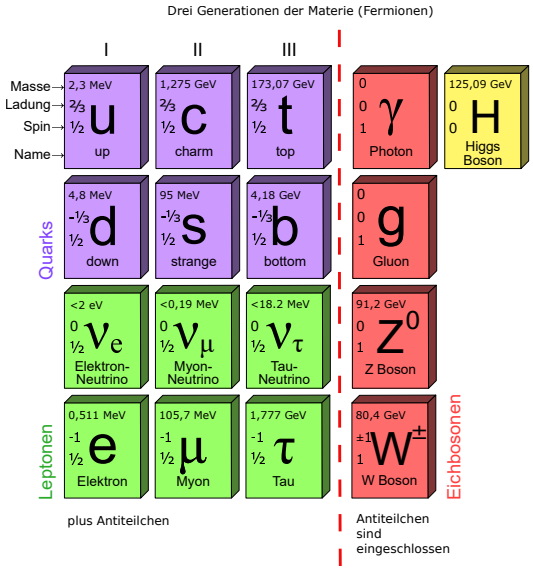


Abb. 15.1.: Elementarteilchen im Standardmodell (MissMJ-derivative work: Polluks [CC BY 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by/3.0)], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg).

Abbildung 15.1 gruppiert die Teilchen des Standardmodells nach Familien, hauptsächlicher Wechselwirkung und nach Austauschteilchen. Das HIGGS steht dabei als massegenerierendes Teilchen alleine. Links der rot gestrichelten Linie haben die Teilchen einen halbzahligen Spin (FERMIONEN), rechts davon ist der Spin der Austauschteilchen ganzzahlig (BOSONEN).

Fermionen	Familie			Elektr. Ladung	Farbe	Spin
	1	2	3			
Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	—	1/2
	e^-	μ^-	τ^-	-1	—	1/2
Quarks	u	c	t	+2/3	r,g,b	1/2
	d	s	b	-1/3	r,g,b	1/2

Tab. 15.2.: Fermionen unter den Elementarteilchen

Tabelle 15.2 zeigt die nach heutigem Wissensstand grundlegenden FERMIONEN unter den Elementarteilchen. Fermionen (benannt nach Enrico Fermi) sind dies Teilchen mit halbzahligem Spin. In Tabelle 15.2 fehlen noch die bosonischen Aus-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

tauschteilchen (benannt nach Satyendranath Bosemit ganzzahligem Spin).

Wechselwirkung	koppelt an	Austauschteilchen	Masse/(GeV/c^2)	I^P
stark	Farbladung	8 Gluonen	0	1^+
elektromagnetisch	elektrische Ladung	1 Photon	0	1^+
schwach	schwache Ladung	3 $W^{\pm}$, Z^0	80,90	1
Gravitation	Masse	Graviton	0	2

Tab. 15.3.: Teilchen bei den grossen vereinheitlichten Theorien (GUT).

Tabelle 15.3 bezieht sich auf die Grosse vereinheitlichte Theorie, auch Grand Unified Theory (GUT) genannt. Manche Publikationen zählen wie hier das GRAVITON mit, andere lassen es weg.

Die Grundlage aller Theorien der Wechselwirkung von Elementarteilchen ist die QUANTENFELDTHEORIE. Sie basiert auf den beiden fundamentalen mathematischen Eigenschaften

1. der EICHSYMMETRIE und

2. der SPONTANEN SYMMETRIEBRECHUNG

Eine SYMMETRIEBRECHUNG tritt immer bei einer energetischen Entartung von Quantenzuständen auf, analog zum Verhalten von Elektronenniveaus in der Atomphysik.

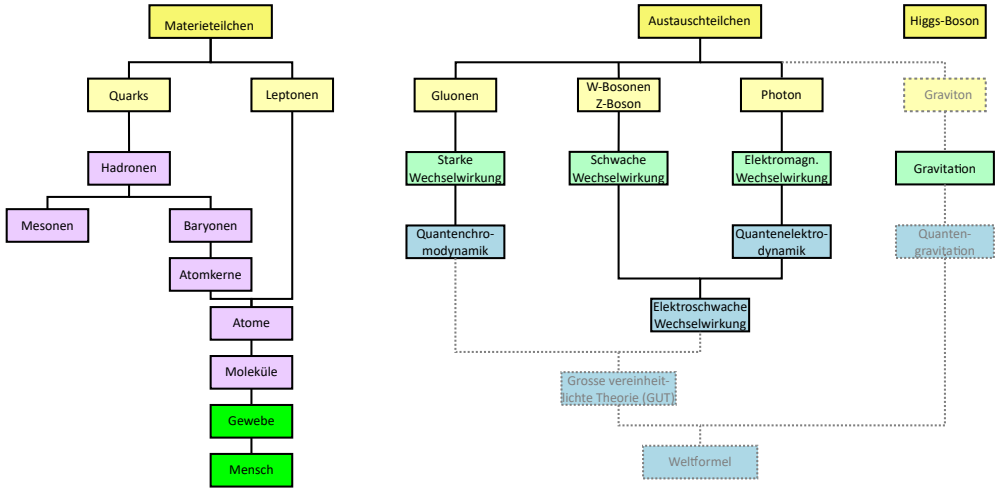


Abb. 15.2.: Grafische Struktur des Zusammenhangs von Teilchen und Theorien (nach [Wik22b]). Gelb sind die Typen der Elementarteilchen und hellgelb die Kategorien der Elementarteilchen. Zusammengesetzte Teilchen sind lila. Wechselwirkungen sind blassgrün, Theorien (oder Modelle) sind blassblau. Grün sind Beispiele übergeordneter Strukturen. Grau gestrichelte Linien und Texte bezeichnen angedachte Teilch, die noch nicht nachgewiesen sind und Theorien, die noch im Entstehern sind.

Abbildung 15.2 zeigt eine Darstellung der Teilchen und Theorien, soweit sie heute bekannt sind. Hier wird das nicht der Grossen vereinheitlichten Theorie, auch GUT genannt, zugeordnet. Alle vereinigten Wechselwirkungen werden hier WELTFORMEL genannt.

15.1. Quarks und Leptonen

Die folgenden Ausführungen folgen J. Bleck-Neuhaus *Elementare Teilchen* [Ble13, Kap. 13.1.5.].

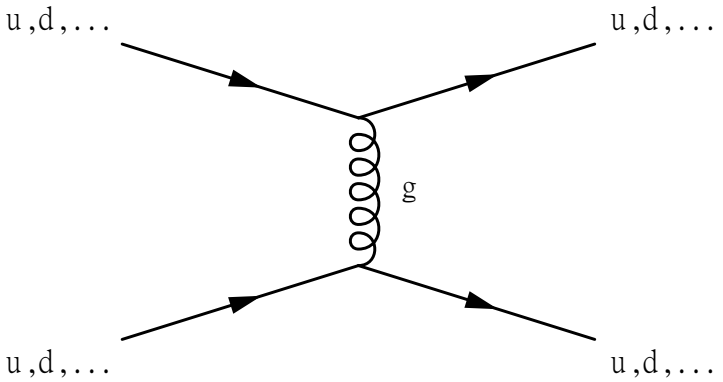


Abb. 15.3.: Feynmandiagramm der Quark-Gluon-Wechselwirkung.

Quarks werden durch die Farbwechselwirkung oder, äquivalent, GLUONEN zusammengehalten. GLUONEN entsprechen den PHOTONEN in der elektromagneti-

schen Wechselwirkung. Abbildung 15.3 zeigt das Feynman-Diagramm einer solchen Wechselwirkung.

Teilchen wie das $\Delta^{++} = (uuu)$, $\Delta^{-} = (ddd)$ oder $\Omega^{-} = (sss)$ mit einem Spin von $I = \frac{3}{2}$ verlangen eine weitere quantenmechanische Variable, die FARBLADUNG. Die Quarks werden nun so geschrieben

$$Quark \longrightarrow Quark_{Farbe} \quad \text{z.B.} \quad u_r \tag{15.1.1}$$

Der Zustandsraum aus drei Farben und drei Antifarben (Komplementärfarben) ist isomorph zum Zustandsraum $SU(3)$ der drei Quarks Up, Down und Strange. Die Gruppe $SU(3)_C$ beschreibt die Drehungen im Farbraum und ist im Gegensatz zu den Drehungen im Konfigurationsraum der Teilchen eine exakt erfüllte Symmetrie.

Zur Farbladung gibt es eine Auswahlregel

Nur weisse oder farblose Teilchen können reell, also messbar, sein

Die Farbladung ist mit Quarks verknüpft, die Komplementärfarbe (Antifarbe) mit den Antiquarks verknüpft.

Weisse Teilchen ergeben sich also aus

- Bei Baryonen wenn alle drei Farbladungen vorhanden sind (bei Antibaryonen die Antifarbladungen)
- Bei Mesonen wenn die Farbe (beim Quark) und die Komplementärfarbe (Antiquark) vorhanden ist

Jedes Quark besitzt mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden der drei Farbladungszustände.

Neben diesen Forderungen muss jedes Baryon als Fermion in einem komplett antisymmetrischen Zustand sein. Insbesondere muss die Vertauschung von zwei Quarks die Wellenfunktion das Vorzeichen wechseln. Die Forderung nach totaler Antisymmetrie limitiert das Baryon zu einer einzigen möglichen Wellenfunktion. Die Quarks sind nun sowohl durch die Forderung nach Antisymmetrie und zusätzlich durch die Gleichverteilung der Farbladungen verschränkt.

Es ist von aussen nicht feststellbar, in welchem Farbladungszustand die Quarks in einem Baryon oder Meson sein kann.

Gluonen $\hat{=}$ Farbe + Antifarbe

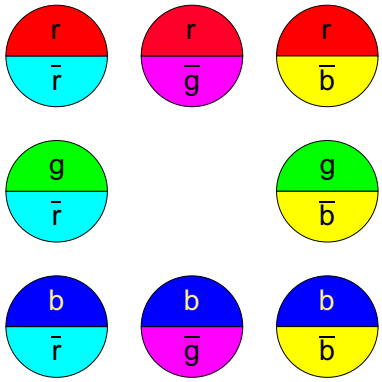


Abb. 15.4.: Farbladung der Gluonen (nach Demtröder [Dem10, Abb. 7.23])

Abbildung 15.4 zeigt die möglichen Farb- und Antifarbkombinationen der Gluonen. Die Forderung, dass alle beobachtbaren Teilchen farblos sind, bewirkt, dass die neunte mögliche Kombination von Farben eine Linearkombination der anderen acht Möglichkeiten ist. Dies ist analog zum Teiler $n-1$ bei der Berechnung der Standardabweichung von n Werten, da dabei der Mittelwert in die Rechnung eingeht. Deshalb ist der Letzte Wert berechenbar aus dem Mittelwert und allen anderne Werten.

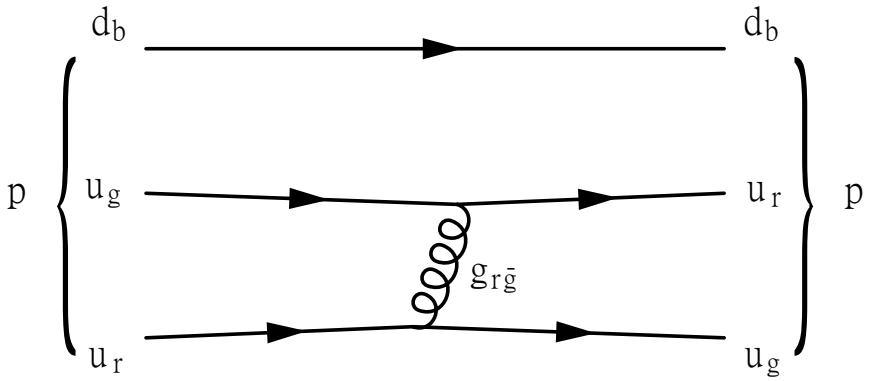


Abb. 15.5.: Feynmandiagramm der Quark-Gluon-Wechselwirkung mit Farbe.

Abbildung 15.5 schliesslich zeigt das Feynman-Diagramm einer Quark-Gluon-Wechselwirkung mit Farbe.

15.2. Higgs-Feld

Dieser Abschnitt folgt Ausführungen von U. Ellwanger in *Vom Universum zum Elementarteilchen* [Ell15]. Der Higgs-Mechanismus wurde von Peter Higgs und François Englert entdeckt und nach Higgs benannt.
Aus der Quantenfeldtheorie wissen wir, dass es zu jedem Teilchen ein Feld gibt, und umgekehrt.

Beispiel: Photon und elektromagnetisches Feld, Gluon und gluonisches Feld (existiert nur innerhalb von Hadronen)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Über den Higgs-Mechanismus kann auf indirektem Weg die Masse von Teilchen erzeugt werden.
Dazu ist ein zusätzliches Boson mit dem Spin 0 notwendig, das HIGGS-BOSON.
Das HIGGS-FELD gehört zum HIGGS-BOSON, und umgekehrt (analog zu Photonen und elektromagnetischem Feld).
Das Gravitationsfeld und das elektrische Feld sind jedoch VEKTORFELDER. Das Higgsfeld ist im Gegensatz dazu ein SKALARES FELD!
Ein konstantes elektrisches Feld wechselwirkt mit einer elektrischen Ladung e und beschleunigt diese.
Analog wechselwirkt ein konstantes Higgs-Feld H über die Kopplungskonstante g_H (der HIGGS-LADUNG) mit einem Teilchen: Die Energie wird um einen konstanten Betrag

$$\Delta E = g_H H \tag{15.2.1}$$

erhöht (analog zu einer konstanten potentiellen Energie). Siehe dazu auch Abbildung 15.6.
g_H ist die Kopplungskonstante des Higgs-Feldes an das HIGGS-BOSON.

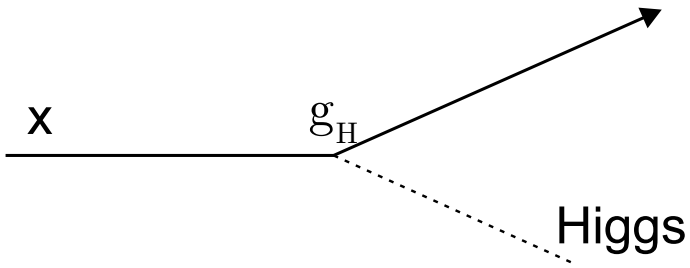


Abb. 15.6.: Emission eines Higgs-Teilchens[Ell15]

Ein masseloses Teilchen ohne Higgs-Feld wird durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 c^2 \tag{15.2.2}$$

beschrieben. Ein HIGGS-FELD führt zur Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 c^2 + g_H^2 H^2 = \boldsymbol{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \tag{15.2.3}$$

Die Wirkung des HIGGS-FELDES auf ein masseloses Teilchen ist ununterscheidbar von der Situation, wenn das Teilchen Masse hätte! Wir definieren die Masse deshalb über

$$m = \frac{g_H H}{c^2} \tag{15.2.4}$$

Wenn es überall im Universum ein konstantes Higgs-Feld gibt, kann durch den HIGGS-MECHANISMUS jede Masse erzeugt werden. Die «HIGGS-LADUNG» gibt den Wert der Masse an.
Die potentielle Energie des elektrischen Feldes ist proportional zu $E_{pot} \propto \boldsymbol{E}^2$. Im Gleichgewicht befindet sich das System im Energieminimum, also bei $\boldsymbol{E} = 0$!
Da für die Kraft $F = -\mathbf{grad}\ E_{pot}$ gilt, bewirken örtlich konstante Felder keine Kräfte. Wenn das örtliche Feld konstant ist, kann die potentielle Energie zwar vom Feld abhängen, die potentielle Energie erzeugt aber keine Kraft.

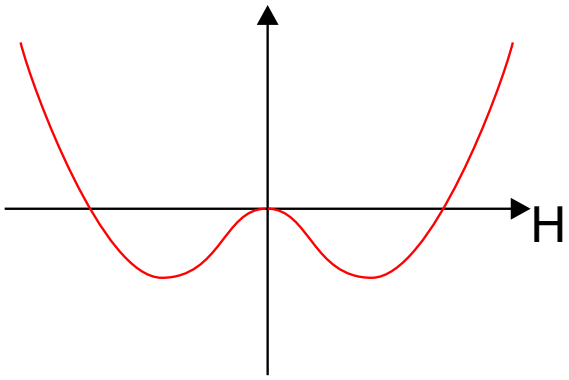


Abb. 15.7.: Potentielle Energie des Higgs-Feldes (nach U. Ellwanger [Ell15]).

Bei skalaren Feldern lassen die Feldgleichungen eine beliebige Abhängigkeit der potentiellen Energie von H zu, also auch

$$E_{pot}(H) = \frac{1}{(\hbar c)^3}\left(-\frac{\mu^2}{2}H^2 + \frac{\lambda_H^2}{4}H^4\right) \tag{15.2.5}$$

Abbildung 15.7 zeigt eine Skizze dieses Potentials.

Das Potential aus Abbildung 15.7 hat ein Minimum bei

$$H = \pm\frac{\mu}{\lambda_H} \tag{15.2.6}$$

Eines der beiden Minima wird im ganzen Universum realisiert. Alle anderen Werte des Higgs-Feldes bedeuten Instabilität.

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung $W^{\pm}$- und Z^0-Bosonen haben eine Masse, da das Higgs-Feld eine potentielle Energie ähnlich wie in der Grafik (oder der Gleichung) hat und weil das Higgs-Boson zusätzlich eine schwache Ladung hat, also an die schwache Wechselwirkung koppelt.

Für das $W^{\pm}$-Boson gilt nach U. Ellwanger [Ell15]

$$g_H = \frac{g_w}{2} \qquad \alpha_w = \frac{g_w^2}{4\pi} \tag{15.2.7a}$$

$$m_W = \frac{{g_H}^2}{c}H \qquad = \frac{g_w}{2c^2}H = \frac{\sqrt{\pi\alpha_w}}{c^2}H \tag{15.2.7b}$$

Aus der Masse des $W^{\pm}$-Bosons und der Feinstrukturkonstante der schwachen Wechselwirkung folgt der Wert von H

$$H = \frac{2c^2 m_W}{g_w} = \frac{c^2 m_W}{\sqrt{\pi\alpha_w}} = 246\ \text{GeV} = 39.4\ \text{nJ} \tag{15.2.8}$$

Die Kopplung des Z^0-Bosons ist durch

$$g_z g_w / \cos\theta_W \tag{15.2.9}$$

gegeben.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Leptonenmassen werden durch Kopplungskonstanten λ_i gegeben.

$$m_e = \frac{\lambda_e}{c^2}H \quad m_\mu = \frac{\lambda_\mu}{c^2}H \quad m_\tau = \frac{\lambda_\tau}{c^2}H \quad \dots m_{top} = \frac{\lambda_{top}}{c^2}H \tag{15.2.10}$$

Da die Kopplungskonstanten λ_i aus keiner Theorie folgen, ist es nicht möglich, aus einer Theorie auf die Leptonen- oder Quarkmassen schliessen.
Die Masse des Higgs-Boson ist

$$m_H = \frac{\mu}{c^2} \tag{15.2.11}$$

Messungen am CERN ergaben

$$m_H \approx 125\ \text{GeV}/c^2 \Longrightarrow \mu = 125\ \text{GeV} \Longrightarrow \lambda_H = 0.508 \tag{15.2.12}$$

Die Masse des Higgs führt zu einer Dichte der potentiellen Energie von

$$E_{pot}(H_{min}) = -4.929\,41 \cdot 10^{45}\ \text{Jm}^{-3} \tag{15.2.13}$$

Diese Dichte stellt ein grosses Problem dar. Das Higgs-Feld hat für die aus der Kosmologie und der Sternbeobachtung benötigte dunkle Energie das falsche Vorzeichen. Weiter ist der betragsmässige Wert um 55 Grössenordnungen grösser als der Wert, der aus der kosmologischen Konstante folgt!
Eine mögliche Lösung wäre, analog zur Allgemeinen Relativitätstheorie, die Einführung eines Analogons zur komsmologischen Konstante von Einstein

$$E_{pot}(H) = \frac{1}{(\hbar c)^3}\left(-\frac{\mu^2}{2}H^2 + \frac{\lambda_H^2}{4}H^4\right) + C \tag{15.2.14}$$

Das verbleibende Problem ist: C müsste auf 55 Stellen genau einen bestimmten Wert annehmen! Dies ist nach allen wissenschaftlichen Kriterien extrem unwahrscheinlich.
Es gibt die Spekulation, dass die Inflation des Universums durch dessen Bewegung hin zum Minimum des Higgs-Feldes bedingt sein.

15.3. Fazit der Teilchenphysik

Dieser Abschnitt beruht auf J. Bleck-Neuhaus [Ble13, Kap. 15.]. Nach seinen Ausführungen sind die wesentlichen Ergebnisse der Teilchenphysik

Elementarteilchen Es gibt Elementarteilchen. Durch Messung lässt sich weder eine räumliche Ausdehnung noch eine innere Struktur erkennen. Klassisch führen Elementarteilchen zu Problemen wie unendliche Energiedichten. Die moderne Quantenphysik mit ihren ausgefeilten Rechenmethoden (Renormalisierung, ...) ermöglicht erst eine konsistente Behandlung.

Grundtypen von Elementarteilchen Es gibt eine sehr überschaubare Liste von fundamentalen Elementarteilchen, zwei Sorten Fermionen (Leptonen und Quarks) und drei Sorten Bosonen (Gluon, Bosonen der elektroschwachen Wechselwirkung und das Higgs).

Drehimpuls ohne Drehung Punktförmige Elementarteilchen können einen Drehimpuls und ein magnetisches Moment (wenn sie geladen sind) haben, ohne dass sie sich drehen oder dass bei einer Ladung ein Strom fliesst. Bei einem geladenen Teilchen mit Spin ist es so, dass das Teilchen so aussieht wie wenn es ein magnetischer Dipol wäre, aber mit etwas mehr als dem Doppelten der Stärke wie ein Kreisstrom mit gleichem Drehimpuls.

Erzeugung und Vernichtung von Elementarteilchen Teilchen können erzeugt und vernichtet werden (wenn die Regeln, d.h. die Erhaltungssätze beachtet werden.) Bei Photonen, dem β-Zerfall und in Spurendetektoren sind diese Erzeugung und/oder Vernichtung sichtbar. Bei Fermionen muss zu jedem Teilchen ein Antiteilchen entstehen (oder umgekehrt). Beschrieben wird dies durch die Erzeugungsoperatoren $\hat{\mathrm{a}}_A^\dagger$ und Vernichtungsoperatoren $\hat{\mathrm{a}}_A$ für das Teilchen A.

Teilchen und Antiteilchen Es gibt zu jedem Teilchen sein Antiteilchen. Die beiden zusammen wandeln sich exakt in reine Energie um. Dabei bleibt die Zahl der Fermionen konstant (Teilchen positiv und Antiteilchen negativ gezählt). Er gilt für Leptonen und Quarks getrennt. Im Gegensatz zu Fermionen können Bosonen (auch wenn es Antiteilchen gibt) auch alleine erzeugt werden. Ein Antiteilchen hat die gleichen Eigenschaften wie ein Teilchen, ausser dass das Vorzeichen der Ladung sich ändert (Ladungskonjugation $\hat{\mathrm{C}}$), und als ob seine Bewegung gespiegelt verläuft (Paritätsoperation $\hat{\mathrm{P}}$) und also ob sie in der Zeit rückwärts läuft (Zeitumkehroperator $\hat{\mathrm{T}}$, denken Sie an Feynman-Diagramme). Antimaterie gibt es nur in der Quantenfeldtheorie.

Ununterscheidbarkeit für alle und Ausschlussprinzip für Fermionen Elementarteilchen der gleichen Sorte sind vollkommen ununterscheidbar. Für Photonen als Bosonen ist dies leicht einsichtig. Bei Fermionen führt dies auf das Ausschlussprinzip von Wolfgang Pauli. Elementarteilchen dürfen zum Beispiel nicht nummeriert werden. Mit dem «Gibbs'schen Paradox» in der Thermodynamik (Vertauschung von Gasteilchen darf nicht berücksichtigt werden) war (in Filmdeutsch) ein «Teaser» für die kommende Quantentheorie vorhanden.

Elementarereignis der EM-Wechselwirkung: Photon Das Elementarereignis der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Erzeugung (Aussendung) und die Absorption (Einfang) eines Photons.

$$\hat{\mathrm{H}}_{Emission} = \hat{\mathrm{a}}_B^\dagger \hat{\mathrm{a}}_A \hat{\mathrm{c}}_\gamma^\dagger \tag{15.3.1}$$

$$\hat{\mathrm{H}}_{Absorption} = \hat{\mathrm{a}}_B^\dagger \hat{\mathrm{a}}_A \hat{\mathrm{c}}_\gamma \tag{15.3.2}$$

Neben dem Welle-Teilchen-Dualismus ist die Existenz virtueller Teilchen eine grosse Hürde beim Verständnis der Theorie der Elementarteilchen.

Messbare Wirkungen auch aus unphysikalischen Zuständen Die virtuellen Teilchen sind ein Produkt der Rechenmethode. Sie können NIE alleine gemessen werden, es sei denn sie wären zu einem reellen Zustand übergegangen. Wenn

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

zwei Teilchen A und B in die Zustände C und D unter Austausch eines virtuellen Photons (d.h. Emission und Absorption) wechselwirken wird dies in der Quantenmechanik mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($\hat{a}$ für Teilchen, $\hat{c}$ für Photonen) so beschrieben

$$\hat{H}_{Absorption}\hat{H}_{Emission} = \hat{a}_D^\dagger \hat{a}_B \hat{c}_\gamma \hat{a}_C^\dagger \hat{a}_A \hat{c}_\gamma^\dagger \tag{15.3.3}$$

Das Coulombgesetz und das elektromagnetische Feld ergeben sich so als Summe einer unendlichen Folge von Elementarprozessen.

Vier Grundkräfte beruhen auf Austauschteilchen in virtuellen Zuständen Alle Austauschteilchen sind Bosonen. Bei Photonen ist die Reichweite wegen der fehlenden Ruhemasse unendlich. Die Austauschteilchen der Farbwechselwirkung, der elektromagnetischen Wechselwirkung und der schwachen Wechselwirkung sind bekannt, bei der Gravitation vermutet man Gravitonen als Austauschteilchen. Experimentelle Evidenzen gibt es noch nicht.

Bildersprache für Austauschprozesse: Feynman-Diagramme Die Bildersprache der Feynman-Diagramme reicht aus um die Rechnungen der Teilchenphysik durchzuführen. Mit der richtigen Technik können so auch gebundene Zustände (Atomphysik) berechnet werden. Obwohl eigentlich alle (unendlich viele) Diagramme aufsummiert werden müssten, reicht es für die heute erforderliche Genauigkeit bis und mit zur 8. Ordnung zu rechnen.

Erhaltungssätze die gelten und gebrochene Symmetrien Die klassischen Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Ladung gelten auch für Elementarteilchen. Die Symmetrien, aus den sie abgeleitet wurden, $\hat{P}$ (Parität. Raumspiegelung), $\hat{C}$ (Ladungsvorzeichen vertauschen , Teilchen-Antiteilchen) und $\hat{T}$ (Zeitumkehr, auch klassisch nur bei kleiner Teilchenzahl) gelten nur für die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung. Als Produkt (gleichzeitige Anwendung) gelten sie immer.

Teilchen haben weitere Ladungen, Zählweise unklar Neben der aus der klassischen Physik bekannten elektrischen Ladung gibt es noch mehr Ladungen

- die Baryonenladung mit den Werten +1 bei Proton und Neutron, $+\frac{1}{3}$ bei Quarks (und das Negative bei den Antiteilchen)
- die Leptonenladung mit den Werten +1 bei Elektron, Myon, Tau und den dazugehörigen Neutrinos (und das Negative bei den Antiteilchen)
- die Farbladung (auch starke Ladung genannt) mit den Werten r, g und b bei Quarks und Gluonen (und den Komplementärfarben bei Antiteilchen)
- der schwachen Ladung mit den Werten +1 bei Quarks und Leptonen (und das Negative bei den Antiteilchen)

Um die Leptonen und die Quarks zu unterscheiden gibt es noch die ladungsartige Flavour-Quantenzahl mit den Werten:

Quarks es gibt sechs Flavours, nämlich u, d, s, c, b und t

Leptonen es gibt drei Leptonen-Flavours (auch Familien genannt), e mit dem ν_e, μ mit ν_μ und ν_τ

Die schwache Wechselwirkung kann den Quark-Flavour ändern, z.B. im β-Zerfall. Für Neutrinos ist der Leptonen-Flavour auch nicht erhalten (Neutrinooszillationen). In der Summe gibt es bei Fermionen $3 \times 6 = 18$ Quarks (Farbe mal Flavour), $2 \times 3 = 6$ Leptonen (Neutrinos und geladene Leptonen), dann das Gleiche noch als Antiteilchen. Bei den Bosonen gibt es 8 Gluonen, 3 Vektorbosonen für die schwache Wechselwirkung, 1 Boson für die elektromagnetische Wechselwirkung und das Higgs-Teilchen, zusammen 61 Teilchen.

Die Quarks zum Beispiel können nicht fundamental sein, da sie sich ineinander über die schwache Wechselwirkung umwandeln können. Wenn man alles was sich umwandeln lässt nur als ein Teilchen zählt verbleiben unter den Fermionen vier Stück

das Quark q mit sechs Flavour-Zuständen

das Antiquark $\overline{q}$ mit sechs Flavour-Zuständen

das Lepton ℓ mit sechs Flavour-Zuständen

das Antilepton $\overline{\ell}$ mit sechs Flavour-Zuständen

Bei den Bosonen sind nach Sheldon Lee Glashow auch vier fundamentale Teilchen. Bei den geladenen Vektorbosonen wurde nie eine Umwandlung ineinander beobachtet.Aber in der Welt der Teilchen kommen Dubletts eigentlich nicht vor. Sheldon Lee Glashow postulierte, dass es ein W^0 geben müsste, das analog zu den Pionen ein Triplett bilden sollte. Mit einem weiteren Teilchen, dem B wurde dann das Z^0 und das γ zu Überlagerungszuständen (und es wurde vorhergesagt, dass elektrische und schwache Wechselwirkung das Gleiche wäre.) Weiter wurde mit dem schwachen Isospin $T_{3,s}$ und der Leptonenzahl L die Ladung

$$q = -\left(T_{3,s} + \frac{1}{2}L\right) \tag{15.3.4}$$

bestimmt. Photon γ und Z^0 sind dann durch

$$\gamma = W^0 \sin(\theta_W) + B\cos(\theta_W) \tag{15.3.5a}$$
$$Z^0 = W_0 \cos(\theta_W) + B\sin(\theta_W) \tag{15.3.5b}$$

θ_W ist der Weinberg-Winkel. Das W^0 wechselwirkt mit der unbekannten Kopplungskonstante g der schwachen Wechselwirkung mit $T_{3,s}$. Das B andererseits wechselwirkt mit der unbekannten Kopplungskonstante g' mit der schwachen Hyperladung $\frac{1}{2}L$. Damit das Photon mit ungeladenen Teilchen nicht wechselwirkt muss

$$g\sin(\theta_W) = g'\cos(\theta_W) = Ke \tag{15.3.6}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

sein. K ist eine vom Einheitensystem abhängige Zahl. Dies balanciert die Wechselwirkungen. Aus der Theorie folgt auch

$$m_{W^\pm} = m_{Z^0} \cos(\theta_W) \tag{15.3.7}$$

Die Massen der Teilchen (oder deren Fehlen) waren unerklärt, bis mit dem Higgs-Mechanismus (Peter Higgs) ein Weg gefunden wurde. Das weitere Problem der falschen schwachen Ströme wurde durch das Postulat des Charm-Quarks behoben!

In der Summe gibt es also die

Austauschbosonen $W^\pm$ und W^0 (das B ist ja auch nur eine Überlagerung)

Gluon mit seinen acht Ausprägungen

Higgs für die Massen

Zusammen gibt es also 5 fundamentale Bosonen.

Nach der Zählung gibt es neun Elementarteilchen.

Teil III.

Astrophysik

16. Astronomische Beobachtungen

16.1. Geräte

In diesem Abschnitt werden Geräte aus der Astrophysik besprochen. Mit Teleskopen können entfernte Objekte beobachtet werden. Spektrometer erlauben aus dem Licht vorhandene Elemente zu bestimme, aber auch Geschwindigkeiten zu messen. Interferometer können als Spektrometer verwendet werden, können aber auch Sterndurchmesser bestimmen.

16.1.1. Teleskope

Teleskope sind Instrumente, die weit entfernte Objekte sichtbar machen.

16.1.1.1. Optische Teleskope

Die frühesten optischen Teleskope waren Fernrohre, die aus zwei Linsen bestanden. Der folgende Abschnitt ist eine Erweiterung des Skripts Optik [Mar17]. Weitere Informationen gibt es auch in [Hec05, p. 332] und in [Pér96, p. 158].

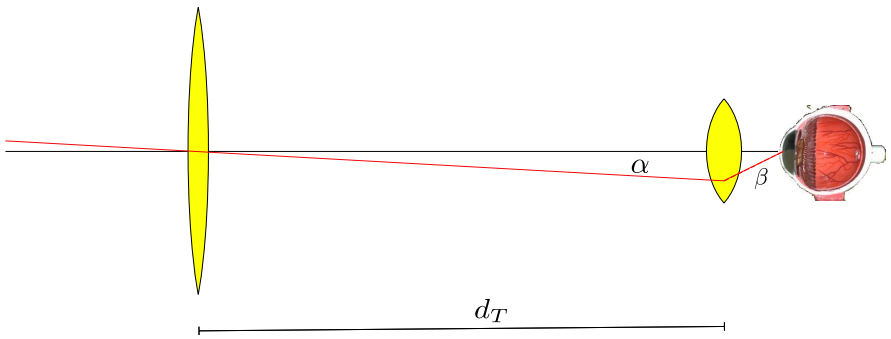


Abb. 16.1.: Teleskop nach Kepler. Das Keplersche Teleskop verwendet ein sammelndes Okular.

Der Zweck eines Teleskops ist, den Sehwinkel um den Faktor V zu vergrössern. Das heisst, das Auge hat den Eindruck, dass das betrachtete Objekt beim Bruchteil V des realen Abstands liegt. Das Objektiv sammelt dabei möglichst viel Licht, ändert den Winkel aber nicht. Das Zwischenbild des Objektivs hat die Grösse $eB = f_1\alpha$. Das Okular (Lupe) erzeugt also den Winkel $\beta = \frac{B}{f_2}$ Zusammen ergibt sich die Vergrösserung

$$V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \tag{16.1.1}$$

Ob ein Stern gesehen werden kann, hängt allein von der Leistung des Lichtes ab, die auf das Auge und damit auf die Netzhaut trifft. Der Zweck des Teleskopes ist

nun, möglichst viel Licht zu sammeln. Da die Leuchtdichte des Sterns gegeben ist, muss das Teleskop eine möglichst grosse erste Linse oder erste Öffnung haben. Das heisst, dass das Verhältnis

$$\left(\frac{\text{Ø erste Linse}}{\text{ØAugenpupille}}\right)^2$$

bestimmend ist. Deshalb hätte man gerne möglichst grosse TELESKOPE in der ASTRONOMIE.

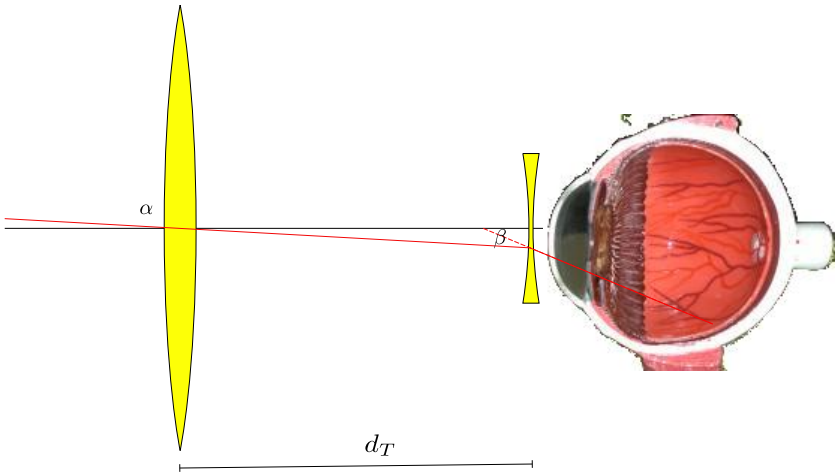


Abb. 16.2.: TELESKOP NACH GALILEI. Das Galileische Teleskop verwendet eine Zerstreuungslinse als Okular.

Grosse Linsen (über 1 m Durchmesser) sind sehr schwer und wegen der Schlierenbildung beim Abkühlen des Glases kaum herstellbar. Deshalb, und auch weil Spiegel einfacher herzustellen sind und einfacher auf ihre optische Qualität zu testen sind verwendet man heute vorwiegend Spiegelteleskope.

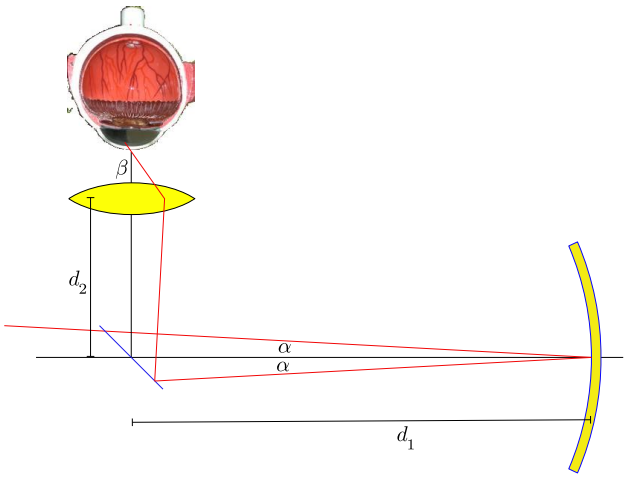


Abb. 16.3.: TELESKOP NACH NEWTON. Das Newtonsche Teleskop verwendet ein sammelndes Okular und einen Spiegel.

Abbildung 16.3 zeigt den ersten, von NEWTON vorgestellten und realisierten Bau-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

plan.
Die Bilder 16.1 bis 16.3 zeigen gebräuchliche Teleskope. Die Vergrösserung kann am einfachsten mit der Matrixformulierung der paraxialen Optik berechnet werden [Mar17, Kap. 7.1], (basierend auf [Hec05, Seiten 371 ff] und [Yar75, Seiten 95 ff]). Lichtstrahlen werden als Vektor mit den Komponenten Abstand r von der optischen Achse und der Steigung r' des Lichtstrahls, also

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \tag{16.1.2}$$

Eine Linse der Brennweite f wird durch die Matrix

$$M_L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{16.1.3}$$

gegeben. Die freie Propagation des Lichtstrahls über die Distanz d wird durch die Matrix

$$M_d(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.1.4}$$

beschrieben. Schliesslich stellt die Matrix

$$M_S(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} = M_L(R/2) \tag{16.1.5}$$

einen sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R dar.
Optische Instrumente werden nun als Multiplikation dieser Matrizen von rechts beschrieben. Zwei Lichtstrahlen mit unterschiedlicher Steigung ausgehend von einem Punkt des Objektes treffen sich im Bild. Damit kann die Abbildung berechnet werden.
Wir haben bei den angegebenen Teleskopen (Kepler-, Galilei- oder Newton) die folgenden Grössen:

1. Abstand des Gegenstandspunktes von der optischen Achse r_0
2. Steigung des Lichtstrahls vom Gegenstandspunkt s_0, beliebig
3. Abstand des Gegenstandspunktes vom ersten optischen Element d_S
4. Brennweite des ersten optischen Elements $f_1 = R/2$. R ist der Krümmungsradius des Fangspiegels im Newton-Teleskop. Dieser hat in paraxialer Näherung die Brennweite $R/2$.
5. Abstand vom ersten optischen Element zum zweiten optischen Element d_T. Beim Newton-Teleskop ist $d_T = d_1 + d_2$.
6. Brennweite des zweiten optischen Elements $f_2 = R/2$. Dies ist das Okular.
7. Abstand des Auges vom Okular (zweites optisches Element) d_A.
8. Brennweite der Linse des Auges f_A

9. Abstand der Augenlinse von der Netzhaut d_B
10. Abstand des Bildpunktes von der optischen Achse r_B. Der Bildpunkt ist der Punkt, indem r_B unabhängig von s_0 ist.
11. Steigung des Lichtstrahls im Bildpunkt s_A.

Mit diesen Werten ergeben sich die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} r_A \\ s_A \end{pmatrix} \tag{16.1.6}$$

und die Abbildungsgleichung

$$\boldsymbol{r}_B = M_d(d_B)M_L(f_A)M_d(d_A)M_L(f_2)M_d(d_T)M_L(f_1)M_d(d_S)\boldsymbol{r}_0 \tag{16.1.7}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_B = s_0 &\left[d_S \begin{pmatrix} -\dfrac{d_T\left(-\frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2}-\frac{d_B}{f_A}+1\right)+d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_1} - \dfrac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A}+1 \\ -\dfrac{d_T\left(-\frac{1-\frac{d_A}{f_A}}{f_2}-\frac{1}{f_A}\right)-\frac{d_A}{f_A}+1}{f_1} - \dfrac{1-\frac{d_A}{f_A}}{f_2} - \frac{1}{f_A} \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} d_T\left(-\frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2}-\frac{d_B}{f_A}+1\right)+d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B \\ d_T\left(-\frac{1-\frac{d_A}{f_A}}{f_2}-\frac{1}{f_A}\right)-\frac{d_A}{f_A}+1 \end{pmatrix} \right] \\ + r_0 &\begin{pmatrix} -\dfrac{d_T\left(-\frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2}-\frac{d_B}{f_A}+1\right)+d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_1} - \dfrac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A}+1 \\ -\dfrac{d_T\left(-\frac{1-\frac{d_A}{f_A}}{f_2}-\frac{1}{f_A}\right)-\frac{d_A}{f_A}+1}{f_1} - \dfrac{1-\frac{d_A}{f_A}}{f_2} - \frac{1}{f_A} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{16.1.8}$$

Wir suchen nun d_B so, dass $\frac{dr_B}{ds_0} = 0$ ist. Also muss die Gleichung

$$\begin{aligned} d_S &\left(-\frac{d_T\left(-\frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2}-\frac{d_B}{f_A}+1\right)+d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_1} - \frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2} - \frac{d_B}{f_A}+1 \right) \\ &+ d_T\left(-\frac{d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B}{f_2}-\frac{d_B}{f_A}+1\right)+d_A\left(1-\frac{d_B}{f_A}\right)+d_B = 0 \end{aligned} \tag{16.1.9}$$

gelöst werden. Die Lösung ist:

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$d_B = \frac{f_1(f_2 f_A(d_A + d_S + d_T) + f_A(-d_A d_S - d_A d_T)) + f_2 f_A(-d_A d_S - d_S d_T) + d_A d_S d_T f_A}{f_1(f_2(d_A + d_S + d_T - f_A) - d_A d_S - d_A d_T + f_A(d_S + d_T)) + f_2(-d_A d_S - d_S d_T + d_S f_A) + d_A d_S d_T - d_S d_T f_A} \tag{16.1.10}$$

Diese Lösung kann nun in Gleichung (16.1.8) in die erste Komponente eingesetzt werden:

$$r_B = \frac{f_1 f_2 f_A r_0}{d_A d_S(-d_T + f_1 + f_2) + d_A f_1(d_T - f_2) + d_S d_T(f_2 + f_A) - d_S f_1(f_2 + f_A) - d_S f_2 f_A - d_T f_1(f_2 + f_A) + f_1 f_2 f_A} \tag{16.1.11}$$

Wenn kein Auge das Objekt betrachtet, sondern eine Kamera im Abstand d_K vom zweiten optischen Element, ist der Bildvektor $\boldsymbol{r}_K = (r_K, s_K)^T$. Zu Lösen ist die Gleichung

$$\boldsymbol{r}_K = M_d(d_K) M_L(f_2) M_d(d_T) M_L(f_1) M_d(d_S) \boldsymbol{r}_0 \tag{16.1.12}$$

oder

$$\boldsymbol{r}_K = \frac{1}{f_1 f_2}\left[\begin{pmatrix} d_K d_T(s_0(d_S - f_1) + r_0) - d_K f_1(s_0(d_S - f_2) + r_0) - d_K f_2(d_S s_0 + r_0) \\ d_T(s_0(d_S - f_1) + r_0) - f_1(d_S s_0 - f_2 s_0 + r_0) - f_2(d_S s_0 + r_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_T f_2(s_0(d_S - f_1) + r_0) + f_1 f_2(d_S s_0 + r_0) \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{16.1.13}$$

Wieder wird die Grösse d_K so bestimmt, dass r_K unabhängig von s_0 ist, die Ableitung $\frac{dr_K}{ds_0} = 0$ ist.

$$d_S\left(-\frac{d_T\left(1 - \frac{d_K}{f_2}\right) + d_K}{f_2} - \frac{d_K}{f_2} + 1\right) + d_T\left(1 - \frac{d_K}{f_2}\right) + d_K = 0 \tag{16.1.14}$$

Das Resultat ist

$$d_K = \frac{f_2(d_S d_T - d_S f_1 - d_T f_1)}{d_S d_T - d_S f_1 - d_S f_2 - d_T f_1 + f_1 f_2} \tag{16.1.15}$$

Eingesetzt in Gleichung (16.1.13) ergibt sich

$$r_K = \frac{f_1 f_2 r_0}{d_S(d_T - f_1 - f_2) + f_1(f_2 - d_T)} \tag{16.1.16}$$

Zur Berechnung der Winkelvergrösserung ist es nicht notwendig, die Abbildung zu berechnen. Wir können die Steigung in (16.1.13) verwenden. Wir setzen $d_S = 0$ und $r_0 = 0$, das heisst wir betrachten die Richtung auf der Oberfläche des ersten optischen Elementes. Wir erhalten

$$s_K = s_0\left(1 - \frac{d_T}{f_2}\right) \tag{16.1.17}$$

Damit ist die Winkelvergrösserung

$$V = \frac{s_K}{s_0} = 1 - \frac{d_T}{f_2} \tag{16.1.18}$$

Ein Galileoteleskop mit einer Zerstreuungslinse ($f_2 < 0$) hat verglichen mit einem Kepler-Teleskop oder einem Newton-Teleskop mit einer Sammellinse mit einer betragsmässig gleichen Brennweite eine grössere Vergrösserung.
Bei einem Newton-Teleskop würde Gleichung (16.1.18) so lauten

$$V = \frac{s_K}{s_0} = 1 - 2\frac{d_1 + d_2}{R} \tag{16.1.19}$$

Die Winkelvergrösserung eines Teleskopes hängt nur von der Tuslänge und der Brennweite des Okulars ab!

Die Tubuslänge ergibt sich aus der Brennweite des ersten optischen Elementes, da ja die Abbildungsgleichung auch erfüllt sein muss! Der Hauptzweck des ersten optischen Elementes (Linse, Spiegel) ist, so viele Photonen oder so viel Licht wie möglich zu sammeln. Deshalb ist eine grössere Öffnung besser bei lichtschwachen Objekten.
Zur Bezeichnung von Teleskopen gibt es die beiden Begriffe:

Refraktor Teleskop mit einer Linse als erstem optischem Element.

Reflektor Teleskop mit einem Spiegel als erstem optischem Element.

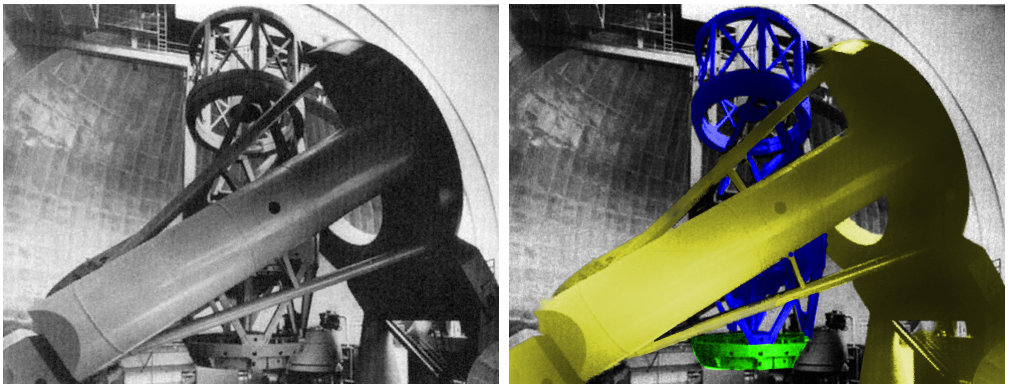


Abb. 16.4.: Das 5 m-Hale-Teleskop von Mount Palomar (By NASA [Public domain], via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/HaleTelescope-MountPalomar.jpg). Rechts eine eingefärbte Fassung: Die parallaktische Montierung ist gelb, die Serrurier-Kompensationsstruktur [Wik19o] für die Spiegelhalterung blau und die Spiegelhalterung grün.

Abbildung 16.4 zeigt die Montierung des grossen Teleskopes. Der Spiegel und die Auffangoptik sind in einem Gitterkäfig so montiert, dass die Gravitation die beiden Ebenen parallel um den gleichen Betrag verschiebt, dass also die optische Präzision gewährleistet ist.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

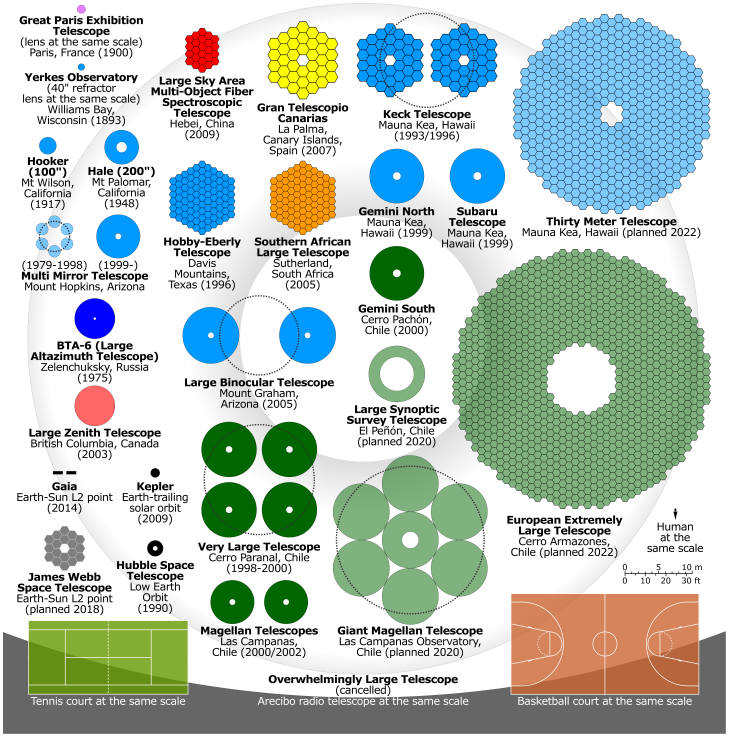


Abb. 16.5.: Vergleich der Spiegelgrössen von Teleskopen (Cmglee [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_optical_telescope_primary_mirrors.svg).

Abbildung 16.5 zeigt schliesslich welche Spiegelgrössen heute verwendet werden. Dabei werden grosse Spiegel segmentiert. Die Segmente können einzeln verformt werden um Störungen der Atmosphäre auszugleichen (Siehe auch Abschnitt 16.3).

16.1.1.1.1. Montierung optischer Teleskope Wie optische Teleskope mit dem Boden verbunden sind bestimmt, wie einfach deren Benutzung ist. Die Montierung im Horizontsystem ist einfach, aber bewirkt im Teleskop eine Bilddrehung mit zunehmender Zeit. Deshalb werden professionelle Teleskope parallaktisch montiert (Siehe Abbildung 16.6).

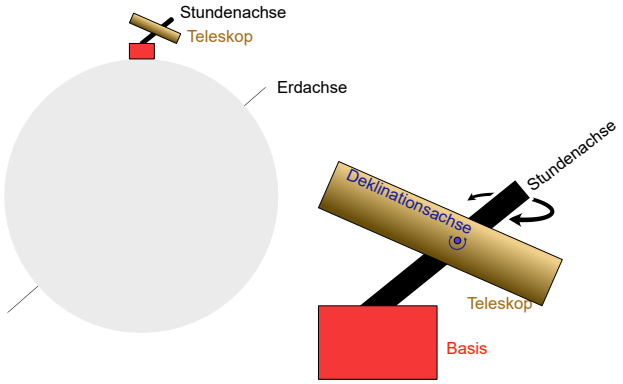


Abb. 16.6.: Parallaktische Montierung. Die Stundenachse muss parallel zur Erdachse sein. Dann kann das Teleskop mit einer einfachen Rotation um die Stundenachse auf einen Stern gerichtet bleiben.

Wenn die Achse für den Deklinationswinkel durch den Coudé-Fokus (aus dem französischen umgebogen) geht, kann das Licht unabhängig vom Deklinationswinkel in ein ortsfestes Spektrometer mit fest eingestellter Optik transportiert werden (siehe Abb. 16.7). Da heute astronomische und astrophysikalische Beobachtungen meistens spektrale Eigenschaften von Sternen oder Galaxien oder Quasaren oder was immer untersuchen, ist dieser Strahlengang in der Regel so in Teleskope eingebaut.

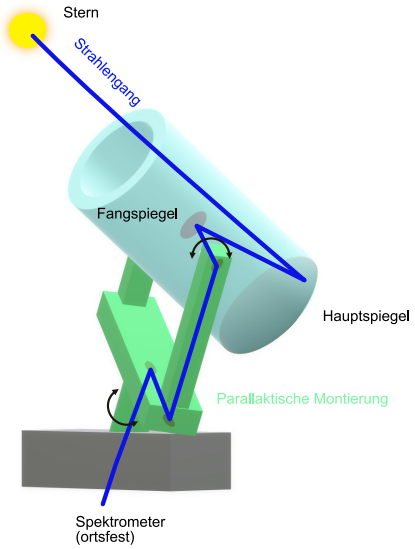


Abb. 16.7.: Strahlengang eines Teleskopes mit Coudé-Fokus. Diese Art der Strahlführung ermöglicht die problemarme Einkoppelung in ein ortsfestes Spektrometer oder Interferometer.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.1.1.2. Radioteleskope

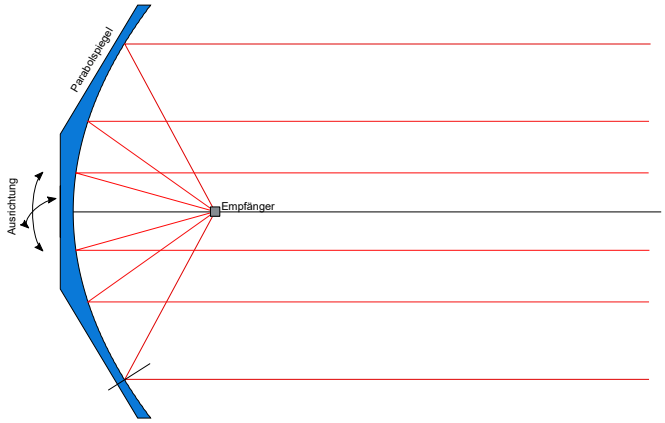


Abb. 16.8.: Ein Radioteleskop misst mit einem Parabolspiegel die Energie einer elektromagnetischen Welle aus einer bestimmten Richtung (breit- oder schmalbandig).

Ein Radioteleskop sammelt elektromagnetische Strahlung aus einer einzigen Richtung. Je grösser der Spiegeldurchmesser ist, desto kleiner ist der Winkeldurchmesser des Beugungsmusters. Der Spiegel wird in die Richtung der zu untersuchenden Quelle gedreht. Die Spiegelfläche ist parabolisch. Diese Flächenform konzentriert alle Radiowellen aus einer Richtung auf einen Empfänger. Spiegel haben keine Dispersion, deshalb hat das Gerät keine ungewollte Frequenzselektion. Im Gegensatz zu optischen Geräten sind die Empfänger der Radioteleskope kohärent, d.h. sie können die Phase messen.

Deshalb können mehrere Radioteleskope zu grösseren virtuellen Teleskopen zusammengeschaltet werden. So kann die Winkelauflösung dieser virtuellen Teleskope besser sein als die der grössten optischen Teleskope, trotz der mehrere Grössenordnungen längeren Wellenlänge.

Abb. 16.9.: Das Radioteleskop von Effelsberg (By Dr. Schorsch (photo taken by Dr. Schorsch) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html), CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/05/Effelsberg_total2.jpg)

Radioteleskope wie das in Effelsberg (siehe Abbildung 16.9) werden azimutal montiert. Der Durchmesser des Spiegels in Effelsberg beträgt 100 m (siehe 16.1). Das Teleskop arbeitet bei einer Wellenlänge von $\lambda = 5$ mm. Das ergibt eine Winkelauflösung von 61.0 µrad.

Abb. 16.10.: Das grosse Radioteleskop in Aricibo (courtesy of the NAIC - Arecibo Observatory, a facility of the NSF, http://www.naic.edu/public/about/photos/hires/ao004.jpg).

Das Radioteleskop von Aricibo (Puerto Rico) ist ortsfest in einen Krater gebaut (siehe 16.10 und [Wik22a]). Das Teleskop war im James Bond-Film «GoldenEye» in 1995 zu sehen (siehe [Wik22c]). Das Teleskop arbeitet bei einer Wellenlänge von $\lambda = 3$ mm. Das ergibt bei einem Durchmesser der Parabolantenne von 305 m eine Winkelauflösung von 120 µrad. Das Radioteleskop von Arecibo existiert nicht mehr, es ist im Jahr 2020 am 10. August in sich zusammengestürzt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.1.1.3. Röntgenteleskope

Röntgenteleskope verwenden Parabol- und Hyperbolspiegel zur Fokussierung. Sie benützen dazu die Tatsache, dass der Brechungsindex von Materialien im Röntgenbereich kleiner als eins ist. Bei streifendem Einfall erhalten wir also Totalreflexion.

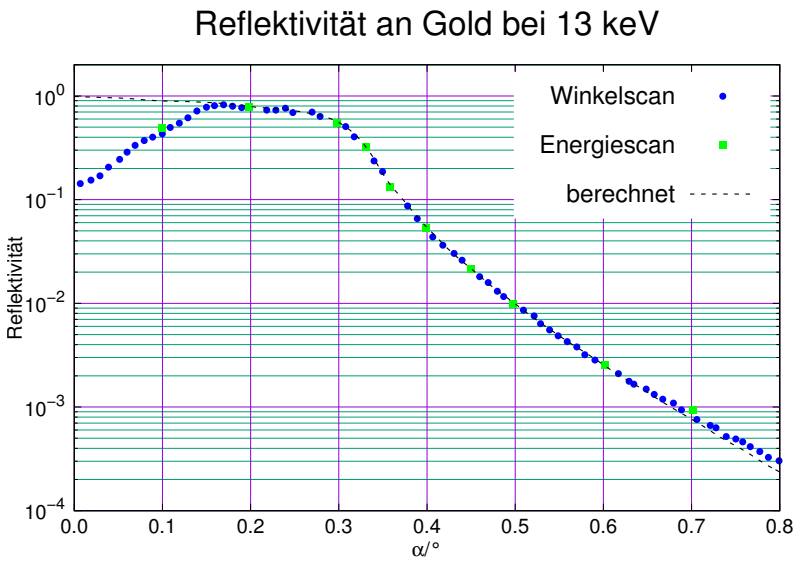


Abb. 16.11.: Reflektivität von 13 keV Röntgenlicht an Gold. Die Daten für die Darstellung stammen aus [Kik+16].

Abbildung 16.11 zeigt Messungen und Theorie der Reflektivität von 13 keV-Röntgenlicht an Gold. bei etwa 0.3° wird Totalreflexion erreicht. Dämpfung verhindert eine perfekte Totalreflexion.

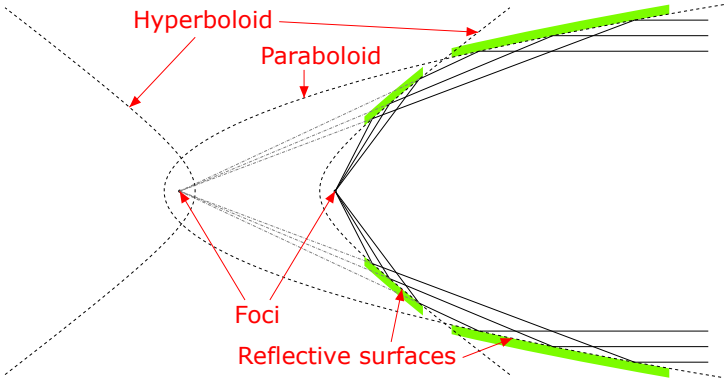


Abb. 16.12.: Wolter-Spiegel zur Fokussierung von Röntgenstrahlen. (Andreas 9384 [CC BY-SA 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wolter-I.svg).

Abbildung 16.12 zeigt einen schematischen Aufbau eines Wolter-Spiegelreflektors zur Fokussierung. Die Kombination von Paraboloiden und Hyperboloiden ermöglicht eine bessere Fokussierung als paraboloide Spiegel allein. Spiegel wie diese

werden in Röntgensatelliten wie ROSAT [Max19]) oder CHANDRA (NASA).

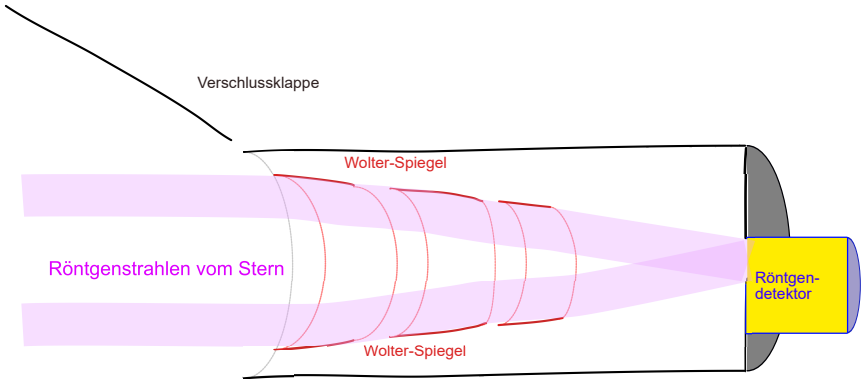


Abb. 16.13.: Skizze des Aufbaus des Röntgensatelliten ROSAT (basierend auf [Max19])

In ROSAT (siehe Abbildung 16.13) fokussiert der Wolter-Spiegel (siehe auch Abbildung 16.14) fokussiert die Röntgenstrahlen auf den Detektor (siehe Abbildung 16.15). Der Detektor ist ein Vieldrahtproportionalzähler. Er ermöglicht also eine Orts- und Energieauflösung.

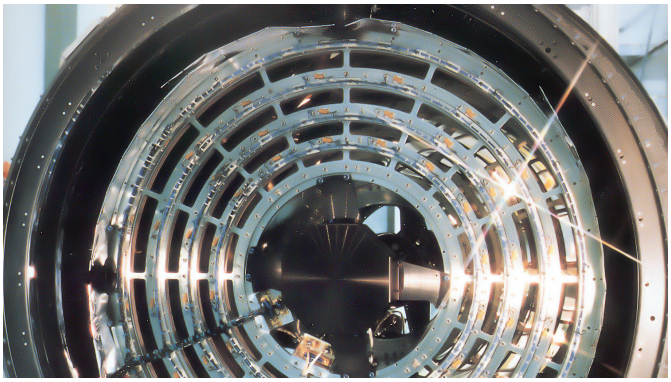


Abb. 16.14.: Wolter-Spiegel des Röntgensatelliten ROSAT, von vorne. (DLR, CC BY 3.0 https://www.dlr.de/dlr/Portaldata/1/Resources/bilder/ missionen/rosat/roentgensattelit1.jpg)

Abbildung 16.14 zeigt den Wolter-Spiegel von ROSAT von vorne.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abb. 16.15.: Detektor des Röntgensatelliten ROSAT.
(DLR, CC BY 3.0
https://www.dlr.de/dlr/Portaldata/1/Resources/bilder/ missionen/rosat/roentgensattelit2.jpg)

Der Detektor von ROSAT in Abbildung 16.15 ist ein Vieldrahtproportionalzähler (siehe auch Abschnitt 2.2).

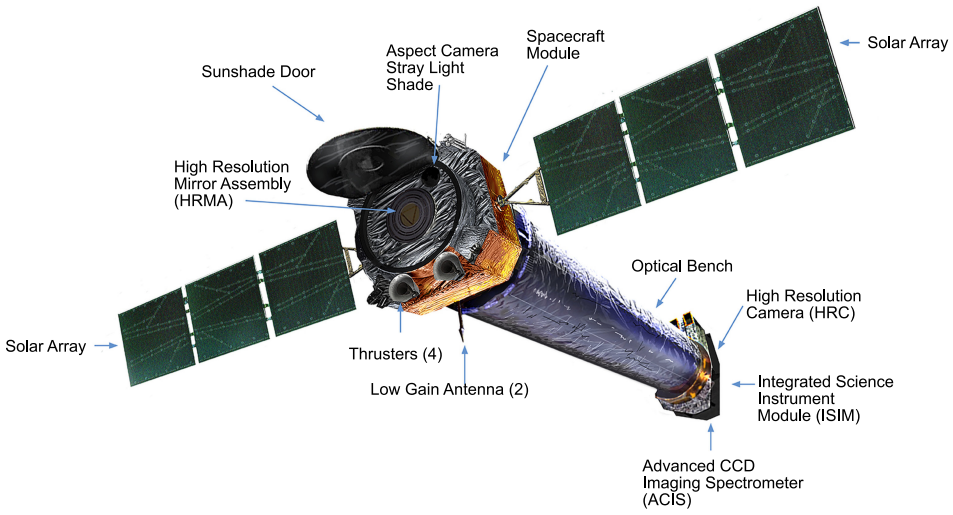


Abb. 16.16.: Komponenten des Röntgensatelliten Chandra.
(NASA
https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/craft_lable_0.jpg)

Ein Nachfolger von ROSAT ist Chandra. Sein Aufbau ist in Abbildung 16.16. Chandra hat eine grössere Brennweite und mehr Instrumente und kombiniert diese. Abbildung 16.17 zeigt eine Überlagerung von Messdaten von Chandra mit einem optischen Bild. Die Galaxie NGC 3079 enthält ein sehr schweres schwarzes Loch. Die Aufnahme von Materie durch dieses schwarze Loch erzeugt starke Röntgenstrahlen und Stossfronten. Diese sind als zwei Blasen oberhalb und unterhalb der Galaxienebene sichtbar.

Abb. 16.17.: Die Galaxie NGC 3079, $67 \cdot 10^6$ ly entfernt, enthält zwei «Superbubbles». Die «Superbubbles», gemessen im Röntgenbereich durch Chandra, sind hier mit einem optischen Bild überlagert. Die beiden Blasen haben Durchmesser von 4900 ly und 3600 ly. Zu sehen sind die Stosswellenfronten. (X-ray: NASA/CXC/University of Michigan/J-T Li et al.; Optical: NASA/STScI, https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/ngc3079.jpg)

16.1.1.4. Auflösung eines einzelnen Teleskopes

Durch die Wellennatur des Lichtes, d.h. durch Beugungseffekte können optische Teleskope (egal welche Wellenlänge) zwei Objekte nur ab einer bestimmten Winkeldistanz getrennt abbilden. Die Berechnung der Auflösung ist analog zur Berechnung bei Mikroskopen.

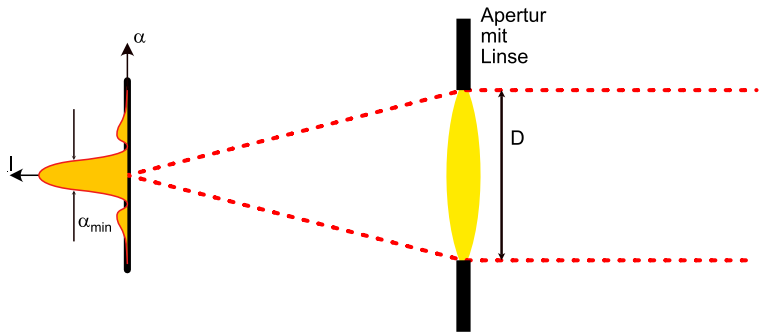


Abb. 16.18.: Die Öffnung des Teleskopes begrenzt die Auflösung.

Das Rayleigh-Kriterium (minimalen Breite eines Beugungsmusters) in der Skizze 16.18 ist

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\alpha_{min} \approx \sin(\alpha_{min}) = \frac{1.22\,\lambda}{D} \tag{16.1.20}$$

Teleskop	Apertur D	Wellenlänge λ	Beugungsbreite α_{min}	Bemerkungen
ROSAT (Satellit)	84 cm	60 pm	87.1 prad $= 1.80 \cdot 10^{-5}$ ″	Röntgen
Chandra (Satellit)	1.20 m	124 pm	126 prad $= 2.60 \cdot 10^{-5}$ ″	Röntgen
Extremely Large Telescope (ELT) (European Southern Observatory)	39 m	500 nm	15.6 prad $= 3.23 \cdot 10^{-3}$ ″	
ROSAT (Satellit)	0.84 m	30 nm	43.6 nrad $= 8.99 \cdot 10^{-3}$ ″	Röntgen
Gran Telescopio Canarias (GTC)	10.4 m	500 nm	58.7 nrad $= 1.21 \cdot 10^{-2}$ ″	
Hale-Teleskop (Mount Palomar)	5.10 m	500 nm	120 nrad $= 2.47 \cdot 10^{-2}$ ″	
Herschel-Weltraumteleskop	3.50 m	500 nm	1.74 nrad $= 3.59 \cdot 10^{-2}$ ″	
Hubble Space Telescope	2.40 m	500 nm	254 nrad $= 5.24 \cdot 10^{-2}$ ″	
Alfred-Jensch-Teleskop (Thüringer Landessternwarte)	2.00 m	500 nm	305 nrad $= 6.29 \cdot 10^{-2}$ ″	
Chandra (Satellit)	1.20 m	?	2.91 µrad = 0.6 ″	[ODe+10, Tab. 1]
Meade Teleskop ACF-SC 406/4064 16” UHTC LX200 GoTo	40.6 cm	500 nm	1.50 µrad = 0.310 ″	
Skywatcher Teleskop N 200/1000 Explorer BD NEQ-5	20 cm	500 nm	3.05 µrad = 0.629 ″	
Canon EF 600mm f/4L IS III USM Objektiv	15 cm	500 nm	4.07 µrad = 0.839 ″	
Canon EF 800mm f/5.6L IS USM Objektiv	14.3 cm	500 nm	4.27 µrad = 0.881 ″	
Canon EF 85mm f/1.2L II USM Objektiv	7.08 cm	500 nm	8.61 µrad = 1.78 ″	
Omegon Teleskop AC 70/700 AZ-2	7 cm	500 nm	8.71 µrad = 1.80 ″	
Leica DG Vario-Elmar 100-400mm/F4-6.3	6.35 cm	500 nm	9.61 µrad = 1.98 ″	bei $f = 400$ mm
Minolta 50mm/F1.7	2.94 cm	500 nm	20.7 µrad = 4.28 ″	
ROSAT (Satellit)	84 cm	?	24.24 µrad = 5 ″	[ODe+10, Tab. 1]
Leica DG Vario-Elmar 100-400mm/F4-6.3	2.50 cm	500 nm	24.4 µrad = 5.03 ″	bei $f = 100$ mm
Lumix G 20mm/F1.7	1.18 cm	500 nm	51.9 µrad = 10.7 ″	
100-m-Radioteleskop Effelsberg	100 m	5.00 mm	61.0 µrad = 12.6 ″	Radioteleskop
Arecibo-Observatorium	305 m	3.00 cm	120 µrad = 24.8 ″	Radioteleskop
Smartphone	2.22 mm	500 nm	275 µrad = 56.6 ″	
Karl G. Jansky Very Large Array (Einzelantenne) USA	25.0 m	6.67 mm	325 µrad = 67.1 ″	Radioteleskop
Jodrell-Bank England	76 m	2.10 cm	337 µrad = 69.5 ″	Radioteleskop
Hintergrundsstrahlung im FP	150 cm	2.50 cm	20.3 mrad = 4192 ″	Hochfrequenz
Fernseh-Satellitenschüssel	80 cm	2.50 cm	38.1 mrad = 7860 ″	Hochfrequenz

Tab. 16.1.: Auflösung typischer Teleskope.

Tabelle 16.1 zeigt die Winkelauflösung verschiedener Optiken und Teleskope. Röntgenteleskope erreichen die berechnete Auflösung nicht, da ihre Optiken zu grosse

Abweichungen von der idealen Spiegelform haben. Das ELT ist im Bau. Hochauflösende optische Teleskope erreichen Ihre Auflösung nur mit adaptiven Spiegeln, da die Atmosphäre unruhig ist (SEEING, siehe auch Abschnitt 16.3.1).

16.1.1.5. Auflösung interferometrisch gekoppelter Teleskope

Gelingt es Teleskope (optisch oder Radioteleskope) interferometrisch starr zu koppeln, kann die Auflösung verbessert werden.

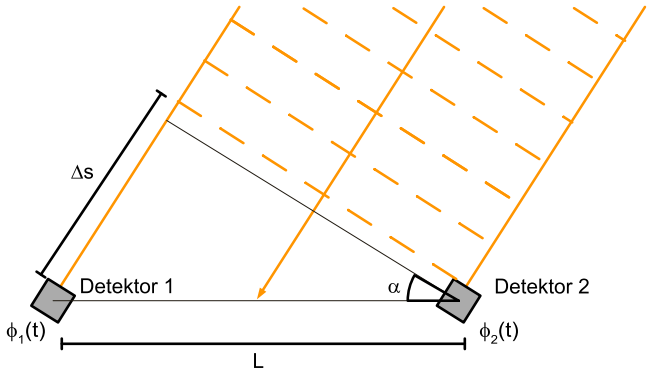


Abb. 16.19.: Prinzipieller Aufbau einer Long-Baseline-Interferometry.

In Abbildung 16.19 wir der prinzipielle Aufbau einer Long-Baseline Interferometrie gezeigt. Licht von einem Objekt (sichtbar oder Radiowellen) trifft auf zwei Detektoren D_1 und D_2 im Abstand L. Der Winkel zwischen der einfallenden Wellenfront und der Verbindungsline $\overline{D_1 D_2}$ sei α. Am Detektor D_1 werde die Phase $\phi_1(t)$ und am Detektor D_2 die Phase $\phi_2(t)$ gemessen. Wichtig ist, dass

- die Zeiten an den Orten der Detektoren und ihre Differenz relativ sehr viel genauer als die Periodendauer c/λ der einfallenden Welle bekannt ist und
- das die Grösse L oder die sonst noch involvierten Wege sich viel weniger als λ verändern.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, können die Interferenzen der beiden Signale ausgewertet werden.
Mögliche Aufbauten sind:

- zwei oder mehr optische Empfänger(Teleskope), die über einen Interferometeraufbau gekoppelt sind (sehr schwierig bei grossem L),
- zwei oder mehr Radioteleskope, deren Signale über Kabel oder Mikrowellen (-leiter) zu einem Korrelator geführt werden. Radioempfänger auch im Millimeterbereich und darunter messen Amplituden und nicht wie optische Empfänger Intensitäten!. Oder
- zwei oder mehr weit entfernte Radioteleskope ohne direkte Verbindung, bei denen die zeitabhängige Phase mit Hilfe von korrelierten Atomuhren gemessen wird. Die Genauigkeit der Atomuhren garantiert eine gute Zeitauflösung der Phase, auch ohne direkte Verbindung.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Im Einzelnen ist die Phasendifferenz

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \tag{16.1.21}$$

und

$$\Delta s = L\sin(\alpha) \tag{16.1.22}$$

und damit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi L\sin(\alpha)}{\lambda} \tag{16.1.23}$$

Das Auflösungsvermögen für zwei Sterne A und B in kleinem Winkelabstand können wir so abschätzen:

$$\text{Stern A:}\quad \Delta\phi_A = \frac{2\pi L}{\lambda}\sin(\alpha_A) \tag{16.1.24a}$$

$$\text{Stern B:}\quad \Delta\phi_B = \frac{2\pi L}{\lambda}\sin(\alpha_B) \tag{16.1.24b}$$

Mit $\alpha_B - \alpha_A = \Delta\alpha$ und $|\Delta\phi_B - \Delta\phi_A| \ll 1 < \pi$ und der minimal auflösbaren Phase $\delta\phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\delta\phi \le \Delta\phi_B - \Delta\phi_A &= \frac{2\pi L}{\lambda}\left(\sin(\alpha_B) - \sin(\alpha_A)\right) \\
&= \frac{2\pi L}{\lambda}\left(\sin(\alpha_A + \Delta\alpha) - \sin(\alpha_A)\right) && \text{(16.1.25a)} \\
\delta\phi &\le \frac{2\pi L}{\lambda}\left(\sin(\alpha_A)\underbrace{\cos(\Delta\alpha)}_{\approx 1} + \cos(\alpha_A)\underbrace{\sin(\Delta\alpha)}_{\approx\Delta\alpha} - \sin(\alpha_A)\right) && \text{(16.1.25b)} \\
&\approx \frac{2\pi L}{\lambda}\left(\sin(\alpha_A) + \cos(\alpha_A)\cdot\Delta\alpha - \sin(\alpha_A)\right) && \text{(16.1.25c)} \\
\delta\phi &\le \frac{2\pi L\cos(\alpha_A)}{\lambda}\Delta\alpha && \text{(16.1.25d)} \\
\Delta\alpha &\ge \frac{\delta\phi\,\lambda}{2\pi L\cos\alpha_A} \ge \frac{\lambda}{2L} && \text{(16.1.25e)} \\
& && \text{(16.1.25f)}
\end{aligned}$$

Wenn die zwei Empfänger $L = 12\,000$ km auseinander sind (das Maximum auf der Erde) und die verwendete Wellenlänge die H^α-Wellenlänge ist, also $\lambda = 21$ cm, dann ergeben sich

$$\Delta\alpha \ge \frac{21\text{ cm}}{2\cdot 12\,000\text{ km}} = 8.8\cdot 10^{-9}\text{ rad} = 1.80\cdot 10^{-3}\ '' \tag{16.1.26}$$

Mit $\delta\phi \approx 0.1$ und $\alpha_A = \pi/4$ bekommt man mit der besseren Approximation

$$\Delta\alpha \ge \frac{0.1\text{ rad}\cdot 21\text{ cm}}{2\pi\cdot\sqrt{2}/2\cdot 12\,000\text{ km}} = 3.94\cdot 10^{-10}\text{ rad} = 8.1\cdot 10^{-5}\ '' \tag{16.1.27}$$

Die zweite Abschätzung nimmt nahezu perfekte Instrumente an, so dass die erste wahrscheinlich näher an den Werten realisierbarer Instrumente liegt.

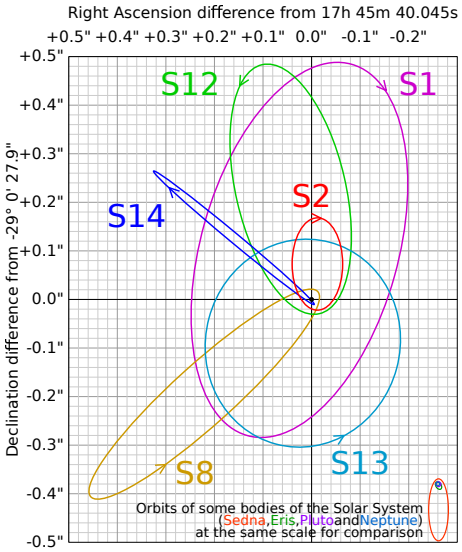


Abb. 16.20.: Gemessene Orbits im galaktischen Zentrum (Abbildung By Cmglee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0) or GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galactic_centre_orbits.svg).

Abbildung 16.20 zeigt gemessene Orbits um das zentrale schwarze Loch unserer Galaxis (etwa 8 kpc entfernt). Die Skizze zeigt, dass für diese Messungen eine Winkelauflösung von etwa 0.1 ″ notwendig ist. Die obige Abschätzung zeigt, dass heutige Instrumente genau genug sind.

16.1.1.6. Aberration

Die Erde bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 29.78 km s^{-1} um die Sonne [Wil21]. Im Laufe eines halben Jahres kehrt sich die Bewegungsrichtung um. Wie Regen bei schnellem Gehen schräg von vorne kommt, kommt bei endlicher Lichtgeschwindigkeit das Licht unter einem leicht anderen Winkel. Dieser Winkel α wird nach James Bradley ABERRATION genannt [Bra28].

$$\alpha = \frac{v_E}{sc} \sin \vartheta \tag{16.1.28}$$

Scheinbar bewegen sich weit entfernte Sterne in der Form einer Ellipse. Die grosse Halbachse ist dabei für alle Sterne gleich. Dies ist ein Beweis, dass die Erde sich bewegt. Die Aberrationskonstante A ist

$$A = 20.5\ '' = \frac{\langle v_E \rangle}{c} \tag{16.1.29}$$

Pro Tag bewegen sich Sterne um die tägliche Aberration, die < 0.3 ″ ist.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.1.2. Spektrometer

Spektrometer gibt es in verschiedenen Ausführungen

1. Dispersive optische Elemente wie Prismen oder Gitter werden zur Trennung der verschiedenen Wellenlängen verwendet.

2. Resonatoren (Fabry-Perot-Resonator, Michelson-Interferometer, Lummer-Gehrcke-Platte) unterdrücken Teile des Lichtspektrums

3. Weitere Effekte wie akustische Wellen können zur höchstaufgelösten Spektroskopie verwendet werden.

16.1.2.1. Gitterspektrometer

Anhand eines Gitterspektrometers soll hier die Optik dieser Geräte diskutiert werden.

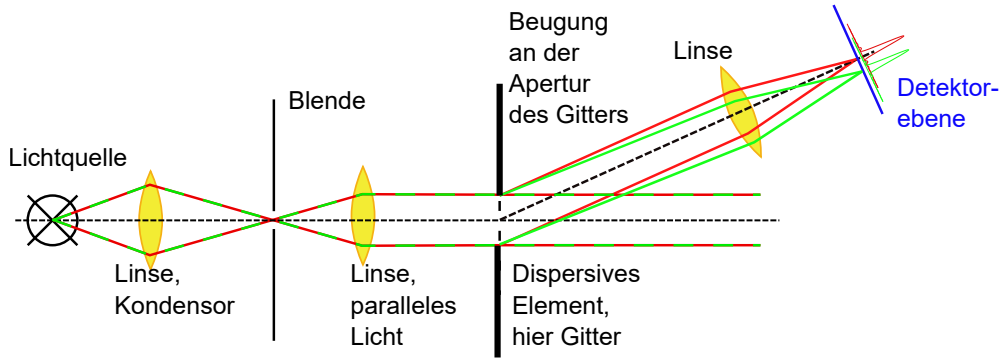


Abb. 16.21.: Prinzipieller Aufbau eines Gitterspektrometers

Abbildung 16.21 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Gitterspektrometers. Licht aus der zu untersuchenden Quelle (oder aus der zu untersuchenden Probe) wird mit einer Kondensorlinse auf einen Punkt (sphärische Linse) oder auf eine Linie (Zylinderlinse) abgebildet. Eine Blende (kreisförmige Loch oder Spalt) lasst nur Licht aus dem zu untersuchenden Bereich durch. Mit einer weiteren Linse (sphärisch oder zylindrisch) wird das Licht aus der Blende parallelisiert. Dazu steht die Blende in der Fokusebene der Linse. Dieses parallele Licht wird durch das Gitter, unser dispersives Element, abgelenkt. Eine der höheren Ordnungen (grösser oder gleich eins), die ja aus parallelem Licht besteht wird durch eine weitere Linse (sphärisch oder zylindrisch) auf einen positionsempfindlichen Detektor abgebildet (z.B. eine CCD-Zeile oder ein Photodiodenarray).
Die parallelen Strahlen der verschiedenen Wellenlängen sind unterschiedlich stark zur optischen Achse geneigt. Das heisst, die Foci der verschiedenen Wellenlängen werden auf dem Detektor getrennt. Die Breite eines Fokuspunktes hängt von den Beugungserscheinungen an den Linsen, aber auch an dem Gitter ab.
Das grösste Objekt ist das Gitter selber. Wenn es eine Gitterkonstante g hat (Abstand der „Striche“) und N Linien, hat es eine Breite $b_{Gitter} = Ng$, ist also ein Spalt mit der Breite b_{Gitter}. Nach [Mar17, Gleichung (3.9.7)] hat dann das Beugungsmuster die Form (siehe auch Abbildung 16.22)

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N\, g\, \sin\Theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} N\, g\, \sin\Theta} \right)^2 = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} N\, g\, \sin\Theta\right)^2 \tag{16.1.30}$$

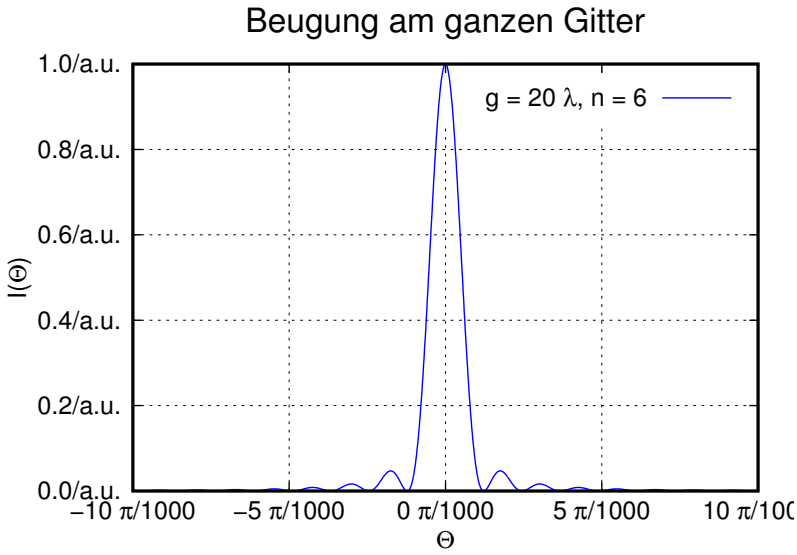


Abb. 16.22.: Beugung an einem Gitter mit der Gitterkonstante $g = 20\lambda$ und $n = 6$ Gitterperioden, also einer Breite von 120λ.

Die kleinste Struktur ist die einzelne Linie, die wir hier als Spalt der Breite $a \leq g$ annehmen wollen. Wir können einen Füllfaktor s_f definieren und schreiben:

$$a = \frac{s_f}{g} \tag{16.1.31}$$

Damit ist das Beugungsmuster einer einzelnen Gitterlinie, als Spalt modelliert (siehe auch Abbildung 16.23):

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{g}{s_f} \sin\Theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \frac{g}{s_f} \sin\Theta} \right)^2 = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{g}{s_f} \sin\Theta\right)^2 \tag{16.1.32}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

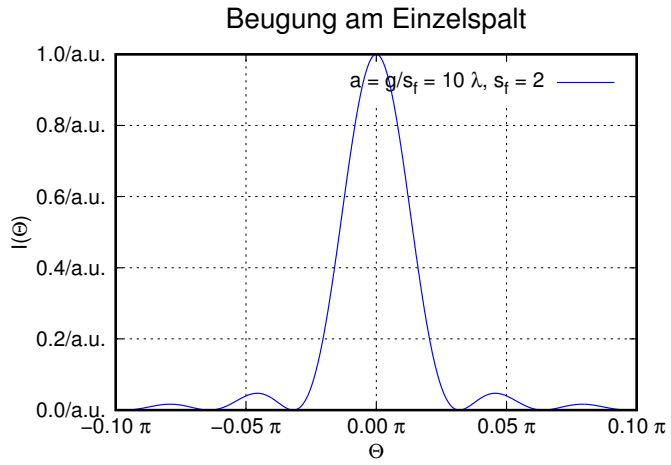


Abb. 16.23.: Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite $g/s_f = 20/2\lambda = 10\lambda$.

Schliesslich erzeugt ein Gitter eine periodische Struktur an den Winkeln (siehe auch Abbildung 16.24)

$$\Theta = \arcsin\left(\frac{m\,\lambda}{g}\right) \tag{16.1.33}$$

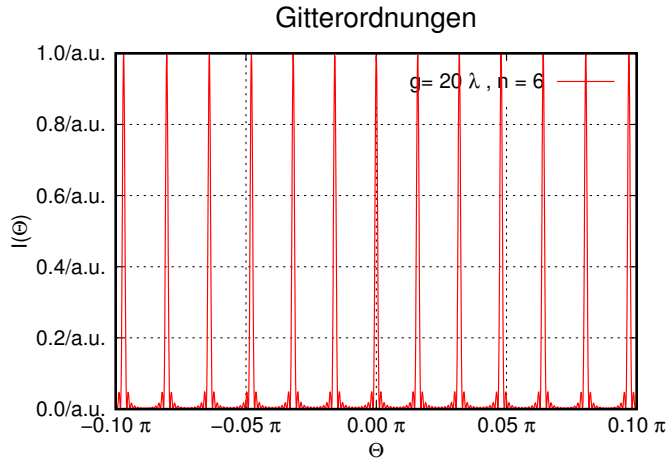


Abb. 16.24.: Lage der Gitterordnungen, gezeigt mit den Beugungsbildern des ganzen Gitters mit Beugung an einem Einzelspalt mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 2$.

Diese drei Komponenten ergeben dann das Beugungsbild eines realen Gitters. Dabei müssen die Amplituden phasenrichtig addiert werden. Wir nehmen hier an, dass an den Orten der Beugungsmaxima jeweils eine Komponente dominant ist, dass wir also in erster Näherung die Phasen vernachlässigen können und die Intensitäten addieren. Die breiteste Komponente ist die mit der kleinsten Strukturgrösse, also der Einzelspalt. Diese ergibt die Umhüllende.
Die schmälste Komponente ist der Spalt, der das ganze Gitter repräsentiert. Dieses Beugungsmuster wird an jeder Beugungsordnung des Gitters wiederholt.
Zusammen ergibt sich das Beugungsmuster des Gitters

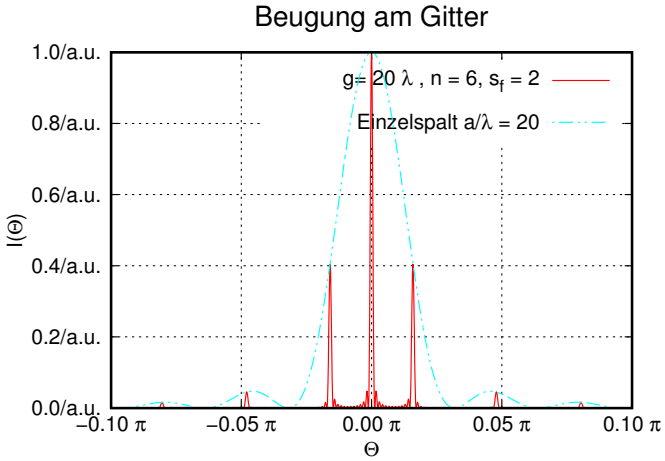


Abb. 16.25.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 2$.

Die folgende Abbildung 16.26 zeigt den Einfluss der Beugung an einem einzelnen Gitterelement.

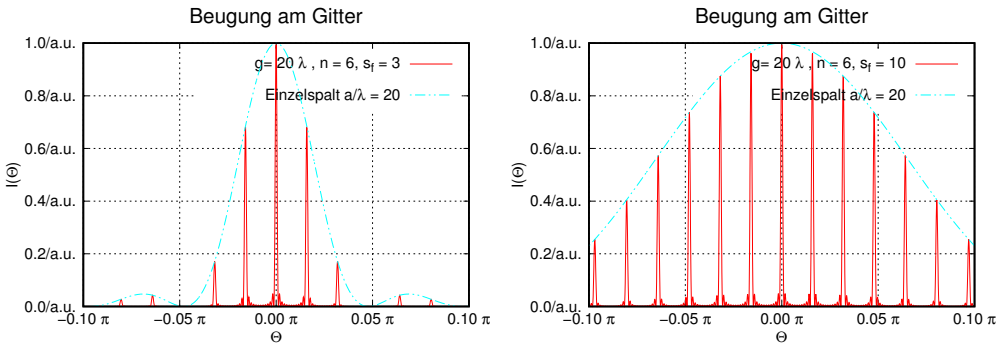


Abb. 16.26.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 3$ mit einem Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 10$.

Schliesslich zeigt Abbildung 16.27 die Wirkung der Anzahl beleuchteter Gitterelemente.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

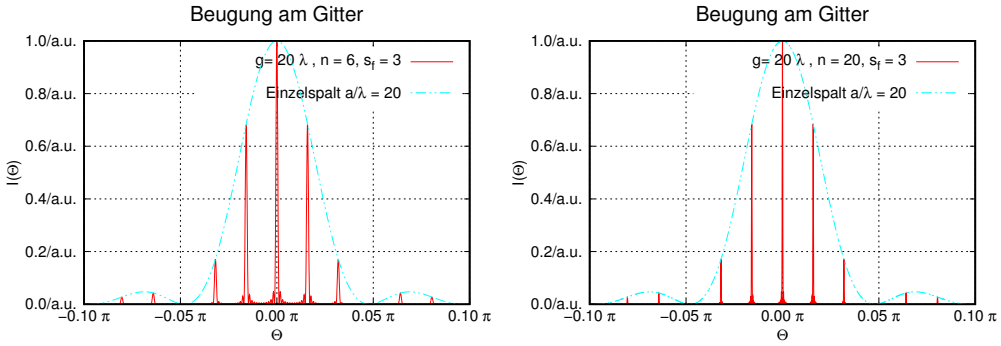


Abb. 16.27.: Beugungsmuster eines Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 6$ und $s_f = 3$ mit einem Gitters mit der Breite $g = 20\lambda$, $n = 20$ und $s_f = 3$.

Aus Abbildung 16.27 kann ersehen werden, dass eine grössere Anzahl beleuchteter Gitterlinien die Linienbreite auf dem Detektor verringert. Deshalb ist es wichtig, ein Gitter immer voll auszuleuchten. Dies kann mit einer vorgeschalteten Optik erreicht werden.

Aus Abbildung 16.26 kann beobachtet werden, dass die Amplitude des ersten Beugungsmaximums von der Form und Beugung an einer Gitterperiode abhängt.

Jedes Gitter hat einen nutzbaren Spektralbereich. Wenn die zweite Ordnung einer Wellenlänge sich mit der ersten einer anderen Wellenlänge überlagert, können diese beiden Spektralkomponenten nicht mehr getrennt werden.

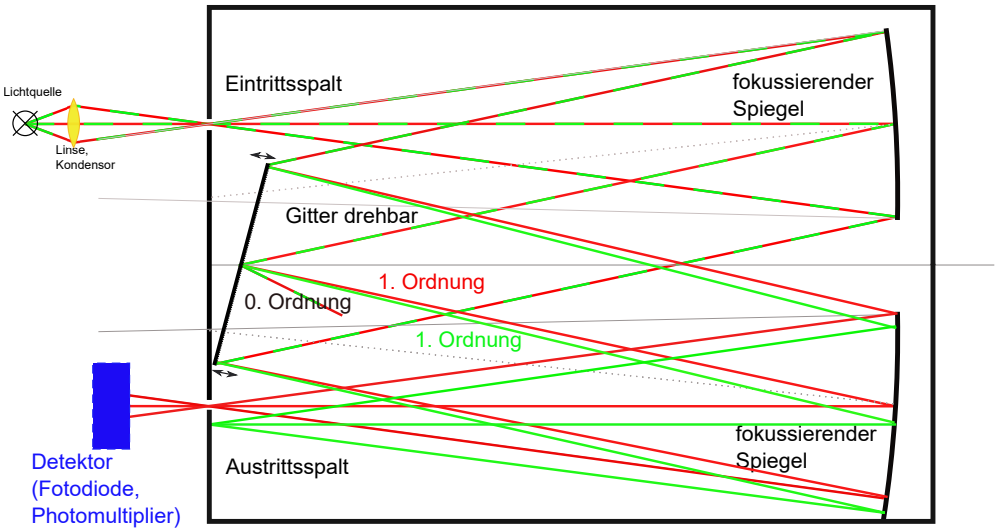


Abb. 16.28.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar.

Die in der Abbildung 16.21 diskutierten Aufbauten verwenden Linsen als optische Elemente. Die Probleme der Absorption, wie Sie für Linsen angesprochen wurden, gelten natürlich auch für die Linsen. Deshalb verwenden viele SPEKTROMETER Spiegel und reflektierende Gitter, wie in Abbildung 16.28 schematisch gezeigt.

Licht tritt durch einen Eintrittsspalt, der sich im Fokus eines sphärischen Spiegels

befindet in das SPEKTROMETER ein. Deshalb erzeugt der obere Spiegel paralleles Licht, das an einem Reflexionsgitter gebeugt und reflektiert wird. Die Erste Ordnung wird durch die Form des Gitters unterdrückt (siehe Blaze-Gitter in [Mar17]). Das Gitter lenkt nun verschiedene Farben in verschiedene Richtungen. Der untere Spiegel fokussiert nun die ebenen Wellen mit unterschiedlichen Richtungen auf die Ebene des Austrittsspaltes. Nur ein kleiner Wellenlängenbereich gegeben durch die Breite des Austrittsspaltes wird zum Detektor zugelassen. Dieser Detektor kann eine Fotodiode, eine Avalanchediode [Mar09, 3.3.5.1, pp. 176-177] oder ein Photomultiplier [Mar09, 4.2.5.1, pp. 317-318] sein. Die Wellenlänge wird nun ausgewählt, indem das Gitter gedreht wird.

SPEKTROMETER wie das in Abbildung 16.28 gezeigte enthalten ausser dem Gitter keine dispersiven Elemente und, da nur mit Reflexion gearbeitet wird, zuerst auch keine absorptiven Bauteile. Die Absorption in Luft (z.B. durch Wasser) kann umgangen werden, indem das SPEKTROMETER evakuiert wird. Dieser Typ SPEKTROMETER kann auch im Ultravioletten oder im fernen Infrarot, ja sogar für Terahertz-Strahlung verwendet werden.

Das oben gezeigte GITTERSPEKTROMETER ist hervorragend geeignet, mit höchster zeitlicher Auflösung die Intensität bei einer Wellenlänge zu bestimmen. Spektren hingegen brauchen lange Zeit, können aber bei zeitlich konstanten Quellen mit sehr hohem SIGNAL-RAUSCH-VERHÄLTNIS gemessen werden.

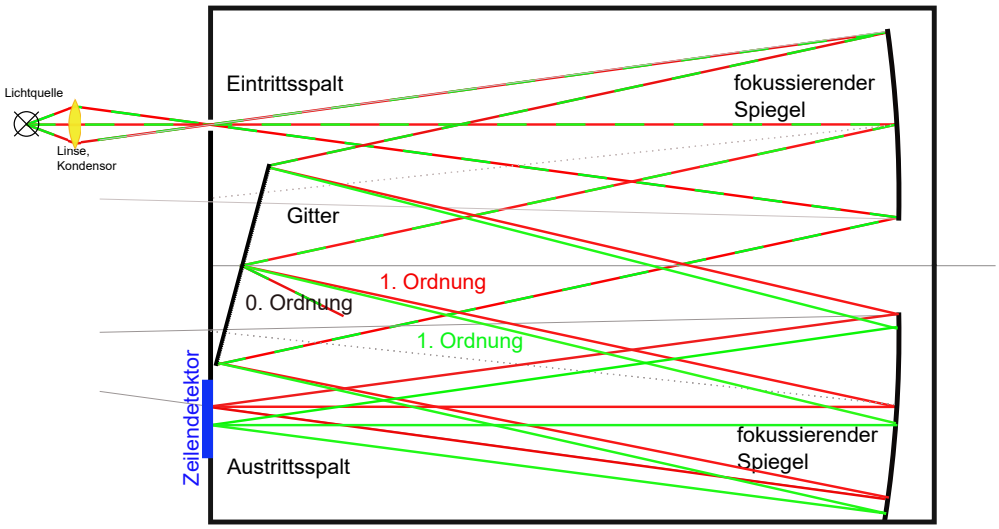


Abb. 16.29.: Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. Die Lampe und Linse vor dem Eingangsspalt sind symbolisch zu verstehen und stellen die Quelle dar. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 16.28.

Beim Spektrometer in der Abbildung 16.29 wurde der Austrittsspalt (siehe Abbildung 16.28) durch einen Zeilendetektor (z.B. ein Kamerachip) ersetzt. Damit kann wie in den Spektrometern in der Abbildung 16.21 das Spektrum als ganzes gemessen werden. Das Gitter steht nun fest, oder wird nur noch zur Wahl des Wellenlängenbereichs gedreht.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abb. 16.30.: Ein kommerzielles Gitterspektrometer, wie es im Labor des Instituts für Experimentelle Physik an der Universität Ulm verwendet wird.

Diese Art Gitterspektrometer kann auch hochintegriert hergestellt werden.

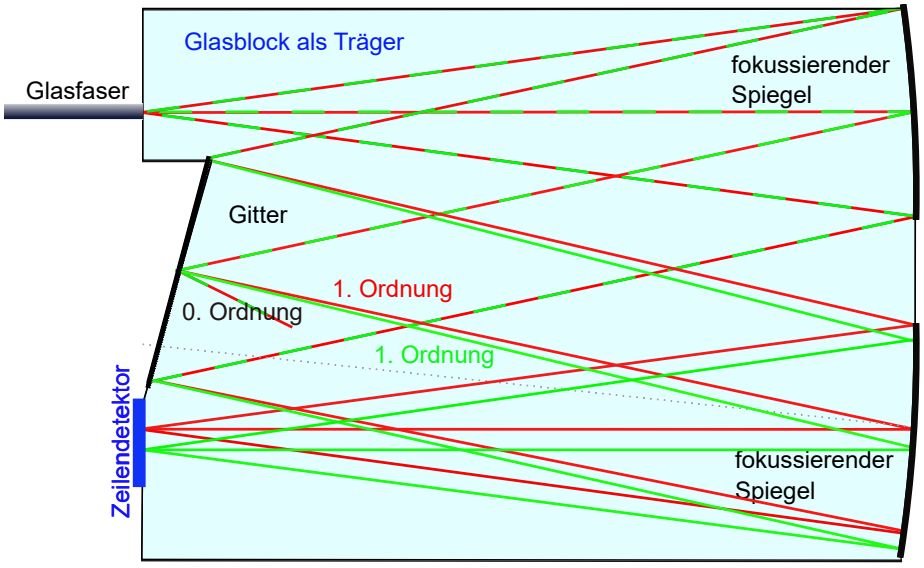


Abb. 16.31.: Schematische Darstellung eines integrierten Gitter-Reflexionsspektrometers. Dies ist eine Modifikation des Spektrometers aus Abbildung 16.29.

Das Spektrometer aus Abbildung 16.31 ist gleich aufgebaut wie das aus Abbildung 16.29. Alles wird auf einen Glasblock aufgebracht, dessen Aussenwände als Spiegel (mit einer Metallbedampfung) oder als Gitter (auch mit einer Metallbedampfung) strukturiert sind. Licht wird mit einer Glasfaser zugeführt. Deren Öffnung ist dabei die Eintrittsöffnung. Ebenso wird der Zeilendetektor direkt am Glaskörper befestigt. Die ganze Struktur kann, wenn gewünscht vergossen werden.

16.1.2.2. Échelle-Spektrometer

Échelle-Spektrometer (siehe T.-S. Pyo [Pyo03]) nutzen die Wellenlängendispersion von zwei unterschiedlichen dispersiven Elementen (zwei Gitter oder ein Gitter und ein Prisma) aus um die hohe Wellenlängenauflösung eines Gitters (dem Échelle-Gitter) in hoher Ordnung, also mit relativ wenig Linien pro Länge zu nutzen.

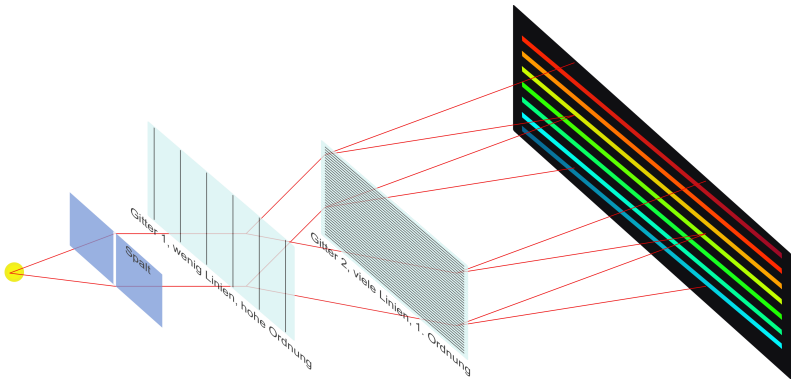


Abb. 16.32.: Aufbau eines Échelle-Spektrometers.

Abbildung 16.32 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Die übereinander liegenden Spektren werden mit einem zweiten senkrecht dazu angeordneten Gitter oder einem Prisma getrennt. Beim ORFEUS-Instrument (J. Barnstedt u. a. [Bar+99]) hat das Échelle-Gitter 316 Linien/mm und arbeitet mit den 40. bis 61. Ordnungen. Das nachgeschaltete Dispersionsgitter hat 1200 Linien/mm und trennt die einzelnen Ordnungen. Die hohe Auflösung stammt von den hohen Ordnungen des Échelle-Gitters.

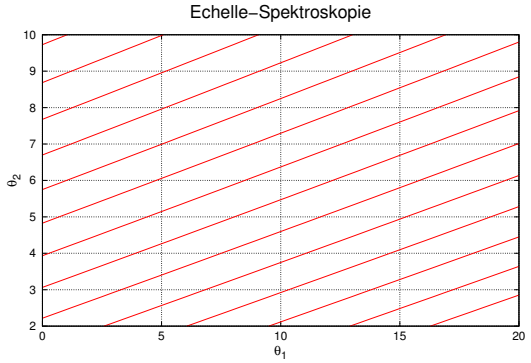


Abb. 16.33.: Gitter eines Échelle-Spektrometers.

Abbildung 16.33 zeigt, wie die Spektren liegen. Hier wurden die 50. bis 70. Ordnung verwendet. Abbildung 16.34 zeigt ein Échelle-Spektrum der Sonne.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

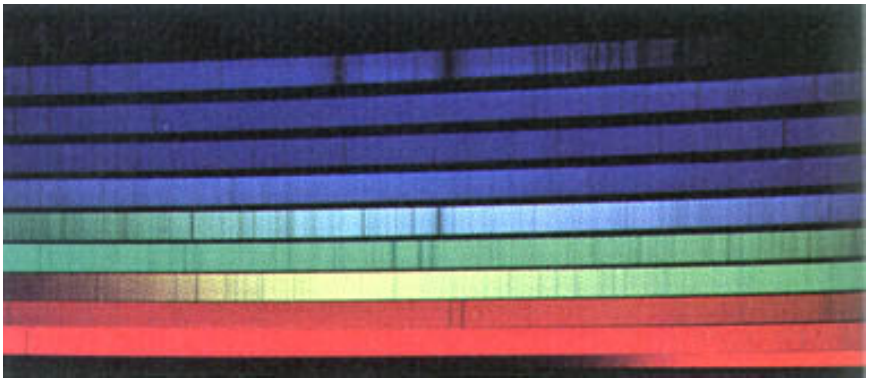


Abb. 16.34.: Spektrum der Sonne gemessen mit einem ÉCHELLE-SPEKTROMETER (By NASA [Public domain], via Wikimedia Commons, File: FraunhoferLinesDiagram.jpg).

16.1.3. Interferometer

16.1.3.1. Mach-Zehnder-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 663]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 365])
Nach [Mar17, Gleichung (3.2.2)] zeigt es sich, dass bei einem optischen Aufbau, der effektiv nur von einer Ortskoordinate abhängt, die zeitlich gemittelte Amplitude nur von der Phase δ abhängt. Das heisst, dass es reicht, die Phasen zu untersuchen! Beachten Sie, in [Mar17, Gleichung (3.2.2)] wurde die Phase δ nur einem Weg zugeordnet, die zeitgemittelte Amplitude hängt aber von $\cos(\delta/2)$ ab.

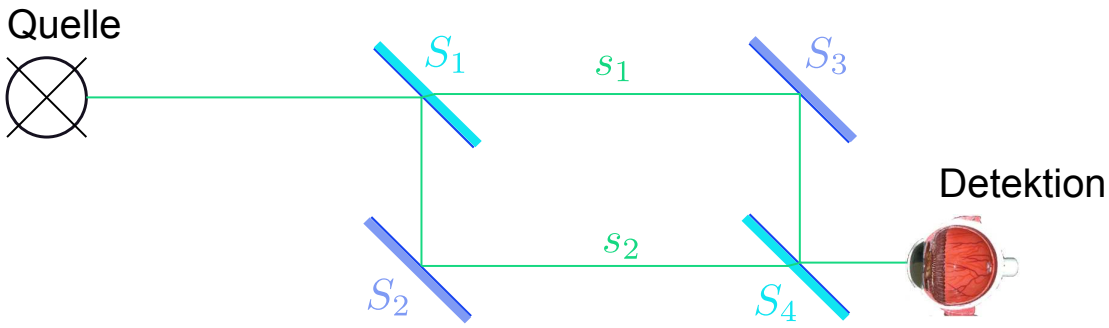


Abb. 16.35.: Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers.

Abbildung 16.35 zeigt den schematischen Aufbau eines Mach-Zehnder-Interferometers (nach Ludwig Mach und Ludwig Zehnder). Licht aus der Quelle trifft auf den halbdurchlässigen Spiegel S_1 und spaltet sich in die zwei Wege s_1 und s_2 auf. Der Weg s_1 läuft vom Spiegel S_1 über S_3 nach S_4, der Weg s_2 vom Spiegel S_1 über S_2 nach S_4. Am Spiegel S_4 werden die Lichtwellen vereinigt und gelangen interferierend auf den Detektor.
Die relative Phase des Lichtes für die beiden Wege s_1 und s_2 kann aus dem Bre-

chungsindexverlauf entlang der Wege berechnet werden. Die Geschwindigkeit ist durch $c(s) = c_0/n(s)$ gegeben. Dann ist

$$t_i = \int_{s_i} \frac{1}{c(s)} ds = \frac{1}{c_0} \int_{S_1,s_i}^{S_4} n_i(s) ds \tag{16.1.34}$$

Die Phasendifferenz von Licht mit der Vakuumwellenlänge λ_0 und damit der Frequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c_0/\lambda_0$ ist

$$\begin{aligned}\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \left(\frac{1}{c_0} \int_{S_1,s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \frac{1}{c_0} \int_{S_1,s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \\ = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1,s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1,s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right)\end{aligned} \tag{16.1.35}$$

Die beobachtete zeitgemittelte Amplitude am Ort $x = 0$ (kann willkürlich gewählt werden!) ist nach [Mar17, Gleichung (3.2.2)] mit $\boldsymbol{E}(\delta) = \boldsymbol{E}_1(x,t) + \boldsymbol{E}_2(x,t)$, beide mit gleichen Amplituden $|\boldsymbol{E}_0|$

$$\begin{aligned}I(\delta) = \left\langle \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \boldsymbol{E}^2(x,t,\delta) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} 4\boldsymbol{E}_0^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \boldsymbol{E}_0^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ = 2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \boldsymbol{E}_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1,s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1,s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right) \\ = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \left(\int_{S_1,s_2}^{S_4} n_2(s) ds - \int_{S_1,s_1}^{S_4} n_1(s) ds \right) \right)\end{aligned} \tag{16.1.36}$$

wobei $I_0 = \frac{1}{2} \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \boldsymbol{E}_i^2(0,t) \right\rangle_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \boldsymbol{E}_0^2$ ist.

Das heisst, dass das Ausgangssignal des Mach-Zehnder-Interferometers nicht nur von der geometrischen Weglängendifferenz, sondern auch von Unterschieden der Brechungsindices abhängt. Das Licht läuft in beiden Armen mit einer definierten Richtung. Das heisst, dass der Ausgang des Mach-Zehnder-Interferometers abhängig zum Beispiel von der Fliessrichtung eines Mediums mit dem Brechungsindex n ist. Mach-Zehnder-Interferometer werden kaum zur Distanzmessung aber oftmals zur Messung von Brechungsindexdifferenzen verwendet.

16.1.3.2. Michelson-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 596]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 360]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1114])

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

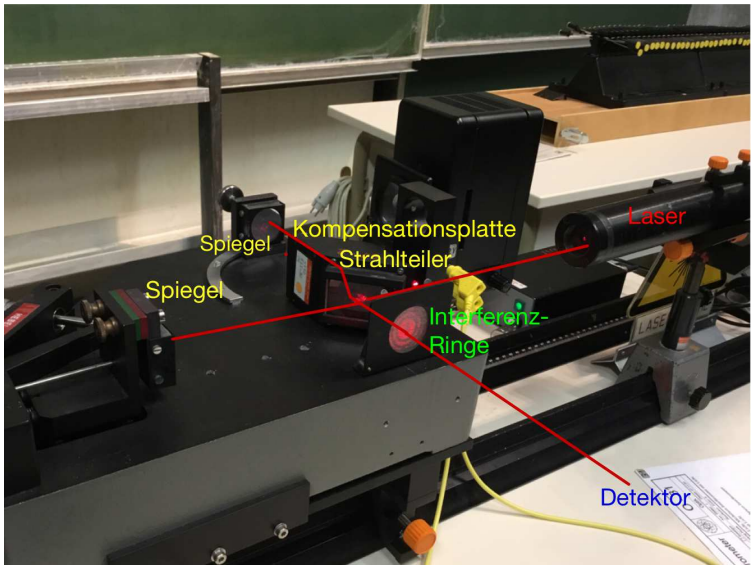


Abb. 16.36.: Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung mit eingezeichnetem Strahlengang.

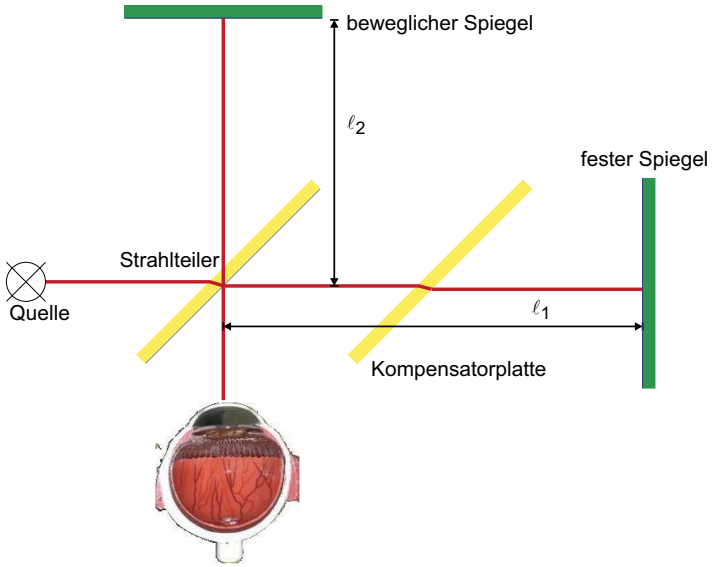


Abb. 16.37.: Schematische Zeichnung des Aufbaus eines Michelson-Interferometers aus Abb. 16.36.

Beim Michelson-Interferometer (nach Albert Michelson) wird Licht durch einen Strahlteiler in zwei Lichtwege aufgespalten. Der Weg vom Strahlteiler zum festen Spiegel sei ℓ_1, der zum beweglichen ℓ_2. Analog zum MACH-ZEHNDER-INTERFEROMETER (siehe Abschnitt 16.1.3.1) kann die Phase wie folgt geschrieben werden:

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0}\left(\frac{2}{c_0}\int\limits_{\ell_2} n_2(s)ds - \frac{2}{c_0}\int\limits_{\ell_1} n_1(s)ds\right)$$
$$= \frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\int\limits_{\ell_2} n_2(s)ds - \int\limits_{\ell_1} n_1(s)ds\right) \quad (16.1.37)$$

Die Phase hängt also sowohl vom Weglängenunterschied wie auch von Unterschieden im Brechungsindex ab. Anders als beim MACH-ZEHNDER-INTERFEROMETER wird jeder Weg zweimal und zwar gegenläufig durchlaufen. Bewegungseffekte mitteln sich so in erster Näherung heraus.
Der gesamte Weglängenunterschied ist bei konstantem $n_i(s) = n_0$ durch $\Delta\ell = 2(\ell_2 - \ell_1)$ gegeben. Immer wenn $\Delta\ell$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, tritt konstruktive Interferenz auf. Wird der bewegliche Spiegel um $\lambda/4$ verschoben, ändert sich $\Delta\ell$ um $\lambda/2$, dann haben wir destruktive Interferenz.
Wenn wir das Interferometer am Ausgang mit einer INTENSITÄT von I_0 betreiben und wenn wir eine Intensitätsänderung von ΔI noch messen können, dann können wir die mögliche Distanzauflösung in nichtmagnetischen Medien wie folgt berechnen:

$$I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{2\pi\frac{(2x)}{\lambda}}{2}\right) = I_0\cos^2\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \quad (16.1.38)$$

oder umgeschrieben

$$I(x) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (16.1.39)$$

Die Ableitung dieser Gleichung ist

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{2\pi I_0}{\lambda}\sin\left(4\pi\frac{x}{\lambda}\right) \quad (16.1.40)$$

Die maximale Steigung, also die höchste Empfindlichkeit beträgt

$$\left|\left(\left.\frac{dI(x)}{dx}\right|_{max}\right)\right| = \frac{2\pi I_0}{\lambda} \quad (16.1.41)$$

Wir können also die Distanz

$$\Delta x = \frac{\Delta I}{\left.\frac{dI(x)}{dx}\right|_{max}} = \frac{\Delta I}{2\pi I_0}\lambda \quad (16.1.42)$$

noch bestimmen. Dazu muss die Position (die Phase) so gelegt werden, dass der Sinus extremal ist:

$$4\pi\frac{x_{opt}}{\lambda} = \frac{2j+1}{2}\pi, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (16.1.43)$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Wir bekommen so den Arbeitspunkt $8\pi x_{opt} = (2j+1)\pi\lambda$ oder

$$x_{opt}(j) = \frac{2j+1}{8}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{16.1.44}$$

Maxima der Intensität am Ausgang liegen aber bei

$$x_{max} = \frac{j}{2}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{16.1.45}$$

und die Minima bei

$$x_{min} = \frac{2j+1}{4}\lambda, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{16.1.46}$$

Wenn zum Beispiel $\lambda = 500$ nm ist und $\Delta I/I_0 = 0.01$ ist, liegt der erste optimale Arbeitspunkt bei $x = 67.5$ nm und die mögliche Auflösung beträgt $\Delta x = 0.8$ nm. Das Michelson-Interferometer wird häufig zur Messung von Distanzen verwendet. Bei besserem Signal-Rauschverhältnis, können kleinere Längenänderungen bestimmt werden. Wenn ein Signal-Rausch-Verhältnis von etwa 10^{-13} erreicht wird, können Gravitationswellen detektiert werden.

16.1.3.3. Sagnac-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 701])

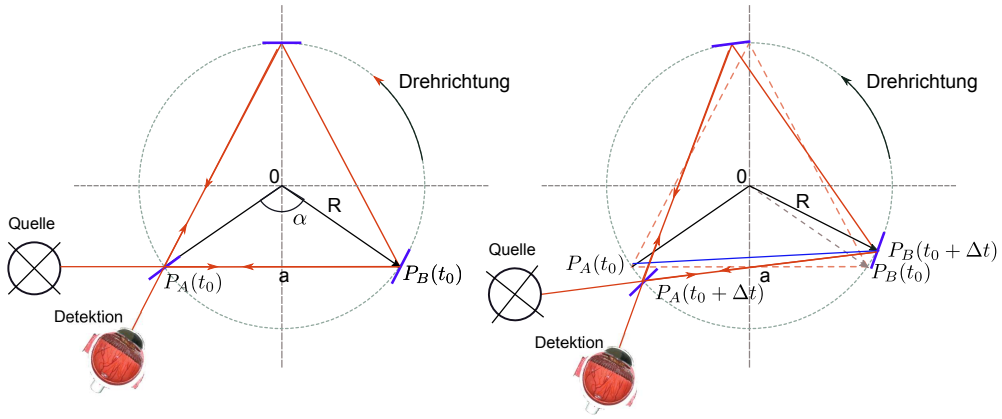


Abb. 16.38.: Sagnac-Interferometer. Rechts nach einer Laufzeit.

Beim Sagnac Interferometer (nach Georges Sagnac) läuft das Licht links- und rechts herum und interferiert dann. Die Lichtwege sind identisch, das Verschieben eines Spiegels erzeugt kein Signal. Wenn man das Sagnac-Interferometer jedoch mit der Kreisfrequenz Ω dreht, dann sind die Umlaufzeiten mit und gegen die Drehrichtung unterschiedlich. Die Behauptung ist, dass der Laufzeitunterschied zwischen der links- und der rechtsläufigen Welle

$$\Delta t = t_{rechts} - t_{links} = \frac{4A}{c^2}\Omega \tag{16.1.47}$$

ist. Dabei ist Ω die Winkelfrequenz, mit der das Interferometer rotiert, A die vom Licht eingeschlossene Fläche (in Abbildung 16.38 die Fläche des Dreiecks) und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Sagnac-Interferometer werden heute als

Gyroskope verwendet. Sie messen zum Beispiel die Drehraten von Flugzeugen und werden so zur magnetfeldunabhängigen Navigation herangezogen.
Wir betrachten ein Interferometer aus n Seiten. Die Fläche des n-Ecks ist n-,mal die Fläche eines einzelnen Dreiecks, und dessen Fläche $A_D = ah/2$. Beim n-Eck ist die Höhe $h = R\cos(\pi/n)$ und die Grundlinie $a = 2R\sin(\pi/n)$. Damit ist

$$A(n) = nA_D = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)R^2 \tag{16.1.48}$$

Wir brauchen nun die Strecke $\overline{P_A(t_0)P_B(t_0+\Delta t)}$. Diese ist die Grundlinie in einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Spitzenwinkel

$$\alpha_\pm = \frac{2\pi}{n} \pm \Omega\Delta t_{pm}. \tag{16.1.49}$$

Mit $\pm$ können beide Fälle gleichzeitig behandelt werden. Wir brauchen noch den Winkel an der Grundlinie (zweimal der gleiche Winkel $\beta_\pm$

$$\beta_\pm = \frac{1}{2}(\pi - \alpha_\pm) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega\Delta t_\pm}{2}. \tag{16.1.50}$$

Mit dem Sinussatz für beliebige Dreiecke bekommen wir die Länge der Grundlinie

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_\pm}{\sin(\alpha_\pm)} &= \frac{R}{\sin(\beta_\pm)} \\
\Longrightarrow \frac{\ell_\pm}{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega\Delta t_\pm\right)} &= \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \mp \frac{\Omega\Delta t_\pm}{2}\right)} \qquad (16.1.51)\\
\ell_\pm &= R\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} \pm \Omega\Delta t_\pm\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n} \pm \Omega\Delta t_\pm\right)} \\
&= R\left(2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega\Delta t_\pm \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + O(\Delta t_\pm^2) \qquad (16.1.52)
\end{aligned}$$

Die Zeit $\Delta t_\pm$ ist sowohl die Laufzeit von $P_A(t_0)$ nach $P_B(t_0+\Delta t_\pm)$ wie auch die Zeit, in der sich das Interferometer dreht. Wir haben also die Gleichungen

$$\Delta t_\pm = \frac{\ell_\pm}{c} = \frac{R}{c}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \Omega\Delta t_\pm \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \tag{16.1.53}$$

welche gelten wenn $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_\pm|}$ gilt. Die Lösungen sind

$$\Delta t_\pm = \frac{2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c \mp R\Omega\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{16.1.54}$$

Damit ist der Laufzeitunterschied (und daraus kann die Phase berechnet werden)

$$\Delta t_{\text{eine Seite}} = \Delta t_+ - \Delta t_- = \frac{2nR^2\Omega\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{c^2 - R^2\Omega^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \tag{16.1.55}$$

Auch dieser Ausdruck kann entwickelt werden wenn $|\Omega| \ll \frac{1}{|\Delta t_\pm|}$ ist. Wir erhalten die linearisierte Gleichung,

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\Delta t = n\Delta t_{\text{eine Seite}} = \frac{2nR^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{c^2} \tag{16.1.56}$$

und, wenn wir die Fläche $A(n)$ des n-Ecks einsetzen

$$\Delta t = \frac{4A(n)}{c^2}\Omega \tag{16.1.57}$$

Diese Gleichung müsste eigentlich mit der allgemeinen Relativitätstheorie hergeleitet werden. Für langsame Drehungen ist das Resultat jedoch korrekt. Bei einem kreisförmigen Sagnac-Interferometer (z.B. mit whispering gallery modes) ist

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2}\Omega = \frac{4A_{Kreis}}{c^2}\Omega \tag{16.1.58}$$

genau so gross. Mit $c = \Delta s/\Delta t$ folgt

$$\Delta s = N\lambda = c\Delta t = \frac{4A(n)}{c}\Omega \Longrightarrow N = \frac{4A(n)}{c\lambda}\Omega \tag{16.1.59}$$

Beispiel: Mit $\Omega = 2\pi \text{s}^{-1}$, $A(n) = 0.01\ \text{m}^2$ und $\lambda = 632\ \text{nm}$ (HeNe-Laser) erhält man $N = 0.00132648$ Dies ist eine kleine Zahl, kann aber mit Modulationstechniken problemlos gemessen werden.

16.1.3.4. Fabry-Perot-Interferometer

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 670]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 399]) (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 678])

Fabry-Perot Interferometer (nach Charles Fabry und Alfred Perot) sind optische Resonatoren. Aus den Fresnelschen Gleichungen sind die Transmissionskoeffizienten für Amplituden für die beiden Polarisationsrichtungen p und s bekannt. Nach [Mar17, Gleich. (2.3.27) und (2.3.33)] können wir winkel- und polarisationsabhängige Transmissions- und Reflexionskoeffizienten definieren.

Für die Reflexion haben wir

$$r = \begin{cases} -\frac{\sin(\alpha-\gamma(\alpha))}{\sin(\alpha+\gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation;} \\ \frac{\tan[\alpha-\gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha+\gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation.} \end{cases} \tag{16.1.60}$$

Analog schreiben wir für die Transmission

$$t = \begin{cases} \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma(\alpha))}, & s\text{-Polarisation ;} \\ \frac{2\sin\gamma(\alpha)\cos\alpha}{\sin[\alpha+\gamma(\alpha)]\cos[\alpha-\gamma(\alpha)]}, & p\text{-Polarisation.} \end{cases} \tag{16.1.61}$$

Im Weiteren sind mit t und r immer diese Koeffizienten aus den Fresnelschen Formeln gemeint.

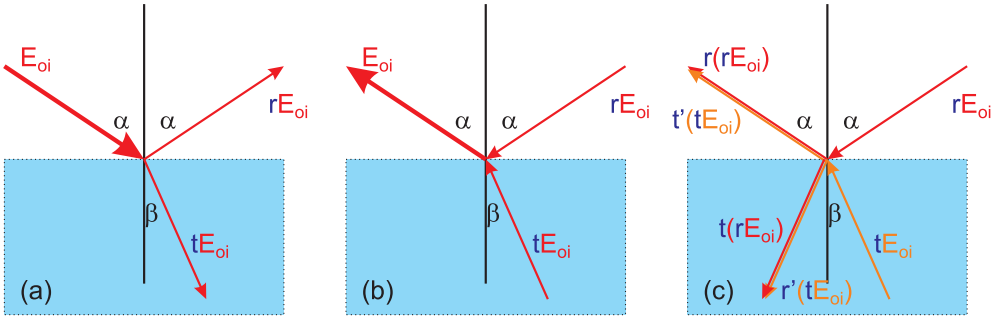


Abb. 16.39.: Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung (nach Hecht [Hec05])

Wir nehmen an, dass eine Welle mit der Amplitude $|\mathfrak{E}_{0i}|$, die vom oberen Medium her auf die Grenzfläche auftritt, mit dem Faktor r reflektiert wird, sowie mit dem Faktor t gebrochen wird. Die Amplitude der gebrochenen Welle ist dann $t\,|\mathfrak{E}_{0i}|$, die der reflektierten Welle $r\,|\mathfrak{E}_{0i}|$. Das Fermatsche Prinzip bedeutet, dass auch die zeitumgekehrte Situation eine physikalisch realisierbare ist. Also ist auch die Strahlführung im Teilbild (b) oben eine realisierbare Situation. Dabei müssen wir uns klar machen, dass sowohl die einfallende Welle mit der Amplitude $r\,|\mathfrak{E}_{0i}|$ und diejenige mit $t\,|\mathfrak{E}_{0i}|$ eine reflektierte und eine transmittierte, gebrochene Welle erzeugen. Dabei ist für die Welle, die von unten kommt der Reflexionsfaktor r' und der Transmissionsfaktor t'. Die Situation in (c) ist nur dann äquivalent zu der in (b), wenn gilt

$$|\mathfrak{E}_{0i}| = t(\alpha)t'(\beta)\,|\mathfrak{E}_{0i}| + r(\alpha)r(\alpha)\,|\mathfrak{E}_{0i}| \tag{16.1.62a}$$

$$0 = t(\alpha)r'(\beta)\,|\mathfrak{E}_{0i}| + t(\alpha)r(\alpha)\,|\mathfrak{E}_{0i}| \tag{16.1.62b}$$

Damit erhält man eine Verknüpfung der Reflexions- und Brechungskoeffizienten für den Übergang vom Medium 1 in das Medium 2 und umgekehrt. Dabei sind α und β die jeweiligen Einfallswinkel, die durch das Snelliussche Gesetz verknüpft sind.

$$t(\alpha)t'(\beta) = 1 - r^2(\alpha) \tag{16.1.63a}$$

$$r'(\beta) = -r(\alpha) \tag{16.1.63b}$$

Diese beiden Gleichungen heissen die Stokeschen Relationen. Die zweite Gleichung zeigt, dass wenn r für die Reflexion am dichteren Medium steht, bei der es nach den Fresnelschen Formeln einen Phasensprung von π gibt, dass dann bei der Reflexion am optisch dünneren Medium kein Phasensprung auftritt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

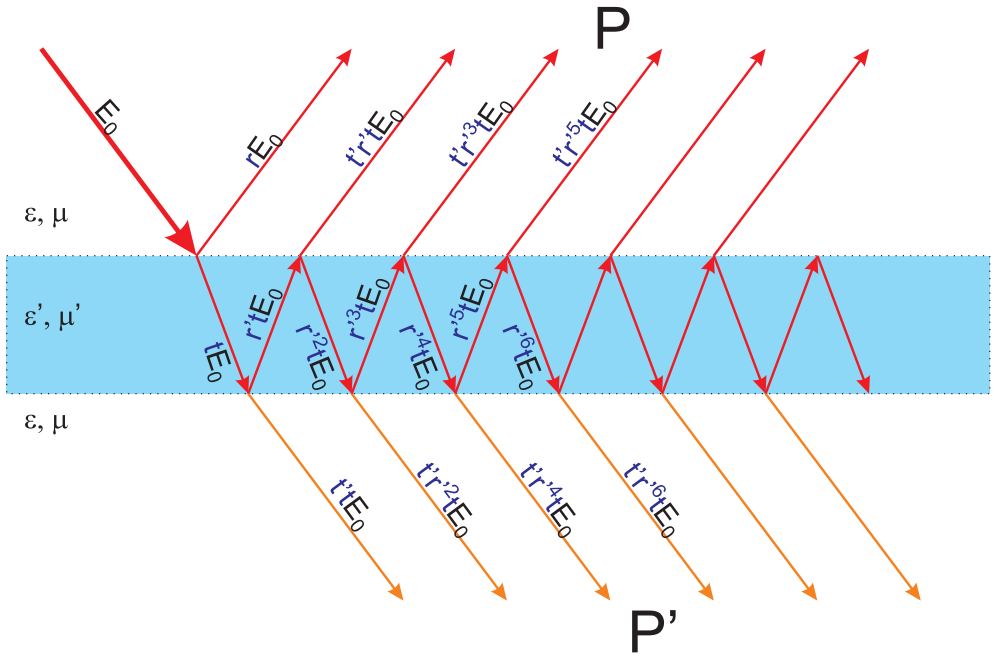


Abb. 16.40.: Strahlengang bei einem FABRY-PEROT-ETALON (nach Hecht [Hec05]). Dabei ist in der Zeichnung $|\boldsymbol{E}_{0i}| = |\mathfrak{E}_{0i}|$ gesetzt worden.

Wir betrachten nun die Reflexion an einem ETALON, also einer Glasplatte mit dem Brechungsindex n_G mit planparallelen Oberflächen. Im Aussenraum sei auf beiden Seiten $n = 1$. Die Abbildung zeigt die reflektierten und gebrochenen Strahlen, wobei die Konvention der Gleichung (16.1.63) verwendet wurde. Die reflektierten Strahlen interferieren in dem weit entfernten Punkt P, die transmittierten Strahlen im weit entfernten Punkt P'.

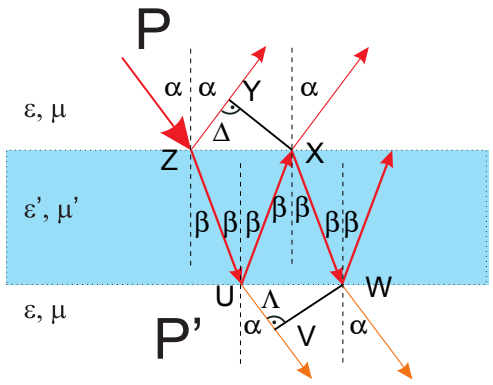


Abb. 16.41.: Strahlengang bei einem FABRY-PEROT-ETALON (nach Pérez [Pér96, p. 392])

Für das transmittierte Licht ist der Weglängenunterschied durch den Unterschied der optischen Wege $\overline{UV}$ und $\overline{UXW}$, $\Lambda = \overline{UXW} - \overline{UV}$ der relevante Unterschied. Die Strecke $\overline{UXW}$ ist im Medium mit dem Brechungsindex n_G, im Glas. Der optische Weg ist dann

$$\overline{UXW} = 2n_G \frac{d}{\cos\beta}.$$

Weiter ist die Strecke $\overline{UV}$ durch $\overline{UW}\sin\alpha$ gegeben. Weiter ist aber auch $\overline{UW} = 2d\tan\beta$, eine rein geometrische Überlegung, die keine optischen Wege beinhaltet. Zusammen bekommen wir

$$\overline{UV} = \overline{UW}\sin\alpha = 2d\tan\beta\sin\alpha$$

Damit ist Λ für ein Etalon der Dicke d

$$\begin{aligned}\Lambda &= \overline{UXW} - \overline{UV} \\ &= 2n_G\frac{d}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\sin\alpha = \frac{2dn_G}{\cos\beta}\left(1 - \frac{1}{n_G}\sin\beta\sin\alpha\right)\end{aligned}$$

mit $\sin\beta = \sin\alpha/n_G$ (Brechungsgesetz)

$$\begin{aligned}&= \frac{2dn_G}{\cos\beta}\left(1-\sin^2\beta\right) \\ \Lambda &= 2n_G d\cos\beta \qquad (16.1.64)\end{aligned}$$

Der Gangunterschied für die Reflexion Δ kann aus dem Gangunterschied für die Transmission abgeleitet werden, wobei ein Phasensprung von π berücksichtigt werden muss. Wir haben mit $\overline{ZUX} = \overline{UXW}$ und $\overline{ZY} = \overline{UV}$

$$\Delta = \frac{\lambda}{2} + 2n_G d\cos\beta \qquad (16.1.65)$$

Bei den Strahlen, die in P interferieren, ist die Anzahl der inneren Reflexionen ungerade. Für den Spezialfall des senkrechten Einfalls, oder bei senkrechter Polarisation, ergeben die Reflexionen keine Phasenänderung. Wenn $\Lambda = m\lambda$ ist, haben in P alle Wellen die gleiche Phase, ausser der ersten, deren Phase wegen $r' = -r$ um π ändert. Also ist die reflektierte Amplitude

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = r\,|\mathfrak{E}_{0i}| + \left(t'r't\,|\mathfrak{E}_{0i}| + t'r'^3t\,|\mathfrak{E}_{0i}| + t'r'^5t\,|\mathfrak{E}_{0i}| + \ldots\right) \qquad (16.1.66)$$

Da $\Lambda = m\lambda$ und damit die innere Phasenverschiebung 0 ist, ersetzen wir r' mit $-r$ und erhalten

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = |\mathfrak{E}_{0i}|\left[r - t'rt\left(1 + r^2 + r^4 + \ldots\right)\right] \qquad (16.1.67)$$

Diese geometrische Reihe konvergiert bei $r^2 < 1$ gegen $1/(1-r^2)$, so dass wir

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = |\mathfrak{E}_{0i}|\left[r - \frac{t'rt}{1-r^2}\right] = |\mathfrak{E}_{0i}|\,r\left(1 - \frac{tt'}{1-r^2}\right) \qquad (16.1.68)$$

Nach den Stokeschen Relationen ist $tt' = 1 - r^2$ und damit die reflektierte Amplitude bei senkrechtem Einfall

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = 0 \qquad (16.1.69)$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Also wird im Falle $\Lambda = m\lambda = 2n_G d\cos\beta$ oder $d\cos\beta = \frac{m\lambda}{2n_G}$ alles Licht transmittiert.
Der zweite Spezialfall ist $\Lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda)$. Dann sind die relativen Phasen benachbarter Wellen, unter der Berücksichtigung dass $r' = -r$ und dass die innere Phase π ist, die Phasenverschiebung π, ausser bei den ersten beiden Wellen, die gleichphasig sind. Wir erhalten für die skalare Amplitude

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = r\,|\mathfrak{E}_{0i}| + t'rt\,|\mathfrak{E}_{0i}| - t'r^3t\,|\mathfrak{E}_{0i}| + t'r^5t\,|\mathfrak{E}_{0i}| - \dots \tag{16.1.70}$$

oder

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = |\mathfrak{E}_{0i}|\ r\left[1 + t't\left(1 - r^2 + r^2 - \dots\right)\right] \tag{16.1.71}$$

Die Reihe in der Klammer konvergiert gegen $1/(1+r^2)$. Wir erhalten also

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = |\mathfrak{E}_{0i}|\ r\left[1 + \frac{t't}{1+r^2}\right] \tag{16.1.72}$$

Mit $t't = 1 - r^2$ erhalten wir

$$|\mathfrak{E}_{0r}| = |\mathfrak{E}_{0i}|\ r\left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2}\right] = |\mathfrak{E}_{0i}|\ r\frac{1+r^2+1-r^2}{1+r^2} = |\mathfrak{E}_{0i}|\,\frac{2r}{1+r^2} \tag{16.1.73}$$

Damit wird die reflektierte Intensität maximal, nämlich

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}}\frac{|\mathfrak{E}_{0r}|^2}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}}\frac{4r^2}{(1+r^2)^2}\frac{|\mathfrak{E}_{0i}|^2}{2} \tag{16.1.74}$$

Den allgemeinen Fall kann man berechnen, indem man die durch die einfallende Welle $\tilde{\boldsymbol{E}}_0(t) = \mathfrak{E}_{0i}e^{i\omega t}$ angeregten reflektierten Teilwellen aufschreibt, wobei zwischen zwei Teilwellen die Phasenverschiebung $\delta = k_0\Lambda$ ist. Wir betrachten eine definierte Polarisationsrichtung s oder p, so dass wir betragsmässig schreiben können

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{1r}(t) &= |\mathfrak{E}_{0i}|\ r\ e^{i\omega t} \\
\tilde{E}_{2r}(t) &= |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r't\ e^{i(\omega t-\delta)} \\
\tilde{E}_{3r}(t) &= |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r'^3t\ e^{i(\omega t-2\delta)} \\
\tilde{E}_{4r}(t) &= |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r'^5t\ e^{i(\omega t-3\delta)} \\
&\vdots \\
\tilde{E}_{Nr}(t) &= |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r'^{(2N-3)}t\ e^{i(\omega t-(N-1)\delta)} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{16.1.75}$$

Die resultierende Welle ist die Summe aller Teilwellen

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \tilde{E}_{4r} + \dots \tag{16.1.76}$$

Eingesetzt erhalten wir die Summe

$$\tilde{E}_r = |\mathfrak{E}_{0i}|\ re^{i\omega t} + |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r't\ e^{i(\omega t-\delta)} + |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r'^3t\ e^{i(\omega t-2\delta)} + |\mathfrak{E}_{0i}|\ t'r'^5t\ e^{i(\omega t-3\delta)} + \ldots \tag{16.1.77}$$

Zusammengefasst kann diese so umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= |\mathfrak{E}_{0i}|\, e^{i\omega t}\left\{r + t'r'te^{-i\delta}\left[1 + r'^2e^{-i\delta} + r'^4e^{-i(2\delta)} + r'^6e^{-i(3\delta)} + \ldots\right]\right\} \\ &= |\mathfrak{E}_{0i}|\, e^{i\omega t}\left\{r + t'r'te^{-i\delta}\left[1 + \left(r'^2e^{-i\delta}\right)^1 + \left(r'^2e^{-i\delta}\right)^2 + \left(r'^2e^{-i\delta}\right)^3 + \ldots\right]\right\} \end{aligned} \tag{16.1.78}$$

Für $\left|r'^2e^{-i\delta}\right| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe. Wir erhalten

$$\tilde{E}_r = |\mathfrak{E}_{0i}|\, e^{i\omega t}\left[r + \frac{t'r'te^{-i\delta}}{1 - r'^2e^{-i\delta}}\right] \tag{16.1.79}$$

Mit den Stokeschen Relationen $r' = -r$ und $t't = 1 - r^2$ bekommen wir

$$\tilde{E}_r = |\mathfrak{E}_{0i}|\, e^{i\omega t}\left[r - \frac{r(1-r^2)e^{-i\delta}}{1 - r^2e^{-i\delta}}\right] = |\mathfrak{E}_{0i}|\, e^{i\omega t}\left[\frac{r(1-e^{-i\delta})}{1 - r^2e^{-i\delta}}\right] \tag{16.1.80}$$

Die reflektierte optische Intensität ist $I_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\tilde{E}_r\tilde{E}_r^*$ und somit

$$I_r = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\frac{|\mathfrak{E}_{0i}|^2}{2}r^2\frac{(1-e^{-i\delta})(1-e^{+i\delta})}{(1-r^2e^{-i\delta})\,(1-r^2e^{+i\delta})} = I_i\frac{2r^2(1-\cos\delta)}{(1+r^4) - 2r^2\cos\delta} \tag{16.1.81}$$

Mit einer analogen Ableitung berechnet man die transmittierte Intensität

$$I_t = I_i\frac{(1-r^2)^2}{(1+r^4) - 2r^2\cos\delta} \tag{16.1.82}$$

da das transmittierte Licht sich im gleichen Medium wie das einfallende Licht sich bewegt. Mit $\cos\delta = 1 - 2\sin^2(\delta/2)$ werden I_t und I_r

$$\begin{aligned} I_r &= I_i\frac{\left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2\sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2\sin^2(\delta/2)} \\ I_t &= I_i\frac{1}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2\sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \tag{16.1.83}$$

Wir haben dabei angenommen, dass keine Energie absorbiert wird[1]. Dann ist $I_i = I_t + I_r$. Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heisst, dass in Gleichung (16.1.82) $\cos\delta = 1$ ist. Dann ist

$$I_t|_{max} = I_i \tag{16.1.84}$$

und

[1] Dies ist bei metallbedampften Spiegeln nicht der Fall.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$I_r|_{min} = 0 \tag{16.1.85}$$

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei I_t maximal ist, also wenn in Gleichung (16.1.82) $\cos\delta = -1$ ist

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \tag{16.1.86}$$

und

$$I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \tag{16.1.87}$$

Es hat sich eingebürgert, dass FABRY-PEROT-INTERFEROMETER mit der Kennzahl FINESSEFAKTOR charakterisiert werden:

$$F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 \tag{16.1.88}$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= \frac{F\sin^2(\delta/2)}{1+F\sin^2(\delta/2)} \\ \frac{I_t}{I_i} &= \frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \tag{16.1.89}$$

wobei die Funktion $[1+F\sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$ auch AIRY-FUNKTION genannt wird[2].

[2] Achtung! Es gibt mehrere Definitionen der Airy-Funktion.

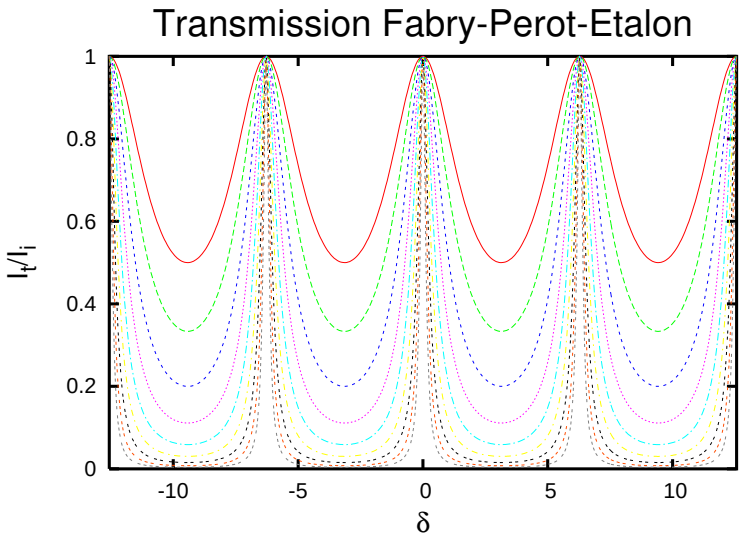


Abb. 16.42.: Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F. Von oben nach unten sind die Transmissionskurven für $F = 1$, $F = 2$, $F = 4$, $F = 8$, $F = 16$, $F = 32$, $F = 64$, $F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

In der Reflexion sind die gut reflektierenden Bereiche die Bereiche der stark unterdrückten Transmission.

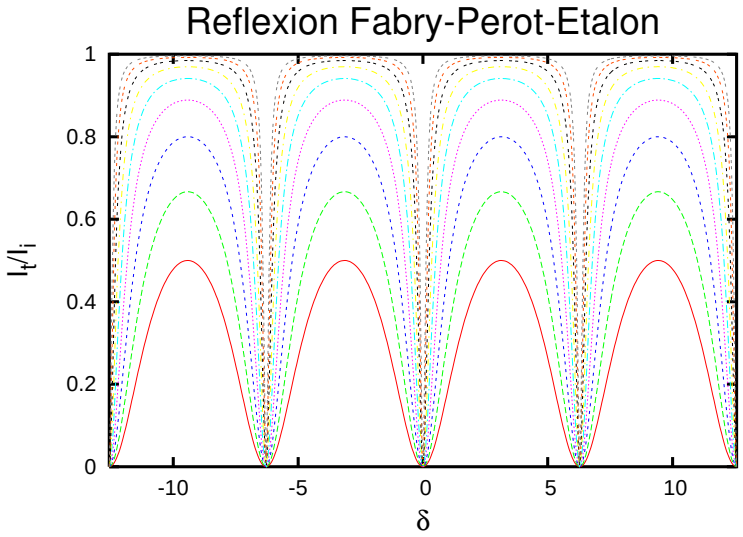


Abb. 16.43.: Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F. Von unten nach oben sind die Reflexionskurven für $F = 1$, $F = 2$, $F = 4$, $F = 8$, $F = 16$, $F = 32$, $F = 64$, $F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

Die Halbwertsbreite der Transmissionskurven ist durch

$$\frac{1}{2} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta_{1/2}/2)} \tag{16.1.90}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

gegeben. Daraus folgt

$$\delta_{1/2} = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \tag{16.1.91}$$

Das Verhältnis des Abstandes benachbarter Maxima zu der Halbwertsbreite heisst FINESSE und ist

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \tag{16.1.92}$$

Die einfachsten FABRY-PEROT-SPEKTROMETER haben ein $\mathcal{F} \approx 30$. Werte von $\mathcal{F} \approx 1000$ sind an der Grenze des technisch machbaren. Wenn bei dem Fabry-Perot-Spektrometer Absorption vorhanden ist, müssen kompliziertere Gleichungen, die Sie zum Beispiel in Hecht [Hec05, S. 617] finden, verwendet werden.

16.1.3.5. Michelson-Sterninterferometer

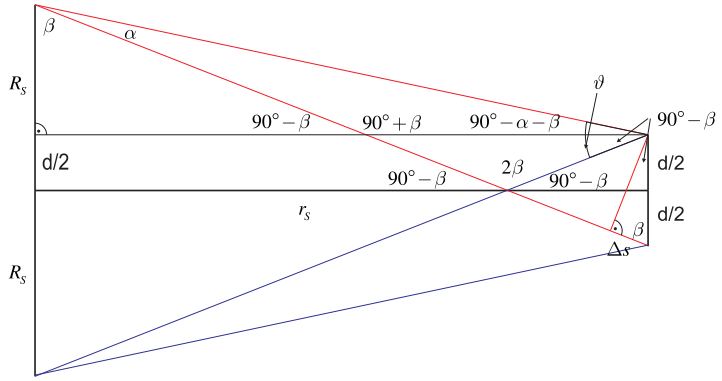


Abb. 16.44.: Strahlengang im Michelson-Sterninterferometer

Das Michelson-Sterninterferometer (nach Albert Michelson) ist ein WEISSLICHTINTERFEROMETER, das aus der Interferenz um den Weglängenunterschied null den Durchmesser von Sternen bestimmen kann. Nach Abbildung 16.44 ist die maximale Phasenverschiebung von einem Punkt am Rande des Sterns aus gesehen

$$\Delta s_{max} = \overline{R_2S_1} - \overline{R_2S_2} = \overline{R_1S_2} - \overline{R_1S_1} \approx d \sin(90° - \beta) \tag{16.1.93}$$

Die Winkel können umgerechnet werden:

$$\vartheta = 180° - \alpha - 2\beta \Longrightarrow 90° - \beta = \frac{\vartheta + \alpha}{2} \tag{16.1.94}$$

Das ergibt die Näherungslösung

$$\Delta s_{max} \approx d \sin\left(\frac{\vartheta + \alpha}{2}\right) \tag{16.1.95}$$

Daraus ergibt sich für den Sterndurchmesser

$$2R_S \approx r_S \vartheta \tag{16.1.96}$$

Der Winkelα ist klein. Mit $\alpha \ll \vartheta$ erhalten wir

$$\Delta s_{max} \approx \frac{d}{2}\frac{2R_S}{r_S} = \frac{R_S}{r_s}d \tag{16.1.97}$$

Die Quelle ist inkohärent, also muss für die Interferenz gelten

$$\Delta s_{max} \approx \frac{R_S d}{r_S} \leq \frac{\lambda}{2} \tag{16.1.98}$$

Im Michelson-Sterninterferometer wird der Kontrast

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{16.1.99}$$

gemessen. Daraus wird die erste Nullstelle d_S bestimmt (dort ist $\Delta s_{max} = \lambda/2$).

$$R_S = r_s \frac{\lambda}{2d_S} \tag{16.1.100}$$

Beispiel: Beteigeuze (α-Orionis): $r_S = 310$ ly und Winkeldurchmesser $\vartheta = 2R_S/r_S = 0.04''$

$$D = 2R_S = 4.1 \cdot 10^8 \text{ km} = 2.33 \text{ AU} \tag{16.1.101}$$

16.1.3.6. Hanbury Brown und Twiss-Interferometer

Das Hanbury Brown and Twiss Interferometer (nach Robert Hanbury Brown und Richard Q. Twiss) ist ein Intensitätsinterferometer. Es misst die Korrelation in der Photonenzahl.

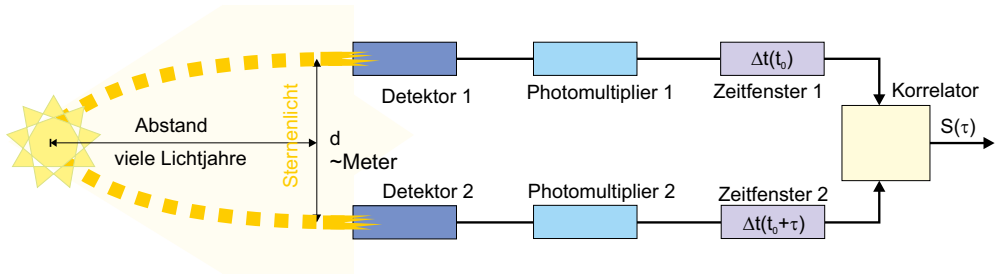


Abb. 16.45.: Schematischer Aufbau eines Intensitäts-Korrelationsinterferometers nach Hanbury Brown und Twiss (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.4])

Abbildung 16.45 zeigt den Aufbau dieses Interferometers. Die Berechnung des Korrelators nach [HT57; HDA67; Han+67] lautet

$$S(\tau) = \int_0^{\Delta t} \frac{I_1(t) \cdot I_2(t+\tau)}{\langle I^2(t) \rangle} dt = \frac{1}{\left\langle \dot{N}^2 \right\rangle} \int_0^{\Delta t} \frac{dN_1(t)}{dt} \cdot \frac{dN_2(t+\tau)}{dt} dt \tag{16.1.102}$$

$S(\tau)$ ist ein Mass für die Kohärenz. Die Kohärenzlänge ergibt den Sterndurchmesser! Die Korrelationsfunktion ist

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\Gamma_\lambda^2(d) = \left| \frac{2J_1\left(\frac{\pi\theta_{Stern}d}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\theta_{Stern}d}{\lambda}} \right|^2 \tag{16.1.103}$$

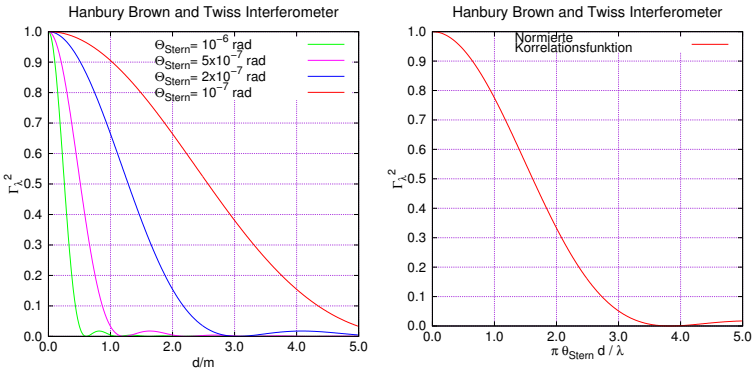


Abb. 16.46.: Empfindlichkeitskurven des Hanbury Brown und Twiss-Interferometers. Links in Abhängigkeit des Sternradius, rechts normiert [HT57; HDA67; Han+67].

Abbildung 16.46 zeigt die Empfindlichkeitskurven. Abbildung 16.47 zeigt die Zusammenhänge zwischen Sichtwinkel, Sterndurchmesser und Abstand der Detektoren.

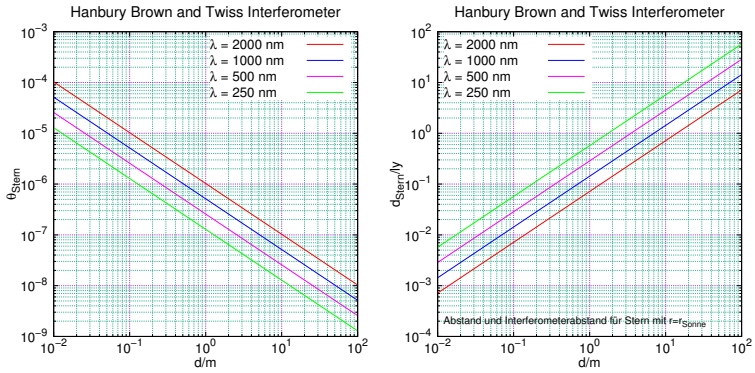


Abb. 16.47.: Sichtwinkel und Sterndurchmesser im Hanbury Brown und Twiss-Interferometer. Links Abstand der Detektoren und Sichtwinkel, rechts Abstand der Detektoren und Sterndurchmesser [HT57; HDA67; Han+67].

16.1.3.7. Interferometer als Spektrometer

Im Abschnitt 16.1.3.4 wurden die folgenden Gleichungen abgeleitet

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1-\cos\delta)}{(1+r^4)-2r^2\cos\delta} \qquad \text{Gleichung (16.1.81)}$$

sowie

$$I_t = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^4) - 2r^2\cos\delta} \qquad \text{Gleichung (16.1.82)}$$

Mit $\cos\delta = 1 - 2\sin^2(\delta/2)$ werden I_t und I_r

$$I_r = I_i \frac{\left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2 \sin^2(\delta/2)}$$
$$I_t = I_i \frac{1}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2}\right]^2 \sin^2(\delta/2)} \qquad \text{Gleichungen (16.1.83)}$$

Es wurde angenommen, dass keine Energie absorbiert wird. Dann ist $I_i = I_t + I_r$. Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heisst, dass in Gleichung (16.1.82) $\cos\delta = 1$ ist. Dann ist

$$I_t|_{max} = I_i \qquad \text{und} \qquad I_r|_{min} = 0$$

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei I_t maximal ist, also wenn in Gleichung (16.1.82) $\cos\delta = -1$ ist

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \qquad \text{und} \qquad I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}$$

Es hat sich eingebürgert, dass Fabry-Perot-Interferometer mit der Kennzahl Finessefaktor charakterisiert werden:

$$F = \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F\sin^2(\delta/2)}{1 + F\sin^2(\delta/2)}$$
$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F\sin^2(\delta/2)}$$

wobei die Funktion $[1 + F\sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$ auch Airy-Funktion genannt wird.
Die Grösse δ wird durch die Phasenverschiebung zwischen zwei benachbarten Teilwellen, also nach einem Umlauf gegeben. Wenn die beiden Spiegel im Abstand L sind, dann ist die resultierende Phasenverschiebung mit $k_0 = 2\pi/\lambda$

$$\delta(\lambda) = k_0\, L = 2\pi \frac{L}{\lambda} \mod 2\pi \qquad (16.1.104)$$

Wir interessieren uns für den Ort der grössten Steigung z.B. der Transmissionskurve. Wir ersetzen $\sin(\delta/2) = x$ und leiten nach x ab. Damit haben wir die Empfindlichkeitskurve. Eine weitere Ableitung nach x ergibt den Verlauf der Empfindlichkeit. Deren Maximum erhalten wir als Nullstelle nach einer weiteren Ableitung nach x.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Wir müssen also die Gleichung

$$\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{1+Fx^2} = \frac{24F^2x}{\left(Fx^2+1\right)^3} - \frac{48F^3x^3}{\left(Fx^2+1\right)^4} = -\frac{24\left(F^3x^3-F^2x\right)}{\left(Fx^2+1\right)^4} = 0 \quad (16.1.105)$$

lösen. Der Nenner hat die Nullstellen

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{nicht interessant ;} \\ \frac{1}{\sqrt{F}}, & \text{erste Lösung;} \\ -\frac{1}{\sqrt{F}}, & \text{zweite Lösung.} \end{cases} \quad (16.1.106)$$

und daraus mit $\delta = 2\arcsin(x)$ sowie $\lambda = 2\pi L/\delta$

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{\pi L}{\arcsin(1/\sqrt{F})}, & \text{erste Lösung;} \\ -\frac{\pi L}{\arcsin(1/\sqrt{F})}, & \text{zweite Lösung.} \end{cases} \quad (16.1.107)$$

Wenn die Kurven dargestellt werden, ist dies gerade der Ort der grössten Steigung links und rechts des Transmissionsmaximums. Die Finesse F gibt also die Empfindlichkeit eines Spektrometers an.

16.2. Koordinatensysteme

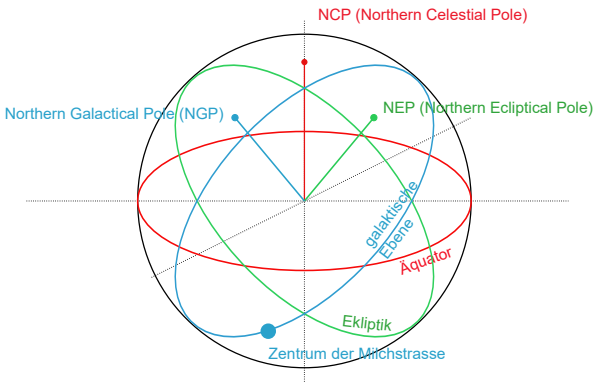


Abb. 16.48.: Astronomische Koordinatensysteme

Wenn wir in den Himmel schauen, sehen wir Sterne. Wir verwenden dabei unterschiedliche Referenzsystem, mathematisch Koordinatensysteme genannt. Diese sind in der Abbildung 16.48 zusammengefasst, wobei das einfachste System, das Horizontsystem nicht eingezeichnet ist.

16.2.1. Horizontsystem

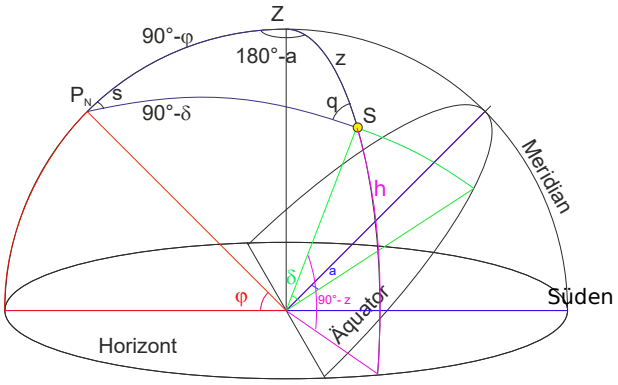


Abb. 16.49.: Das astronomische Dreieck und die Koordinatensysteme

Das Horizontsystem beschreibt die Lage eines Sterns anhand zweier Winkelkoordinaten, der Höhe h über dem Horizont und dem Azimut a der Ebene durch Beobachter, Zenit und Stern. Das Azimut a wird von Süden (0°) aus Richtung Westen (90°) gemessen. Die Wertebereiche der Höhe und des Azimuts sind $0 \leq h \leq 90°$ und $0 \leq a \leq 360°$. Anstelle der Höhe h kann auch die Zenitdistanz z verwendet werden, mit $z = 90° - h$.
Dieses Horizontsystem gibt jedem Stern an unterschiedlichen Orten zur gleichen Zeit oder am gleichen Ort zu unterschiedlichen Zeiten eine andere Koordinate.

16.2.2. Äquatorsystem

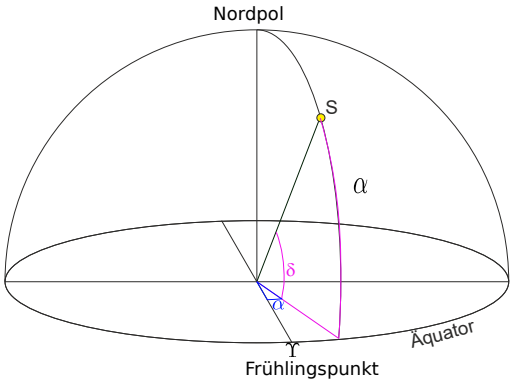


Abb. 16.50.: Winkel im Äquatorsystem.

Das Äquatorsystem (siehe Abb. 16.50) verwendet als Koordinaten die Rektaszension α (oder auch a) und die Deklination δ. Die Rektaszension ist die Länge, gemessen vom Frühlingspunkt Υ aus. Der Frühlingspunkt ist der Ort, an dem sich der Himmelsäquator im Frühling (21. 3.) die Ebene der Ekliptik schneidet. Die Deklination ist die Höhe des Sternes über der Äquatorebene. Dieses Koordinatensystem rotiert bezüglich der Erde.
Wenn der Meridian des Beobachters als Referenzpunkt für die Länge verwendet

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

wird, verwendet man anstelle der Rektaszension den Stundenwinkel τ. Im Gegensatz zum Horizontsystem ist der Erdäquator die Bezugsebene.

16.2.3. Ekliptikales System

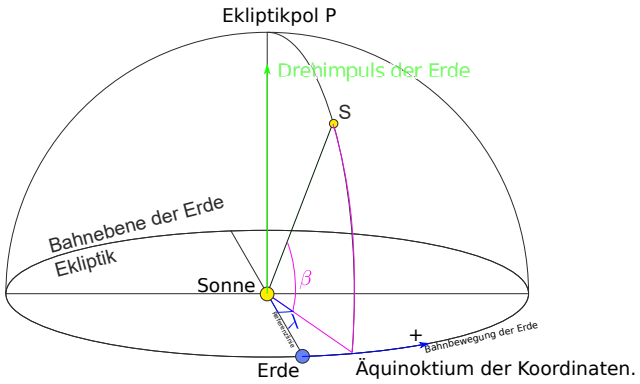


Abb. 16.51.: Winkel im ekliptikalen System.

Im ekliptikalen System (siehe Abb. 16.51) verwendet man die Bahnebene der Erde. Der Ursprung ist in der Sonne, die Referenzachse ist die Verbindungslinie Sonne-Erde. Als Koordinaten werden die ELIPTIKALE LÄNGE λ und die ELIPTIKALE BREITE β verwendet.
Mit Hilfe dieses ekliptikalen Systems können die Phänomene Präzession und Nutation sowie die Schwankungen der Erddrehachse beschrieben werden.

16.2.4. Galaktisches System

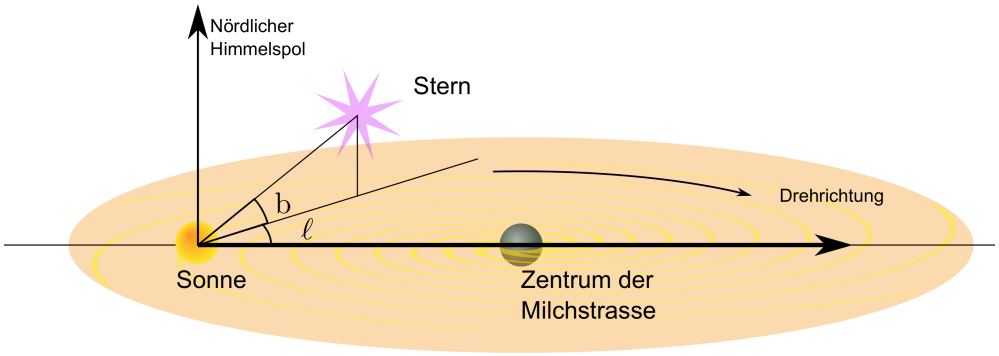


Abb. 16.52.: Galaktisches Koordinatensystem

Abbildung 16.52 zeigt das galaktische Koordinatensystem. Der GALAKTISCHE ÄQUATOR ist die Schnittmenge der Himmelskugel mit der Mittelebene der Milchstrasse. Senkrecht zu dieser Mittelebene steht ausgehend von der Erde die Richtung zum nördlichen galaktischen Pol (NGP). Der Winkel zwischen der Verbindungslinie Erde-galaktisches Zentrum und der Projektion der Verbindungslinie zum Stern auf die galaktische Mittelebene heisst GALAKTISCHE LÄNGE, ℓ. Die Elevation der

Sichtlinie zum Stern über der galaktischen Mittelebene heisst GALAKTISCHE BREITE, b. Die wechselseitigen Beziehungen der Koordinatensysteme sind in Abbildung 16.48 angegeben. Zur Umrechnung der Koordinaten wird die sphärische Trigonometrie benötigt (siehe C.5.1). Für mehr Informationen siehe auch [CO07, Kap. 24.3].

16.2.5. Galaktozentrisches System

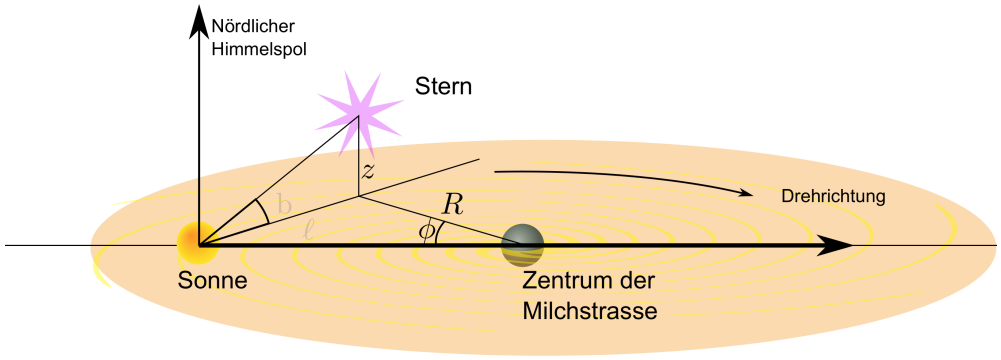


Abb. 16.53.: Galaktozentrisches Koordinatensystem

Abbildung 16.53 zeigt das galaktozentrische Koordinatensystem. Der Winkel ϕ sowie die Distanz zum galaktischen Zentrum in der Mittelebene der Milchstrasse sind zwei der drei Koordinaten eines zylindrischen Koordinatensystems. Die dritte Koordinate ist die Höhe z über der galaktischen Mittelebene. Dieses galaktozentrische System wird zur Berechnung der Dynamik in der Milchstrasse verwendet. Zur Umrechnung der Koordinaten wird die sphärische Trigonometrie benötigt (siehe C.5.1). Für mehr Informationen siehe auch [CO07, Kap. 24.3].

16.2.6. Längenmasse in der Astrophysik

Die Längenmasse des täglichen Lebens sind für die Astrophysik zu unhandlich. Deshalb werden häufig Masse verwendet, die vom SI abweichen. Die «International Astronomic Union»koordiniert die Messverfahren und die Definitionen im Bereich der Astronomie [Int21; Sei92].

16.2.6.1. Astronomische Einheit

Die Bahn der Erde um die Sonne ist in etwa kreisförmig. Ursprünglich wurde der mittlere Abstand zwischen Erde und Sonne als Astronomische Einheit definiert. Da dieser mittlere Abstand aber bei den heute üblichen Messgenauigkeiten variiert, wird die Astronomische Einheit seit 2012 definiert [IAU12] als:

$$1 \text{ Astronomische Einheit} = 1 \text{ Astronomic Unit} = 1 \text{ AU} := 149\,597\,870\,700 \text{ m} \tag{16.2.1}$$

Die Astronomische Einheit ist ein bequemes Längenmass innerhalb des Sonnensystems.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.2.6.2. Lichtjahr

Die Distanz zu den nächsten Sternen ist so gross, dass auch mit der Einheit AU unhandliche Zahlen entstehen würden. Deshalb verwendet man häufig das «anschauliche » Längenmass Lichtjahr [Sei92, p. 716]. Diese Länge ist die Distanz, die Licht im Vakuum in einem Jahr (= 365.25 d, Definition!) zurücklegt.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtjahr} = 1 \text{ ly} &:= 9\,460\,730\,472\,580\,800 \text{ m} \\ &= 9.460\,730\,472\,580\,8 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9.460\,730\,472\,580\,8 \text{ Pm} \end{aligned} \tag{16.2.2}$$

Untergeordnete Längenmasse sind auch

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichttag} = 1 \text{ ld} &:= 25\,902\,068\,371\,200 \text{ m} \\ &= 2.590\,206\,837\,120\,0 \cdot 10^{13} \text{ m} \\ &= 25.902\,068\,371\,2 \text{ Tm} \end{aligned} \tag{16.2.3a}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtstunde} = 1 \text{ lh} &:= 1\,079\,252\,848\,800 \text{ m} = 1.079\,252\,848\,8 \cdot 10^{12} \text{ m} \\ &= 1.079\,252\,848\,8 \text{ Tm} \end{aligned} \tag{16.2.3b}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtminute} = 1 \text{ lm} &:= 17\,987\,547\,480 \text{ m} = 1.798\,754\,748 \cdot 10^{10} \text{ m} \\ &= 17.987\,547\,48 \text{ Gm} \end{aligned} \tag{16.2.3c}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Lichtsekunde} = 1 \text{ ls} &:= 299\,792\,458 \text{ m} = 2.997\,924\,58 \cdot 10^{8} \text{ m} \\ &= 299.792\,458 \text{ Mm} \end{aligned} \tag{16.2.3d}$$

Eine Lichtsekunde ist etwa die Distanz von der Erde zum Mond.

16.2.6.3. Parsec

Der nächste Stern, Proxima Centauri, ist etwa 4.247 ly entfernt. In der Astronomie ist für solche Distanzen eine andere Einheit gebräuchlich, die sich aus den Winkelmessungen ableitet.

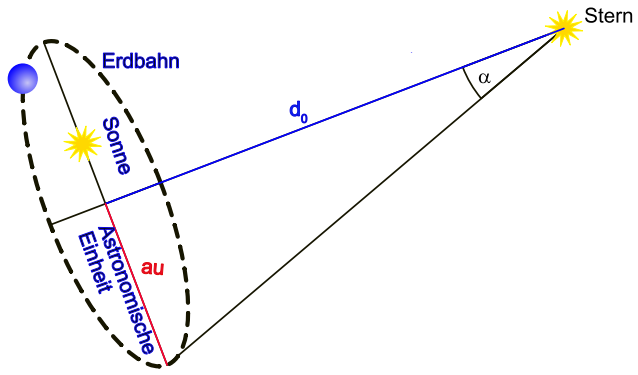


Abb. 16.54.: Definition der Parallaxensekunde

Die Skizze in Abbildung 16.54 zeigt die Erdbahn um die Sonne. Die Astronomische Einheit (AU) entspricht etwa der grossen Halbachse a der Erdbahn. Diese Länge

ist heute eine definierte Einheit (siehe Abschnitt 16.2.6.1). Ein Stern, der eine Parallaxensekunde entfernt ist, ist die dritte Ecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete der Länge 1 AU und dem Gegenwinkel $\alpha = 1\,''$. Von der Erdbahn aus gesehen bewegt sich der Stern in einem halben Jahr um den Parallaxenwinkel $2\,''$, sofern die Verbindungslinie Sonne-Stern senkrecht auf der Ekliptik steht.

Mit der Beziehung $\tan(\alpha) = \frac{a}{d_0} = \frac{1\text{ AU}}{d_0}$ kann d_0, die Distanz einer Parallaxensekunde, berechnet werden:

$$\begin{aligned} 1\text{ Parallaxensekunde} = 1\text{ pc} &= 30\,856\,775\,814\,672\,000\text{ m} \\ &= 3.085\,677\,581\,467\,2 \cdot 10^{16}\text{ m} \\ &= 30.856\,775\,814\,672\text{ Pm} = 3.261\,563\,78\text{ ly} \end{aligned} \quad (16.2.4)$$

16.3. Störeinflüsse

16.3.1. Seeing

Abb. 16.55.: SEEING am Beispiel eines Bildes des Klosters Wiblingen gesehen vom Eselsberg [Mar18].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.3.2. Guide Stars

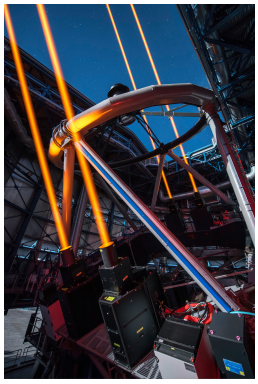


Abb. 16.56.: ESA Guide Star System des Paranal Observatoriums (ESO/G. Hüdepohl [CC BY 4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_most_powerful_laser_guide_star_system_in_the_world_sees_first_light_at_the_Paranal_Observatory.jpg).

16.3.3. Brechung in der Atmosphäre

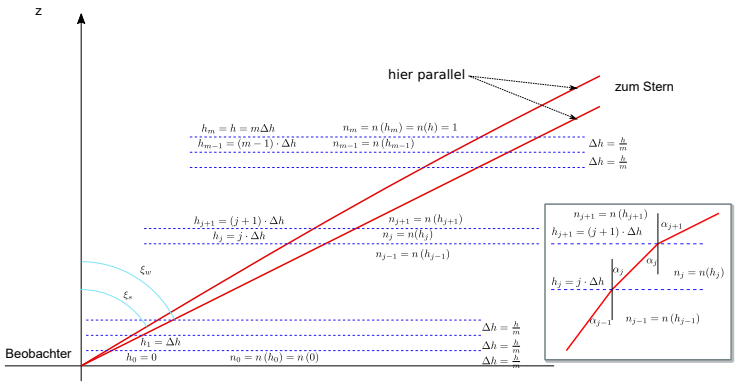


Abb. 16.57.: Durch die Brechung in der Atmosphäre werden horizontnahe Sterne höher gesehen als sie wirklich sind.

Aus der Abbildung 16.57 kann nach [Wal68, Kap. 5] die Winkelablenkung eines horizontnahen Lichtstrahls durch die höhenabhängige Dichte der Atmosphäre berechnet werden. Dabei denkt man sich die Atmosphäre in dünne horizontale und homogene Schichten aufgeteilt, mit jeweils einem konstanten Brechungsindex $n(h_i)$. An jeder Grenze kann mit dem Brechungsgesetz (siehe auch O. Marti [Mar17]) die Winkeländerung berechnet werden. Nach dem Grenzübergang $\Delta h \to 0$ erhält man

$$\rho = a \cdot (n_0 - 1) \tan(\zeta_S) \qquad \text{für} \quad \zeta_S < 45° \tag{16.3.1}$$

Dabei ist $a \approx 1$. a hängt vom Aufbau der Atmosphäre und ihrer Temperatur, Luftfeuchtigkeit ab.

Im Mittel ist $\rho = 58.2\,''$.

16.4. Distanzmessung mit optischen Methoden

Das Bild auf der Netzhaut (oder einer Kamera) hängt von der Distanz der Objekte, ihrer Lage und der Lage der Kamera ab. Wenn die Kamera verschoben wird ändert sich das Bild. Aus en Änderungen können Distanzen bestimmt werden.

16.4.1. Triangulation

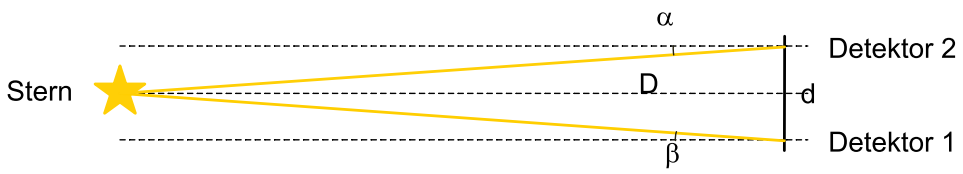


Abb. 16.58.: Distanzmessung mit Triangulation.

Zur optischen Messung der Distanz zu einem Stern verwendet man die Triangulation. Abbildung 16.58 zeigt die Geometrie des Problems. Zu bestimmen sind die beiden Winkel α und β zu der (gedachten) Sichtlinie zum zu vermessenden Stern. Weiter bekannt ist der Abstand der beiden Beobachtungsorte d. Dann ergibt sich der Abstand D aus

$$D = \frac{d}{2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tag{16.4.1}$$

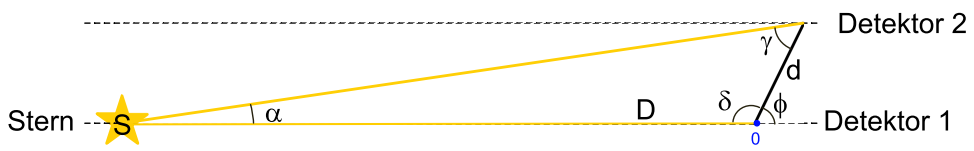


Abb. 16.59.: Distanzmessung mit Triangulation. Hier sind die Winkel beliebig.

Wenn die Lage der einzelnen Detektoren wie in Abbildung 16.59 beliebig ist, muss mit den allgemeinen Sinussätzen gerechnet werden. Die Verbindungsinie der beiden Detektoren sei um den Winkel ϕ gegen die Sichtlinie geneigt. Die Rechnung geht folgendermassen:

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{D}{\sin(\gamma)} = \frac{d}{\sin(\alpha)} \tag{16.4.2a}$$

$$\pi = \alpha + \gamma + \delta \tag{16.4.2b}$$

$$D = d\,\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = d\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\pi - \gamma - \delta)} \tag{16.4.2c}$$

$$D = d\,\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\gamma + \delta)} \tag{16.4.2d}$$

Gleichung (16.4.2d) gib an, wie aus den Winkeländerungen der Sichtlinie zu einem Objekt von zwei unterschiedlichen Standorten aus die Distanz von der Grundlinie zum Objekt bestimmt werden kann.

16.4.2. Magnituden

Mit dem Begriff Magnitude ist die Helligkeit eines Sterns oder eines anderen Objekts gemeint. Magnituden wurde zuerst qualitativ zur Beschreibung der Helligkeit der Sterne verwendet. Da das Auge eine logarithmische Empfindlichkeit hat, sind der Logarithmus der Sternhelligkeit, skaliert und verschoben auf der Zahlengerade.

Wenn die absolute Helligkeit bekannt ist kann aus der gemessenen Helligkeit die Distanz bestimmt werden. Die Erhaltung der Energie (Gausssches Gesetz der Elektrodynamik) ist die Grundlage dazu:

$$I(r) = I(r_0)\frac{r_0^2}{r^2} \tag{16.4.3}$$

Am Ort der Beobachtung ist die Strahlungsstärke die scheinbare Helligkeit des Sterns oder des Objektes. Wenn Φ_0 der Strahlungsfluss (in W) des Sterns Wega ist, dann ist seine Helligkeit per Definition $m = 0$ mag. Claudius Ptolemäus schlug eine erste sechsstellige Skala vor. Norman Pogson führte dann ein, dass ein Stern mit 1 mag hundertmal so hell sei wie einer mit 6 mag und dieser wiederum hundert mal so hell wie einer mit 11 mag. Je heller ein Stern ist, desto niedriger ist seine Magnitude. Die Definition der relativen Magnitudenskala ist dann

$$m = -2.5\log_{10}\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \tag{16.4.4}$$

Umgekehrt haben wir

$$\Phi = 10^{-m/2.5} \tag{16.4.5}$$

Eine Magnitude Unterschied entspricht dann einem Unterschied von $10^{-1/2.5} = 10^{-2/5} = 0.398107 = \frac{1}{2.51189}$ im Lichtstrom Φ. Φ ist der Lichtstrom in W.

Magnituden können mit kalibrierten Kameras oder mit Bolometern gemessen werden. Bolometer sind Kalorimeter mit definiertem Wärmeleck.

In der Astrophysik ist die absolute Helligkeit die Helligkeit, die der Stern hätte, wäre er eine Distanz von 10 pc entfernt.

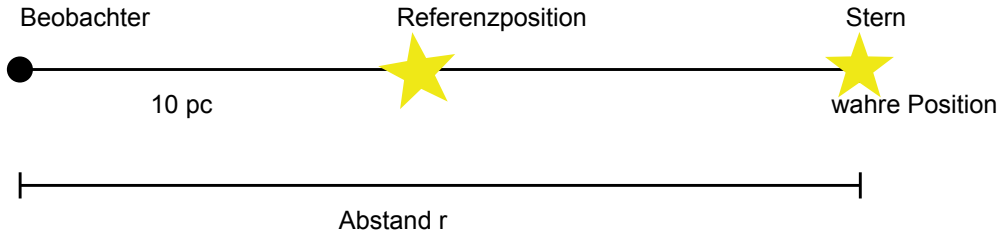


Abb. 16.60.: Relative und absolute Magnitude

Während RELATIVE MAGNITUDEN mit m bezeichnet werden, werden ABSOLUTE MAGNITUDEN mit M angegeben. Wenn ein Stern X aus einer Distanz von 10 pc beobachtet die relative Magnitude m hätte, wäre $M = m$ auch seine absolute Magnitude. Die absolute Magnitude ist also

$$M = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\Phi(10 \text{ pc})}{\Phi_0} \right) \tag{16.4.6}$$

Wenn der Stern X 10 pc weg ist und wenn er die absolute und relative Magnitude$M = m = 0$ mag habe (bei 10 pc sind beide gleich), dann hat er im Abstand 1 pc die scheinbare Helligkeit $m = -2.5 \text{ mag} \cdot \log_{10}(10^2) = -5$ mag (nach Gleichung (16.4.3)). Wegen $\Phi \propto r^{-2}$ gilt

$$m - M = 5 \text{ mag} \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{10 \text{ pc}} \right) \tag{16.4.7}$$

Daraus kann auch der Abstand bestimmt werden:

$$r = 10^{\frac{5 \text{ mag} + m - M}{5 \text{ mag}}} \tag{16.4.8}$$

Beispiel: Die Sonne hat eine relative Magnitude von $m = -26.73$ mag. Ihre absolute Magnitude ist $M = 4.84$ Mag. Daraus folgt mit Gleichung (16.4.3) dass $r = 4.8 \cdot 10^{-6}$ pc $\hat{=}$ 150 Gm ist.

$m - M$/mag	-5	-4	-2	0	2	5	10
r/pc	1	1.58	3.98	10	25.12	100	1000
r/ly	3.26	5.17	8.19	32.62	81.93	326.16	3261.62

Tab. 16.2.: Zusammenhang zwischen Distanzen und relativen und absoluten Magnituden (Helligkeiten).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Stern	Scheinbare Helligkeit /mag	Absolute Helligkeit /Mag	Entfernungsmodul $m - M$	Entfernung /pc
Sonne	-26.73	$+4.84$	-31.57	$4.851 \cdot 10^{-6}$
Sirius	-1.46	$+1.43$	-2.89	2.64
Wega	$+0.03$	$+0.58$	-0.55	7.75
Polaris	2.02	-3.40	5.60	132.8
κ-Cassiopeiae	4.17	-6.33	10.50	1257
HR8168	5.92	-1.40	7.32	291.3
Whirlpool Galaxy	8.4	-20.84	29.24	$7.05 \cdot 10^{6}$

Tab. 16.3.: Einige Distanzen und relativen und absoluten Magnituden (Helligkeiten) von Sternen und Galaxien.

Die Bestimmung der Magnitude benötigt eine Analyse des Sternenspektrums. Deshalb existieren verschiedene Gewichtungssysteme. Das heisst, dass die Magnituden nur verstanden werden können, wenn auch das Gewichtungssystem bekannt ist. Informationen dazu finden Sie in J. B. Oke [Oke74], C. N. A. Willmer [Wil18] oder B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07].

16.5. Spektroskopische Distanzmessung

16.5.1. Cepheiden

Henrietta Swan Leavitt entdeckte, dass Sterne der Klasse Cepheiden periodisch ihre Leuchtkraft ändern und dass die Periodendauer mit der absoluten Leuchtkraft korrelierte.

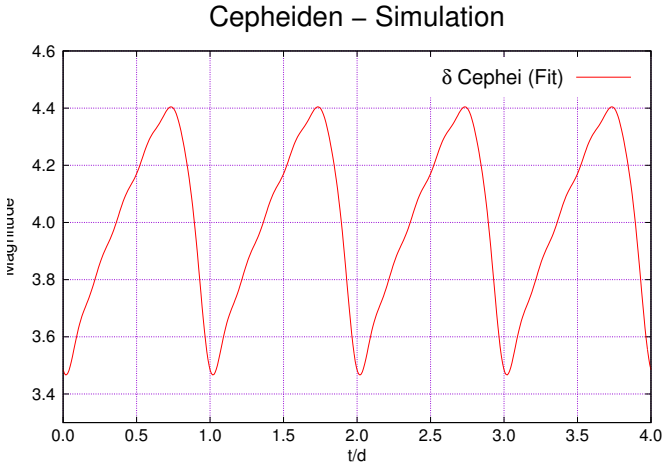


Abb. 16.61.: Simulation der Helligkeitskurven von Cepheiden

Abbildung 16.61 zeigt eine simulierte Darstellung der periodischen Leuchtkraftänderung. Die von Henrietta Swan Leavitt entdeckte Beziehung ist

$$M_{\langle V\rangle} = -2.81 \log_{10} P_d - 1.43 \tag{16.5.1}$$

Dabei ist P_d: Pulsationsdauer in Tagen und $M_{\langle V\rangle}$ die mittlere Magnitude im V-Band (Mittenwellenlänge $\lambda = 550$ nm, Bandbreite $\Delta\lambda = 88$ nm) (siehe [CO07, Gl. (14.1)]).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

16.5.2. Supernovae Typ Ia

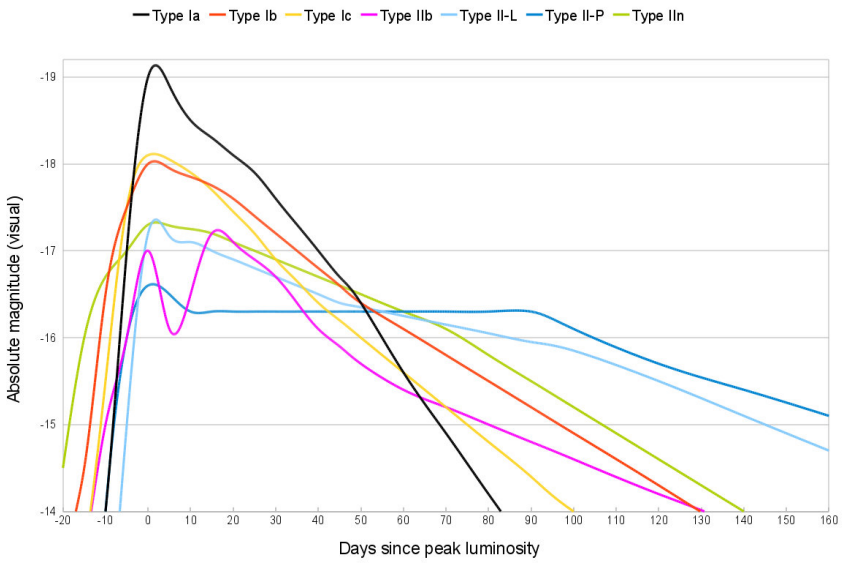


Abb. 16.62.: Helligkeitskurven verschiedener Supernovaetypen (Lithopsian [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparative_supernova_type_light_curves.png)

Supernovae werden anhand Ihrer Helligkeitskurven in unterschiedliche Klassen eingeteilt (siehe Abbildung 16.62). Novae der Klasse Ia haben einen universellen Verlauf mit einer soweit wir wissen gut definierten maximalen Helligkeit. Diese absolute Helligkeit hilft nun Distanzen zu bestimmen. Abbildung 16.63 zeigt, dass diese Distanzmessung auch bei anderen Galaxien funktioniert.

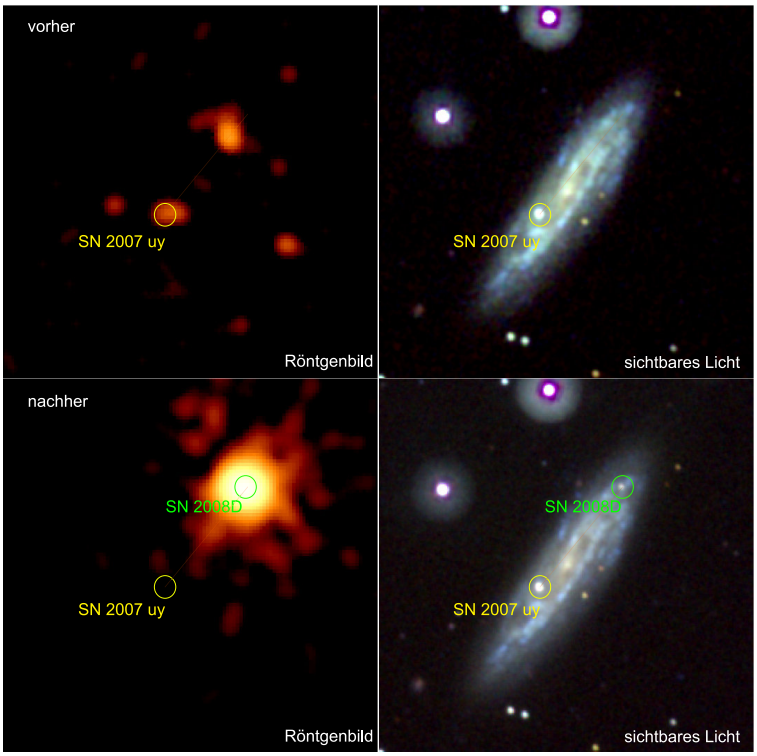


Abb. 16.63.: Distanzmessung mit Supernova Typ Ia. Das Bild zeigt die Galaxie NGC 2770 im Röntgenbild der Sonde SWIFT (links) und im sichtbaren Licht (rechts). Die obere Reihe zeigt den Zustand mit der Supernova SN 2007 uy. Die untere Reihe zeigt die neu explodierte Supernova SN 2008D. Die feine orange Linie soll den Abstand und die Richtung zeigen. (Credit: NASA/Swift Science Team/Stefan Immler)

16.5.3. Doppelsterne

Z. Eker u. a. [Eke+15] geben einen empirischen Zusammenhang zwischen der Masse und der Luminosität von Hauptreihensternen (siehe auch Abschnitt 20.1.4. Abbildung 16.64 zeigt exemplarisch Messwerte.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

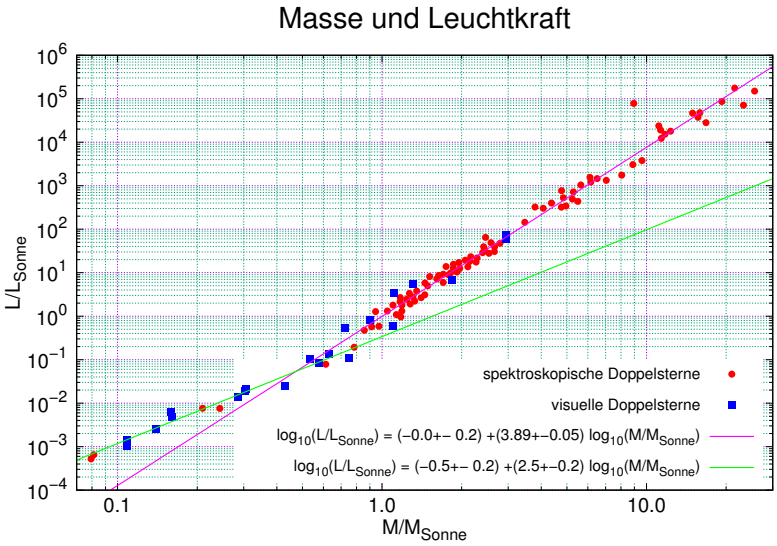


Abb. 16.64.: Distanzmessung mit Doppelsternen. (Daten von A. Unsöld und B. Baschek [UB91], siehe auch Z. Eker u. a. [Eke+15]).

16.5.4. Rotverschiebung

Galaxien, die weit entfernt sind, bewegen sich von uns fort. Edwin Hubble leitete aus diesen Beobachtungen die heute Hubble-Gesetz genannte Beziehung ab. Im Abschnitt 21.2 wird abgeleitet, dass die Geschwindigkeit sich mit der Distanz wie

$$v = H \cdot r \tag{16.5.2}$$

ändert. Dabei ist

$$H_0 = 73(7)\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1} \tag{16.5.3}$$

die Hubble-Konstante. Es ist nicht geklärt, ob die Hubble-Konstante wirklich konstant ist.

17. Himmelsmechanik und unser Sonnensystem

Die Bewegung von Planeten, Monden und Sternen wird durch die Gesetze der Mechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt. In diesem Kapitel wird auf die Himmelsmechanik eingegangen und dann die Objekte unseres Sonnensystems, aber ohne die Sonne, besprochen. Die Sonne wird im Kapitel 18 diskutiert, da für deren Verständnis zuerst die Kernreaktionen besprochen werden müssen.

17.1. Geschichte

In den alten Kulturen Mesopotamiens oder Ägyptens, aber auch in den Hochkulturen des Indus-Tales, in China aber auch in Europa waren Sterne wichtige Hinweisgeber auf den Ablauf der Zeit, auf die Jahreszeiten und nicht zu vergessen auf die Steuertermine. Eine gute Zusammenfassung der Physikgeschichte gibt K. Simonyi [Sim90] in seinem Buch *Kulturgeschichte der Physik*. Die wichtigsten Akteure sind

- Nikolaus Kopernikus (1473-1543) postuliert heliozentrisches System
- Tycho Brahe (1546-1601) erste präzise Messungen
- Johannes Kepler (1571-1630) Interpretation und Gesetze
- Isaac Newton (1643-1727) Gravitationsgesetz
- Albert Einstein (1879-1955) Allgemeine Relativität

Ich beziehe mich hier auf das Buch von K. Simonyi [Sim90]. Da von den Griechen die zugänglichsten Texte vorhanden sind ist die Geschichte voreingenommen, biased.
Artefakte wie beispielsweise die Himmelsscheibe von Nebra (möglicherweise 2100 bis 1700 v. Chr.) [Wik21c], die Megalithen von Stonehenge (2000 v. Chr) [Wik21k], aber auch die Himmelsdarstellungen aus einem Tempel auf Malta (Tal-Quadi, 4000 v. Chr. [Wik21l]) zeigen, dass Himmelserscheinungen wichtig waren.

17.1.1. Die Griechen

Die griechische Astronomie beruht zu grossen Teilen auf der babylonischen Astronomie (siehe auch [Wik21f]).

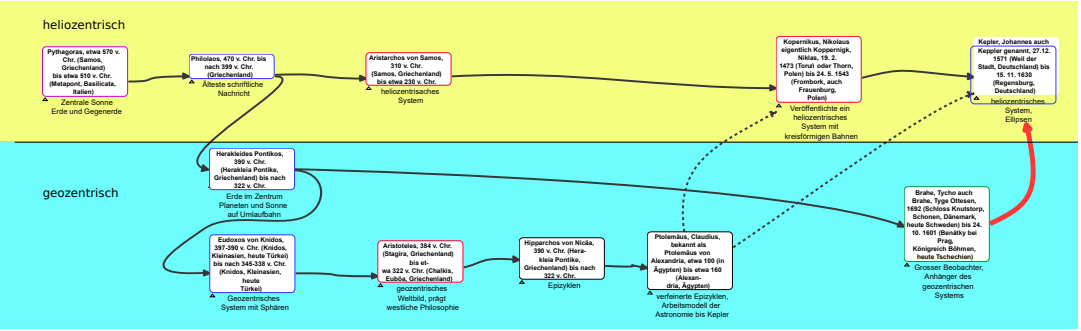


Abb. 17.1.: Von den Griechen zu Kepler (inspiriert von [Sim90, p. 82]). Ein Versuch, die Verknüpfungen darzustellen.

Philolaos schrieb die Theorie, die auf Pythagoras zurückgeführt wird. Um ein zentrales Feuer, die Sonne, dreht sich die Erde und die Gegenerde. Die Gegenerde sollte wohl die Kräfte ausgleichen. Nach K. Simonyi [Sim90] hat Herakleides Pontikos ein Modell mit der Erde im Zentrum und den Planeten und der Sonne in einer Umlaufbahn um die Sonne vorgestellt, ein GEOZENTRISCHES WELTBILD. Die inneren Planeten bewegten sich dabei um die Sonne. Dieses Modell wurde noch von Tycho Brahe verwendet. Aristarchos von Samos entwickelte daraus sein HELIOZENTRISCHES WELTBILD. Diese heliozentrische Weltbild war immer bekannt, wurde aber verdrängt. Erst Nikolaus Kopernikus griff die Idee wieder auf und machte sie bekannt.

Aus dem geozentrischen Weltbild von Herakleides Pontikos entwickelte Eudoxos von Knidos ein geozentrisches System, bei dem die Sonne und die Planeten auf Sphären montiert waren. Diese Weltbild wurde schliesslich von Aristoteles aufgegriffen. Aristoteles hat die Philosophie und die Physik im Westen bis ins 16. Jahrhundert geprägt. Abbildung 17.1 zeigt einen Versuch, Verbindungen grafisch darzustellen.

Wer Planeten wie den Jupiter oder den Saturn beobachtet sieht, dass diese sich manchmal vorwärts und manchmal rückwärts bewegen. Diese Bewegung kann das geozentrische Weltbild nicht beschreiben Hipparchos von Nicäa schlug deshalb vor, dass Planeten sich auf EPIZYKLEN bewegen. Mit diesem Kniff können die Planetenbahnen im geozentrischen Weltbild genau so gut berechnet werden wie im heliozentrischen Weltbild. Dieser Rechentrick wurde durch Claudius Ptolemäus weiter verfeinert und für die Nachwelt erhalten. Abbildung 17.2 zeigt das Schema dieser Epizyklen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

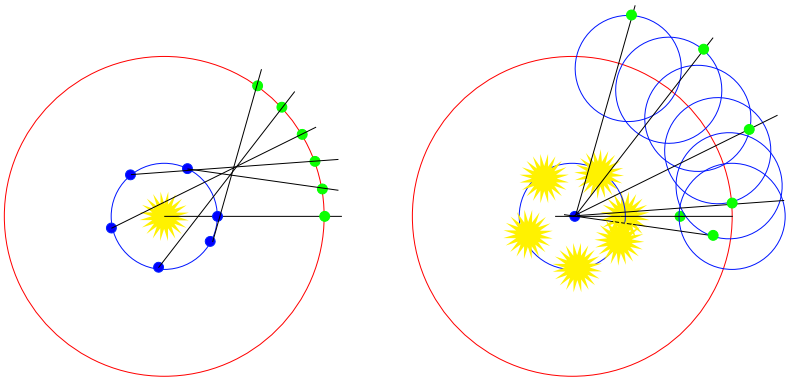


Abb. 17.2.: Schema der Epizyklen. Links ist das heliozentrische Weltbild skizziert, rechts das geozentrische mit Epizyklen. Rot ist die Bahn des Jupiter, um den die Epizyklen drehen.

Letztlich ist das Konzept der Epizyklen bei kreisförmigen Bahnen nichts anderes als die Anwendung der Galilei-Transformation, Abbildung 17.3 zeigt die scheinbare Bahn des Jupiter. Da die Bahnen der Planeten keine Kreise sondern Ellipsen sind und da die Bahnen nicht alle genau in der Ekliptik liegen, reicht ein Epizyklus pro Planet nicht aus. Claudius Ptolemäus hat deshalb mehrere Epizyklen pro Planet verwendet. Weiter führte er ÄQUANTEN ein, das heisst dass das Bewegungszentrum einer Epizykle nicht mit dem Kreismittelpunkt der Epizykle zusammenfällt. Dieser Trick ermöglichte eine relativ gute Approximation der Ellipsenbahnen [Sim90, p.98, p.179]. Eudoxos von Knidos hatte zur Korrektur zwei gegenläufige Kugeln mit leicht unterschiedlicher Achse verwendet. Näheres findet sich in K. Simonyi [Sim90].

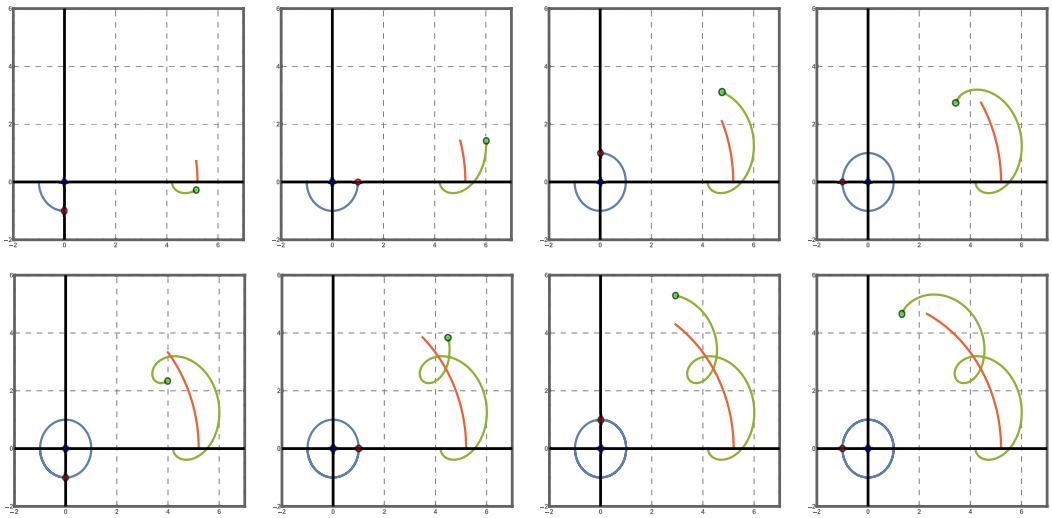


Abb. 17.3.: Epizyklen des Jupiter. Gezeigt ist die Erde im Zentrum, die Sonne auf der blauen Umlaufbahn und Jupiter auf der grünen Bahn. Rot ist die kreisförmige Bahn des Jupiter ohne Epizyklen.

17.1.2. Kopernikus

Nikolaus Kopernikus störte sich an den von Claudius Ptolemäus eingeführten Äquanten. Nach K. Simonyi [Sim90, p. 179] war Kopernikus die Abweichung von den perfekten Kreisbahnen suspekt. Er kam deshalb auf das von Aristarchos von Samosvorgestellte heliozentrische System zurück, mit dem er eine nicht bessere, aber logisch geschlossenere Approximation der richtigen Bahnen erreichte, die zudem nach Wilhelm von Ockham und seinem Sparsamkeitsprinzip, «Ockhams Rasiermesser».

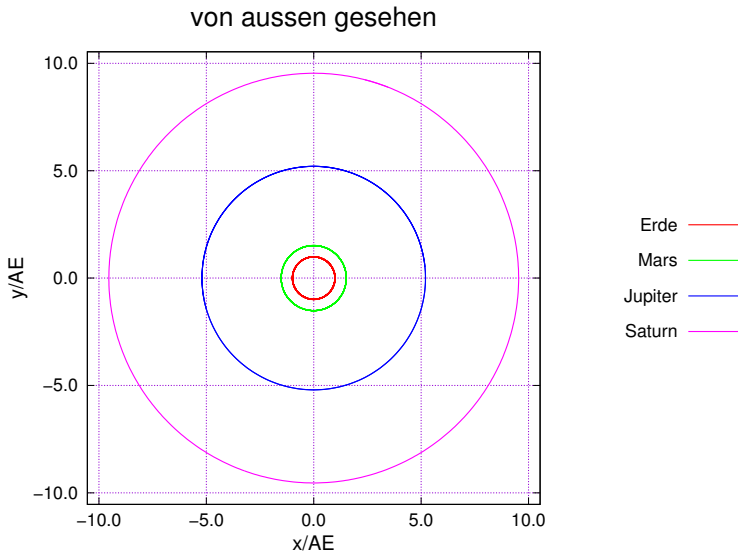


Abb. 17.4.: Bahnen der äusseren Planeten von der Ferne gesehen.

Abbildung 17.4 zeigt die Bahnen der Planeten von Erde bis Saturn von aussen gesehen, senkrecht über der Sonne und der Ekliptik. Nach Galileo Galilei kann mit der Galileitransformation das ruhende Koordinatensystem $\boldsymbol{r}$ auf ein bewegtes Koordinatensystem $\boldsymbol{r}'$ mit der Erde transformiert werden.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_e(t) \tag{17.1.1}$$

mit $\boldsymbol{r}_e(t)$ der Position der Erde im ruhenden Koordinatensystem.. Abbildung 17.5 zeigt die transformierten Bahnen von der Sonne und von Mars bis Saturn. Angedeutet sind auch die Epizyklen. Wie im vorherigen Abschnitt 17.1.1 angedeutet, ist das hier gezeigte Bild vereinfacht. Es dient dazu, die Idee zu zeigen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

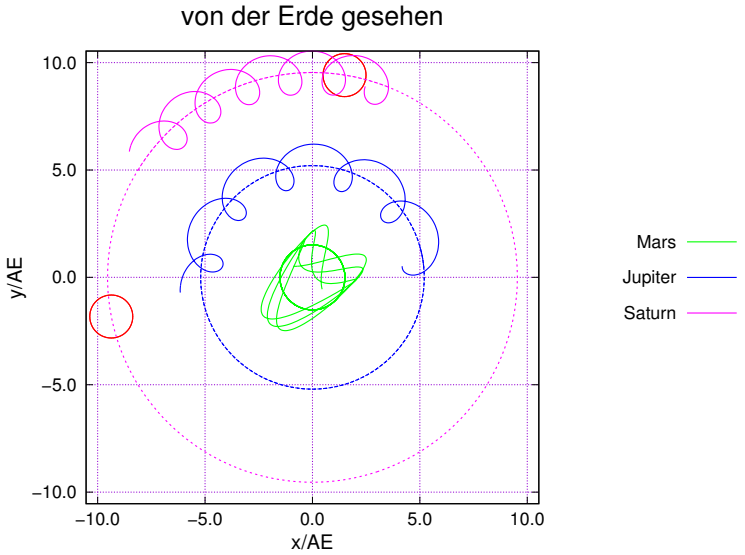


Abb. 17.5.: Bahnen der äusseren Planeten von der Erde aus gesehen.

17.1.3. Kepler

Johannes Kepler konnte bei der Erstellung seiner revolutionären Theorie der Himmelsmechanik auf die Messdaten von pld:brahetycho zurückgreifen. Revolutionär ist die Theorie weil Johannes Kepler die Forderungen nach perfekten Kreisbahnen und konstanten Geschwindigkeiten über Bord warf. Seine Theorie griff auf KEGELSCHNITTE zurück. Im Sinne Wilhelm von Ockham war seine Theorie sehr viel sparsamer, also wahrscheinlich auch näher an der Realität. Diese Einschätzung hatte bis zur Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein Bestand. Seine Erkenntnisse werden heute mit drei Gesetzen formuliert.

1. Gesetz (1609) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der SONNE in einem Brennpunkt.

2. Gesetz (1609) Jeder Strahl von der SONNE zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

3. Gesetz (1619) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen ihrer Bahnen um die SONNE.

Die KEPLERSCHEN GESETZE können zur Ableitung der Gravitationstheorie von Isaac Newton verwendet werden. Ausgehend von dieser NEWTONSCHEN GRAVITATIONSTHEORIE geht der Beweis des 2. Gesetzes wie folgt: Es gibt keine äusseren Kräfte, deshalb gibt es auch keine Drehmomente. Aus $\boldsymbol{M}_0 = 0$ bekommt man: $\boldsymbol{L}_0 = const.$

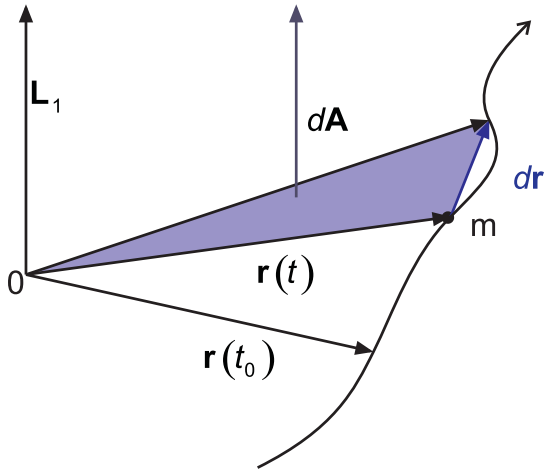


Abb. 17.6.: 2. Keplersches Gesetz

Weiter behauptet das 2. Keplersche Gesetz: Für die Fläche $A(t)$ gilt

$$A(t) = \frac{L_0}{2m} \cdot t \tag{17.1.2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{L}_0}{2m} dt &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\, dt \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} dt) \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) = d\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{17.1.3}$$

Bemerkung:
bei einer ebenen Bewegung ist immer

$$d\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{L}_0 \tag{17.1.4}$$

$$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{L}_0 \tag{17.1.5}$$

d.h. das 2. Keplersche Gesetz entspricht der Drehimpulserhaltung.
Abschnitt 17.3 greift das Thema nochmals auf und diskutiert Anwendungen.

17.1.4. Newton

Hier geht es darum zu zeigen, dass das Gravitationsgesetz nach Isaac Newton aus dem dritten Keplerschen Gesetz abgeleitet werden kann. Wir betrachten das dritte Keplersche Gesetz für den Spezialfall einer Kreisbahn. Eine Masse m soll um eine zentrale Masse M kreisen. Eine Kreisbahn ist eine Ellipse, bei der die grosse und die kleine Halbachse gleich sind. Wir nennen die Grösse den Radius r. Das 3. Keplersche Gesetz lautet

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathfrak{G} = \text{const} \tag{17.1.6}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$\mathfrak{G}$ ist eine zunächst unbekannte Konstante. Bei einer gekrümmten Bahn mit dem Krümmungsradius r muss immer eine physikalische Kraft existieren, deren Grösse durch die ZENTRIPETALKRAFT gegeben ist.

$$F_z = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{(2\pi)^2}{T^2}r \tag{17.1.7}$$

Wir haben $v = \omega r$ und $\omega = 2\pi/T$ verwendet, wobei T die Umlaufszeit ist. Wenn wir Gleichung (17.1.6) und Gleichung (17.1.7) kombinieren, erhalten wir

$$F_z = 4\pi^2 mr\frac{1}{T^2} = 4\pi^2 mr\frac{\mathfrak{G}}{r^3} = \frac{(4\pi^2\mathfrak{G})\,m}{r^2} \tag{17.1.8}$$

Wie gesagt, zeigt die Zentripetalkraft F_z an, dass eine physikalisch begründete Kraft F_G existieren muss mit $F_z = F_G$. Diese Kraft, von Isaac Newton die SCHWERKRAFT oder die GRAVITATION genannt, hat die Eigenschaften

- Die Kraft ist proportional zu r^{-2}, wobei r der Abstand der Masse m zur Zentralen Masse M ist.
- Für eine gerichtete Strecke von M zu m zeigt die Zentripetalkraft F_z entgegen der Richtung der Strecke.
- Die Kraft ist proportional zur Masse m.
- Die Kraft ist proportional zu einer Konstante $4\pi^2\mathfrak{G}$, deren Grösse wiederum nur von der zentralen Masse M abhängen kann.

Zum letzten Punkt ist zu bemerken: bei einem Zweikörperproblem ist es unsere Wahl, ob wir m oder M als zentrale Masse anschauen. Die Gleichung für die Gravitationskraft muss also m und M gleich behandeln. Um dies zu berücksichtigen, hat NEWTON Gleichung (17.1.8) so geschrieben

$$F_G = -G\frac{mM}{r^2} \tag{17.1.9}$$

wobei $4\pi^2\mathfrak{G} = GM$ ist.

Das DRITTE KEPLERSCHE GESETZ lautet also

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{17.1.10}$$

Die obigen Argumente gelten nur für KREISBAHNEN. Ausgefeiltere mathematische Methoden aus der theoretischen Mechanik zeigen aber, dass Gleichung (17.1.10) auch gilt, wenn wir r durch die Länge der GROSSEN HALBACHSE ersetzen.

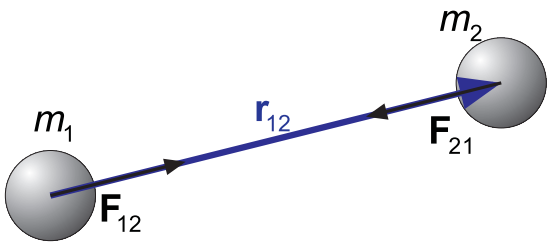


Abb. 17.7.: Newtonsches Gravitationsgesetz

Die Kraft der Masse 1 auf die Masse 2 ist $\boldsymbol{F}_{21}$, also

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{17.1.11}$$

Betragsmässig:

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2} \tag{17.1.12}$$

Dabei ist $G = 6.6742{\cdot}10^{-11}$ $\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ die Gravitationskonstante. Das Newtonsche Gravitationsgesetz definiert die schweren MASSE, im Gegensatz zum 2. Newtonschen Gesetz der Bewegung ($\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$), das die träge MASSE definiert.
Im Gravitationsgesetz nach Isaac Newton (Gleichung (17.1.11)) steht als unbekannte Konstante die Gravitationskonstante G. Aus den Keplerschen Gesetzen kann die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes Gleichung (17.1.11) abgeleitet werden. Wenn man jedoch wissen will, wie schwer die zentrale Masse ist, muss G bekannt sein.

17.2. Virialtheorem

Für gravitativ gebundene Systeme kann gezeigt werden, dass die Gesamtenergie immer die Hälfte der zeitgemittelten potentiellen Energie ist. Dieser Abschnitt folgt [CO07, Kap. 2.4].
Es wird die Grösse

$$\frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \sum_i \left(\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{p}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) \tag{17.2.1}$$

betrachtet. Dabei ist $\boldsymbol{r}_i$ der Ortsvektor des i-ten Himmelskörpers und $\boldsymbol{p}_i$ dessen Impuls. Summiert wird über alle betrachteten Himmelskörper. Die linke Seite kann auch als

$$\frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2}\frac{d\left(m_i\boldsymbol{r}_i\right)^2}{dt} = \frac{1}{2}\sum_i\frac{d^2I_i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} \tag{17.2.2}$$

Dabei ist $I = \sum_i I_i = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i^2$ die Summe der einzelnen Flächenträgheitsmomente bezüglich des Koordinatenursprungs.
Gleichung (17.2.1) kann so umgeschrieben werden

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} - \sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_i \tag{17.2.3}$$

Wenn die Grösse $-\sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ so geschrieben wird:

$$-\sum_i \boldsymbol{p}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = -\sum_i \frac{1}{m_i}\boldsymbol{p}_i \cdot \left(m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) = -2\sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i} = -2E_{kin} \tag{17.2.4}$$

ist die kinetische Energie zu erkennen. Dabei dürfen sich die Massen mit der Zeit nicht ändern.
Die Grösse $\sum_i \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} \cdot \boldsymbol{r}_i$ kann mit Isaac Newton als Virial von Clausius (nach Rudolf Clausius), also

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \sum_i \sum_{j,i\neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{r}_i \tag{17.2.5}$$

geschrieben werden. Dabei ist $\boldsymbol{F}_i = \sum_{j,i\neq j} \boldsymbol{F}_j$ die Summe aller externen Kräfte auf die Masse m_i. Nun muss nach [CO07, p. 51] intelligent null addiert werden:

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{r}_j}{2} + \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{2} \tag{17.2.6}$$

Es folgt

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,i\neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{r}_j) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,i\neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{17.2.7}$$

Die Ortskomponente der ersten Doppelsumme rechts ist in den Indices i und j symmetrisch. Nach Isaac Newton ist aber $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$. Damit ist der Wert der ersten Doppelsumme null. Es bleibt also

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,i\neq j} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \tag{17.2.8}$$

Für die Kraft wird jetzt das Newtonsche Gravitationsgesetz $\boldsymbol{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{\boldsymbol{r}_{ij}^2}\boldsymbol{e}_{ij}$ eingesetzt. Dabei ist $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ und $\boldsymbol{e}_{ij} = \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|}$.
Schliesslich ergibt sich

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,i\neq j} G\frac{m_i m_j}{\boldsymbol{r}_{ij}^3}(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)^2 = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,i\neq j} G\frac{m_i m_j}{\boldsymbol{r}_{ij}} \tag{17.2.9}$$

Dies ist nichts anderes als die Summe der gegenseitigen potentiellen Energien. Jede Energie wird zweimal gezählt. Der Faktor 1/2 korrigiert dies. Damit ist

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = E_{pot} \tag{17.2.10}$$

Das Virialtheorem macht eine Aussage über die zeitlichen Mittelwerte. Während die Mittelwerte der potentiellen Energie $\langle E_{pot}\rangle_t$ und der kinetischen Energie $\langle E_{kin}\rangle_t$ ohne Kenntnis der genauen Konfiguration nicht zu berechnen sind, kann der zeitliche Mittelwert von $\left\langle \frac{d^2I}{dt^2}\right\rangle_t$ für periodische Systeme berechnet und für quasiperiodische Systeme für lange Zeiten abgeschätzt werden. Sei T die Periodenlänge

des betrachteten Systems. Dann ist

$$\left\langle \frac{d^2I}{dt^2} \right\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{d^2I}{dt^2}dt = \frac{1}{T}\left.\frac{dI}{dt}\right|_0^T \overset{\substack{\text{periodisches}\\ \text{System}}}{=} 0 \tag{17.2.11}$$

Wenn das System nicht streng periodisch ist, kann gezeigt werden, dass

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle \frac{d^2I}{dt^2} \right\rangle_t = 0 \tag{17.2.12}$$

Das heisst, dass über eine Periode gesehen (oder genügend lange betrachtet)

$$-2\left\langle E_{kin}\right\rangle_t = \left\langle E_{pot}\right\rangle_t \quad \text{oder} \quad \left\langle E_{tot}\right\rangle_t = \left\langle E_{kin}\right\rangle_t + \left\langle E_{pot}\right\rangle_t = \frac{1}{2}\left\langle E_{pot}\right\rangle_t \tag{17.2.13}$$

ist.
Konsequenzen aus dem Virialtheorem sind:

- Wenn eine Gaswolke sich zu einem Stern zusammen zieht, wird die potentielle Energie stärker negativ. Das heisst, dass Energie aus dem Gebiet der Gaswolke verschwinden muss, in Form von Strahlung oder kinetischer Energie von Teilchen.
- Wenn ein Stern einen konstanten Durchmesser hat und Energie abstrahlt, muss eine noch zu findende Quelle der Energie vorhanden sein.

17.3. Keplersche Gesetze: Bestimmung der Zentralmasse

In diesem Abschnitt sollen die Keplerschen Gesetze aus dem Abschnitt 17.1.3 und deren Präzisierung im Abschnitt 17.1.4 aufgegriffen und vertieft werden. Ziel ist es, Umlaufszeiten und die Bestimmung der Zentralmasse behandelt werden.

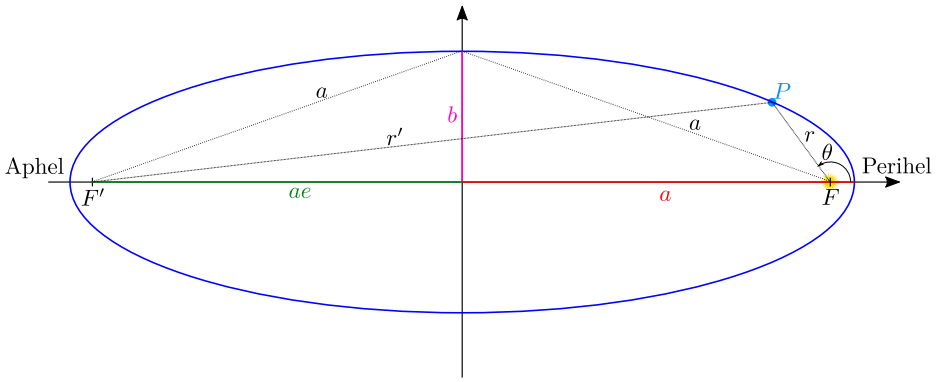


Abb. 17.8.: Definition der Grössen in einer Keplerschen Ellipsenbahn.

Keplersche Ellipsenbahnen sind durch die folgenden Parameter gegeben (Sie-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

he Abbildung 17.8):

- die grosse Halbachse a,
- die kleine Halbachse b,
- die Exzentrizität $0 \leq e < 1$,

Der Punkt F ist der Hauptfokus, er liegt am Ort des Zentralgestirns. Der Punkt F' ist der Nebenfokus. Es gibt die Beziehung

$$r + r' = 2a \tag{17.3.1}$$

zwischen dem Abstand r des Planeten P und dem Ort des Zentralgestirns F, dem Abstand des Nebenfokus F' zum Planeten P und der grossen Hauptachse. Der Planet kann natürlich auch ein Asteroid, ein Komet, ein Raumschiff oder sonst ein Objekt in einer Umlaufbahn sein. Haupt- und Nebenachse un Exzentrizität hängen über

$$b^2 = a^2 \left(1 - e^2\right) \tag{17.3.2}$$

zusammen. Mit dem Winkel θ wird

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)} \tag{17.3.3}$$

Wenn wir $e < 1$ nicht mehr fordern haben wir zwei weitere Klassen von Kegelschnitten:

- $0 \leq e < 1$: Dies ist eine Ellipse, eine gebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} < 0$.
- $e = 1$: Dies ist eine Parabel, eine ungebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} = 0$. Hier ist $r = 2p/(1 + \cos(\theta))$.
- $e > 1$: Dies ist eine Hyperbel, eine ungebundene Bahn mit der Gesamtenergie $E_{tot} > 0$. Hier ist $r = a(e^2 - 1)/(1 + e\cos(\theta))$.

Die Gesamtenergie setzt sich aus potentieller und kinetischer Energie (auch der Rotation) zusammen.

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} \tag{17.3.4}$$

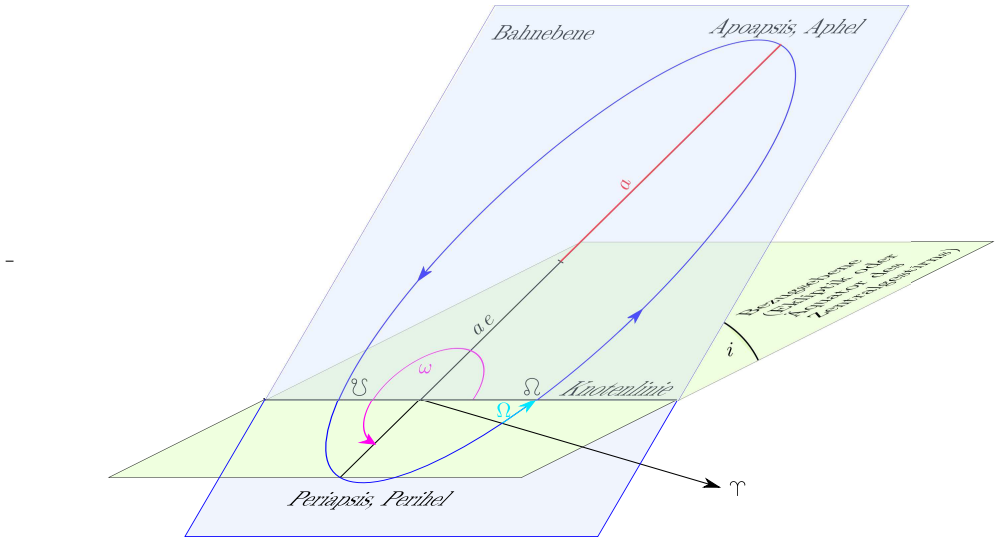


Abb. 17.9.: Definition des Frühlingspunktes ♈, des aufsteigenden Knotens ☊ und der Länge des aufsteigenden Knotens Ω (Siehe auch [Wik21a]).

Weitere Grössen nach Abbildung 17.9 sind

- der Neigungswinkel i der Bahnebene gegen die Erdbahnebene (INKLINATION),
- den Winkel Ω zwischen Frühlingspunkt ♈ und dem AUFSTEIGENDEN KNOTEN ☊ (Länge oder REKTASZENSION des aufsteigenden Knotens ☊) und
- dem Winkel ω zwischen den aufsteigendem Knoten ☊ und der Richtung zum PERIHEL oder der PERIAPSIS, auch Argument der Periapsis oder PERIAPSISABSTAND genannt.

17.3.1. Umlaufszeiten

Bei den Umlaufszeiten der Planeten im Sonnensystem werden zwei Grössen unterschieden:

- Die SIDERISCHE UMLAUFZEIT T_{sid} bezüglich eines ruhenden Bezugssystems und
- die SYNODISCHE UMLAUFZEIT zwischen zwei KONJUNKTIONEN oder OPPOSITIONEN

So ist zum Beispiel die siderische Umlaufszeit des Jupiter 11 a 315 d (dann ist er einmal um die Sonne herum) und seine synodische Umlaufzeit 398.88 d (dann sehen wir ihn von der Erde aus wieder am gleichen Ort).

17.3.2. Massenbestimmung des Zentralkörpers

Das dritte Keplersche Gesetz wird mit Hilfe der Zentralbeschleunigung umgeformt ($F_z = F_G$)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_Z}{r^2} \Rightarrow M_Z = \frac{v^2 r}{G} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2} \tag{17.3.5}$$

Dabei ist T die Umlaufszeit des Satelliten, r der Radius der Kreisbahn. Wichtig ist, dass G mit unabhängigen Mitteln bestimmt werden muss. Deshalb heisst das Experiment nach Loránd Ágoston Eötvös auch Eötvös'sches Experiment oder «Wägung der Erde».

Bei Ellipsenbahnen verwendet man das dritte Keplersche Gesetz. Dieses besagt, dass die Umlaufzeit bei gleicher Zentralmasse nur von der grossen Halbachse a abhängt. Das heisst, die Umlaufszeit einer Kreisbahn mit dem Radius $r = a$ ist gleich wie bei jeder anderen Ellipsenbahn mit einer grossen Halbachse a. Wir können also schreiben:

$$M_Z = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{T^2} \tag{17.3.6}$$

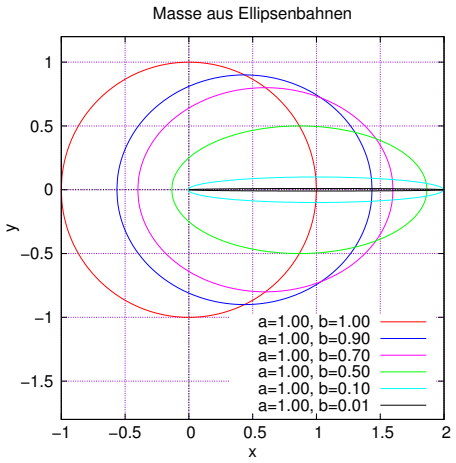


Abb. 17.10.: Bestimmung der Masse des Zentralgestirns aus der Ellipsenbahn eines Satelliten. Dargestellt sind Bahnen mit der gleichen grossen Halbachse

In Abbildung 17.10 sind Bahnen mit der grossen Halbachse $a = 1$ und verschiedenen kleinen Halbachsen b dargestellt. Gezeichnet ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, aber so verschoben, dass der linke Fokuspunkt der Ellipse bei $(0, 0)$ liegt. Die Verschiebung ist $\Delta x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Das Rezept ist:

1. Bestimme die Ellipse (a, b)

2. Verwende eine Kreisbahn mit $r = a$ und bestimme mit T die Masse M_Z.

17.4. Erdähnliche Planeten und ihre Umgebung

In Sonnensystemen gibt es zwei Arten von Satelliten: feste Objekte wie z.B. die Erde oder gasförmige Objekte. Die Unterscheidung ist nicht scharf. Die Erde hat eine Gashülle, Jupiter könnte einen festen Kern haben. Wir befassen uns zuerst mit festen Objekte, Planeten. Dies sind sogenannte erdähnliche Planeten.

Es gibt in unserem Sonnensystem vier grosse erdähnliche Planeten sowie im Astroidengürtel viele kleinere. Zudem haben die grossen Gasplaneten Monde wie auch die Erde feste Monde.

Eigenschaft	Merkur	Venus	Erde	Mars	Ceres
Mittlerer Bahnradius	57 909 227 km	108 209 475 km	149 598 262 km	227 943 824 km	413 690 250 km
Mittlerer Bahnradius	0.387 099 AU	0.723 336 AU	1 AU	1.523 71 AU	2.765 35 AU
Bahnexzentrizität	0.205 635 93	0.006 776 72	0.016 711 23	0.093 394 1	0.079 138 251
Bahnneigung	7.0°	3.39°	0.000 05°	1.85°	10.59°
Durchmesser	4879.4 km	12 103.6 km	12 742 km	6779 km	952.4 km
Neigung der Achse	0°	177.3°[1]	23.4393°	25.2°	4°[2]
Massendichte	5.427 g cm^{-3}	5.243 g cm^{-3}	5.513 g cm^{-3}	3.934 g cm^{-3}	2.09 g cm^{-3}
Umdrehungsdauer	58.646 d	−243.018 d	0.997 269 68 d	1.026 d	0.378 09 d
Mittlere Bahngeschwindigkeit	47.3619 km s^{-1}	35.0206 km s^{-1}	29.7828 km s^{-1}	24.0769 km s^{-1}	17.8778 km s^{-1}
Umlaufdauer um die Sonne	0.240 846 7 a	0.615 197 26 a	1.000 017 4 a	1.880 847 6 a	4.6082 a
Umlaufdauer um die Sonne	87.9693 d	224.701 d	365.256 d	686.98 d	1683.145 d
Feldvektor Gravitation	3.7 m s^{-2}	8.87 m s^{-2}	9.806 65 m s^{-2}	3.71 m s^{-2}	0.28 m s^{-2}
Fluchtgeschwindigkeit	4.25 km s^{-1}	10.36 km s^{-1}	11.19 km s^{-1}	5.03 km s^{-1}	0.515 278 km s^{-1}
Oberflächentemperatur	(−137 . . . 427) °C	462 °C	(−88 . . . 58) °C	(−153 . . . 20) °C	(−83 . . . − 33) °C[3]
Atmosphäre	keine	CO_2, N	N, O	H, He	H_2O[3]
Monde	keine	keine	1	2	keine
Ringe	keine	keine	keine	keine	keine

Tab. 17.1.: Liste der erdähnlichen Planeten im Sonnensystem, sowie eines Asteroiden (Quelle: NASA [NAS19f] und [NJ19]).

Die Liste beruht auf Daten der NASA [NAS19f].

17.4.1. Merkur

Die folgenden Informationen stammen von der NASA [NAS19f].

[1] Die Venus dreht rückwärts.
[2] nach [Wik19a]
[3] Nach [Com+16]

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

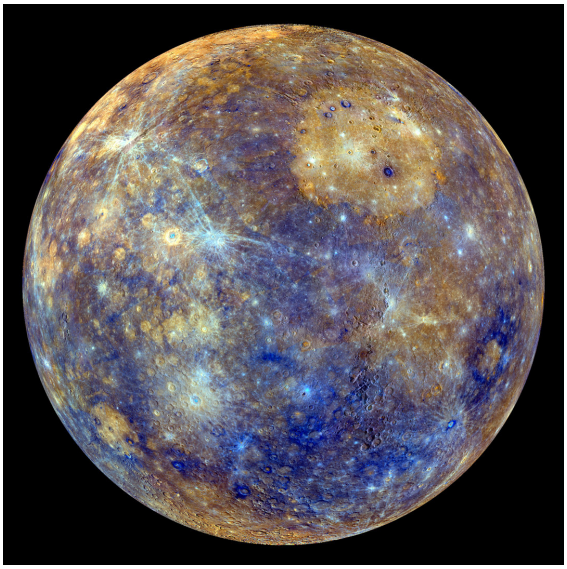


Abb. 17.11.: Farbverstärktes Bild des Merkur. Das Bild besteht aus drei Wellenlängenbereichen, 1000 nm (infrarot) dargestellt als rot, 700 nm (dunkelrot) dargestellt als grün und 430 nm (violett) dargestellt als blau. Aufgenommen wurde das Bild von der Sonde Messenger und ihrer Weitwinkelkamera (WAC). (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Carnegie Institution of Washington: https://solarsystem.nasa.gov/system/downloadable_items/1074_PIA16853.tif)

Merkur (Abbildung 17.11) ist der sonnennächste Planet Er ist unwesentlich grösser als der Erdmond. Keine Atmosphäre schützt ihn vor Meteoriteneinschlägen, entsprechend sind auf ihm viele Krater zu sehen. Es gibt grosse und kleine Krater, ein Hinweis, auch ein Hinweis, dass keine nennenswerte Atmosphäre vorhanden ist. Seine Kenndaten finden sich in Tabelle 17.1. Neben Beobachtungen von der Erde (optisch, Radar) stammen die Kenntnisse über Merkur von einigen wenigen Sonden. Die erste war Mariner 10 im Jahre 1974. Erst im März 2011 kam mit MESSENGER die zweite Sonde zum Merkur (Die Abbildung 17.11 stammt von dieser Sonde). Die dritte Mission ist BepiColombo, die unter der Leitung der ESA 2018 gestartet ist.

Das Hauptproblem von Merkurmissionen ist die Nähe zur Sonne. Zwar wären die Temperaturen beherrschbar, aber Merkur ist tiefer im Potentialtopf als die Erde. Also ist jede Sonde schneller als in der Erdbahn. Dazu ist die Masse des Merkur kleiner, so auch die Geschwindigkeit für merkurnahe Bahnen. Das heisst, entweder müssen Swing-By-Manöver durch geführt werden, oder die Sonde braucht einen überproportional hohen Treibstoffvorrat.

Merkur ist der kleinste Planet im Sonnensystem. Sein Aufbau ist analog zu dem der Erde. Ein riesiger Eisenkern (2074 km) nimmt einen wesentlichen Teil des Volumens ein. Etwas davon scheint geschmolzen zu sein. Die Gesteinskruste Merkurs hat eine Dicke von etwa 400 km. Das Magnetfeld des Merkur hat eine Stärke von etwa einem Hundertstel des Erdmagnetfeldes.

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 737-740], [NAS19f] und [Wik19j].

17.4.2. Venus

Die folgenden Informationen stammen von der NASA [NAS19f].

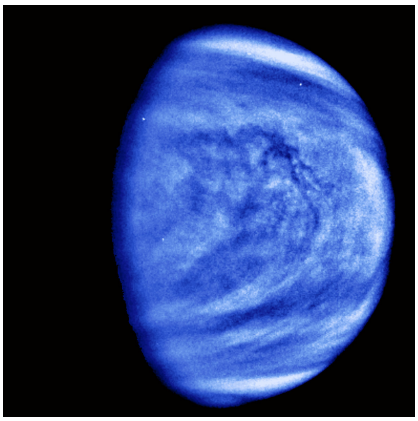


Abb. 17.12.: Wolken in der Venusatmosphäre, gemessen von Galileo. Zu sehen im hochpassgefilterten Bild sind H_2S-Wolken. (NASA/JPL 1996 https://solarsystem.nasa.gov/resources/575/venus-cloud-patterns/?category=planets_venus).

Abbildung 17.12 zeigt eine optische Aufnahme der Sonde Galileo aus etwa $2.6 \cdot 10^6$ km Entfernung. Die Oberfläche der Venus ist im optischen Bereich nicht sichtbar. Die Venus ist der zweite Planet von der Sonne aus gesehen. Seine Kenndaten finden sich in Tabelle 17.1. Von der Grösse her ist er sehr ähnlich zur Erde. Durch einen ausufernden Treibhauseffekt beträgt seine Oberflächentemperatur 462°.

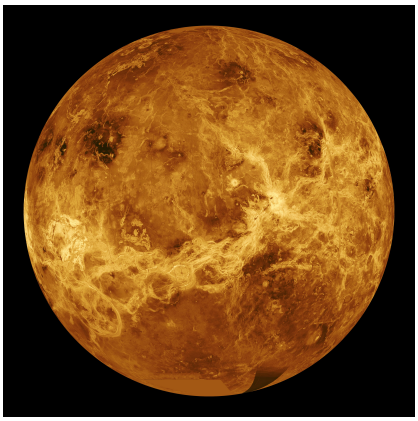


Abb. 17.13.: Venusoberfläche ohne Wolken. Die Daten stammen von der Magellan-Mission sowie von der Pioneer Venus Orbiter- Mission. Die Farben entsprechen den von Venera 13 und 14 bestimmten Farbtönen. (NASA/Jet Propulsion Laboratory-Caltech https://solarsystem.nasa.gov/resources/688/computer-simulated-global-view-of-venus/?category=planets_venus).

Radarstrahlen durchdringen die Wolken der Venus und erlauben so ein detailliertes Bild der Oberfläche zu erstellen. Abbildung 17.13 zeigt vorwiegend Radardaten der Magellan-Mission.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Wie die Erde hat die Venus einen Eisenkern, darüber eine Zone flüssigen Gesteins, Magma, und aussen eine dünne Kruste. Der Kern scheint 3200 km Durchmesser zu haben. Die Venus hat aktive Vulkane und dadurch eine sich ändernde Topographie. Es gibt nur grosse Meteoritenkrater. Die kleineren schmelzen in der Atmosphäre aus Kohlendioxid. Wolken bestehen aus Schwefelwasserstoff.

Die Venus rotiert rückwärts, als entgegen dem Drehsinn ihrer Bahn. Wolken umrunden die Venus alle vier Tage. Ihre Geschwindigkeit ist etwa 400 km h^{-1}.

Wegen der langsamen Eigenrotation der Venus ist ihr Magnetfeld viel schwächer als das der Erde, obwohl ihr Aufbau sehr ähnlich dem der Erde ist.

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 740-745], [NAS19f] und [Wik19q]. Auf der Website [Mit21] gibt es eines der wenigen Fotos von der Venusoberfläche, aufgenommen am Boden.

17.4.3. Erde

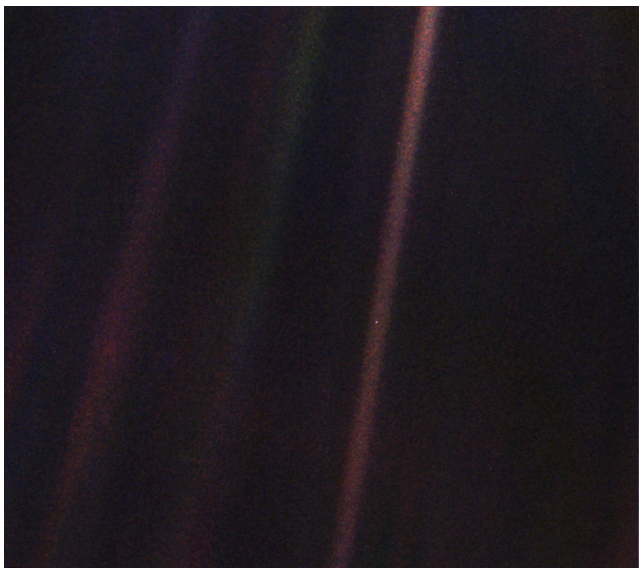


Abb. 17.14.: Erde als weisser Punkt, gesehen am 14. Januar 1990 von Voyager aus einer Distanz von $6.4 \cdot 10^9$ km (NASA/JPL-Caltech, https://solarsystem.nasa.gov/resources/536/voyager-1s-pale-blue-dot/)

Die Erde ist unser Heimatplanet. Abb. 17.14 zeigt eine Aufnahme der Sonde Voyager aus einer Distanz von $6.4 \cdot 10^9$ km. Die Erde ist der kleine Punkt.

Abb. 17.15.: Bild der Erde aufgenommen von Apollo 10. Dieses Bild ist das, was Menschen zum ersten Mal gesehen haben, als sie eine Erdumlaufbahn verliessen. (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/590/apollo-10-view-of-the-earth/?category=planets_earth).

Abb. 17.15 zeigt die Aufnahme der Erde von einer Mondumlaufbahn aus gesehen. Die Erde deckt etwa eine Winkelbreite von 1.5° ab. Die nächste Abbildung 17.16 zeigt die Erde und ihren Mond aus einer Distanz von $1.6 \cdot 10^6$ km.

Abb. 17.16.: Der Mond vor der Erde, gesehen von DSCOVR (Deep Space Climate Observatory) in 2015 (NASA/NOAA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/696/from-a-million-miles-away-moon-crossing-face-of-earth/)

17.4.3.1. Schwankungen der Bahnparameter der Erde

Sowohl die Exzentrizität der Erdbahn wie auch die Ausrichtung der Erdachse unterliegen periodischen Schwankungen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

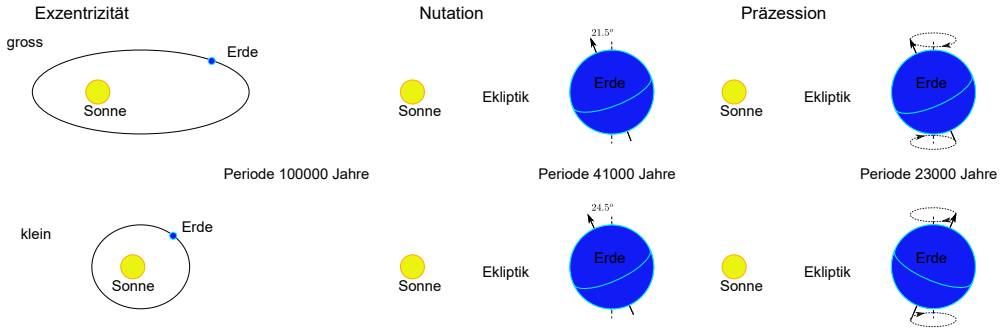


Abb. 17.17.: Milankovićzyklen der Erdbahn (siehe auch [GJ17, Abb. 15.14])

Die Milanković-Zyklen (siehe Abbildung 17.17, nach Milutin Milanković) mit 100 000 a (Bahnexzentrizität), 41 000 a (Nutation) und 23 000 a (Präzession) beeinflussen den Energiefluss der Sonne zur Erde über den Jahresverlauf.

Die Exzentrizität verändert den Abstand zwischen Erde und Sonne und beeinflusst daher das Klima. Für die Zeit zwischen −4000 vor unserer Zeit und 8000 kann die numerische Exzentrizität der Erdbahn nach [Sim+94, Abschn. 5.8.3] so geschrieben werden:

$$e(t) = 0.0167086342 - 0.0004203654 \cdot t - 0.0000126734 \cdot t^2 + 1444.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^3 - 2.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^4 + 3.0 \cdot 10^{-10} \cdot t^5 \quad (17.4.1)$$

Dabei ist t durch

$$t = \frac{JD - 2451545.0}{365.25 \cdot 1000} \quad (17.4.2)$$

gegeben. t zählt hier also die Jahrtausende. Das Julianische Datum JD ist so definiert:

$$JD(\text{1. Januar 2000, 11.58:55.816 UTC}) = 2451545.0 \quad (17.4.3)$$

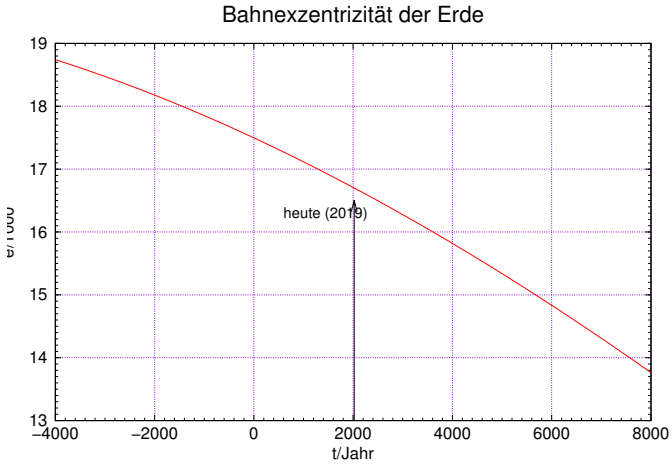


Abb. 17.18.: Bahnexzentrizität zwischen -4000 und 8000 unserer Zeitrechnung nach [Sim+94, Abschn. 5.8.3]

Abbildung 17.18 zeigt die Änderung der Bahnexzentrizität über die nähere Vergangenheit und Zukunft.
Die numerische Exzentrizität wird durch die Wirkung aller anderen Planeten verändert. Über eine längere Zeit verhält sie sich wie in der Abbildung 17.19 zeigt die Variation über $\pm 1 \cdot 10^6$ a.

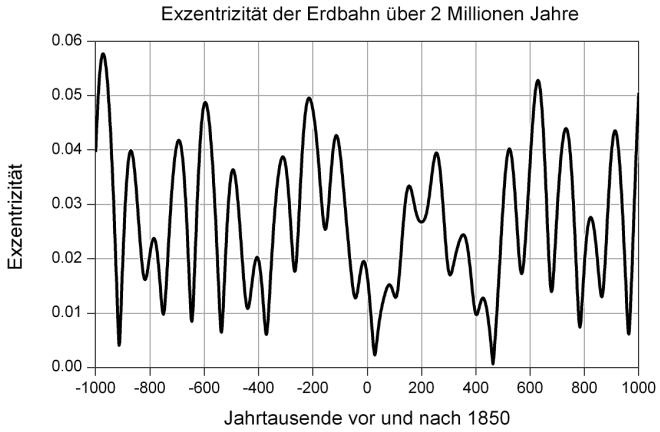


Abb. 17.19.: Erdbahnexzentrizität von $-1 \cdot 10^6$ bis $1 \cdot 10^6$ Jahren (Sch [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Earth%27s_orbit_-_Variation_of_eccentricity_de.png).

Die Bahn schwankt zwischen $e \approx 0$ (Kreisbahn) und $e = 0.06$ (Die kleine Halbachse ist um 0.18 % kürzer als die grosse Halbachse.

17.4.3.2. Energieflüsse in der Atmosphäre, Treibhauseffekt

Die Erde steht im Strahlungsgleichgewicht mit dem Weltall und der Sonne. Eine weitere Energiequelle ist der heisse, aus festem Eisen bestehende Erdkern ($\approx$ 6000 K) Nach [GJ17] ist dessen Beitrag zur Energiebilanz an der Erdoberfläche

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

klein.

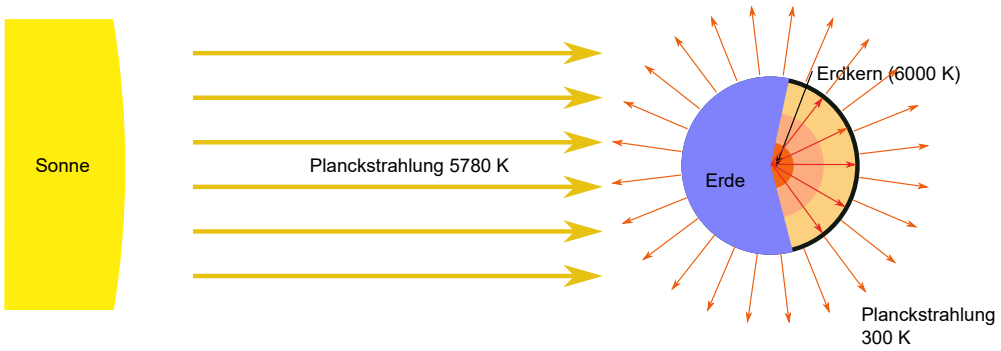


Abb. 17.20.: Strahlungsgleichgewicht der Erde. Der Erdkern erwärmt die Erdoberfläche von unten, die Sonne auf einer Hälfte. Die Abstrahlung ist isotrop. Das Strahlungsgleichgewicht ergibt die Erdtemperatur.

Dieses Strahlungsgleichgewicht ist in Abbildung 17.20 skizziert. Eine naive Berechnung der Erdtemperatur mit diesem Modell ergibt eine um etwa 30 K zu niedrige Temperatur. Diese Temperatur ist in ein paar Kilometern Höhe zu finden (siehe auch 17.25). Die Erdatmosphäre ist wärmer, da die Atmosphäre nicht alle Strahlung des Erdbodens im Infraroten durchlässt. Die Grösse dieses Treibhauseffktes ist für das Leben auf der Erde kritisch. Zu wenig davon und die Erde ist in grossen Teilen zu kalt, zu viel und es ist zu warm. Die Erdtemperatur sollte etwa auf 0.5 K konstant gehalten werden.

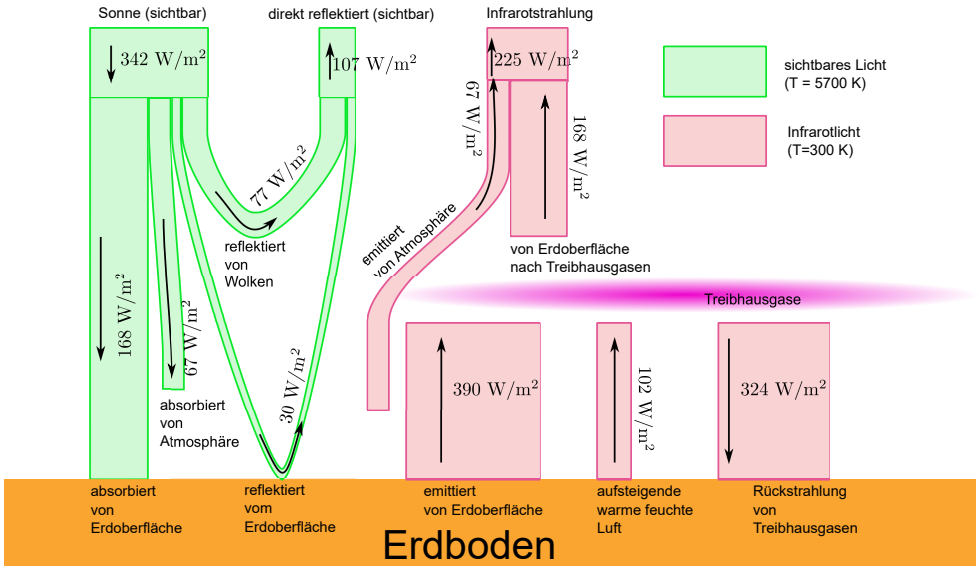


Abb. 17.21.: Energieflüsse in der Erdatmosphäre. Die Daten stammen aus [GJ17, Abb. 15.7] und dort aus [Ipc13, Fig. 2.11, p. 181]

Abbildung 17.21 zeigt die über ein Jahr und die geographischen Breiten gemittelten Energieflüsse angezeigt. Durch diese Mittelung sind die Flüsse kleiner als die Solarkonstante von 1300 W m^{-2}. Die linke Seite zeigt den Energieeintrag der Sonne. Von den 342 W m^{-2} erreichen 168 W m^{-2} den Erdboden und werden dort absorbiert. 67 Wm^{-2} werden von der Atmosphäre absorbiert. Deshalb erwärmt sich

die Luft am Morgen vom Boden aus und deshalb ist die kälteste Lufttemperatur etwa eine Stunde nach Sonnenaufgang. Der Erdboden reflektiert weitere 30 W m^{-2} direkt. Schliesslich werden 77 W m^{-2} von Wolken zurück ins Weltall reflektiert. In der Summe werden von den eintreffenden 342 W m^{-2} etwa ein Drittel, also 107 W m^{-2} im sichtbaren Spektralbereich ins Weltall reflektiert.

Der Energiefluss im Infraroten vom Erdboden weg ist mit 390 W m^{-2} Planckscher Strahlung sowie 102 W m^{-2} durch Luftströmung und durch Kondensationswärme von Wassertropfen signifikant grösser, als der Energiefluss von der Sonne. Dieser Energiefluss wird von Wolken und Treibhausgasen absorbiert und reflektiert. Der Rückfluss zur Erde im infraroten Spektralbereich beträgt 324 W m^{-2}.

Die andere Seite der Treibhausschicht ist im Infraroten im Strahlungsgleichgewicht mit der Hintergrundstrahlung (2.7 K). Deren Rückstrahlung ist vernachlässigbar. 168 W m^{-2} werden so von Wolken und Treibhausgasen im Infraroten abgestrahlt. Dazu kommt noch die Infrarotstrahlung der absorbierten 67 W m^{-2} (sichtbar) in der Atmosphäre, auch in der Grösse von 67 W m^{-2}.

Wenn sich nun der Treibhauseffekt ändert, ändern sich die Beträge der von den Treibhausgasen ins Weltall emittierten 168 W m^{-2} und der Rückstrahlung von 324 W m^{-2}. Sinkt der erste Energiefluss und erhöht sich der Letztere steigt die Temperatur der Erde.

Da der direkte Energieeintrag der Sonne verglichen mit der Rückstrahlung im Infraroten etwa ein Drittel der gesamten Einstrahlung am Erdboden ausmachen, dürften Schwankungen des Energieoutputs der Sonne sich nur zu einem Drittel auswirken (linearisierte Betrachtung für kleine Abweichungen).

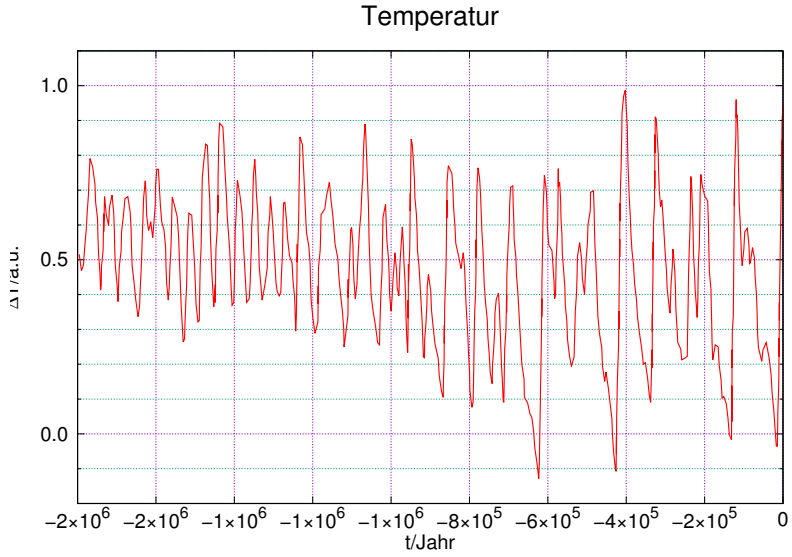


Abb. 17.22.: Temperaturschwankungen über die letzten $1.8 \cdot 10^6$ a (nach [GJ17, Abb. 15.12] und [LR05, Fig. 4])

Die Temperatur der Erde war nie konstant. Abbildung 17.22 zeigt die Schwankungen über die letzten $1.8 \cdot 10^6$ a. Während der meisten Zeit war die durchschnittliche Temperatur niedriger als heute. Meteoriteneinschläge (siehe Abschnitt 17.4.3.6), Vulkanausbrüche oder die Milanković-Zyklen (siehe Abbildung 17.17)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

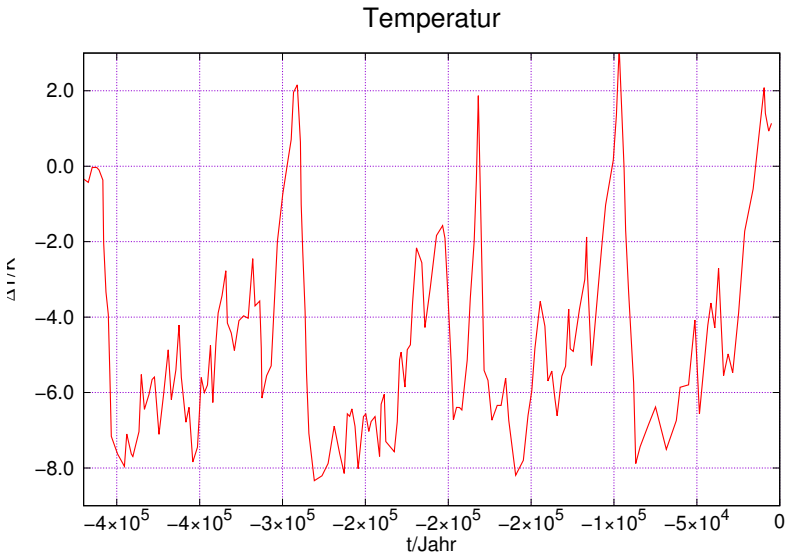


Abb. 17.23.: Temperaturen über die letzten $4.2 \cdot 10^5$ a anhand der Eisbohrkerne der Station Vostok (Daten aus [Pet+99, Fig. 3b.]).

Aus Eisbohrkernen [Pet+99] kann sowohl die Temperatur wie auch die Konzentration verschiedener Gase abgelesen werden (siehe Abbildung 17.23)

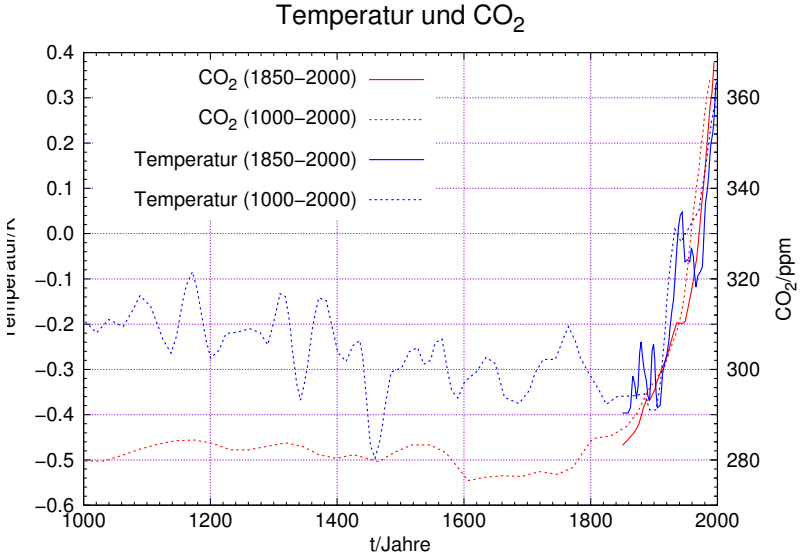


Abb. 17.24.: Verlauf der Temperatur und der CO_2-Konzentration in der Atmosphäre (nach [GJ17, Abb. 15.21]).

Abbildung 17.24 schliesslich zeigt den Temperaturverlauf in der jüngsten Zeit, zusammen mit der Konzentration von CO_2 CO_2 ist ein ausgezeichneter Indikator für den Verbrauch fossiler Brennstoffe. Fossile Brennstoffe erzeugen beim Verbrennen neben CO_2 auch H_2O. Wasser hat breitere Absorptionsbanden als CO_2, erhöht aber durch Wolken die direkte Reflexion von Sonnenlicht.

Als nach 9/11 der Flugverkehr eingestellt war, die Kondensstreifen also fehlten, hat sich die Durchschnittstemperatur über den USA trotz gleicher Wetterlage messbar

erhöht.
Aus den vorliegenden Daten müssen die folgenden Schlüsse gezogen werden:

- Die Menschheit ist in der Lage, die mittlere Erdtemperatur zu beeinflussen.
- das Verbrennen von fossilen Brennstoffe sind die dominante Ursache der Erhöhung der Konzentration von Treibhausgasen.
- Graue Energie, das heisst Energie zur Herstellung von Autos, Geräten, usw. ist häufig so umfangreich, dass mehrere Jahre notwendig sind, um mit Gewinnen durch die Energieeffizienz die Energiekosten der Herstellung auszugleichen.
- Es bleibt nichts anderes, als durch lokaleres Handeln den Energieverbrauch zu reduzieren.

Zusätzlich werden erhöhte mittlere Temperaturen in Permafrostgebieten gebundenes Methan freisetzen, ein starkes Treibhausgas. Der steigende Meeresspiegel kann zu vielen Klimaflüchtlingen führen, z.B. Niederländer, Friesen oder Hamburger.

17.4.3.3. Temperaturverteilung in der Atmosphäre

Das Strahlungsgleichgewicht zwischen der Sonnenstrahlung und der abgestrahlten Schwarzkörperstrahlung zusammen mit den Transportvorgängen in der Atmosphäre ist die Ursache für die in Abbildung 17.25 gezeigte Temperaturverteilung.

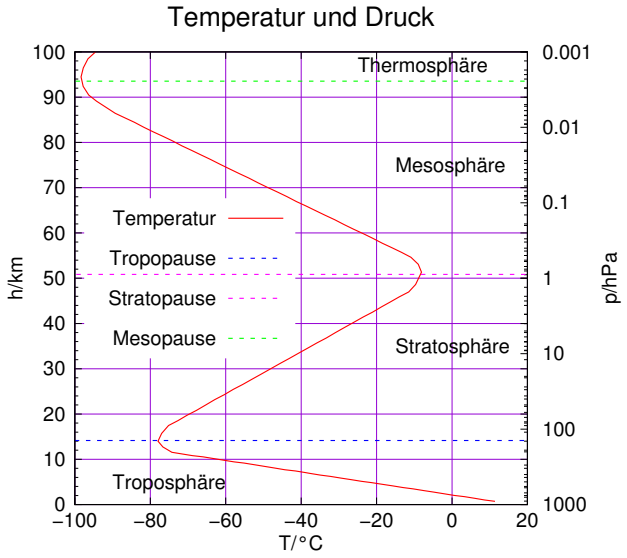


Abb. 17.25.: Temperaturverteilung in der Atmosphäre nach [GJ17, Abb. 15.2]

Bis zur Tropopause nimmt die Temperatur mit zunehmender Höhe ab, dann bis zur Stratopause wieder zu. Die Tropopause verhindert das Aufsteigen warmer Luft und isoliert das Wetter von der höheren Atmosphäre. Flugzeuge bewegen sich gerne an der Tropopause, da dort die Luft weniger Turbulenzen aufweist.
Ab der Stratopause nimmt die Temperatur wieder ab, um dann an der Mesopause wieder zu zunehmen. Üblicherweise wird die Höhe der Mesopause als Grenze des Weltalls bezeichnet.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

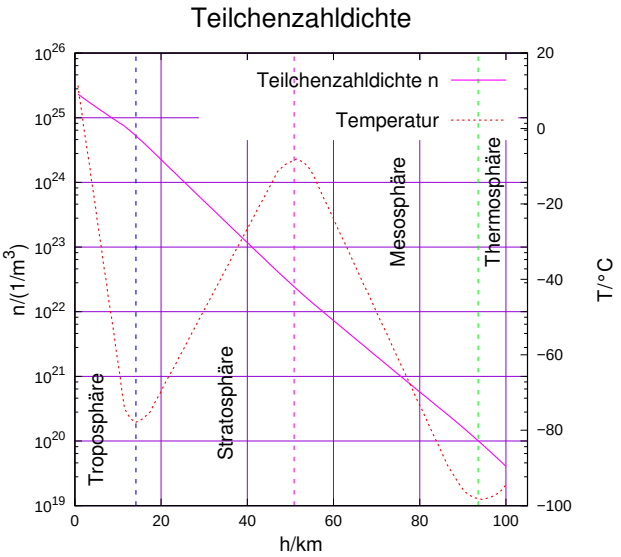


Abb. 17.26.: Teilchenzahldichte, berechnet mit Daten aus [GJ17, Abb. 15.2]

Aus dem Temperatur- und Druckverlauf kann mit dem idealen Gasgesetz

$$pV = Nk_BT \Longrightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_BT} \tag{17.4.4}$$

die Teilchenzahldichte n berechnet werden. k_B ist die Boltzmannkonstante, T muss in K angegeben werden. Abbildung 17.26 zeigt die berechnete Teilchenzahl. In der Höhe von 100 km werden üblicherweise die GUIDE-STARS für adaptive Optiken in Teleskopen erzeugt (siehe auch Abschnitt 16.3.2).
Die Grösse der Rückstrahlung wird mit dem ALBEDO angegeben.

$$A = \frac{S_{\text{rück,diffus}}}{S_{\text{ein}}} \tag{17.4.5}$$

$S_{\text{rück,diffus}}$ ist die Leistungsdichte der diffus zurückgestrahlten Strahlung, S_{ein} die Leistungsdichte der eingestrahlten Strahlung. Diese, die Leistungsdichte durch Sonne, hat die Grösse

$$S(r) = SK \cdot \left(\frac{1\,\text{AE}}{r}\right)^2 = \frac{R_\odot^2}{r}\sigma T_\odot^2 \tag{17.4.6}$$

Die absorbierte Leistung ist proportional zu der von der Sonne aus gesehenen Fläche der Erde

$$\frac{dW_1}{dt} = \pi r^2(1-A)S(r) \tag{17.4.7}$$

Zusätzlich haben wir aus dem Inneren die Wärmestromdichte Q_i

$$\frac{dW_2}{dt} = 4\pi R^2 Q_i \tag{17.4.8}$$

Dann muss die Abstrahlung mit dem STEPHAN-BOLTZMANN-GESETZ (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann) betrachtet werden

$$\frac{dW_3}{dt} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{17.4.9}$$

Auf der Tagseite ist das Gleichgewicht

$$\frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = \frac{dW_3}{dt} \tag{17.4.10}$$

oder

$$\pi r^2 (1 - A) S(r) + 4\pi R^2 Q_i = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{17.4.11}$$

Auf der Nachtseite muss die Wärmeleitung $Q_{\text{WL,Nachtseite}}$ mit berücksichtigt werden. Das führt auf

$$2\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 + Q_{\text{WL,Nachtseite}} = \pi R^2 (1 - A) S(r) + 2\pi R^2 Q_i \tag{17.4.12}$$

Unter Vernachlässigung von $Q_{\text{WL,Nachtseite}}$ ergeben sich die effektiven Gleichgewichtstemperaturen

$$T_{\text{eff}}^{\text{Tag}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2\sigma r^2}\left[(1 - A) SK\right] + \frac{Q_i}{\sigma}} \tag{17.4.13a}$$

$$T_{\text{eff}}^{\text{Nacht}} = \sqrt[4]{\frac{Q_i}{\sigma}} \tag{17.4.13b}$$

Wenn die Rotation schnell ist, hätten wir die ganzen 24 h die gleiche Temperatur

$$T_{\text{schnell}} = \frac{T_{\text{eff}}}{\sqrt[4]{2}} \tag{17.4.14}$$

Diese Rechnung stimmt ohne Atmosphäre. Mit Atmosphäre muss der Treibhauseffekt mit berücksichtigt werden.

17.4.3.4. Erdinneres

Mit Bohrungen in die Erde können die obersten 10 km der Erdkruste untersucht werden. Für tiefer gehende Untersuchungen werden die durch Erdbeben erzeugten Druck- und Scherwellen verwendet ([GJ17, Kap. 14]).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

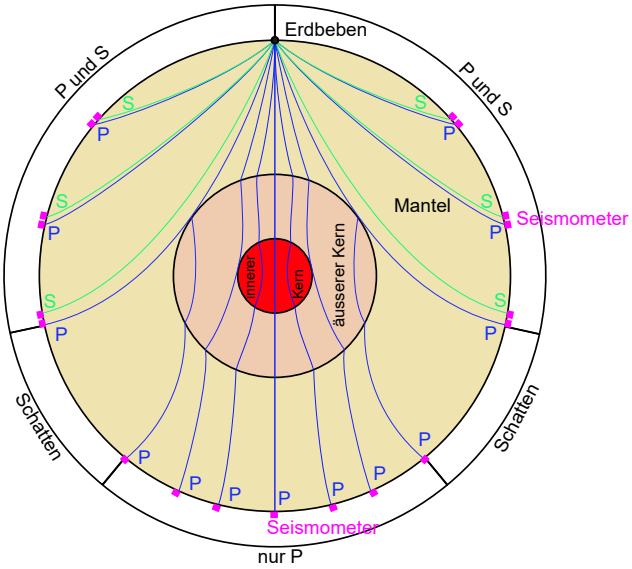


Abb. 17.27.: Verlauf von Erdbebenwellen durch die Erde. S-Wellen sind Scherwellen, die eine nicht verschwindende Viskosität und/oder einen Festkörper benötigen. P-Wellen sind Druckwellen, die sich in allen Medien ausbreiten. Es gilt das Fermat'sche Prinzip (nach Pierre de Fermat) und Brechung an Grenzflächen (nach [CO07, pp. 749-750] und [GJ17, Kap. 14])

Abbildung 17.27 zeigt eine Skizze des Erdquerschittes zusammen mit Trajektorien von Erdbebenwellen. Scherwellen können nur von Medien mit einer genügend grossen Viskosität übertragen werden, also zähflüssige Magma oder Festkörper. Flüssigkeiten wie Wasser können nur Druckwellen übertragen. Druckwellen werden in allen Materialien, auch in Gasen, weitergeleitet. Inge Lehmann verstand als erste die Eigenschaften der verschiedenen Erdbebenwellen, insbesondere aber die Wichtigkeit und die Funktion von P-Wellen.

Die Trajektorien im Inneren der Erde werden durch das Fermat'sche Prinzip bestimmt (siehe auch [Mar17, Kap. 7.1.6]). Daraus ergeben sich auch die Beziehungen für Winkel und Amplituden an Grenzflächen. Druckwellen (P) und Scherwellen (S) sehen nicht die gleiche Impedanz. Deshalb sind ihre Trajektorien unterschiedlich. Insgesamt ergibt sich ein Bereich um den Erdbebenherd, bei dem sowohl P- wie auch S-Wellen detektiert werden. Es folgt ein ringförmiger Bereich, bei dem die Erdbebenwellen abgeschattet werden. Schliesslich treffen auf dem der Erdbebenstelle gegenüberliegenden Ort nur P-Wellen ein.

Inge Lehmann entdeckte die Wichtigkeit und die Funktion von P-Wellen ([Leh36; Leh87; Leh64; Leh10; Leh61]) Auszüge aus der Arbeit von 936 sind in „Inge Lehmann's paper: "P'" (1936)" von M. Kölbl-Ebert ([Köl01]) veröffentlicht worden.

17.4.3.5. Erdmagnetfeld

Die Erde hat eine Magnetosphäre (siehe Abbildung 17.28).

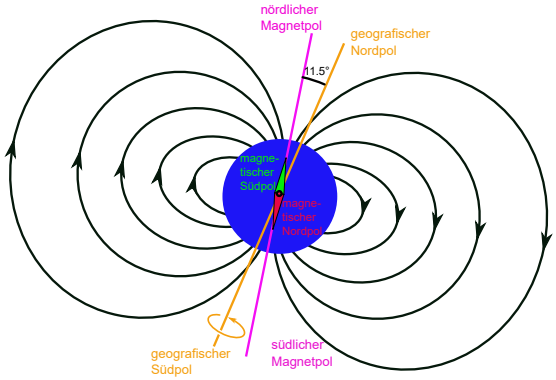


Abb. 17.28.: Gegenseitige Lage der geographischen und magnetischen Pole (nach NASA und Peter Reid, The University of Edinburgh)

Gegenwärtig ist die magnetische Polachse um 11.5° gegen die Rotationsachse geneigt (vom geographischen Nord- zum geographischen Südpol). Der nördliche magnetische Pol ist der magnetische Südpol, der südliche magnetische Pol ist der magnetische Nordpol. Dies ist eine Konsequenz der Definition, dass der magnetische Nordpol einer Magnetnadel nach Norden zeigt.

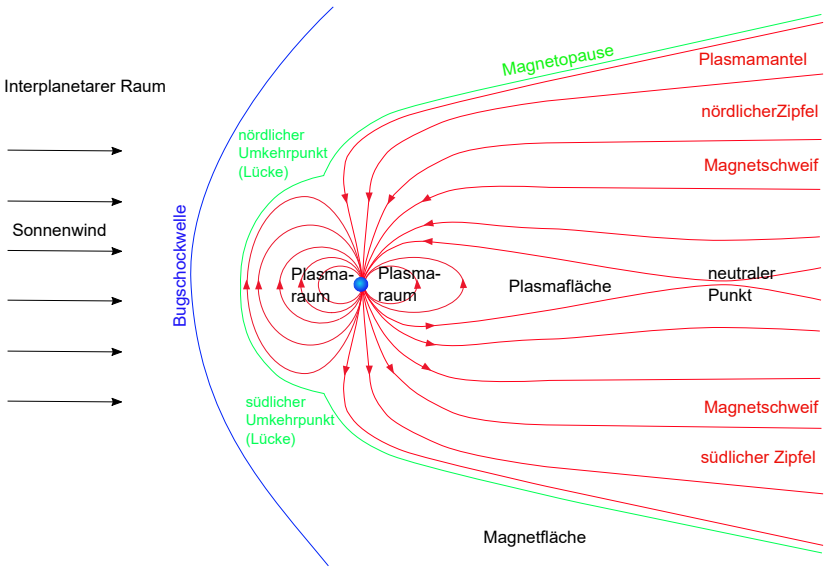


Abb. 17.29.: Magnetfeld der Erde (nach NASA/ESA/C. T. Russel).

Abbildung 17.29 zeigt das Magnetfeld der Erde auf einer grösseren Skala. Der Sonnenwind und die Magnetfeldlinien der Sonne komprimieren das Magnetfeld der Erde auf der Tagseite und strecken es auf der Nachtseite. Die Grenze ist die Bugschockwelle. Diese hat im Norden und Süden über den polen einen Umkehrpunkt. Das ist der Ort, bei dem ionisierte Teilchen in die Atmosphäre eintreten können und Polarlichter erzeugen. Auf der Nachtseite treffen sich die Magnetfeldlinien der Erde im neutralen Punkt. Dessen Lage hängt von der Stärke des Sonnenwindes ab. In seiner Nähe können sich in Phasen starken Sonnenwindes ionisierte Teilchen sammeln und sich entlang der Magnetfeldlinien zu den Polen bewegen, und dann Polarlichter erzeugen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 745-754], [NAS19f] und [Wik19b].

17.4.3.6. Auswirkung von Einschlägen von Himmelskörpern

Meteoriten, d.h. Objekte aus dem Weltall schlagen immer wieder auf der Erde ein. Zu Beginn, vor etwa $4.6 \cdot 10^9$ a, bildete sich die Erde aus einem Staub- und Gesteinsfeld. Die Erde als Planet hatte danach ihre Bahn im Wesentlichen von anderen Objekten freigeräumt. Bei $3.9 \cdot 10^9$ a gab es ein Maximum der METEORITENHÄUFIGKEIT. Den Verlauf zeigt Abbildung 17.30 an.

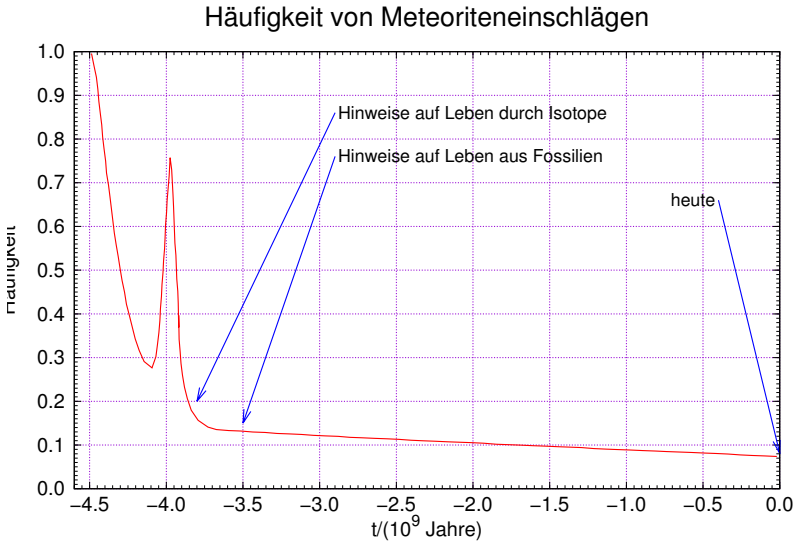


Abb. 17.30.: Zahl der Meteoriteneinschläge im Laufe der Zeit von der Entstehung der Erde an (nach [GJ17, Abb. 9.10]

Meteoriten, die auf der Erde einschlagen können gravierende Auswirkungen haben.

J. J. Lissauer [Lis99] gibt die in der Tabelle 17.2 angegebenen Wirkungen an.

Radius	**Beispiel**	**wann zuletzt**	**Wirkung auf Erde**	**Wirkung auf Leben**
> 2000 km	Bildung des Mondes	$4.46 \cdot 10^9$ a	Erde geschmolzen	flüchtige Substanzen verdampfen, alles Leben vernichtet
> 700 km	Pluto oder Ceres	$\geq 4.3 \cdot 10^9$ a	Kruste geschmolzen	alles Leben vernichtet
> 200 km	Vesta (grosser Asteroid)	$\approx 4 \cdot 10^9$ a	Ozeane verdampfen	eventuell überlebt Leben unter dem Boden
> 70 km	Chiron (grösster aktiver Komet)	$3.8 \cdot 10^9$ a	oberste 100 m der Ozeane verdampfen	Photosynthese zerstört, Leben wird unter Dampfdruck gekocht
> 30 km	Komet Hale-Bopp	$\approx 2 \cdot 10^9$ a	Atmosphäre und Oberfläche auf 1000 K aufgeheizt	Kontinente brennen
> 10 km	433 Eros, auch Objekt, das Saurier auslöschte	$65 \cdot 10^6$ a	Feuer, Staub, Dunkelheit. Atmosphäre und Ozeane chemisch verändert. Grosse Temperaturausschläge	Hälfte aller Arten tot
> 1 km	etwa 500 erdnahe Asteroiden	$\approx 3 \cdot 10^5$ a	für Monate Staub in der Atmosphäre	Photosynthese unterbrochen, Tote, wenige arten sterben aus, Zivilisation bedroht
> 100 m	Tunguska	110 a	Lokal komplette Zerstörung, Staub in der Atmosphäre, leichte Auswirkung auf die betroffene Halbkugel	Twitter, Bildzeitung, romantische Sonnenuntergänge

Tab. 17.2.: Grössenabhängige Wirkung von Objekten aus dem Weltall, die auf der Erde aufschlagen (nach J. J. Lissauer [Lis99]).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

17.4.3.7. Mond

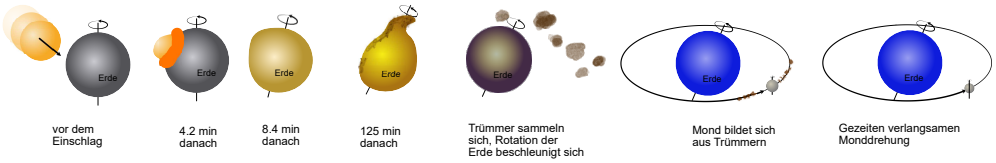


Abb. 17.31.: Entstehung des Mondes nach [GJ17].

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 754-762], [NAS19f] und [Wik19k].

17.4.4. Mars

Mars ist der Äusserste der erdähnlichen inneren Steinplaneten. Mars ist zwischen (1.381 bis 1.666) AU von der Sonne entfernt. Die grosse Halbachse hat eine Länge von 1.524 AU. Die Bahn ist um 1.8506° gegen die Ekliptik geneigt. Die siderische Umlaufszeit von 686.980 d.

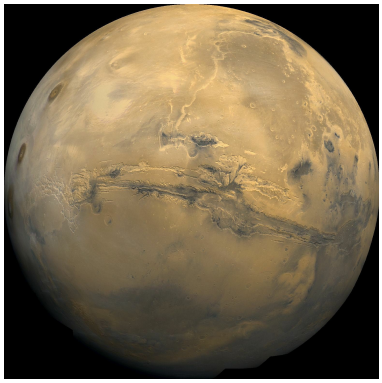


Abb. 17.32.: Bild des Mars mit dem grossen Canyon Valles Marineris (NASA, https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_83.html).

Abbildung 17.32 zeigt ein Bild des Mars aufgenommen von den Viking-Orbitern der NASA in den 1970-er Jahren. Die grosse Schlucht ist 3000 km lang, 600 km breit und 8 km tief. Mars hat Überreste einer Atmosphäre, die aber nur etwa einen zwanzigstel des Drucks der Erdatmosphäre hat.

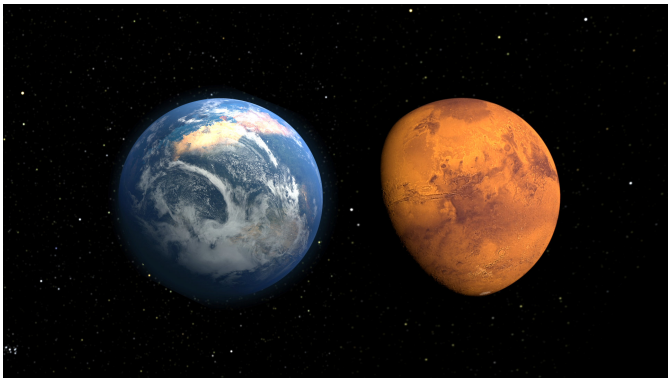


Abb. 17.33.: Links eine künstlerische Darstellung wie Mars in den Anfangszeiten des Sonnensystems ausgesehen haben könnte und rechts der heutige Zustand. Die realen Daten stammen von der NASA-Sonde «Mars Atmosphere and Volatile Evolution» (NASA's Goddard Space Flight Center, https://www.nasa.gov/content/goddard/the-look-of-a-young-mars-3).

Es gibt Indizien, dass der Mars in der Frühzeit unseres Universums flüssiges Wasser an seiner Oberfläche hatte (siehe auch Abb. 17.33). Es gibt Spuren von Erosion durch Wasser und es gibt gefrorenes Wasser an einem Pol. Deshalb gibt es die Vermutung, dass auf dem Mars Reste von leben zu finden sein könnten.

Die Rotationsachse des Mars ist geneigt. Sie scheint über den Zeitraum von etwa einer Million Jahren zwischen Neigungen von fast 0° und 60° zu schwanken. Es wird angenommen, dass die Wechselwirkung mit Jupiter, der Erde und der Sonne und anderen Objekten dafür verantwortlich sei (siehe [CO07, p. 767]).

Der Mars hat zwei kleine Monde, Phobos und Daimos. Der grössere, Phobos hat einen Durchmesser von 28 km, Daimos' Durchmesser ist nur 16 km. Beide könnten eingefangene Asteroiden sein.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

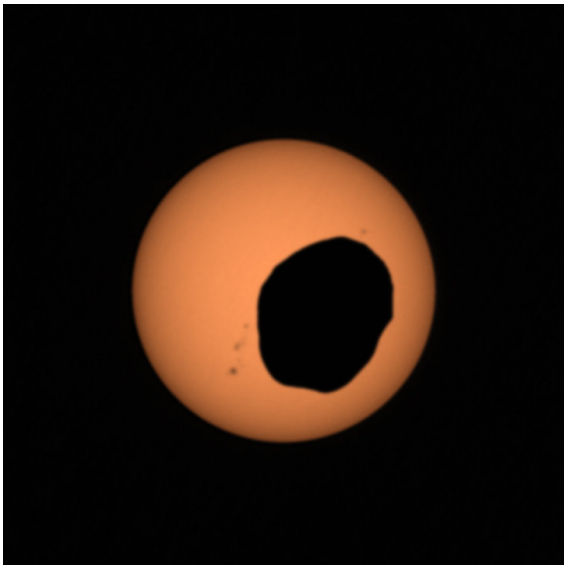


Abb. 17.34.: Bild einer partiellen SONNENFINSTERNIS auf dem MARS. Der Mond PHOBOS befindet sich vor der SONNE (mit SONNENFLECKEN). (Quelle: NASA/JPL-Caltech/ASU/MSSS/SSI [NJ22])

Der Mars-Rover PERSEVERANCE konnte am 2. April 2022 mit seiner Kamera MASTCAM-Z die partielle SONNENFINSTERNIS auf dem Mars messen. Neben dem hier gezeigten Standbild des Mondes PHOBOS haben NASA und Jet Propulsion Laboratory [NJ22] auch ein Video zur Verfügung gestellt.

17.5. Riesenplaneten und ihre Umgebung

Eigenschaft	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Mittlerer Bahnradius	778 340 821 km	1 426 666 422 km	2 870 658 186 km	4 498 396 441 km
Mittlerer Bahnradius	5.202 887 0 AU	9.536 676 0 AU	19.189 164 7 AU	30.069 922 9 AU
Bahnexzentrizität	0.04838624	0.05386179	0.04725744	0.00859048
Bahnneigung	1.304°	2.49°	0.77°	1.77°
Durchmesser	139 822 km	116 464 km	50 724 km	49 244 km
Neigung der Achse	3.1°	26.7°	97.8°	28.3°
Massendichte	1.326 g cm^{-3}	0.687 g cm^{-3}	1.27 g cm^{-3}	1.638 g cm^{-3}
Umdrehungsdauer	0.413 54 d	0.444 d	−0.718 d[4]	0.671 d
Mittlere Bahngeschwindigkeit	13.056 km s^{-1}	9.639 km s^{-1}	6.799 km s^{-1}	5.435 km s^{-1}
Umlaufdauer um die Sonne	11.862 615 a	29.447 498 a	84.016 846 a	164.791 32 a
Umlaufdauer um die Sonne	4332.8 d	10 755.7 d	30 687.2 d	60 190 d
Feldvektor Gravitation	24.79 m s^{-2}	10.4 m s^{-2}	8.87 m s^{-2}	11.15 m s^{-2}
Fluchtgeschwindigkeit	60.2 km s^{-1}	36.09 km s^{-1}	21.38 km s^{-1}	23.56 km s^{-1}
Oberflächentemperatur	nicht definiert	nicht definiert	nicht definiert	nicht definiert
Atmosphäre	H_2, He	H_2, He	H_2, He, CH_4	H_2, He, CH_4
Monde	79	83	27	14
Ringe	ja	ja	ja	ja

Tab. 17.3.: Liste der Riesenplaneten im Sonnensystem (Quelle: NASA [NAS19f]).

[4] Uranus dreht rückwärts.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

17.5.1. Jupiter

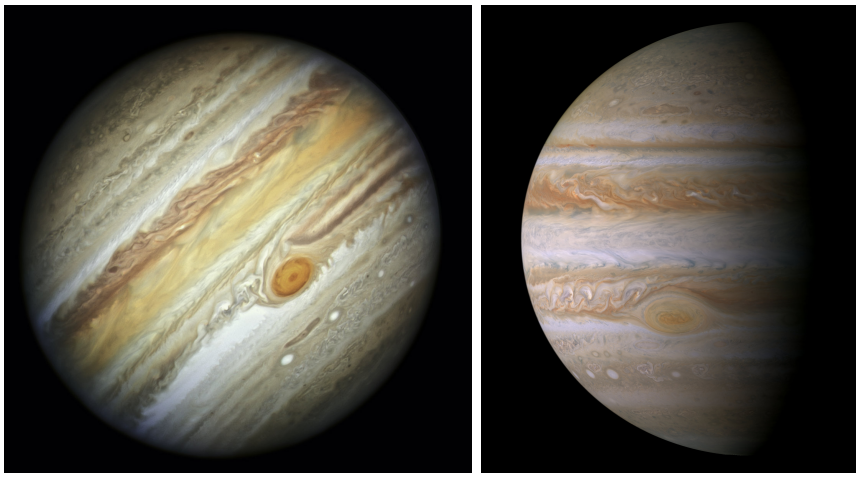


Abb. 17.35.: Links: Jupiter abgebildet vom Hubble-Space-Telescope. Rechts: Bild des Jupiters durch die Sonde Cassini (links: NASA, ESA, A. Simon (Goddard Space Flight Center), and M.H. Wong (University of California, Berkeley) https://solarsystem.nasa.gov/resources/2486/hubbles-new-portrait-of-jupiter/?category=planets_jupiter, rechts: NASA/JPL/Space Science Institute, https://solarsystem.nasa.gov/resources/11667/cassini-jupiter-portrait/?category=planets_jupiter)

Jupiter (Siehe Abb. 17.35) ist der innerste und grösste der vier äusseren Gasplaneten. Sein Durchmesser beträgt 10 % des Sonnendurchmessers. Jupiter wie auch Saturn haben eine Gashülle, die sehr ähnlich ist wie die Gaszusammensetzung der Sonne. Aufgrund der Form, der Grösse und der durch Sonden gemessenen Gravitation muss Jupiter einen festen Kern haben [CO07, p. 783]. Dessen Masse ist etwa zehn mal die Erdmasse, macht aber trotzdem nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtmasse des Jupiters aus. Die Atmosphäre ist turbulent, bekannt ist der grosse rote Fleck, ein seit der ersten Beobachtung des Planeten mit einem genügend starken Fernrohr bestehender Wirbelsturm.

Jupiter besitzt wie Saturn einen Ring, der aber sehr viel schwächer ausgeprägt ist. Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19g].

17.5.1.1. Jupitermonde

Jupiter hat mit heutigem Kenntnisstand 79 Monde. Die vier grössten Monde, von innen nach aussen gesehen sind Io (Durchmesser 3643 km, grosse Halbachse 421 800 km, numerische Exzentrizität 0.004), Europa (Durchmesser 3122 km, grosse Halbachse 671 100 km, numerische Exzentrizität 0.009), Ganymed (Durchmesser 5262 km, grosse Halbachse 1 070 400 km, numerische Exzentrizität 0.001) und Kallisto (Durchmesser 4821 km, grosse Halbachse 1 882 700 km, numerische Exzentrizität 0.007). Alle anderen 75 Monde haben einen Durchmesser < 200 km.

Die vier grössten Monde wurden von Galileo Galilei im Jahre 1610 entdeckt (siehe auch Abb. 17.36).

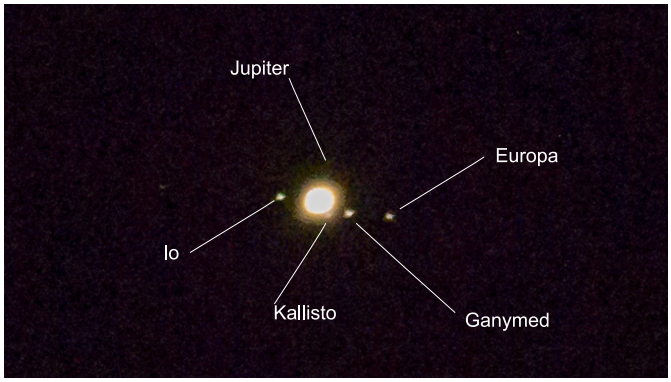


Abb. 17.36.: Die Galileischen Monde und Jupiter aufgenommen am 27. 7. 2018 um 22:34 vom Boltzplatz beim Oberberghof auf dem Eselsberg, während der totalen Mondfinsternis (Teleobjektiv 400 mm, MFT-Sensor).

Abbildung 17.37 zeigt die Galileischen Jupitermonde aufgenommen von der Sonde Galileo aufgenommen. Io hat aktive VULKANE. Europa ist von Eis bedeckt. Ganymed ist der grösste Mond in unserem Sonnensystem.

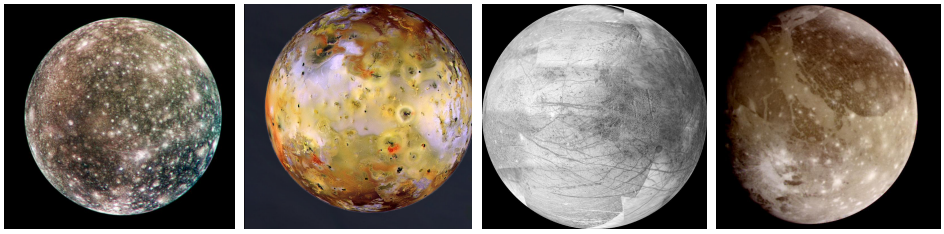


Abb. 17.37.: Ganz links: Bild des Jupitermondes Kallisto aus dem Jahre 2001 (Credit: NASA/JPL/ DLR(German Aerospace Center) https://www.nasa.gov/sites/default/files/images/110204main_image_feature_279_ajhfull.jpg).
Mitte links: Kontrastverstärktes Bild des Jupitermondes Io. Das Bild enthält im Original die Farbkanäle Infrarot, Grün und Violett (Credit: NASA/JPL https://www.nasa.gov/sites/default/files/styles/full_width_feature/public/images/169854main_image_feature_764_ys_full.jpg).
Mitte rechts: Bild des Jupitermondes Europa. Das Bild ist ein Mosaik vieler kleinerer Bilder (Credit NASA/JPL/University of Arizona https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia02528_0.jpg).
Ganz rechts: Bild des Jupitermondes Ganymed (Credit: NASA, JPL, Galileo Probe https://apod.nasa.gov/apod/image/1705/Ganymede_Galileo_790.jpg).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

17.5.2. Saturn

Saturn ist der zweitgrösste Planet im Sonnensystem. Seine Ringe sind in jedem Teleskop gut sichtbar. Ebenso wie Jupiter hat auch Saturn einen festen Kern. Saturn ist nur wenig kleiner als Jupiter, hat aber nur 30 % der Masse des Jupiters. Der feste Kern des Saturn ist mit etwa 15 Erdmasse schwerer als der Kern des Jupiter.

Abb. 17.38.: Links: Aufnahme des Saturns durch das Hubble-Space-Telescopes, rechts eine Aufnahme von Cassini (links: NASA, ESA, A. Simon (GSFC), M.H. Wong (University of California, Berkeley) and the OPAL Team, https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/stsci-h-p1943a-f-2076x1484.png, rechts NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute, https://solarsystem.nasa.gov/resources/17845/saturn-planet-six/?category=planets_saturn)

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19n].

17.5.2.1. Ringe

Von der Erde aus gesehen teilt sich das Ringsystem des Saturn in drei Bereiche, A, B und C genannt. Die Lücke zwischen A und B wird die Cassini-Lücke genannt. Von nahe gesehen (Sonde Cassini) bestehen die Ringe aus unzähligen Teilringen. Die Ringe beginnen bei ungefähr einem Saturnradius R_S und reichen bis zu $8R_S$. Die Ringe bestehen aus vielen sehr kleinen Wassereisbrocken und Staub, mit Grössen von µm bis 1 km. Kollisionen unter ihnen bewirken, as die Ringe dünn bleiben (siehe [CO07, pp. 802-804].

17.5.2.2. Monde

Saturn hat 82 Monde, Stand 2021. Der zweitgrösste Mond des Sonnensystems umkreist Saturn. Titan hat einen Durchmesser von 5150 km, seine grosse Halbachse

misst 1 221 865 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.029. Weitere grössere Monde sind RHEA (Durchmesser 1528 km, grosse Halbachse 527 068 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.000), IAPETUS (Durchmesser 1436 km, grosse Halbachse 3 560 854 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.029), DIONE (Durchmesser 1118 km, grosse Halbachse 377 415 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.002) und THETIS (Durchmesser 1060 km, grosse Halbachse 294 672 km bei einer numerischen Exzentrizität von 0.000).

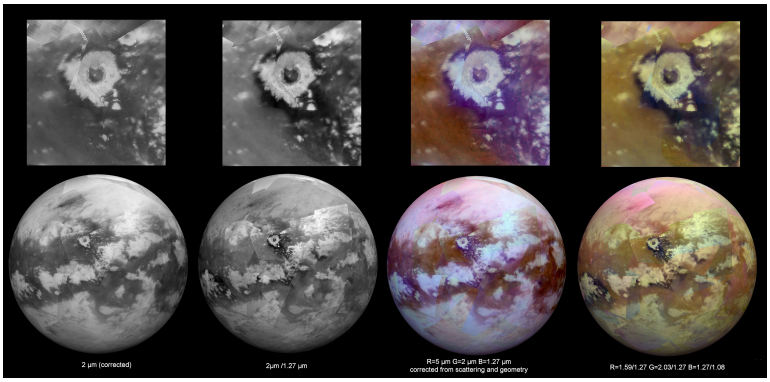


Abb. 17.39.: Bilder des Mondes Titan bei einer Wellenlänge von 2 µm aufgenommen von der Sonde Cassini (Credit: NASA https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/pia20022.jpg).

Abbildung 17.39 zeigt in der oberen Reihe den Sinlap-Einschlagskrater (80 km Durchmesser) und das Gebiet, auf dem die Sonde Huygens der ESA dann landete. Die untere Reihe zeigt ein Bild der gesamten Halbkugel. M. Perez [Per17] führte aus, dass das Bild links aussen de Oberfläche bei der Wellenlänge von 2 µm zeige, da wo die Atmosphäre des Titan am durchlässigsten sei. Das zweite Bild von links zeigt das Verhältnis der Intensitäten bei zwei Wellenlängen, $I(2\ \mu\text{m})/I(1.27\ \mu\text{m})$. Damit sollen Details besser sichtbar werden. Das zweite Bild von rechts zeig eine Falschfarbendarstellung, rot entspricht $\lambda = 5$ µm, grün entspricht $\lambda = 2$ µm und entspricht $\lambda = 1.27$ µm. Das Bild rechts zeigt im roten Kanal $I(1.59\ \mu\text{m})/I(1.29\ \mu\text{m})$, im grünen Kanal $I(2.03\ \mu\text{m})/I(1.27\ \mu\text{m})$ und im blauen Kanal $I(1.27\ \mu\text{m})/I(1.08\ \mu\text{m})$. Wieder sollen so Details hervorgehoben werden.

Titans Atmosphäre besteht vorwiegend aus Stickstoff. Weitere Informationen gibt es bei [CO07, pp. 797-799].

17.5.3. Uranus

Uranus wurde 1781 von Friedrich Wilhelm Herschel entdeckt. Uranus ist der erste mit Instrumenten entdeckte Planet. Er ist ein Gasplanet mit einem festen Kern mit etwa 13 Erdmassen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

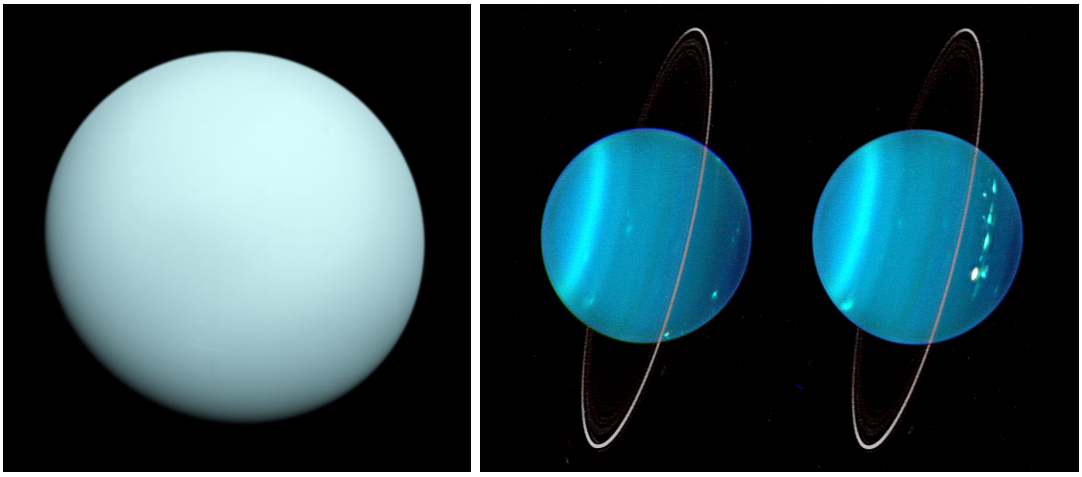


Abb. 17.40.: Links: Aufnahme des Uranus durch Voyager 2, rechts: Falschfarben-Infrarotaufnahme des Uranus durch das Keck-Teleskop (mit adaptiver Optik) (links: NASA, ESA, A. Simon (GSFC), M.H. Wong (University of California, Berkeley) and the OPAL Team, https://solarsystem.nasa.gov/resources/599/uranus-as-seen-by-nasas-voyager-2/?category=planets_uranus, rechts Lawrence Sromovsky, University of Wisconsin-Madison/W.W. Keck Observatory, https://solarsystem.nasa.gov/resources/605/keck-telescope-views-of-uranus/?category=planets_uranus)

Uranus hat wie alle anderen Riesenplaneten ein Ringsystem (siehe Abb. 17.40). Heute sind 27 Monde bekannt. Die grössten Monde sind Titania (Durchmesser 1578 km, grosse Halbachse 436 300 km, numerische Exzentrizität 0.001), Oberon (Durchmesser 1522 km, grosse Halbachse 583 500 km, numerische Exzentrizität 0.001), Umbriel (Durchmesser 1169 km, grosse Halbachse 266 000 km, numerische Exzentrizität 0.004) und Ariel (Durchmesser 1158 km, grosse Halbachse 190 900 km, numerische Exzentrizität 0.001).

Weitere Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19p].

17.5.4. Neptun

Nach der Entdeckung des Uranus wurde aufgrund von Bahnunreglmässigkeiten vermutet, dass es einen weiteren Planeten gäbe. Am 23. September 1846 entdeckte Johann Gottfried Galle den Planeten Neptun. Auch Neptun ist ein Gasplanet mit einem festen Kern mit etwa 13 Erdmassen.

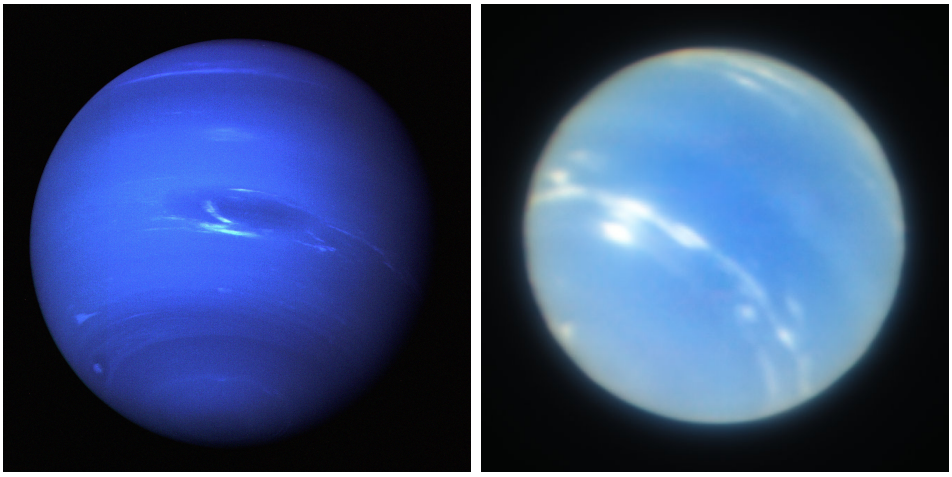


Abb. 17.41.: Links: Aufnahme Voyager 2, rechts: Bild im Kleinwinkelmodus mit adaptiver Optik der MUSE/GALACSI Kamera an ESO's Very Large Telescope (links: NASA/JPL, https://solarsystem.nasa.gov/resources/611/neptune-full-disk-view/?category=planets_neptune, rechts ESO/P. Weilbacher (AIP), https://solarsystem.nasa.gov/resources/936/neptune-from-the-very-large-telescope-vlt/?category=planets_neptune)

Neptun hat 14 Monde (Stand 2021). Der grösste Mond ist TRITON mit einem Durchmesser von 2706 km, einer grossen Halbachse von 354 800 km und einer numerischen Exzentrizität von 0.000).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 775-807], [NAS19f] und [Wik19l].

17.6. Kleinere Objekte

Neben den vier erdähnlichen Planeten und den vier Riesenplaneten gibt es in unserem Sonnensystem unzählige weitere Objekte. Da sind einmal die Planetoiden, durchaus grosse Himmelskörper, aber eben kleiner als die Planeten. Planeten beherrschen ihre Umlaufbahn und Ihre Umgebung. Bei PLUTO ist es so, dass sein Bahn wesentlich von NEPTUN beeinflusst wird. Ebenso ist er nur wenig grösser als sein Mond CHARON. Neben weiteren Planetoiden aus dem KUIPERGÜRTEL gibt es auch ASTEROIDEN, KOMETEN, METEORITEN und auch Besucher aus den Tiefen

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

des Alls. Tabelle 17.1 listet einige der Planetoiden oder Zwergplaneten auf.

Eigenschaft	Pluto[5]	Ceres[6]	Haumea[7]	Makemake[8]	Eris[9]
Mittlerer Bahnradius	5 906 440 628 km	413 690 250 km	6 432 011 461 km	6 783 345 606 km	10 180 122 852 km
Mittlerer Bahnradius	39.482 117 AU	2.765 349 AU	42.995 341 AU	45.343 865 AU	68.049 918 AU
Bahnexzentrizität	0.2488273	0.079138251	0.198132061	0.163844964	0.433628367
Bahnneigung	17.089°	10.59°	28.21°	28.98°	44.144°
Durchmesser	2302 km	952.4 km	2013 km	1468 km	2326 km
Neigung der Achse	122.53°	4°	unbekannt	unbekannt	28.3°
Massendichte	2.05 g cm^{-3}	2.09 g cm^{-3}	1.885 g cm^{-3}	(1.4 . . . 3.2) g cm^{-3}	1.638 g cm^{-3}
Umdrehungsdauer	6.387 229 d	0.378 09 d	0.163 194 d	0.323 792 d	1.079 167 d
Mittlere Bahngeschwindigkeit	4.669 km s^{-1}	17.877 km s^{-1}	4.498 km s^{-1}	4.393 km s^{-1}	3.434 km s^{-1}
Umlaufdauer um die Sonne	247.94 a	4.6082 a	284.7965 a	307.5 a	557.5 a
Umlaufdauer um die Sonne	90 560.1 d	1683.1 d	104 021.9 d	112 314.4 d	203 626.9 d
Feldvektor Gravitation	0.66 m s^{-2}	0.28 m s^{-2}	0.401 m s^{-2}	0.545 088 m s^{-2}	0.827 m s^{-2}
Fluchtgeschwindigkeit	1.23 km s^{-1}	0.515 km s^{-1}	0.809 km s^{-1}	0.895 km s^{-1}	1.384 km s^{-1}
Oberflächentemperatur	(−240 bis − 218) °C	(−83 . . . − 35) °C	< 223 °C	nicht definiert	(−243 . . . − 218) °C
Atmosphäre	N_2, CH_4, CO	H_2O	unbekannt	unbekannt	unbekannt
Monde	5	keine	2	1	1
Ringe	nein	nein	nein	nein	nein

Tab. 17.4.: Liste einiger Zwergplaneten im Sonnensystem, sowie eines Asteroiden (Quelle: NASA [NAS19f] und [NJ19]).

17.6.1. Planetoiden

Planetoiden sind wie gesagt Objekte, die ihre Umlaufbahn nicht beherrschen. Ausser Pluto zählen zu diesen Objekten diejenigen aus dem Kuipergürtel. Der Kuipergürtel ist eine Ansammlung von Planetoiden und weiteren Objekten zwischen der Neptunbahn und der weiter draussen liegenden Oort'schen Wolke.

[5] Nach [Wik19m].
[6] Nach [Wik19a] und [Com+16].
[7] Nach [Wik19e].
[8] Nach [Wik19h].
[9] Nach [Wik19c].

17.6.1.1. Pluto

Abb. 17.42.: Bild des Pluto aufgenommen durch die New Horizons-Sonde der NASA (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/Alex Parker, https://solarsystem.nasa.gov/resources/933/true-colors-of-pluto/?category=planets/dwarf-planets_pluto)

Pluto (siehe Abb. 17.42) ist von der Grösse und der Struktur her ähnlich wie der Neptunmond Triton. Pluto wurde am 18. 2. 1930 von Clyde Tombaugh entdeckt. Von der Erde aus gesehen ist Pluto ein Objekt mit 15 mag. Seine Bahn mit einer Umlaufdauer von 248.5 a hat eine numerische Exzentrizität von 0.25. Das Perihel liegt mit 29.7 AU innerhalb der Neptunbahn, das Aphel hat den Wert 49.3 AU [CO07, pp. 813-816].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

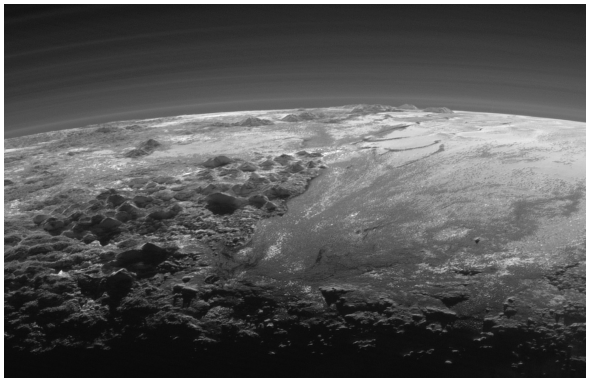


Abb. 17.43.: Berge und Ebenen auf Pluto, fotografiert von New Horizons. Rechts ist die Sputnik-Ebene, links die Norgay und Hillary Montes. Das Bild ist 380 km breit. Die Berge sind schätzungsweise 10 000 m hoch (NASA/JHUAPL/SwRI, https://solarsystem.nasa.gov/resources/796/closer-look-majestic-mountains-and-frozen-plains/?category=planets/dwarf-planets_pluto).

Pluto (siehe Abb. 17.43) hat eine vereiste Oberfläche mit Bergen. Es wird vermutet, dass die Atmosphäre des Planeten nur in der Nähe des Perihels existiert.

17.6.1.1.1. Charon Der Zwergplanet Pluto hat einen fast gleich grossen Mond, Charon (siehe Abb. 17.44). Charon ist sehr ähnlich wie Pluto aufgebaut. Charons Masse ist etwa 12.4 % der Masse des Pluto. Charon und Pluto umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt im gegenseitigen Abstand von 19 640 km in 6.39 d. Die Eigenrotation von Charon wie auch die von Pluto sind exakt gleich lang wie die Umdrehungsdauer [CO07, pp. 813-815].

Abb. 17.44.: Charon ist der grösste Mond Plutos. Die Aufnahme wurde von New Horizons gemacht. (NASA/Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute, https://solarsystem.nasa.gov/moons/pluto-moons/charon/in-depth/)

17.6.1.2. Eris

Der Planetoid Eris wurde im Jahre 2003 mit dem Palomar-Teleskop in Kalifornien entdeckt [Wik19d]. Eris ist massereicher als Pluto, aber kleiner. Eris (benannt nach der griechischen Göttin der Zwietracht) ist der Grund, warum Pluto kein Planet sondern ein Planetoid oder Zwergplanet ist. Abb. 17.45 zeigt eine Aufnahme des Hubble-Teleskops von Eris und dem Mond Dysnomia.

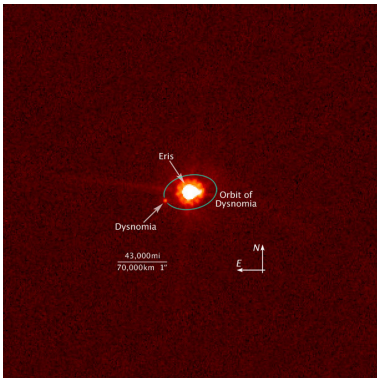


Abb. 17.45.: Zwergplanet Eris mit Mond Dysnomia gesehen von Hubble (NASA, ESA, and M. Brown (California Institute of Technology), https://solarsystem.nasa.gov/resources/403/hubble-view-of-eris-and-dysnomia/?category=solar-system_kuiper-belt).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19d].

17.6.1.3. Haumea

Haumea wurde 2005 auf Aufnahmen von 2003 des Hubble Space Telescopes entdeckt (Abb. 17.46). Haumea hat zwei Monde, Hi'iaka und Namaka. Die Bahndaten sind in der Tabelle 17.1 aufgeführt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abb. 17.46.: Bild des Planetoiden Haumea mit den Monden H'iaka (oben) und Namaka (unten), aufgenommen 2015 mit dem Hubble Space Teleskop (Credit: NASA https://heasarc.gsfc.nasa.gov/Images/StarChild/solar_system_level2/haumea.jpg).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19f].

17.6.1.4. Makemake

Der Planetoid Makemake wurde am 31. 3. 2005 mit dem Palomar-Teleskop entdeckt (Abb. 17.47). Makemake hat einen Mond mit der Bezeichnung S/2015 (136472) 1. Die Bahndaten von Makemake sind in der Tabelle 17.1 aufgeführt.

Abb. 17.47.: Bild des Planetoiden Makemake des Hubble Space Teleskop aus dem April 2015. Der Pfeil zeigt auf den Mond S/2015 (136472) 1 (Credits: NASA, ESA, and A. Parker and M. Buie (SwRI) https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/image1-_p1618aw.jpg).

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [NAS19f] und [Wik19i].

17.6.1.5. Objekte des Kuipergürtels

Der KUIPERGÜRTEL ist nach Gerard Peter Kuiper benannt. Abb. 17.48 zeigt neben der Oort'schen Wolke die Lage des Kuipergürtels. Er erstreckt sich etwa von 30 AU bis 50 AU und enthält etwa 70000 Objekte [Wik21h].

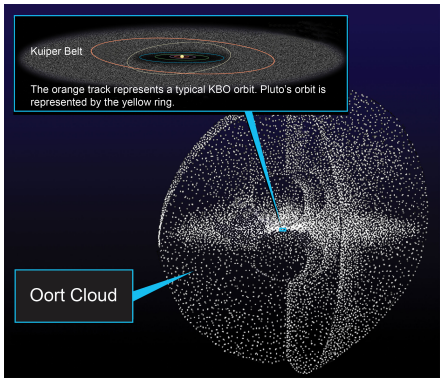


Abb. 17.48.: Illustration der Oort'schen Wolke und der Lage des Kuipergürtels (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/491/oort-cloud/?category=solar-system_oort-cloud).

Es scheint, dass auch Systeme mit Exoplaneten Gürtel besitzen, die ähnlich dem Kuipergürtel sind.
Ausserhalb des Kuipergürtels befindet sich die Oort'sche Wolke.

17.6.2. Asteroiden

Unter Asteroiden versteht man kleinere Objekte des Sonnensystems die sich in der Regel innerhalb der Jupiterbahn befinden.

17.6.2.1. Asteroidengürtel

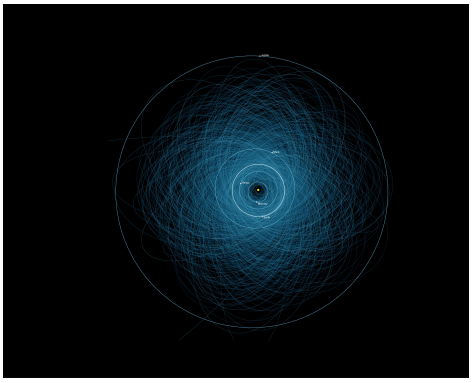


Abb. 17.49.: Asteroiden, die die Erdbahn kreuzen (NASA/JPL-Caltech, https://solarsystem.nasa.gov/resources/405/orbits-of-potentially-hazardous-asteroids-phas/?category=planets_jupiter)

Asteroiden konzentrieren sich hauptsächlich auf den Asteroidengürtel (siehe Abb. 17.49). Nach [CO07, pp. 835-837] gibt es die folgenden Klassen von Asteroiden:

Typ S Asteroiden befinden sich im inneren Asteroidengürtel (2 bis 3.5) AU. Sie bestehen aus eisen- und magnesiumreichen Silikaten und scheinen rötlich zu sein. Beispiele sind Gaspra, Ida oder Eros.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Typ M Asteroiden befinden sich wie die Typ-S Asteroiden im inneren Asteroidengürtel (2 bis 3.5) AU. Eisen und Nickel dominieren ihre Absorptionsspektren.

Typ C Asteroiden finden sich im ganzen Asteroidengürtel (2 bis 4) AU. Sie konzentrieren sich bei 3 AU. Sie sind sehr schwarz und scheinen viel Kohlenstoff zu enthalten.

Typ P Asteroiden sind im äusseren Teil des Asteroidengürtels (3 bis 5) AU mit einem Maximum bei 4 AU. Sie sind rötlich und enthalten in ihrer Oberfläche viel altes organisches Material, ähnlich wie bei Kometen.

Typ D Asteroiden sind ähnlich wie die Typ-P Asteroiden, aber röter und weiter von der Sonne weg. Einige der kleinen Monde des Jupiters haben die gleiche optische Charakteristik wie Typ-D Asteroiden.

17.6.2.1.1. (1) Ceres Als Beispiel eines Asteroiden wird hier Ceres vorgestellt (Abb. 17.50). Ceres (bei 2.77 AU scheint einen Wassereismantel zu haben. Ceres ist der einzige Asteroid, der als Zwergplanet oder Planetoid klassifiziert ist. Ceres wurde um 1800 entdeckt.

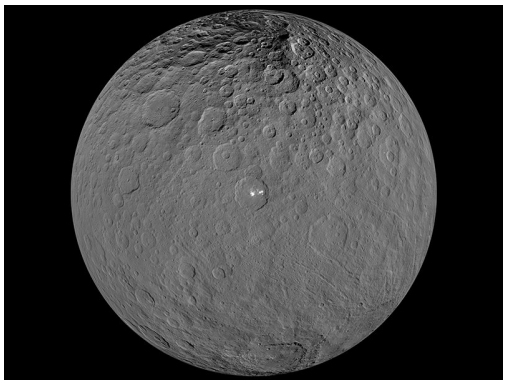


Abb. 17.50.: Zwergplanet Ceres aus dem Astroidengürtel aufgenommen von der Sonde Dawn (NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA, https://solarsystem.nasa.gov/system/feature_items/images/141_PIA21906_800w.jpg)

Mehr Informationen gibt es unter anderem in [CO07, pp. 716-717, 830, 837], [NAS19f] und [Wik19a].

17.6.3. Kometen

Kometen sind seit Urzeiten bekannt. In der Nähe der Sonne haben Sie einen Schweif. Kometen gibt es mit «kurzen» Perioden oder Umlaufszeiten von weniger als 200 a. Die kurzperiodischen Kometen bewegen sich in oder nahe der Ekliptik. Es gibt aber auch langperiodische Kometen mit Umlaufszeiten von (200 bis $1 \cdot 10^6$) a. Diese langperiodischen Kometen können Bahnen haben, die stark zur Ekliptik geneigt sind. Sie stammen aus der Oort'schen Wolke (siehe Abb. 17.51).

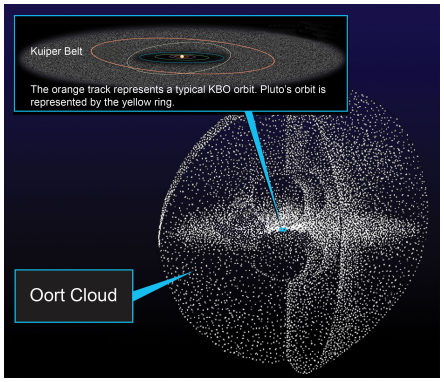


Abb. 17.51.: Illustration der Oort'schen Wolke (NASA, https://solarsystem.nasa.gov/resources/491/oort-cloud/?category=solar-system_oort-cloud).

Die Oort'sche Wolke ist nach ihrem Entdecker Jan Hendrik Oort benannt. Kometen, die die Erdbahn kreuzen, haben eine kleine Wahrscheinlichkeit mit der Erde zu kollidieren. Sollte der Kern gross sein, hätte dies katastrophale Folgen für die Erde. Weitere Informationen gibt es bei [CO07, pp. 816-826].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

18. Sonne

Die Sonne ist die einzige langfristige Quelle von Energie für die Erde. Die Strahlung der Sonne erwärmt die Erde über die Temperatur der Hintergrundstrahlung von 2.7 K. Die Strahlung der Sonne beeinflusst nicht nur die Natur sondern auch unsere Kommukationsverbindungen. Die wichtigsten Kenngrössen der Sonne sind:

- Masse: $1.989 \cdot 10^{30}$ kg
- Sichtwinkel der Sonnenscheibe: $2\alpha = 31\,'59.2\,''$ $\Rightarrow R_\odot = 6.96 \cdot 10^8$ m
- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 = 1.3 \cdot 10^{27}$ m^3
- mittlere Dichte $\langle\rho\rangle = 1410$ kg m^{-3}
- Solarkonstante $K_S = 1360$ W m^{-2}
- Leuchtkraft: $L_\odot = 3.82 \cdot 10^{26}$ W
- Temperatur der Schwarzkörperstrahlung der Sonne [CO07, p. 360] $T_e = 5777$ K
- Massenverlust pro Zeit: $\frac{dM_\odot}{dt} = \frac{L_\odot}{c^2} = 4.2 \cdot 10^9$ kg s^{-1}
- Spektralklasse ([Gar94]): G2V
- Absolute Magnitude ([Wil18] und [Oke74]): $M_B = 5.31$ mag, $M_V = 4.80$ mag, $M_K = 5.08$ mag im AB-System.

Die Website des Marshall Space Flight Center [Mar21] gibt einen ersten Einblick in die Physik der Sonne. Ebenso kann der Webauftritt der Stanford University Solar Observatories Group at Stanford University [Sol21] genutzt werden. Aktuelle Bilder der Sonne zeigt das NASA [NAS21].

18.1. Experimentelle Beobachtungen

Wir können keine Messungen auf der Sonne durchführen. Alles was wir wissen stammt von der Untersuchung von elektromagnetischer Strahlung und vom Teilchenstrom aus der Sonne, zusätzlich noch die Beobachtung des Gravitationsfeldes.Historisch am Wichtigsten ist die optische Beobachtung der Sonne im sichtbaren Bereich. Spektroskopie erlaubt Rückschlüsse auf Magnetfelder und Temperaturen. Die Teilchenstrahlung von der Sonne (Protonen, Elektronen, aber auch Neutrinos) verrät einiges über die im Inneren ablaufenden Prozesse. Die Untersuchung der Gravitation gibt Hinweise auf die Masse der Sonne, aber auch auf Inhomogenitäten. Zusätzlich zur Beobachtung von der Erdoberfläche aus wird die Sonne seit über siebzig Jahren vom Weltraum aus beobachtet.

Zu den grundlegenden Messdaten gehört die Solarkonstante $K_S = 1360\ \mathrm{W\ m^{-2}}$, ein Mass für die abgestrahlte Leistung. Daraus ergibt sich die momentane Leuchtkraft von $L_\odot = 3.82 \cdot 10^{26}$ W bei einer Temperatur der äquivalenten Schwarzkörperstrahlung $T_e = 5777$ K.

18.1.1. Sonnenflecken

Aus dem griechischen Kulturkreis gibt es aus dem Jahre 467 v. Chr. eine nicht eindeutig zugeordnete Beobachtung von Anaxagoras. Um die Wende zum 3 Jahrhundert v. Chr. gibt es von Theophrastos von Eresos einen eindeutigen Bericht von einem Sonnenfleck. In etwa der Zeit gibt es auch Berichte über Sonnenflecken aus China. Aus dem persisch-arabischen Kulturraum berichtet Avicenna, dass im Jahre 807 ein Sonnenfleck mehrere Tage lang zu sehen gewesen sei. Im westeuropäischen Kulturkreis stammen die ersten publizierten Berichte aus dem Jahre 1611 von Johannes Fabricius und 1613 von Galileo Galilei. Die meisten Sonnenflecken sind so klein, dass Sie ohne Instrumente nicht beobachtet werden können. Aber es gibt einige die gross genug sind, um sie mit einem **geschützten** Auge zu sehen.

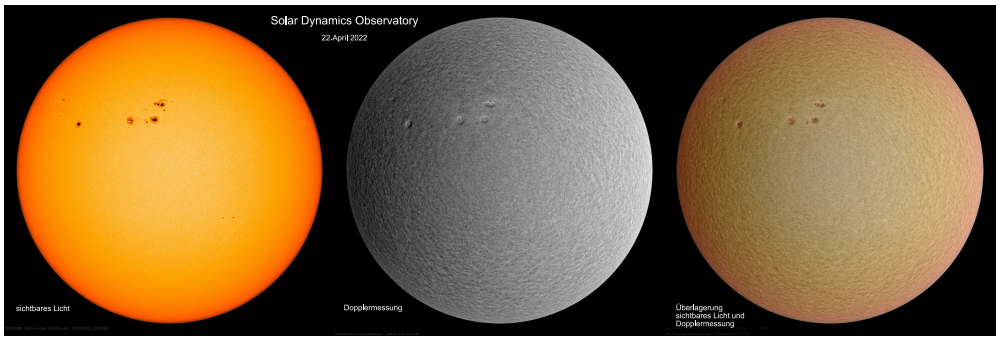


Abb. 18.1.: Messung des Sonnenlichtes und der Sonnenoberfläche durch das SDO. Links ist das sichtbare Licht der Sonne am 22. 4. 2022 gezeigt, in der Mitte das Dopplerbild und rechts eine Überlagerung (Quelle [NP22]).

Abbildung 18.1 zeigt die Oberfläche der Sonne gemessen durch die Sonde SDO der NASA. Die Überlagerungen zeigt, dass Sonnenflecken in Dellen der PHOTOSPHÄRE der Sonne liegen. Aktuelle Bilder der Sonne können auf den Webseiten [NP22] oder [GCM11] gesehen werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

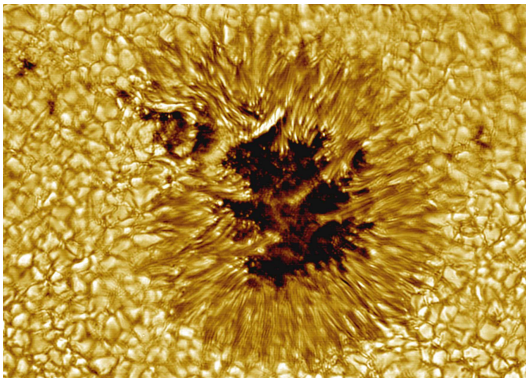


Abb. 18.2.: Sonnenflecken im H_α-Spektrum (Credit : Vacuum Tower Telescope, NSO, NOAO, http://apod.nasa.gov/apod/ap051106.html)

Abbildung 18.2 zeigt einen Sonnenfleck. Während die Umgebung mit einer Schwarzkörpertemperatur von etwa 5780 K strahlt, sind die dunklen Bereiche bis zu 1500 K kühler. Das Bild zeigt eine schmalbandige Aufnahme im H_α-Spektrum. Sie zeigt besonders gut die Verteilung der Wasserstoffatome. Die granulare Struktur deutet auf heftige Turbulenzen hin.

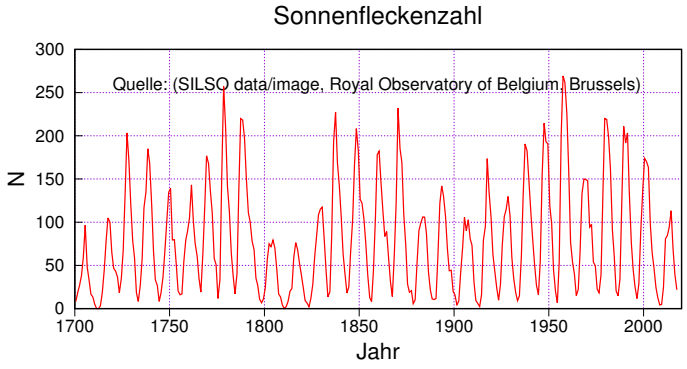


Abb. 18.3.: Zeitliche Entwicklung der Sonnenfleckenzahl (Datenquelle: (SILSO data/image, Royal Observatory of Belgium, Brussels), siehe auch [Loc13])

Die Zahl der Sonnenflecken ist nicht konstant. Abbildung 18.3 zeigt die Schwankung der Zahl seit 1700. Für diese Zeit liegen Beobachtungen der Sonne mit Teleskopen vor. Die Sonnenfleckenzahl scheint mit der Aktivität der Fusionsreaktionen zusammenzuhängen, aber auch mit der Konvektion in der Sonne. Die aktuelle Sonnenfleckenzahl kann bei der NOAA nachgesehen werden ([NOA22]). Ebenso können dort die Daten herunter geladen werden.

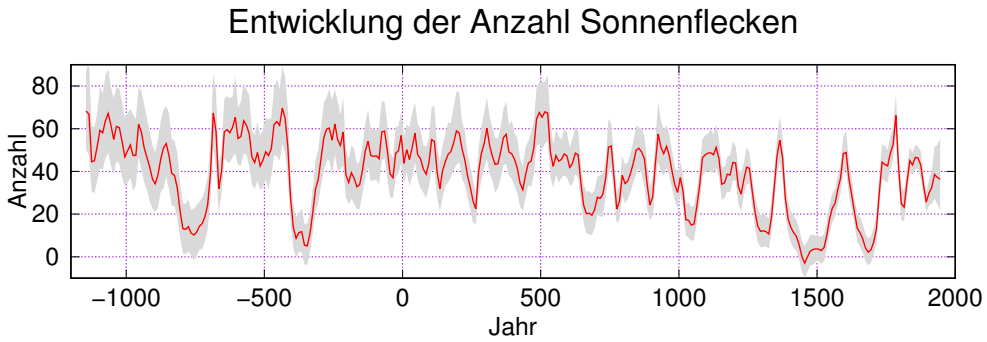


Abb. 18.4.: Historische Sonnenfleckenzahl (I. G. Usoskin u. a. [Uso+14], Daten aus I. G. Usoskin; Hulot und Y. G. Gallet [UHG14]).

I. G. Usoskin u. a. [Uso+14] haben aus ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ -Daten die Anzahl der Sonnenflecken abgeleitet. Abbildung 18.4 zeigt die Daten. Das graue Band gibt die Unsicherheit an.

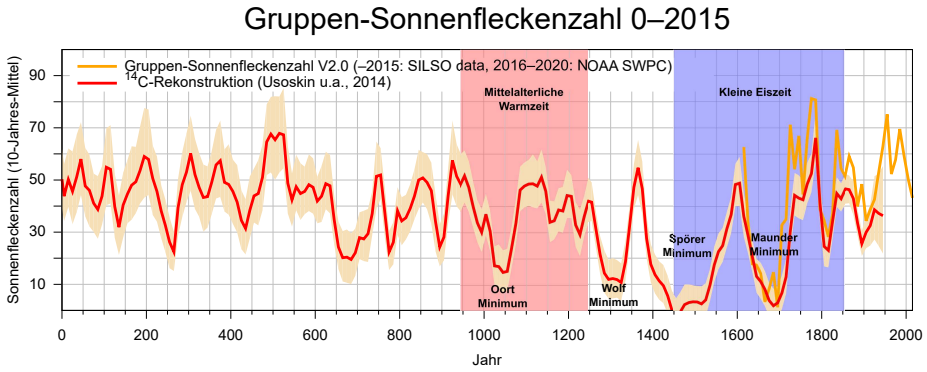


Abb. 18.5.: Historische Sonnenfleckenzahl (I. G. Usoskin u. a. [Uso+14], Daten aus I. G. Usoskin; Hulot und Y. G. Gallet [UHG14] sowie [Loc13], DeWikiMan, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 18.5 zeigt die Daten aus den Abbildungen 18.4 und 18.3 kombiniert. Überlagert ist die Dauer der mittelalterlichen Warmzeit (Klimaoptimum) in Europa sowie die Zeit der sogenannten «kleinen Eiszeit». Die Sonnenfleckenminima scheinen mit diesen Klimaextrema zu korrelieren. Ein kausaler Zusammenhang ist für mich nicht ersichtlich.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

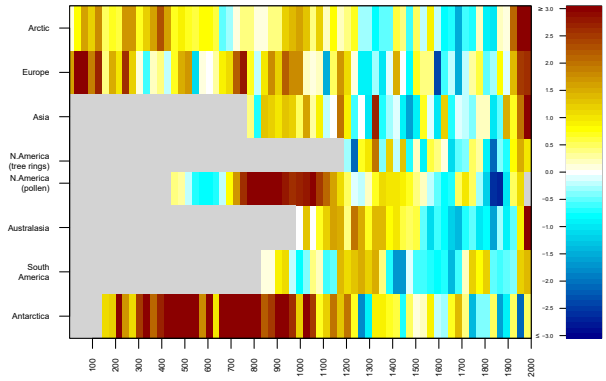


Abb. 18.6.: Historische Sonnenfleckenzahl (Pages 2k Consortium [Pag13], DeWikiMan, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 18.6 zeigt die Temperaturanomalien der letzten 2000 Jahre, aufgeschlüsselt nach Kontinent und Messmethode. Diese Abbildung basierend auf Daten von Pages 2k Consortium [Pag13] zeigt, dass zwischen etwa 1300 bis etwa 1900 die Temperaturen auf der ganzen Erde niedriger waren.

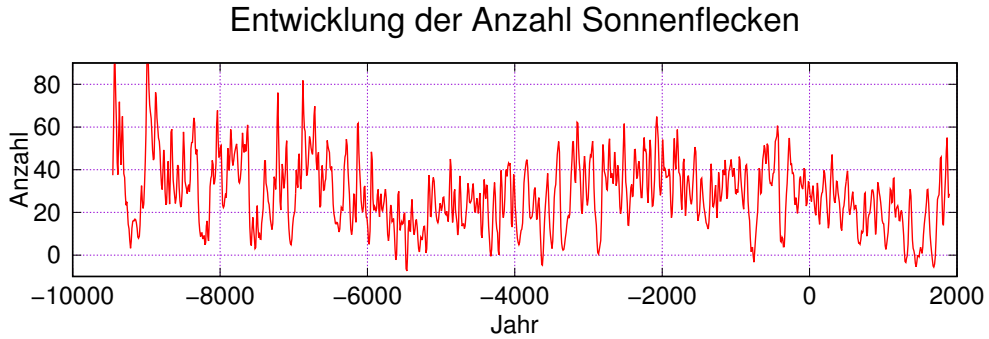


Abb. 18.7.: Sonnenfleckenzahl über 11000 Jahre (S. K. Solanki u. a. [Sol+04]).

Abbildung 18.7 zeigt die rekonstruierte Sonnenfleckenzahl der letzten 11000 Jahre. Die Beschreibung der Rekonstruktion ist in S. K. Solanki u. a. [Sol+04].

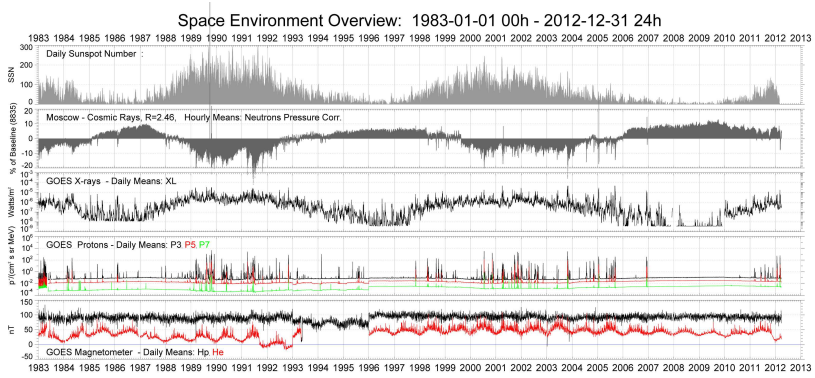


Abb. 18.8.: Schwankung der Zahl der Sonnenflecken (By Daniel Wilkinson (Own work) [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons).

Abbildung 18.12 zeigt die Korrelation der Sonnenfleckenzahl mit unterschiedlichen weiteren Messwerten. Die kosmischen Strahlen zeigen eine eindeutige Antikorrelation zur Sonnenfleckenzahl. Die Röntgenstrahlen wie auch die Zahl der von der Sonne emittierten Protonen steigt mit zunehmender Sonnenfleckenzahl. Dies ist ein Hinweis auf eine höhere Aktivität der Sonne bei höherer Sonnenfleckenzahl. In der magnetischen Induktion gibt es keinen messbaren Effekt der Sonnenfleckenzahl.

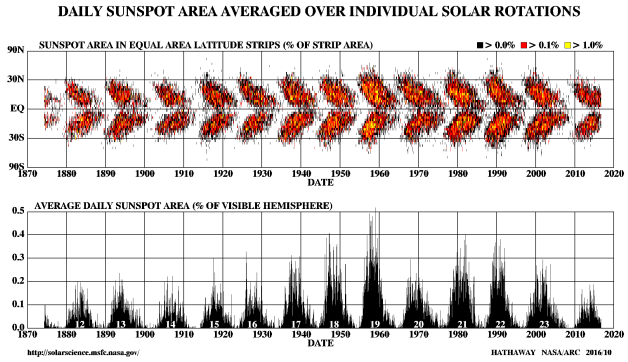


Abb. 18.9.: Bewegung der Sonnenflecken und Sonnenfleckenzahl (NASA https://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif und https://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml, siehe auch D. H. Hathaway [Hat15, Fig. 9])

Die Grafik in Abb. 18.9 zeigt die Bewegung von Sonnenflecken. Horizontal liegt die Zeitachse, vertikal, der Abstand zum Sonnenäquator. Sonnenflecken werden zu Beginn eines Zyklus etwa bei einem Abstand von (20 bis 30)° nördlich und südlich des Sonnenäquators gebildet. Mit der Zeit wandern die Sonnenflecken und die Orte an denen neue Flecken gebildet werden Richtung Äquator. Der Zyklus endet wenn die Sonnenflecken noch wenige Grad vom Äquator entfernt sind. Zusammen ergibt sich ein Muster, das wie die Flügel eines Schmetterlings aussieht. Deshalb wird diese Art der Darstellung im Englischen auch «Butterfly Diagram» genannt. Weitere Informationen zu Sonnenflecken finden sich z.B. in D. H. Hathaway [Hat15]

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

und M. Lockwood [Loc13].

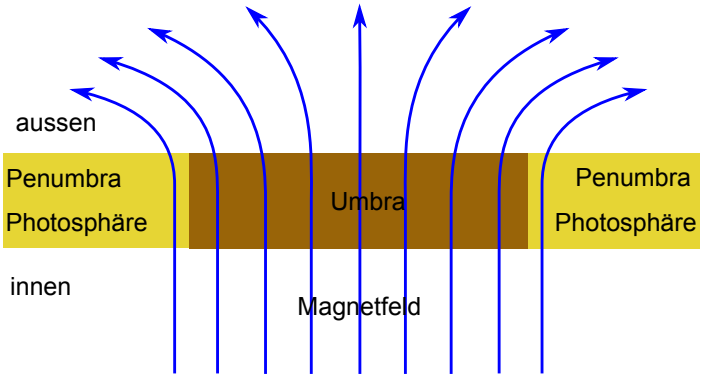


Abb. 18.10.: Struktur von Sonnenflecken (adaptiert aus Demtröder [Dem10, Abb. 10.78])

Schematisch sieht ein einzelner Sonnenfleck wie in Abb. 18.10 aus. Jeder etwas dunklere Fleck ist mit einem aus- oder eintretenden Magnetfeld gekoppelt. Die Richtung des magnetischen Feldes kann auch umgekehrt wie in der Abbildung sein.

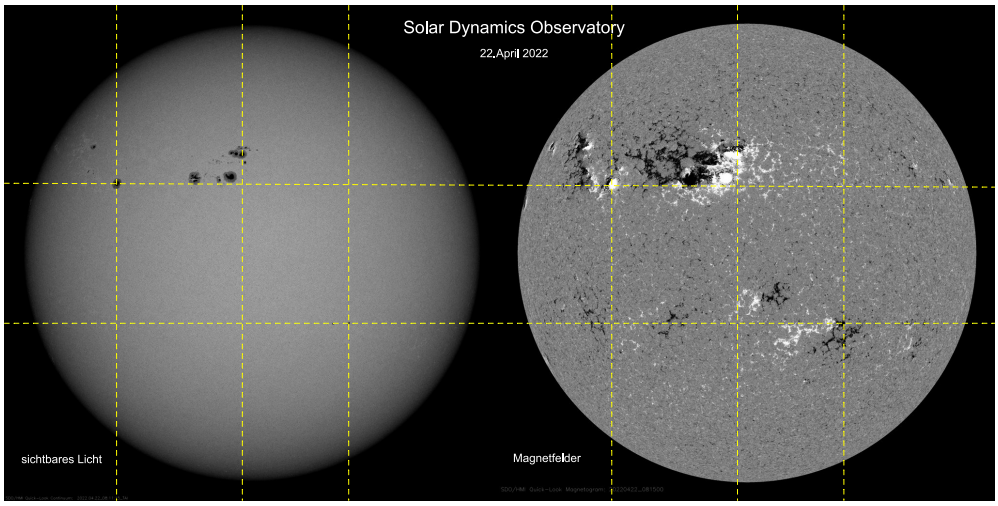


Abb. 18.11.: Bild der Sonne im siuchtbaren Bereich (links) und der Magnetfelder (rechts), gemessen durch das SDO. Links ist das sichtbare Licht der Sonne am 22. 4. 2022 gezeigt und rechts eine die Magnetfelder (Quelle [NP22]).

In Abbildung 18.11 wird links das Bild der Sonne im sichtbaren Licht gezeigt und rechts dazu das gleichzeitig gemessene Bild der Magnetfelder. Die Daten stammen von dem Satelliten SDO [NP22]. Die Hilfslinien sollen helfen, die relative Lage der Magnetfelder zu den Sonnenflecken zu zeigen.

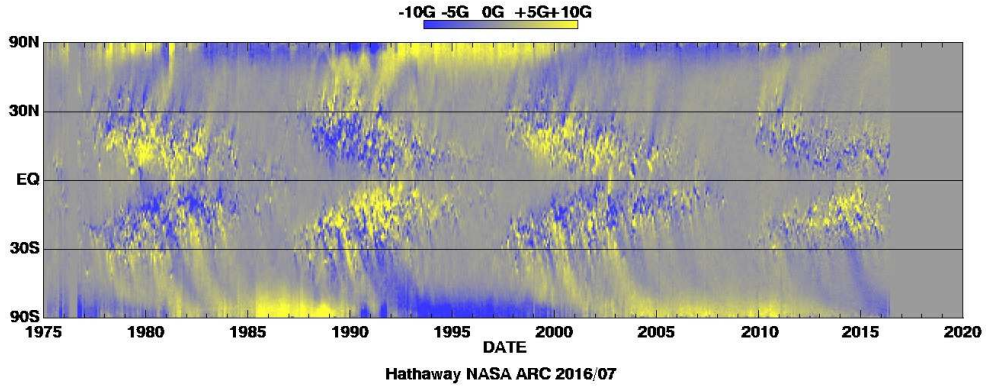


Abb. 18.12.: Differenzielle Rotation der Sonne: Magnetfeldlinien werden aufgewickelt und es gibt periodische Polwechsel (By David Hathaway, NASA Marshall Space Flight Center [Public domain], via Wikimedia Commons)

Das SCHMETTERLINGSDIAGRAMM ist auch in den Magnetfeldstärken sichtbar (siehe Abb. 18.12). Die Darstellung gibt einen ersten Hinweis auf den bipolaren Charakter von SONNENFLECKEN (siehe auch Abb. 18.16). Wie in Abb. 18.9 ist ersichtlich, dass die Sonnenflecken zu Beginn des Zyklus bei ungefähr 30° entstehen und gegen Ende eher in Äquatornähe. Zusätzlich ist ersichtlich (Magnetfelder in der Polarregion), dass die Sonne ihr Magnetfeld zu Beginn eines Zyklus umpolt. Auch die Erde polt ihr Magnetfeld um, aber nicht nach (10 bis 11) a sondern nach $> 1 \cdot 10^4$ a. Das Fazit ist: Sonnenflecken und die magnetische Struktur der Sonne sind nicht statisch.

18.1.2. Magnetfelder der Sonne

Magnetfelder auf der Sonne (und auf anderen Sternen) werden über den ZEEMAN-EFFEKT gemessen, benannt nach Pieter Zeeman.

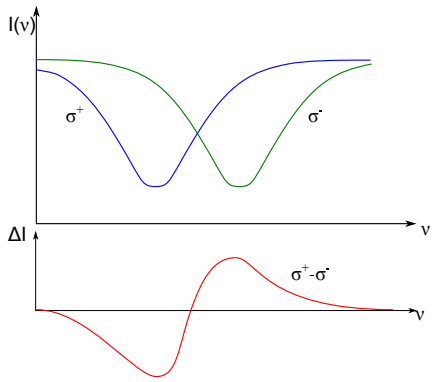


Abb. 18.13.: Messung von Magnetfeldern mit dem ZEEMAN-EFFEKT (nach Demtröder [Dem10, 10.79ab]).

Der klassische Zeeman-Effekt bewirkt eine konstante Frequenzverschiebung. Es

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

gibt ein Zeeman-Triplett mit (siehe [MG19, Kap. 6.5.3., (6.5.50)])

$$\Delta E = g_j \mu_B B_0 \tag{18.1.1}$$

Aus dieser Gleichung kann die Stärke der magnetischen Induktion bestimmt werden. Eine Analyse der Polarisation zusammen mit den beobachteten Stärken in der Umgebung ergeben auch die Richtungen der Magnetfeldlinien [Hal+19].

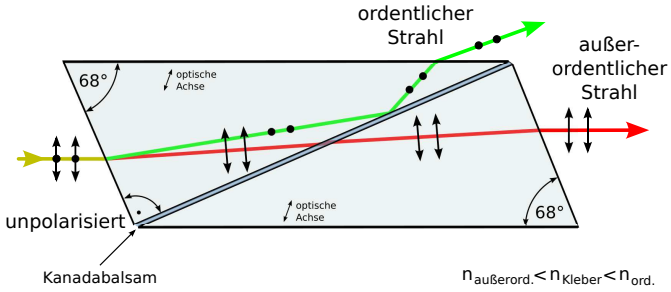


Abb. 18.14.: Aufbau eines Nicols-Prismas zur genauen Polarisation von Licht ([Wik21i] Abbildung: Cepheiden, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons)

Nach G. E. Hale u. a. wird ein vor den Eintrittsspalt eines Spektrometers eine $\lambda/4$-Platte und ein Nicols-Prisma (siehe Abb. 18.14) gesetzt. Es wird ausgenutzt, dass mit dieser Apparatur (siehe Abb. 18.15) bei einem Magnetfeld, dessen Feldlinien zum Spektrometer zeigen oder deren Richtung maximal 60° zur Sichtlinie gekippt sind, die Richtung der Feldlinie auf den Beobachter zu oder weg bestimmt werden kann.

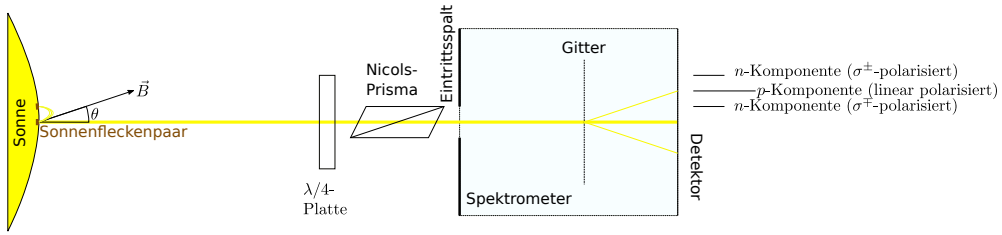


Abb. 18.15.: Messung der Richtung von Magnetfeldern wie in G. E. Hale u. a. ([Hal+19]) beschrieben.

Das Zeemann-Triplett besteht aus der zentralen, nicht frequenzverschobenen p-Komponente. Sie ist linear polarisiert. Die beiden um die Energie ΔE verschobenen Seitenlinien des Tripletts sind zirkular polarisiert (σ-Polarisation). Dabei ist die Polarisationsrichtung der beiden Komponenten entgegengesetzt. Die $\lambda/4$- Platte wandelt nun die linear polarisierte p-Komponente in eine zirkular polarisierte Komponente und die beiden n-Komponenten in zwei orthogonal linear polarisierte Komponente um. Mit dem Nicols-Prisma kann nun die höherfrequente oder die niederiger-frequente n-Komponente ausgeblendet werden. Wird die Richtung von $\boldsymbol{B}$ umgekehrt, wechseln die beiden n-Komponenten ihre Polarisationsrichtung. Nach dem $\lambda/4$-Plättchen sind die linearen Polarisationen um 90° gedreht. Nach G. E. Hale u. a. kann bis zu einem Winkel von $\theta < 60°$ die Richtung bestimmt

werden. Damit ist dann auch klar, welcher Sonnenfleck ein magnetischer Nordpol und welcher der Südpol ist.

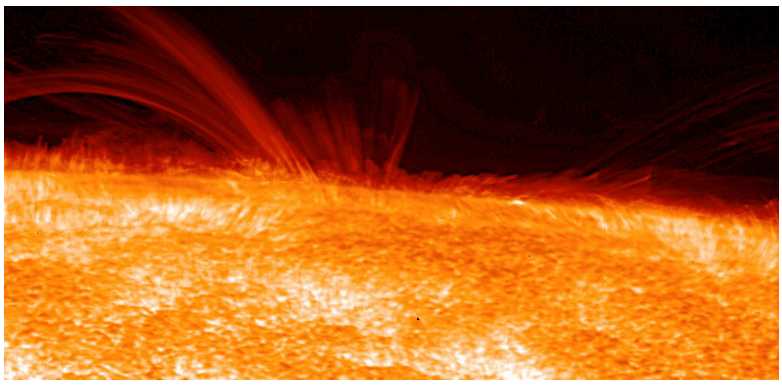


Abb. 18.16.: Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare (Hinode JAXA/NASA/PPARC http://www.esa.int/var/esa/storage/images/esa_multimedia/images/2007/03/fine-scale_structure_of_the_chromosphere/9859039-3-eng-GB/Fine-scale_structure_of_the_chromosphere.jpg).

Abbildung 18.16 zeigt eine tangentiale Ansicht eines Sonnenflecks mit KORONASCHLAUFEN. Ionisierte Teilchen bewegen sich in einer Spiralbahn um die Flusslinien und machen sie so sichtbar.

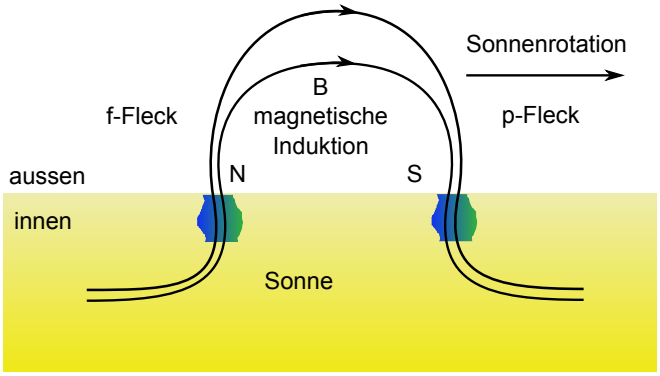


Abb. 18.17.: Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare (nach Demtröder [Dem10, Abb. 10.81]).

In der Regel treten Sonnenflecken immer in Paaren auf (siehe Abb. 18.17). Dabei ist eines der Paare ein magnetischer Nordpol und der andere ein magnetischer Südpol.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

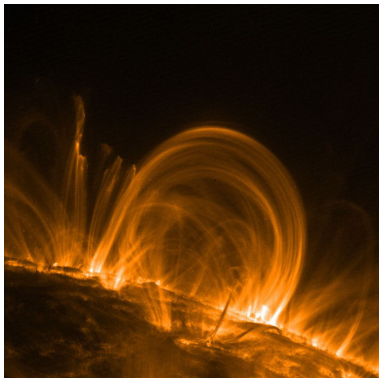


Abb. 18.18.: Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare: Koronaschlaufen (NASA, http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm? Category=Planets&IM_ID=191).

Abbildung 18.18 zeigt solch ein Paar von Koronaschlaufen. Aus der Abbildung ist auch ersichtlich, dass es Magnetfeldlinien gibt, die nicht geschlossen sind.

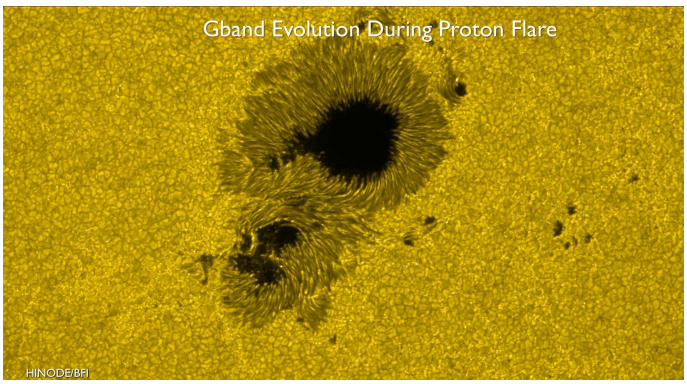


Abb. 18.19.: Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare: G-Band-Entwicklung während eines Protonen-Flares (Quelle: Hinode JAXA/NASA http://www.nasa.gov/mission_pages/hinode/solar_022.html). Das G-Band liegt bei 430.5 nm und detektiert die CH-Moleküle in der oberen Photosphäre (M. Kanao u. a. [Kan+15]).

Von oben sehen die Sonnenflecken dunkel aus (siehe Abbildung 18.19). Das G-Band bildet das Element Fe mit der Wellenlänge 430.790 nm. Der Name G-Band stammt von Joseph Fraunhofer. Die Bezeichnungen und Wellenlängen finden Sie im Abschnitt B.2.

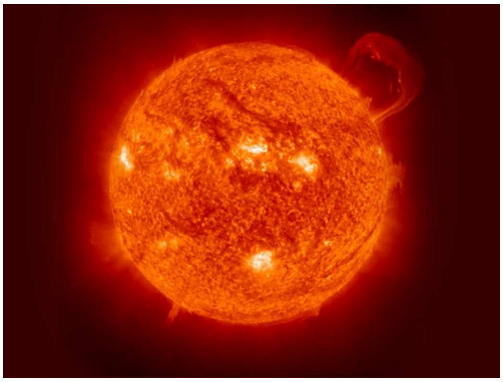


Abb. 18.20.: Protuberanzen (Quelle: NASA/European Space Agency, http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/gallery/PIA03149.jpg).

Grosse Auswürfe der Sonne heissen PROTUBERANZEN (siehe Abbildung 18.20). In ihnen bewegt sich ionisiertes Gas entlang von Flussschläuchen des Magnetfeldes.

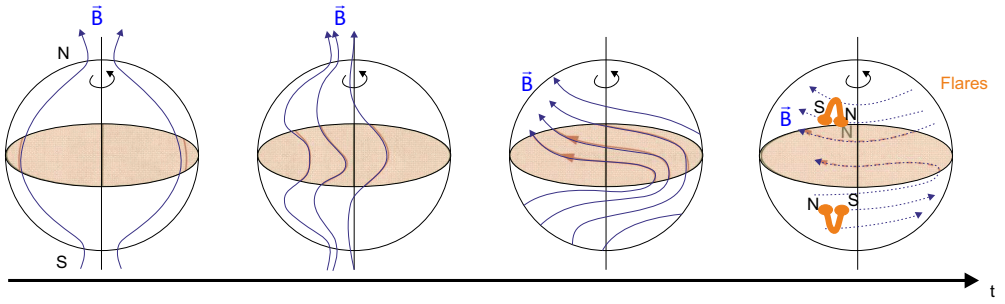


Abb. 18.21.: Magnetfelder und differenzielle Rotation (nach Demtröder [Dem10, Abb. 10.80]).

Durch die Wechselwirkung des magnetisierbaren ionisierten Gases an der Sonnenoberfläche entstehen Flussschläuche, die sich auch deformieren lassen (siehe E. N. Parker „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag“ ([Par79]), D. Degenhardt und B. W. Lites „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag“ ([Par79]) und D. H. Mackay „The Sun's global magnetic field“ ([Mac12]) sowie Abbildung 18.21). Aus der Analyse der Magnetfeldlinien nach G. E. Hale u. a. ([Hal+19]) und aus der Beobachtung der Bewegung der Sonnenflecken kann so abgeleitet werden, dass die Sonne abhängig von der geographischen Breite eine unterschiedliche Rotationswinkelgeschwindigkeit hat.

Verschiedene Autoren haben den Transport von Flussschläuchen auf der Sonne untersucht, so Y. M. Wang; A. G. Nash und N. R. Sheeley „Magnetic Flux Transport on the Sun“ ([WNS89]), R. B. Leighton „Transport of magnetic fields on the sun.“ ([Lei64]), C. R. DeVore; N. R. Sheeley und J. P. Boris „The concentration of the large-scale solar magnetic field by a meridional surface flow“ ([DSB84]), N. R. Sheeley; C. R. DeVore und J. P. Boris „Simulations of the mean solar magnetic field during sunspot cycle 21“ ([SDB85]) und J. Jiang u. a. „Magnetic flux transport at the solar surface“ ([Jia+14]).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abb. 18.22.: Künstlerische Darstellung der Stromfläche des Sonnenmagnetfeldes bei einem Wechsel der Magnetfeldpolarität. Diese Stromfläche wird durch das rotierende Sonnenmagnetfeld induziert. Sie reicht über Neptun hinaus. (https://www.nasa.gov/content/goddard/heliospheric-current-sheet, NASA).

Am Äquator erzeugt das langsam rotierende Magnetfeld der Sonne einen Strom, der sich in einer Fläche von etwa 10^4 km Dicke in der Ekliptik nach aussen bewegt, bis über Neptun hinaus. In dieser Fläche, Stromfläche genannt, fliessen Ströme mit einer Stromdichte von 10^{-10} A m^{-2}. Bis zum Neptun sind das $4.536\,87 \cdot 10^9$ A.

Wenn das Magnetfeld der Sonne seine Polarität wechselt, deformiert sich die künstlerisch dargestellte Stromfläche in Abbildung 18.22. um den Wechsel der magnetischen Induktion auszugleichen. Durch die Bewegung der Sonne und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ionisierten Teilchen ist die Grenze spiralförmig aufgewickelt.

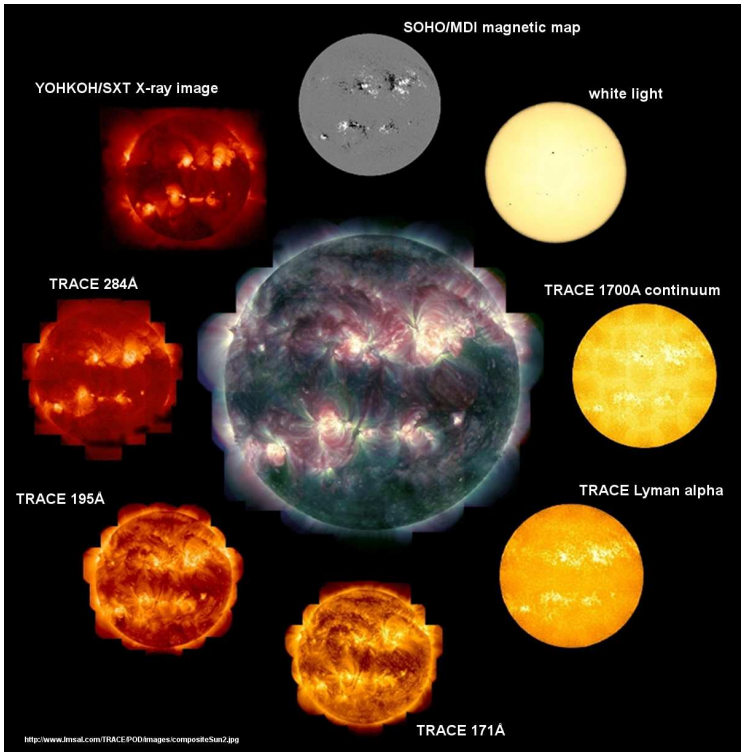


Abb. 18.23.: Sonne mit ihrer Atmosphäre, gesehen von der TRACE-Sonde. Das zentrale Bild zeigt eine dreifarbige Zusammenstellung der Sonnenkorona, gemessen mit der „Transition Region and Coronal Explorer“-Sonde. Das Mosaik ist aus jeweils 3 Aufnahmen von den 23 möglichen Kanälen zusammengesetzt: Grün, blau und rot entsprechen jeweils den 171 Å (1 MK), 195 Å (1.5 MK), and 284 Å (2 MK) Kanälen. Die äusseren Abbildungen zeigen im Uhrzeigersinn beginnend von oben: SOHO/MDI Magnetfeldkarte, weisses Licht, TRACE 1700A Kontinuum, TRACE Lyman alpha, TRACE 171 Å , TRACE 195 Å , TRACE 284 Å, YOHKOH/SXT Röntgenbild.
(Quelle: The composite was prepared by Joe Covington (Lockheed-Martin Missiles and Space, Palo Alto, http://soi.stanford.edu/results/SolPhys200/Schrijver/images/compositeSun2.jpg) The TRACE images may be used without restrictions in publications of any kind. We appreciate an acknowledgement indicating that the Transition Region and Coronal Explorer, TRACE, is a mission of the Stanford-Lockheed Institute for Space Research, and part of the NASA Small Explorer program).

Das Bild der Sonne ist vielfältiger als wie wir es vom sichtbaren Licht her kennen. Abbildung 18.23 zeigt die Sonne in verschiedenen Wellenlängenbereichen von Röntgenstrahlen bis in den UV-Bereich. Zusätzlich ist das Bild im weissen Licht angegeben, das Bild also das wir von der Sonne aus dem täglichen Leben kennen. Ganz oben ist noch eine Magnetfeldkarte gezeigt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

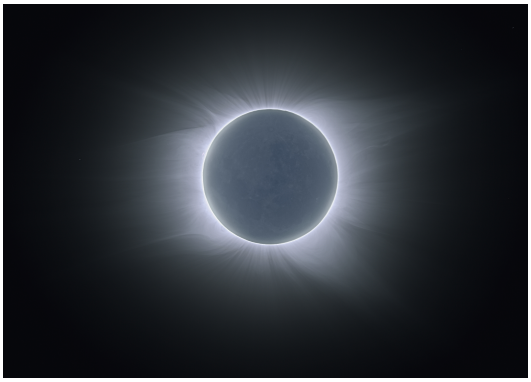


Abb. 18.24.: Sonnenkorona (Credit & Copyright: Alain Maury, Jean-Luc Dauvergne, NASA, http://apod.nasa.gov/apod/ap100721.html)

Abbildung 18.24 zeigt die Korona der Sonne. Die Korona ist ein Bereich heissen Gases bei hohen Temperaturen ($T > 1 \cdot 10^6$ K), der aber gegen die starke Emission der Photosphäre ($T \approx 5.777 \cdot 10^3$ K) nicht sichtbar ist.

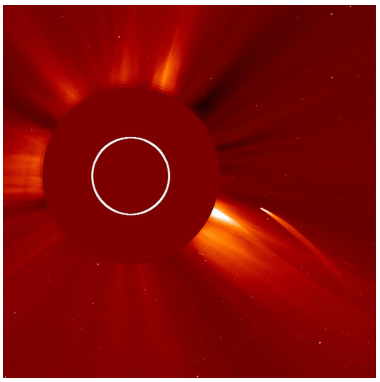


Abb. 18.25.: Bild der Sonnenkorona mit einem Kometen. Aufgenommen am 5. oder 6. Juli 2011 durch SOHO (https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/sun-grazing-comet-of-july-2011, Credits: ESA&NASA/SOHO).

Abbildung 18.25 zeigt die Korona mit einem Kometen. Die helle Sonne ist durch eine Scheibe im Koronographen abgedeckt.

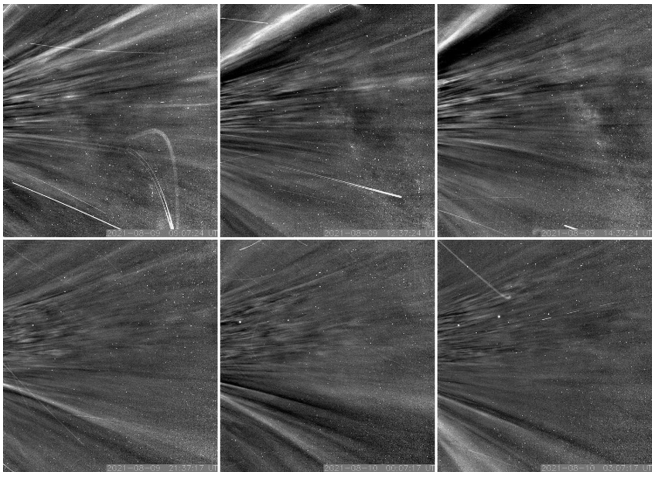


Abb. 18.26.: Details der Sonnenkorona gemessen von der Sonde «Parker Solar Probe». Zu sehen sind sogenannte Coronal Streamers. In der oberen Reihe ist die Sonde über den Streamern, in der unteren reihe darunter. Deshalb sind die scheinbaren Richtungen unterschiedlich. Die Abbildungen sind jeweils zu unterschiedlichen Zeiten aufgenommen, also auch an unterschiedlichen Orten. (Credits: NASA/Johns Hopkins APL/Naval Research Laboratory, Quelle [Joh21]).

Die Coronal Streamers in Abbildung 18.26 sind lokale Inhomogenitäten in der Sonnenkorona, die in dieser Auflösung erstmals durch die NASA-Sonde «Parker Solar Probe» gemessen wurden. Eine nicht ganz neue Übersicht gibt die Arbeit „A review of recent studies on coronal dynamics: Streamers, coronal mass ejections, and their interactions“ von Y. Chen ([Che13]).

18.1.3. Seismik der Sonne

Die Sonne ist ein brodelnder Gasball. Aus der Dopplerverschiebung können die Windgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche bestimmt werden (siehe R. B. Leighton; R. W. Noyes und G. W. Simon „Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.“ ([LNS62]) oder J. W. Evans und R. Michard „Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere.“ ([EM62])). Daraus ergibt sich, dass Schallwellen mit sehr niedriger Frequenz um die Sonne laufen. Die periodischen Randbedingungen ergeben wie auch bei einer Trommelmembran Eigenmopden mit Eigenfrequenzen, siehe auch [Wik21g].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

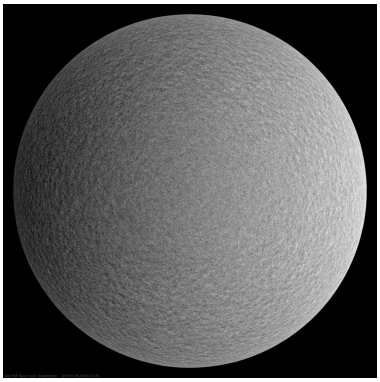


Abb. 18.27.: Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche durch die NASA-Mission SDO (Quelle: NASA https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest_1024_HMID.jpg).

Abbildung 18.27 zeigt eine Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche, also quasi eine Geschwindigkeitskontrolle. Es ist in der Abbildung sichtbar, dass die Geschwindigkeiten örtlich variieren.

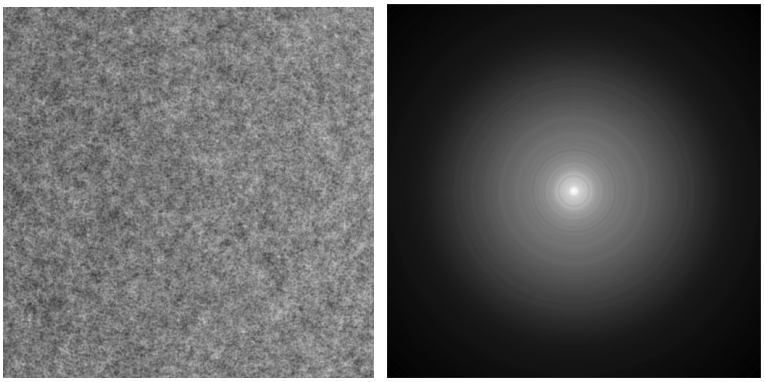


Abb. 18.28.: Linke Seite: Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche durch die NASA-Mission SDO 12.5% × 12.5%- Ausschnitt aus der Abbildung 18.27 (Quelle: NASA https://sdo.gsfc.nasa.gov/assets/img/latest/latest_4096_HMID.jpg). Rechte Seite: Fouriertransformation des Bildes, gefolgt von einer Summation über alle Winkel.

Abbildung 18.28 zeigt auf der linken Seite eine Vergrösserung der Daten aus Abbildung 18.27. Die rechte Seite zeigt die über alle Richtungen gemittelte Fouriertansformation. Die schwach sichtbaren hellen Kreisen geben die charakteristischen Längen der Strukturen an.

J. Christensen-Dalsgaard u. a. berichten in der Arbeit „The Current State of Solar Modeling“ ([Chr+96]) über Modelle und Berechnungen zu Oszillationen der Sonne (und von anderen Sternen). Sie berichten, dass die Sonne mit einer Periode von 5 min oszilliere.

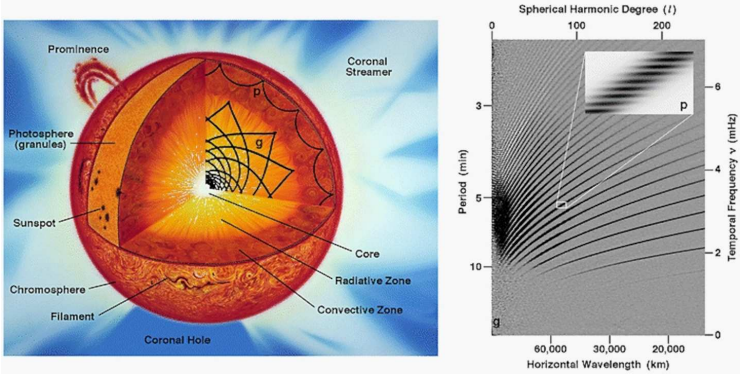


Abb. 18.29.: Schallwellen in der Sonne (https://soho.nascom.nasa.gov/gallery/Helioseismology/mdi004.html Credits: ESA&NASA/SOHO).

Abbildung 18.29 zeigt, wie man sich die Ausbreitung von Schallwellen in der Sonne vorstellt. Die Ideen sind ähnlich wie die von Inge Lehmann entdeckten Erdbebenwellen [Leh36; Köl01]. Die rechte Seite von Abbildung 18.29 zeigt die Dispersionsrelation der seismischen Wellen auf der Sonne. Die gekrümmten Kurven bedeuten, dass die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit unterschiedlich sind.

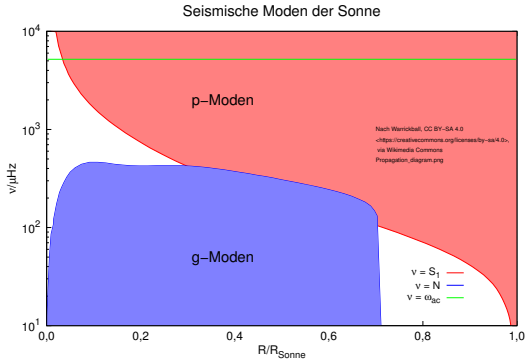


Abb. 18.30.: Ausbreitung seismischer Moden auf der Sonne (nach Warrickball, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons, Propagation_diagram.png).

Abbildung18.30 zeigt die Frequenzbereiche der Druckmoden (p-Moden) und der Schweremoden (g-Moden) auf der Sonne. ν_{ac} ist nach Berechnungen die obere Grenzfrequenz für akustische Moden. Analog zur Erde [Leh64; Leh61] kann aus den unterschiedlichen Frequenzbereichen und aus der Dispersionsrelation auf die Struktur der Sonne geschlossen werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

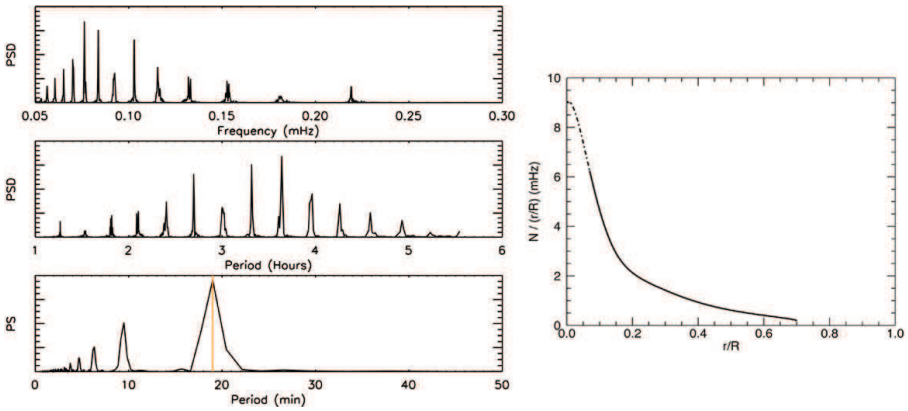


Figure 4. Left: $\ell = 3$ mode power at $r = 0.4R$ shown as a function of frequency (top) or period (middle); Power spectrum of the power spectrum for $\ell = 3$ modes (bottom), with a clear peak around 19 min. Right: truncated gravity-wave cavity (Brunt-Väisälä frequency) due to the inner sphere of radius $0.07R$. This truncation is at the origin of the observed frequency/period shift.

Abb. 18.31.: Frequenzspektrum der Helioseismizität (Allan Sacha Brun, Lucie Alvan, Antoine Strugarek, Stéphane Mathis and Rafael A García, On gravity waves in the Sun, Journal of Physics: Conference Series 440(1), 012043 (2013) 10.1088/1742-6596/440/1/ [Bru+13] (CC-BY-3.0))

Abbildung 18.31 zeigt die Frequenzspektren der seismischen Aktivität auf der Sonne.

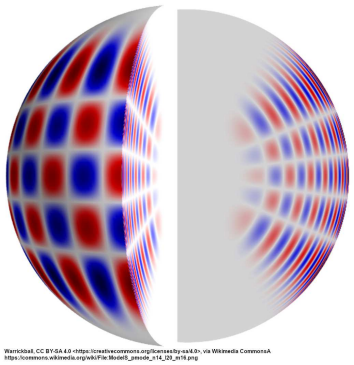


Abb. 18.32.: Schwingungsmode der Sonne: Druckmode (p-Mode) Ordnung: $n = 14$ (radial), $\ell = 20$ (Winkel θ) und $m = 16$ (Winkel ϕ) (Credits: Warrickball, CC-BY-SA 4.0 viaWikimedia Commons).

Abbildung 18.32 ist eine Visualisierung einer Schwingungsmode der Sonne. Weitere Informationen gibt das GONG-Netzwerk [Obs19]. Eine tagesaktuelle Ansicht der Sonne gibt es auf der Website https://sdo.gsfc.nasa.gov/.

18.2. Modelle

Da es nicht möglich ist, im Inneren der Sonne direkte Messungen durchzuführen müssen Modelle die Funktion der Sonne beschreiben. Diese Modell machen Aussagen über den Energiefluss aus der Sonne, den Fluss und die Zusammensetzung von Neutrinos und anderen Elementarteilchen, das Magnetfeld und die spektralen Eigenschaften. Im Folgenden werden zwei Modelle beschrieben.

18.2.1. Naives Modell des Energiehaushalts

Wir betrachten die Sonne als homogenen Gasball. Aus dem Gravitationsgesetz kann dann über Integration die potentielle Energie berechnet werden:

$$E_{pot} = -\frac{3}{5} G \frac{M_\odot^2}{R_\odot} = -2.35 \cdot 10^{41}\ \text{J} \tag{18.2.1}$$

Wenn die Kraft $F \propto r^{-n}$ ist, kann der erweiterte Virialsatz angewendet werden und so die kinetische Energie. Diese wiederum hängt mit der Temperatur zusammen.

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{1}{n} \langle E_{pot} \rangle \tag{18.2.2}$$

Damit ergibt sich eine kinetische Energie

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} \frac{M_\odot}{\langle m \rangle} \cdot k \langle T \rangle = -\frac{1}{2} E_{pot} = 1.2 \cdot 10^{41}\ \text{J} \tag{18.2.3}$$

Dabei ist $\langle m \rangle$ die mittlere Atommasse. Die kinetische Energie besteht nicht nur aus der Translationsenergie sondern auch aus der Rotationsenergie des Gases insgesamt. Diese ist

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \leq \frac{1}{5} M_\odot R_\odot^2 \omega^2 = 1.623 \cdot 10^{36}\ \text{J} \tag{18.2.4}$$

Die Rotationsenergie ist vernachlässigbar wenn weniger 0.001 426 % genau gerechnet wird. Die kinetische Energie der Moleküle ist

$$\langle E_{kin,mol} \rangle = \langle E_{kin} \rangle - E_{rot} \tag{18.2.5}$$

Die Temperatur eines Gases mit $\langle E_{kin,mol} \rangle$ ist

$$\frac{3}{2} N_\odot k_B \langle T \rangle = \langle E_{kin,mol} \rangle \Longrightarrow \langle T \rangle = \frac{2 \langle E_{kin,mol} \rangle}{3 N_\odot k_B} = \frac{2 |E_{pot}|}{3 N_\odot k_B} \tag{18.2.6}$$

Wenn wir annehmen, dass die Masse der Atome die Masse des Wasserstoffatoms ist ($\langle m \rangle = m_{{}^1_1\text{H}}$), haben wir

$$N_\odot = \frac{M_\odot}{\langle m \rangle} = 1.187\,96 \cdot 10^{57} \tag{18.2.7}$$

und

$$\langle T \rangle = \frac{\langle m \rangle}{3 M_\odot k} E_{pot} = 4.63 \cdot 10^6\ \text{K} \tag{18.2.8}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Bei einem Plasma hätten wir die doppelte Anzahl Teilchen mit der mittleren Masse $\langle m\rangle = \frac{1}{2}(m_p + m_e) \approx \frac{1}{2}m_p \approx \frac{1}{2}m_{^1_1\mathrm{H}}$. Diese Temperatur ist

$$\langle T\rangle_{Plasma} = \frac{1}{3\cdot 2N_\odot k}\,E_{pot} = \frac{m_{^1_1\mathrm{H}}}{3\cdot 2M_\odot k}\,E_{pot} = 4.63\cdot 10^6\ \mathrm{K} \tag{18.2.9}$$

$$\left\langle T_\odot\right\rangle \approx 2.31\cdot 10^6\ \mathrm{K} \tag{18.2.10}$$

Um den Druck im Zentrum der Sonne abzuschätzen im Modell der homogenen Gaskugel verwenden wir

$$p = G\frac{M_\odot^2}{4\pi R_\odot^4} \approx 8.96\cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa} \tag{18.2.11}$$

und können daraus mit dem idealen Gasgesetz

$$p\,V = Nk_B\,\langle T\rangle \tag{18.2.12}$$

die Temperatur berechnen (wir verwenden das Plasma)

$$\langle T\rangle = 3.85\cdot 10^6\ \mathrm{K} \tag{18.2.13}$$

Wir haben ein ideales Gas wenn $E_{kin} \gg E_{pot}$ ist. Der mittlere Abstand ist

$$\langle d\rangle = \sqrt[3]{\frac{V_\odot}{N_\odot}} \approx 1\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \tag{18.2.14}$$

und damit die elektrostatische potentielle Energie

$$|E_{pot}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,\langle d\rangle} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt[3]{N/V_\odot}} \approx 2.75\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} \tag{18.2.15}$$

Die kinetische Energie kann aus der Temperatur berechnet werden

$$E_{kin} = \frac{3}{2}kT \approx 7.9\cdot 10^{-17}\ \mathrm{J} \tag{18.2.16}$$

Damit ist die kinetische Energie $E_{kin} \approx 36.6\cdot E_{pot}$, wir haben also wirklich ein ideales Gas.

Alternativ kann bei konstantem Druck, Temperatur und Dichte der Druck aus $\langle p\rangle\,V = Nk_B\,\langle T\rangle$ berechnet werden. Mit $V = \frac{M_\odot}{\langle\rho\rangle_\odot}$ und $N = \frac{M_\odot}{\langle m\rangle}$ wird der Druck

$$\langle p\rangle = \frac{N}{V}k\,\langle T\rangle = \frac{\langle\rho\rangle_\odot}{\langle m\rangle}\frac{\langle m\rangle}{3M_\odot}\,|E_{pot}| = \frac{\langle\rho\rangle_\odot}{3M_\odot}\,|E_{pot}| \tag{18.2.17}$$

Die mittlere Dichte ist $\langle\rho\rangle = 1400\ \mathrm{kg/m^3}$. Die Sonnenmasse ist $M_\odot = 1.989\cdot 10^{30}$ kg. Damit ergibt sich

$$\langle p\rangle = \frac{1400}{3\cdot 1.989\cdot 10^{30}}\cdot 2.35\cdot 10^{41}\ \mathrm{J} \approx \frac{3.5\cdot 10^{44}}{6\cdot 10^{30}}\mathrm{Pa} \approx 6\cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa} \tag{18.2.18}$$

18.2.2. Realistischeres Modell des Energiehaushalts

Um ein realistischeres Modell des Energiehaushalts zu bekommen brauchen wir ein Differenzialgleichungssystem für eine sphärisch symmetrische Sonne. Aus der Beziehung zwischen der infinitesimalen Druckkraft und der infinitesimalen Gravitationskraft erhalten wir

$$dF_G(r) = G\frac{M(r)}{r^2}dm = G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r)dA\,dr = dF_p = -\frac{dp}{dr}dr\,dA \tag{18.2.19}$$

$\rho(r)$ ist der radiusabhängige Druck. Damit können wir für die radiale Ableitung des Druckes schreiben

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r) \tag{18.2.20}$$

In einer Kugelschale der Dicke dr liegt die Masse $dM(r)$. Es ergibt sich

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \tag{18.2.21}$$

Das Energiegleichgewicht verlangt, dass die infinitesimale Produktion

$$dP = \epsilon(\rho, T)\,dM(r) = 4\pi r^2\epsilon(\rho, T)\,\rho(r)dr \tag{18.2.22}$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $\epsilon(\rho, T)$ der Leistungsdichte der Energieproduktion. Damit ist die Strahlung (der wesentliche Modus des Energietransports)

$$dL_r = L(r + dr) - L(r) = \epsilon(\rho, T)dM(r) \tag{18.2.23}$$

Weiter ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dL_r(r)}{dr} = 4\pi r^2\epsilon(\rho, T)\rho(r) \tag{18.2.24}$$

Betrachten wir nur die Strahlung und berücksichtigen wir die Thermodynamik erhalten wir

$$\frac{dT(r)}{dr} = -C\frac{L_r(r)}{4\pi r^2}\frac{k_B}{T^3(r)}\rho(r) = \frac{c_p(r) - c_V(r)}{c_p(r)}\,\frac{T(r)}{p(r)}\,\frac{dp(r)}{dr} \tag{18.2.25}$$

Bei einem idealen Gas ist weiterhin

$$p(r) = \frac{k_B T(r)}{m}\rho(r) \tag{18.2.26}$$

Mit den Randbedingungen $M(R) = M_\odot$, $M(0) = 0$, $L(0) = 0$ (keine Dirac-Quelle im Zentrum), $T(R) = T_{gemessen}$ und $p(R) = 0$ können bei bekannter Zusammensetzung der Atome usw. die Differentialgleichungen

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{dp(r)}{dr} = -G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r) \tag{18.2.27a}$$
$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \tag{18.2.27b}$$
$$\frac{dL_r(r)}{dr} = 4\pi r^2\epsilon(\rho,T)\rho(r) \tag{18.2.27c}$$
$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{c_p(p,T) - c_V(p,T)}{c_p(p,T)}\,\frac{T(r)}{p(r)}\,\frac{dp(r)}{dr} \tag{18.2.27d}$$
$$p(r) = \frac{k_B T(r)}{m}\rho(r) \tag{18.2.27e}$$

numerisch gelöst werden.

18.2.3. Radiale Struktur der Sonne

Die Sonne ist wie eine Zwiebel aufgebaut. Abbildung 18.33 nach K.-H. Spatschek [Spa03] zeigt eine Skizze der verschiedenen Zonen und der vorherrschenden Transportmechanismen. Aus der Abbildung wird klar, dass unser Modell aus dem Abschnitt 18.2.2 immer noch ungenügend ist.

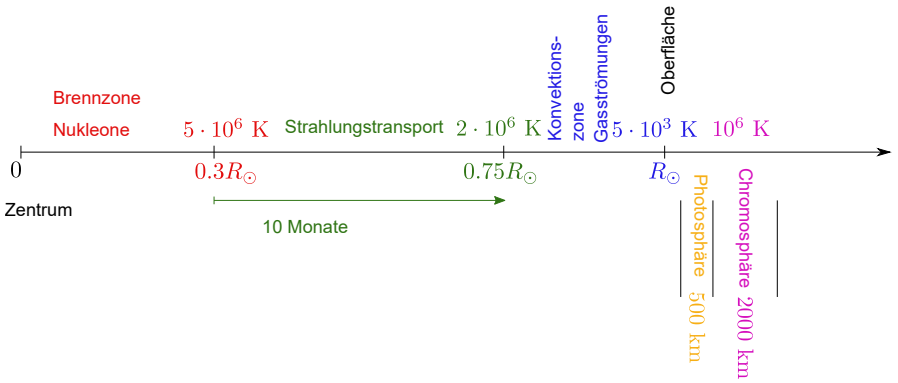


Abb. 18.33.: Querschnitt durch die Sonne mit Transportmechanismen (nach K.-H. Spatschek [Spa03]).

Innen ist die nukleare BRENNZONE. Sie reicht vom Zentrum bis etwa $0.3R_\odot = 2.1 \cdot 10^5$ km. Die Temperatur an der Grenze ist $5 \cdot 10^6$ K. Diese ist niedriger als die Temperatur in Fusionsreaktoren auf der Erde. In der Sonne hilft der Druck die Coulombbarriere zu überwinden. Es folgt eine Zone mit Strahlungstransport, die STRAHLUNGSTRANSPORTZONE. Die Gase bewegen sich kaum, es sind die Photonen die die Energie nach aussen transportieren. Die Grenze der Strahlungszone liegt bei $0.75R_\odot = 5.2 \cdot 10^5$ km. Die Temperatur ist auf $2 \cdot 10^6$ K gefallen. Von da bis zum Radius der Sonne $R_\odot = 6.957 \cdot 10^5$ km wird die Energie über Konvektion transportiert. Diese KONVEKTIONSZONE wurde von Erika Böhm-Vitense in einer Publikation von 1958 [Böh58] beschrieben. Die Konvektionszone ist der Grund für die granulare Struktur der Sonnenoberfläche. Die Temperatur an der Grenze ist auf etwa $5.7 \cdot 10^3$ K gesunken.
Würde die Energie der Brennzone nur durch die Konvektion transportiert könnte

nur 1 % der gemessenen abgestrahlten Energie aus dem Sonnenzentrum transportiert werden. Das heisst, der Transport muss durch diffusiven Strahlungstransport funktionieren. Die effektive Geschwindigkeit der elektromagnetischen Strahlung ist sehr gering, nämlich 10^7 a.

Oberhalb der Konvektionszone befindet sich die etwa 500 km dicke PHOTOSPHÄRE. In der 2000 km dicken CHRONOSPHÄRE steigt die Temperatur auf 10^6 K an. Obwohl die Temperatur hoch ist, nimmt die Energiedichte wegen der kleinen Zahlendichte oder Massendichte nach aussen ab.

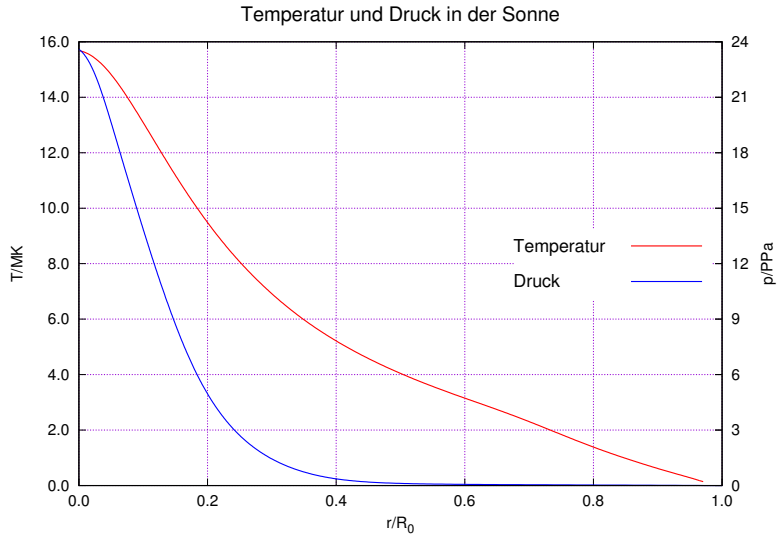


Abb. 18.34.: Temperatur und Druck in der Sonne (nach [CO07, Abb. 11.4] und [BPB01]).

Abbildung 18.34 zeigt den Temperatur- und Druckverlauf in der Sonne. Der Druck nimmt schneller ab als die Temperatur. Der Übergang von der Strahlungstransportzone zur Konvektionszone ist in der Temperatur durch eine kleine Änderung der Steigung sichtbar.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

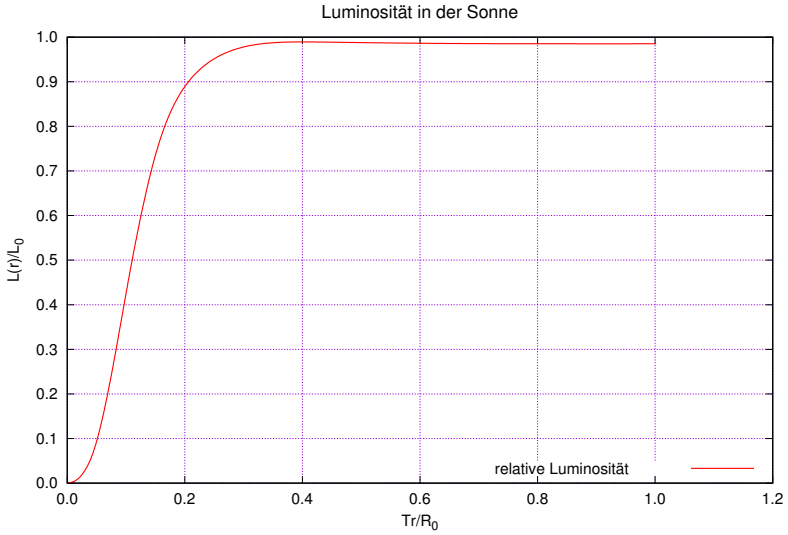


Abb. 18.35.: Luminosität in der Sonne (nach [CO07, Abb. 11.5] und [BPB01]).

Die Luminosität L der Sonne (Abbildung 18.35) nimmt von innen nach aussen zu. Die Ableitung zeigt die Brennzone.

18.2.4. Äussere Sonnenatmosphäre

In diesem Abschnitt soll die äussere Atmosphäre der Sonne noch etwas genauer angeschaut werden. Diese äussere Atmosphäre besteht aus der PHOTOSPHÄRE, der CHROMOSPHÄRE und der KORONA. Diese Bereiche werden spektroskopisch untersucht.

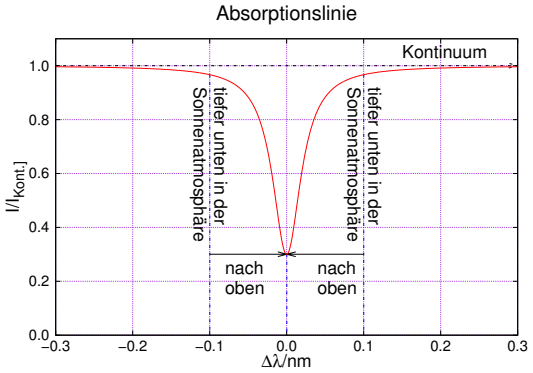


Abb. 18.36.: Quelle der Signale einer Absorptionslinie in der Sonnenatmosphäre (B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 11.13]).

Abbildung 18.36 skizziert, dass die Photonen im Zentrum einer Absorptionslinie von einem höheren Bereich der Sonnenatmosphäre stammen als die Photonen an der Flanke. Die Photonen im Kontinuumsbereich der Linie stammen von noch tieferen Regionen.

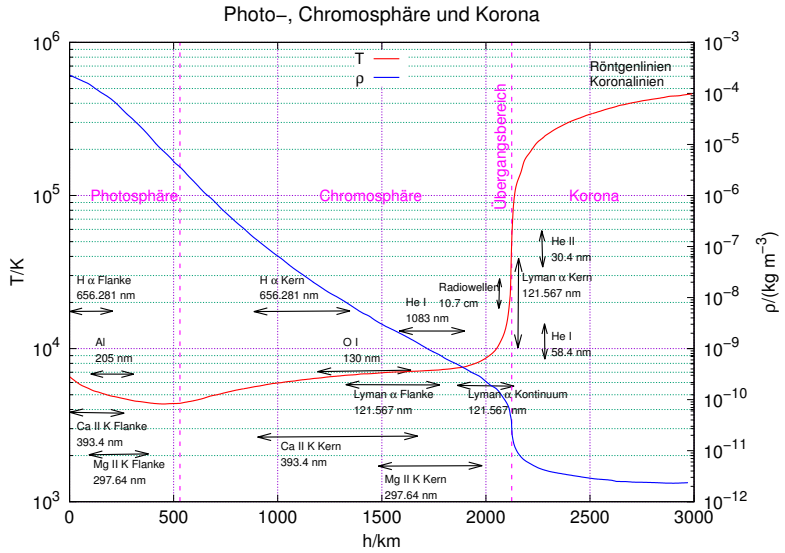


Abb. 18.37.: Äussere Atmosphäre der Sonne nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 11.18] und [Mur01]). Gezeigt werden der Druck und die Temperatur sowie aus welcher Höhe welche optischen Linien Informationen transportieren.

Die drei Bereiche der Sonnenatmosphäre sind in Abbildung 18.37 gezeigt. Die Korona reicht weiter als 3000 km. Gezeigt sind in der Abbildung charakteristische Wellenlängen und der Höhenbereich aus dem die dort detektierten Photonen Stammen. Kern, Flanke oder Kontinuum bezieht sich auf die Bereiche aus der Abbildung 18.36. Aus den Messwerten aus verschiedenen Tiefen kann ein detailliertes Höhenprofil der Physik der Sonnenatmosphäre erstellt werden. Die in Abbildung 18.23 verwendeten Wellenlängen finden sich in Abbildung 18.37 wieder. Damit können Sie die Höhe in der Sonnenatmosphäre zuordnen.
In der KORONA unterscheidet man drei Bereiche

K-Korona K steht für kontinuierlich. Dieser Bereich erzeugt weisses Licht, das von der Streuung an freien Elektronen herrührt. Dieser Bereich ist zwischen $R_\odot$ und $2.3\,R_\odot$ vom Sonnenmittelpunkt aus. Durch die hohen Temperaturen (ausser an der Grenze zur Chromosphäre) sind alle optischen Linien so extrem dopplerverbreitert, dass sie das Kontinuum bilden.

F-Korona Die F-Korona ist jenseits von $2.3\,R_\odot$. Das beobachtete Licht stammt von der Streuung an Staubpartikeln. Durch die «grosse» Masse der Staubpartikel ist die Dopplerverschiebung minimal, die Fraunhoferlinien sind wieder sichtbar. Weiter draussen geht die F-Korona ins ZODIAKALLICHT über. Das Zodiakallicht stammt von der Streuung am Staub in der Ekliptikebene.

E-Korona Die E-Korona überlappt mit der K- und der F-Korona. Mit dem Begriff E-Korona werden die Streuung und die Emission an hochionisierten Atomen bezeichnet. Der Ionisationsgrad ist wegen der hohen Temperatur hoch.

Die Korona wird nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 375] durch das Modell von Eugene Parker [Par58; Par60] beschrieben. Eugene Parker stellte ein Modell der Korona basierend auf hydrodynamischen Gleichungen im hydrostatischen

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Gleichgewicht auf. Die Masse der Korona soll klein sein gegen die Sonnenmasse $M_\odot$. Dann ist im Bereich der Korona die Gleichung für das hydrodynamische Gleichgewicht des Drucks

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\,M_\odot\,\rho(r)}{r^2} \tag{18.2.28}$$

In einem komplett ionisierten Gas ist die Anzahl der Protonen

$$n(r) \simeq \frac{\rho(r)}{m_p} \tag{18.2.29}$$

Die ideale Gasgleichung sagt

$$p(r) = 2n(r)\,k_B\,T(r) \tag{18.2.30}$$

Der Faktor $2 = \mu^{-1}$ stammt von der mittleren Masse $m_p/2$ für das ionisierte Wasserstoffatom bestehend aus den zwei Teilchen Proton und Neutron. Zusammen ergibt sich

$$\frac{d}{dr}\left(2n(r)\,k_B\,T(r)\right) = -\frac{G\,M_\odot\,n(r)\,m_p}{r^2} \tag{18.2.31}$$

Wenn die Temperatur konstant ist, also $T(r) = T$, bekommen wir eine Differentialgleichung für $n(r)$. deren Lösung ist

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{G\,M_\odot\,m_p}{2k_B\,T\,r_0} \tag{18.2.32}$$

wobei $n(r_0\text{t}) = n_0$ bei einem Radius r_0 (eine geeignet zu wählende Distanz). Dann ist

$$p(r) = p_0 \exp\left(-\lambda\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad p_0 = 2n_0\,k_B\,T \tag{18.2.33}$$

Gleichung (18.2.33) sagt voraus, dass der Druck für $r \to \infty$ nicht gegen Null geht. Setzt man $T \approx 1.5 \cdot 10^6$ K und $n_0 \approx 1.2 \cdot 10^{11}$ m^{-3} bei $r_0 = 1.4R_\odot$ resultiert der Druck $p(\infty) \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ Pa. Dieser Wert ist viel zu hoch. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 375] muss die Annahme, dass die Korona im hydrostatischen Gleichgewicht ist aufgegeben werden. Wenn die Korona nicht im Gleichgewicht ist muss es eine Bewegung geben, den Sonnenwind.
Um zu einer dynamischen Gleichung zu kommen verwendet man die Umrechnung

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$$

Damit kann die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht aus [CO07, Gl. 10.5]

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{G\,M_r\rho(r)}{r^2} - \frac{dp(r)}{dr}$$

umgeschrieben werden

$$\rho(r)v(r)\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{G\,M_r\rho(r)}{r^2} - \frac{dp(r)}{dr} \tag{18.2.34}$$

Die Energieerhaltung führt über die Kontinuitätsgleichung zur Beziehung

$$\text{const} = 4\pi r^2 \, \rho(r) \, v(r) \tag{18.2.35}$$

Diese Beziehung beschreibt auch die Massenverlustrate der Sonne. Die Ableitung von Gleichung (18.2.35) muss null sein, also

$$\frac{d}{dr} \left(\rho(r) \, v(r) \, r^2 \right) = 0 \tag{18.2.36}$$

Durch das aufsteigende Gas in der Konvektionszone der Sonne und das Absinken des abgekühlten Gases wird eine Druckwelle erzeugt, die einen Energiefluss

$$\Phi_E = \frac{1}{2} \rho(r) v_w^2(r) v_s(r) \tag{18.2.37}$$

mit $v_s(r)$ der lokalen Schallgeschwindigkeit und $v_w(r)$ der Geschwindigkeit von Teilchen in der Korona um ihre Ruhelage, angetrieben von der Konvektionszone. Mit $v_s(r) = \sqrt{\frac{\gamma p(r)}{\rho(r)}}$ ([CO07, Gl. 10.84], $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$) und dem idealen Gasgesetz $p(r) = \rho(r) k_B \frac{T}{\mu m_H}$ ergibt sich

$$v_s(r) = \sqrt{\frac{\gamma k_B T(r)}{\mu m_H}} \propto T^{1/2}(r) \tag{18.2.38}$$

Am Entstehungsort ist $v_w < v_s$. Wegen Gleichung (18.2.35) nimmt v_s ab. Es entsteht eine Schockwelle wie bei einem Überschallknall. Durch die Kollisionen in der Schockwelle entsteht ein hoch ionisiertes Gas. Dies bedeutet, dass die CHROMOSPHÄRE durch die von der Konvektionszone induzierte Bewegung geheizt wird.

Ionisierte Teilchen und Magnetfelder bedeuten, dass die gewöhnliche Hydrodynamik nicht ausreicht und dass die Physik der MAGNETOHYDRODYNAMIK verwendet werden muss [CO07, p. 378]. Wichtige Grössen dabei ist die Energiedichte der magnetischen Induktion

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{18.2.39}$$

sowie die daraus resultierende Maxwellsche Spannung, ein Druck

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{18.2.40}$$

verwendet werden muss. Entlang einer Feldlinie kann es transversale Störungen geben, die als ALFVÉN-WELLE ausbreiten (nach Hannes Alfvén). Dies führt auf eine Ausbreitungsgeschwindigkeit (nach einigen nicht ganz einfachen Berechnungen) von

$$v_m = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \tag{18.2.41}$$

ρ ist die Massendichte. In der Regel sind die Alfvén-Wellen irrelevant, ausser bei schwarzen Flecken mit ihren starken Magnetfeldern.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

18.2.5. Energiequellen und nukleare Prozesse

Aus der Gravitationsenergie nach (18.2.1) und dem Virialsatz in den Gleichungen (17.2.13) und (18.2.2) folgt, dass nach Abzug der kinetischen Energie die Energie

$$E_{Kollaps} = -\frac{3}{10} G \frac{M_\odot^2}{R_\odot} = -1.18 \cdot 10^{41} \text{ J} \tag{18.2.42}$$

abgestrahlt wurde. Wenn die Sonne die heutige Leistung von $P_\odot = 3.845\,31 \cdot 10^{26}$ W während der ganzen Lebenszeit gehabt hätte, wäre sie

$$T_\odot = \frac{E_{Kollaps}}{P_\odot} = 5.9 \cdot 10^{14} \text{ s} = 1.9 \cdot 10^7 \text{ a} \tag{18.2.43}$$

alt. Dies ist im Widerspruch zu all dem was wir über die Erdgeschichte wissen. Es muss also weitere Wärmequellen geben, die durch den thermisch erzeugten Druck den Gravitationskollaps aufhalten. Dies sind die verschiedenen Fusionsreaktionen. Die genaue Thermodynamik dieser Reaktionen ist kompliziert. Nach [CO07, p. 307] können die Reaktionsraten in einem engen Temperaturbereich durch Potenzgesetze beschrieben werden. Die Reaktionsraten beschreiben letztlich die Menge umgesetzter Energie. Ohne Coulombabstossung und sonstige «störende» Effekte kann man für eine Zweiteilchenreaktion schreiben

$$r_{ix} \simeq r_0 X_i X_x \rho^{\alpha'} T^\beta \tag{18.2.44}$$

Hier ist r_0 eine Konstante, X_i und X_x sind die Massenanteile der beiden beteiligten Teilchen und α' und β sind das Resultat der Entwicklung der vollständigen Ratengleichung in Potenzreihen. ρ ist die Massendichte. Meistens ist für einen Zweikörperstoss $\alpha' = 2$ und $\beta \simeq 1$ bis 40. Wenn ε_0 die freigesetzte Energie pro Reaktion ist, ist die Energie pro Masse und Zeit

$$\epsilon_{ik} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho}\right) r_i x \tag{18.2.45}$$

und zusammen

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0' X_i X_x \rho^\alpha T^\beta \tag{18.2.46}$$

$\alpha = \alpha' - 1$. Die Einheit von $[\epsilon_{ix}] = \text{W kg}^{-1}$. Schliesslich ist die gesamte Energieproduktion pro Masse durch

$$\epsilon = \sum_{\forall(ix)} \epsilon_{ix} \tag{18.2.47}$$

gegeben.

18.2.5.1. *pp*-Prozesse

$$4\,{}_1^1\text{H} \longrightarrow {}_2^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma \tag{18.2.48}$$

Diese Reaktion wird als $PP\,I$-Kette bezeichnet. Die $PP\,II$-Kette erzeugt Helium über Beryllium und Lithium, während die $PP\,III$-Kette Helium über

Bor und Beryllium erzeugt.

Reaktion (1. Stufe)	Anteil	ΔE	Kette
${}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + e^+ + \nu_e$	99.75%	1.19 MeV	
${}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} + e^- \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + \nu_e$	0.25%	1.44 MeV	

Reaktion (2. Stufe)	Anteil	ΔE	
${}^2_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma$	100%	5.49 MeV	

Reaktion (3. Stufe)	Anteil	ΔE	
${}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2{}^1_1\mathrm{H}$	91%	12.85 MeV	*PP I*
${}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma$ ${}^7_4\mathrm{Be} + e^- \rightarrow {}^7_3\mathrm{Li} + \nu_e$ ${}^7_3\mathrm{Li} + p \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$	9%	25.67 MeV	*PP II*
${}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma$ ${}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^8_5\mathrm{B} + \gamma$ ${}^8_5\mathrm{B} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be} + e^+ + \nu_e$ ${}^8_4\mathrm{Be} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}$	0.1%	19.28 MeV	*PP III*
Energie pro Proton		6.696 24 MeV	

Tab. 18.1.: *pp*-Zyklus auf der Sonne (nach [CO07, p. 309] und [Dem10, p.323])

Tabelle 18.1 gibt eine Zusammenfassung über alle Prozesse, die durch Fusion aus Wasserstoff Helium machen. Die *PP I*-Kette erzeugt dabei über 90 % der freigewordenen Energie.

18.2.5.2. Triple-α-Prozess

Die im Abschnitt 18.2.5.1 besprochenen *pp*-Prozesse können nicht allein für die von der Sonne abgestrahlte Energie zuständig sein. Aus spektroskopischen Messungen ist bekannt, dass auch Elemente jenseits von Be in der Sonne vorhanden sein müssen. Insbesondere muss es einen Prozess geben, der ${}^{12}_6\mathrm{C}$ über Fusion erzeugt. Dies ist der sogenannte Triple-α-Prozess geben. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] gilt

$$ {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightleftharpoons {}^8_4\mathrm{Be} \text{ (kurzlebig)} \tag{18.2.49a} $$

$$ {}^8_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + \gamma \tag{18.2.49b} $$

Der Prozess nach (18.2.49) ermöglicht die Entstehung von Kohlenstoff ${}^{12}_6\mathrm{C}$. Dieser ist die Grundlage zur Synthese schwererer Elemente, wie sie auf der Sonne beobachtet werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

18.2.5.3. CNO-Prozess

Der in Abschnitt 18.2.5.2 beschriebene Triple-α-Prozess bildet die Grundlage zur Synthese weiterer Elemente durch Fusion.

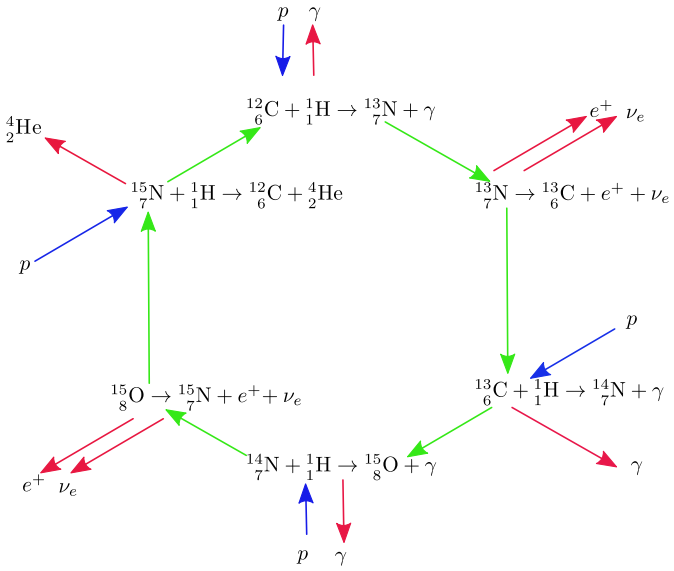


Abb. 18.38.: CNO-Zyklus in der Sonne (nach [CO07, p. 311] und [Dem10, p.324]).

Abbildung 18.38 zeigt den CNO-Zyklus. In diesem wird in einer Art katalytischer Reaktion Wasserstoff verbrannt, aber nicht durch direkte Fusion sondern durch Anlagerung an schwerere Kerne.

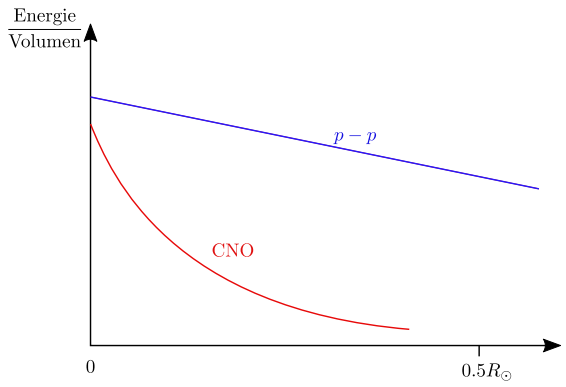


Abb. 18.39.: Energieproduktion der *pp*- und *CNO*-Prozesse (nach [Dem10, p.325]).

Diese Reaktion ist bei niederigen Temperaturen weniger wahrscheinlich als die *pp*-Prozesse. Abbildung 18.39 zeigt abhängig vom Abstand vom Sonnenzentrum den Anteil der beiden Prozesse. Der Abstand ist dabei ein Mass für die Temperatur.

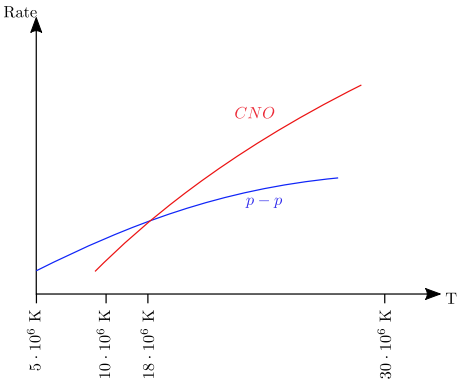


Abb. 18.40.: Temperaturabhängigkeit der Raten für die *pp*- und *CNO*-Prozesse (nach [Dem10, p.325]).

Abbildung 18.40 zeigt, dass bei höheren Temperaturen der CNO-Prozess den *pp*-Prozess dominiert. Mit zunehmendem Alter unserer Sonne gibt es wniger Wasserstoff. Die Sonne kollabiert leicht unter ihrem Gravitationspotential, die Temperatur (kinetische Energie) steigt und der CNO-Prozess wird wichtiger und übernimmt die Führung. Das heisst, mit zunehmender Zeit wird die Sonne immer heisser, und deshalb wird auch die mittlere Temperatur der Erde steigen. Die dazugehörige Zeitskala sind Millionen von Jahren, und nicht Jahrzehnte wie beim gerade ablaufenden Klimawandel.
Bei den Reaktionen der ersten und bei einigen Reaktionen der dritten Stufe der *pp*-Prozesse in Tabelle 18.1 sowie beim CNO-Prozess in Abbildung 18.38 entstehen Neutrinos. Aus den Prozessen und der Leiustung der Sonne kann die Neutrinorate berechnet werden. Jedoch beobachten wir auf der Erde zu wenig Neutrinos. Dies wir als ein Indiz für Neutrinooszillationen angesehen.

18.2.5.4. Entstehung der Elemente

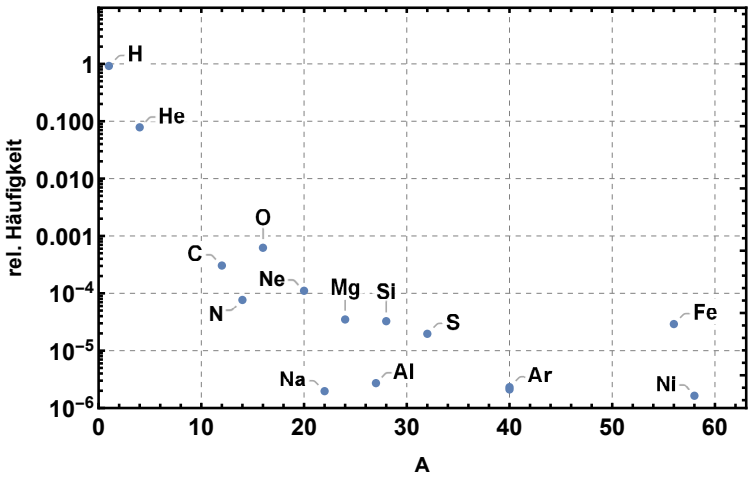


Abb. 18.41.: Elementhäufigkeit in der Sonne (nach [CO07]).

Die Häufigkeiten der Elemente (siehe [CO07]) beruht auf der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen kernphysikalischen Prozesse, der Stabilität der Ausgangs-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

und Endkerne dieser Reaktionen und der jeweiligen Energieausbeute. Endotherme Reaktionen sind dabei genau so möglich wie exotherme Reaktionen, nur unwahrscheinlicher.

18.2.5.4.1. Kohlenstoff Nach [CO07] ist Kohlenstoff in den folgenden Reaktionen präsent:

$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{16}_{8}\mathrm{O} + \gamma \tag{18.2.50a}$$
$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + \gamma \tag{18.2.50b}$$
$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\ \text{(endotherm)} \tag{18.2.50c}$$
$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{23}_{12}\mathrm{Mg} + n\ \text{(endotherm)} \tag{18.2.50d}$$
$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{18.2.50e}$$
$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + p \tag{18.2.50f}$$
$$^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \to {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \gamma \tag{18.2.50g}$$

Die Reaktionen in den Gleichungen (18.2.50) zeigen wie Elemente bis zu Magnesium und Natrium entstehen. Diese Reaktionen können auf der Erde in Beschleunigern untersucht werden. Daraus ergibt sich die Energietönung und weitere Eigenschaften.

18.2.5.4.2. Sauerstoff Aus Sauerstoff entstehen nach [CO07] die folgenden Elemente

$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + 2{}^{4}_{2}\mathrm{He}\ \text{(endotherm)} \tag{18.2.51a}$$
$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{28}_{14}\mathrm{Si} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{18.2.51b}$$
$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{31}_{15}\mathrm{P} + p \tag{18.2.51c}$$
$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{31}_{16}\mathrm{S} + n \tag{18.2.51d}$$
$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \to {}^{32}_{16}\mathrm{S} + \gamma \tag{18.2.51e}$$

Analog zu den Reaktionen aus Gleichung (18.2.50) zeigen Reaktionen in den Gleichungen (18.2.51) zeigen wie Elemente bis zu Schwefel und Phosphor entstehen. Es existieren noch viele weitere Reaktionen mit allen möglichen Ausgangskernen. R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle haben in ihrer Arbeit „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ [WFH67] schon früh eine Zusammenfassung von relevanten Prozessen gegeben. J. A. Johnson; B. D. Fields und T. A. Thompson haben mit dem Übersichtsartikel „The origin of the elements: a century of progress“ [JFT20] kürzlich eine historische Übersicht über dieses Thema publiziert.

19. Allgemeine Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins [Ein15a; Ein15d; Ein15c; Ein15b] hat unser Verständnis von Gravitation auf grossen Längenskalen grundlegend verändert. In diesem Abschnitt soll wie in B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] wichtige Zutaten der Theorie plausibel gemacht werden. Eine genauere Abhandlung finden Sie in T. Fließbach [Fli12] oder auch in [Hof97; Wey21; BC10].

Die grundlegende Idee ist das Äquivalenzprinzip. Damit ist gemeint, dass verschiedene nicht unterscheidbare physikalische Phänomene durch die gleiche Theorie zu beschreiben sind.

Insbesondere ist gemeint, dass in einem abgeschlossenen Raum (Fahrstuhl) nicht unterschieden werden kann, ob der Fahrstuhl im kraftfeldfreien Raum mit $-\boldsymbol{g}$ beschleunigt wird, oder ob er sich in einem Gravitationsfeld mit dem Feldvektor $\boldsymbol{g}$ befindet. Insbesondere ist klar, dass in einem beschleunigten Fahrstuhl Licht abgelenkt wird. Deshalb muss es auch im Gravitationsfeld abgelenkt werden.

19.1. Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld

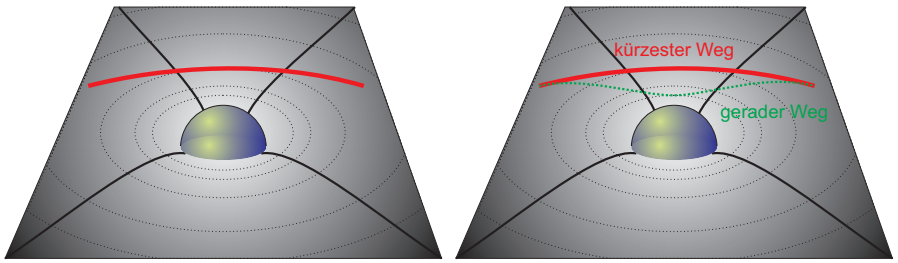


Abb. 19.1.: Lichtablenkung durch Massen (nach Carroll und Ostlie [CO07]).

Abbildung 19.1 zeigt ein Gedankenmodell zur Ablenkung von Licht. Eine Gummimatte im Gravitationsfeld dient als Modell der Raumzeit. Eine grosse Masse im Zentrum deformiert die Gummimatte. Ein vorbeirollender Ball wird durch die Deformation der Gummimatte abgelenkt. Dabei ist der gerade Weg ist länger als der gekrümmte Weg.

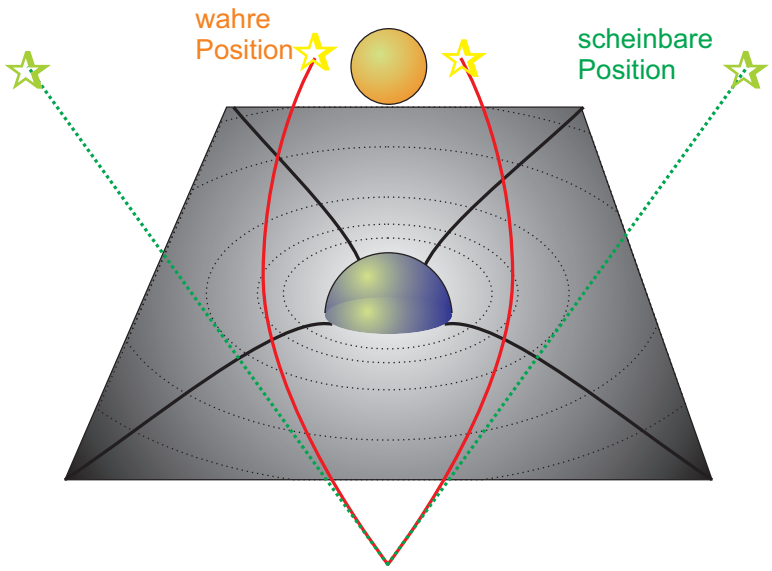


Abb. 19.2.: Gravitationslinse (nach Carroll und Ostlie [CO07]).

Abbildung 19.2 erweitert das Modell der Gravitationsablenkung aus Abbildung 19.1. Zwei Kugeln rollen links und rechts an einer Zentralmasse vorbei. Die linke Kugel wird nach rechts abgelenkt, die rechte nach links. Dies entspricht dem Strahlengang durch eine Sammellinse. Dabei wird das Licht wird zur schweren Masse hin abgelenkt. Entfernte Sterne sind näher an der Sichtlinie zu einem schweren Stern als sie scheinen. Wir schliessen aus der Richtung des auf die Erde einfallenden Lichts auf die Position des Sterns, nur die Richtung ist wegen der Gravitationswechselwirkung nicht die ursprüngliche Richtung.

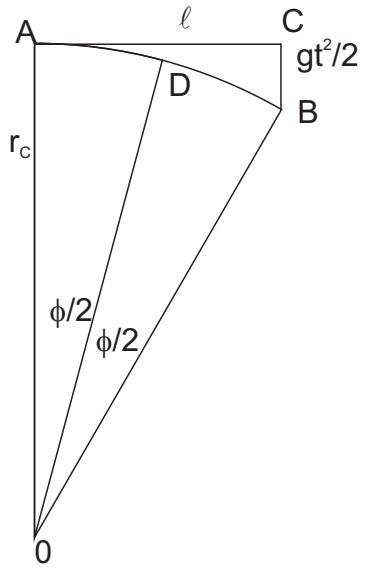


Abb. 19.3.: Skizze zur Berechnung der Ablenkung von Licht.

Abbildung 19.3 zeigt, wie aus dem Einsteinschen Prinzip dass schwere und träge Masse äquivalent sind, die Ablenkung des Lichtes bei kleiner Gravitationsfeldstärke abgeschätzt werden kann.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die Schwerkraft und die Beschleunigung sind ununterscheidbar wenn $m_{\text{schwer}} = m_{\text{träge}}$ gilt. Das Fallgesetz gilt dann auch für Licht. Aus der Abbildung kann die Beziehung

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{0D}} \tag{19.1.1}$$

abgelesen werden. Daraus folgt mit dem Fallgesetz

$$\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\ell} = \frac{\ell}{2\cos(\phi/2)} \tag{19.1.2}$$

Wenn wir eine kleine Gravitationsfeldstärke annehmen können Winkelfunktionen nach Taylor entwickelt werden. Wir können $\overline{0D} \approx r_C$, $\cos(\phi/2) \approx 1$ und $\ell = ct$ schreiben. Es ergibt sich

$$\frac{gt^2}{2\ell} = \frac{\ell}{2r_C} \Rightarrow r_C = \frac{c^2}{g} \tag{19.1.3}$$

Der Feldvektor der Gravitation kann mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz $g = GM/r^2$ berechnet werden. Wir erhalten für r_C:

$$r_C = \frac{c^2 r^2}{GM} \tag{19.1.4}$$

Auf der Erde ist r_C etwa

$$r_C \approx 1 \cdot 10^{16} \text{ m} \quad \phi = \frac{\ell}{r_C} \approx 1 \cdot 10^{-15} \text{ rad für } \ell = 10 \text{ m} \tag{19.1.5}$$

Auf der Sonne hingegen ist ($g_S = 274 \text{ ms}^{-2}$)

$$r_{C,S} \approx 3.28 \cdot 10^{14} \text{ m} \quad \phi = \frac{r_S}{r_{C,S}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0.438 \text{ }'' \text{ für } \ell = r_S \tag{19.1.6}$$

Die vorgestellte Rechnung ist eine Schätzung. Eine genaue Rechnung zeigt, dass der Ablenkwinkel durch

$$\varphi = \frac{4GM}{rc^2} \tag{19.1.7}$$

gegeben ist, wobei r der Abstand des einlaufenden Lichtstrahls zur ablenkenden Masse ist.

19.2. Rotverschiebung im Gravitationsfeld

Wenn wir uns vorstellen, dass Licht vom Boden zur Decke eines mit a nach oben beschleunigten Fahrstuhls der Höhe h gesandt wird, dann wird das Licht beim Eintreffen rotverschoben sein. Die Quelle am Boden hat zum Zeitpunkt der Emission eine Geschwindigkeit v_0. Zu dem Zeitpunkt ist das auch die Geschwindigkeit der Decke. Das Licht soll die Zeit t bis zur Decke benötigen. Die zurückzulegende Distanz ist

$$s = h + \frac{1}{2}at^2 = c \cdot t \tag{19.2.1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$t = \frac{c}{a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}}\right) \tag{19.2.2}$$

Die physikalisch sinnvolle Lösung ist die mit dem «$-$ ».

$$t = \frac{c}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}}\right) \tag{19.2.3}$$

Die Geschwindigkeit der Decke ist dann

$$\Delta v = v(t) = at = c\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2ah}{c^2}}\right) \approx \frac{ha}{c} + O(a^3) \tag{19.2.4}$$

Mit $\nu \propto c$ und $\Delta\nu \propto -\Delta v$ kann die Rotverschiebung abgeschätzt werden.

Aus der Bewegung eines Fahrstuhls ergibt sich die Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\Delta v}{c} \overset{a=g}{=\!=} -\frac{gh}{c^2} \approx -2.57 \cdot 10^{-15} \tag{19.2.5}$$

Real gemessen wurden $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -2.46 \cdot 10^{-15}$.

Das allgemeine Resultat ist überall gültig:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \tag{19.2.6}$$

Daraus ergibt sich das allgemeine Resultat für Frequenzen:

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \tag{19.2.7}$$

Daraus kann der Rotverschiebungsparameter definiert werden:

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu_\infty} - 1 = \left(1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}\right)^{-1/2} - 1 \overset{r_0 \gg \frac{GM}{c^2}}{\approx} \frac{GM}{r_0 c^2} \tag{19.2.8}$$

Weiter gibt es im Gravitationsfeld eine Zeitverlangsamung

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0 c^2}} \tag{19.2.9}$$

Beispiel: Bei Sirius B ergeben sich $R = 5.5 \cdot 10^6$ m und $M = 2.1 \cdot 10^{30}$ kg. Daraus folgt $\Delta t - \Delta t_\infty \approx 1$ s für $\Delta t_\infty = 3600$ s.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

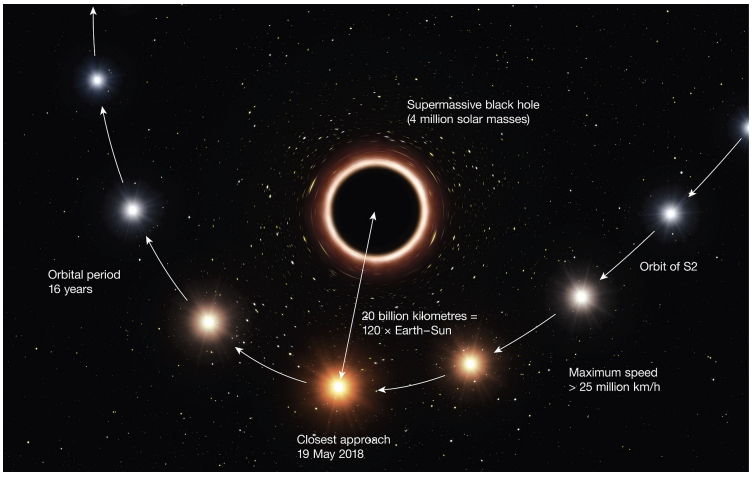


Abb. 19.4.: Zeichnung der Rotverschiebung der Emission des Sterns S2 in der Nähe des zentralen schwarzen Loches unserer Milchstrasse. (Quelle: By ESO/M. Kornmesser - https://www.eso.org/public/images/eso1825b/, CC BY 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=71125295)

In der Nähe von schwarzen Löchern ist die Gravitations-Rotverschiebung messbar. Abbildung 19.4 zeigt die Rotverschiebung des Infrarotsignals des Sterns S2 in der Nähe des zentralen SCHWARZEN LOCHES im Zentrum unserer MILCHSTRASSE. Die Daten stammen aus der Arbeit „Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole“ von R. Abuter u. a. [Abu+18]. Es wurden Daten aus den Instrumenten GRAVITY, SINFONI und NACO verwendet. Diese sind auf dem Teleskop Very Large Telescope des European Southern Observatory (VLT) des ESO montiert [Gen+18].

19.3. Schwarzschildlösung

Karl Schwarzschild gelang es als Erstem die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie geschlossen zu lösen. Eine allgemeine Lösung gibt es auch heute nicht. Karl Schwarzschilds Lösung nahm eine sphärische Symmetrie an.
Der Ausgangspunkt sind Albert Einsteins Gleichungen

$$\mathsf{G} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathsf{T} \tag{19.3.1}$$

wobei $\mathcal{G}$ der EINSTEIN-TENSOR ist, der die Raum-Zeit-Krümmung beschreibt. $\mathcal{T}$ ist der ENERGIE-IMPULS-TENSOR
Albert Einstein führe eine abgekürzte Notation ein, die EINSTEIN-NOTATION. Dabe wird über gleichlautende Indizes summiert. In dieser Notation lautet Gleichung (19.3.1):

$$\mathsf{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathsf{T}_{\mu\nu} \tag{19.3.2}$$

$\mathsf{G}_{\mu\nu}$ ist ein RIEMANN-TENSOR (nach Bernhard Riemann). $\mathsf{G}_{\mu\nu}$ enthält die ersten Ableitungen des metrischen Tensors $\mathsf{g}_{\mu\nu}$ zum Quadrat und die zweiten Ableitungen

des metrischen Tensors $\mathsf{g}_{\mu\nu}$ in linearer Form.
Für den ENERGIE-IMPULS-TENSOR gilt

$$\mathsf{T}_{\mu\nu} = \mathsf{T}_{\nu\mu} \tag{19.3.3}$$

In dieser kompakten Schreibweise bedeutet

$$Y_{\mu|\nu} = \partial_\nu Y_\mu \tag{19.3.4}$$

die kontravariante Ableitung (von Spaltenvektoren). $Y^{\mu\|\nu}$ bedeutet die kovariante Ableitung von Y^μ nach x^ν [Fli12, Gl. (15.10) bis (15.12)]. Dann lautet der allgemein relativistische ENERGIE-IMPULS-ERHALTUNGSSATZ nach [Fli12]

$$\mathsf{T}^{\|\nu}_{\mu\nu} = 0 \tag{19.3.5}$$

Weiter ist dann auch der Riemanntensor G symmetrisch

$$\mathsf{G}_{\mu\nu} = \mathsf{G}_{\nu\mu} \tag{19.3.6}$$

und es gilt der Erhaltungssatz

$$\mathsf{G}^{\|\nu}_{\mu\nu} = 0 \tag{19.3.7}$$

Für schwache stationäre Felder ist näherungsweise

$$\mathsf{G}_{00} \approx \mathsf{g}_{00} \tag{19.3.8}$$

Dann lauten die Einsteingleichungen für den KRÜMMUNGSTENSOR $\mathsf{R}_{\mu\nu}$ und den KRÜMMUNGSSKALAR $\mathsf{R}^\mu{}_\mu = R$

$$\mathsf{R}_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\mathsf{g}_{\mu\nu} = -8\pi\frac{G}{c^4}\mathsf{T}_{\mu\nu} \tag{19.3.9}$$

oder auch

$$\mathsf{R}_{\mu\nu} = -8\pi\frac{G}{c^4}\left(\mathsf{T}_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\mathsf{g}_{\mu\nu}\right) \tag{19.3.10}$$

Albert Einstein führte dann die KOSMOLOGISCHE KONSTANTE Λ ein, um in einigen Bereichen eine Konvergenz von Lösungen zu erreichen. $\Lambda^{-1/2}$ ist eine Länge. Mit der KOSMOLOGISCHEN KONSTANTE lautet die Feldgleichung

$$\mathsf{R}_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\mathsf{g}_{\mu\nu} + \Lambda\mathsf{g}_{\mu\nu} = -8\pi\frac{G}{c^4}\mathsf{T}_{\mu\nu} \tag{19.3.11}$$

Die Kontinuitätsgleichung für den ENERGIE-IMPULS-TENSOR lautet

$$\partial_\beta \mathsf{T}^{\alpha\beta} = 0 \tag{19.3.12}$$

Die infinitesimale relativistische Distanz zwischen zwei Raumzeitpunkten ist durch

$$(\Delta d)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\ell)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{19.3.13}$$

gegeben. Die EIGENZEIT ist

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c}. \tag{19.3.14}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Der EIGENABSTAND hat die Grösse

$$\mathcal{L} = \sqrt{-(\Delta s)^2} \tag{19.3.15}$$

In sphärischen Koordinaten ist der Abstand

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dr)^2 - (rd\theta)^2 - (r\sin(\theta)\, d\phi)^2 \tag{19.3.16}$$

Karl Schwarzschild [Sch16] fand für eine kugelförmige Massenanordnung, die nicht rotiert, eine Metrik, die die Einstein'sche Feldgleichung (19.3.1) löst. Nach T. Fließbach [Fli12, Gl. (24.15)] lautet sie

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{2a}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + d\phi^2\sin^2(\theta)\right) \tag{19.3.17}$$

Dabei ist die Konstante

$$a = \frac{G\,M}{c^2} \tag{19.3.18}$$

und der Schwarzschildradius

$$r_S = R_S = 2a. \tag{19.3.19}$$

Eingesetzt ergibt sich Schwarzschildmetrik in sphärischen Koordinaten

$$(ds)^2 = \left(cdt\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2 - (rd\theta)^2 - (r\sin(\theta)\, d\phi)^2 \tag{19.3.20}$$

Für diese Gleichung gibt keine Herleitung.

Die Idee, dass Licht durch Gravitation abgelenkt werden könnte ist älter. Im Jahre 1783 schloss John Michell aus Isaac Newtons Korpuskulartheorie, dass bei einer Zentralmasse von $m = 500M_{Sonne}$ Licht nicht mehr entkommen kann. Die klassische Fluchtgeschwindigkeit ist $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Die Werte von John Michell stimmen für einen Radius $r = 1477$ km. Für eine Masse mit dem Erdradius müsste $m = 2157M_{Sonne}$ sein.

Wenn in der Gleichung (19.3.20) der Nenner von dr null ist, divergiert die Metrik. Dies ist bei

$$r = R_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{19.3.21}$$

der Fall. R_S ist wie oben der Schwarzschildradius. bei einer sphärisch-symmetrischen Situation ist $d\theta = d\phi = 0$. Dann gilt

$$\frac{(dr)^2}{1 - 2\frac{GM}{rc^2}} = c^2\left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right)(dt)^2 \tag{19.3.22}$$

Daraus folgt

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - 2\frac{GM}{rc^2}\right) = c\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \tag{19.3.23}$$

lokale Lichtgeschwindigkeit, wie sie von $r = \infty$ beobachtet wird.

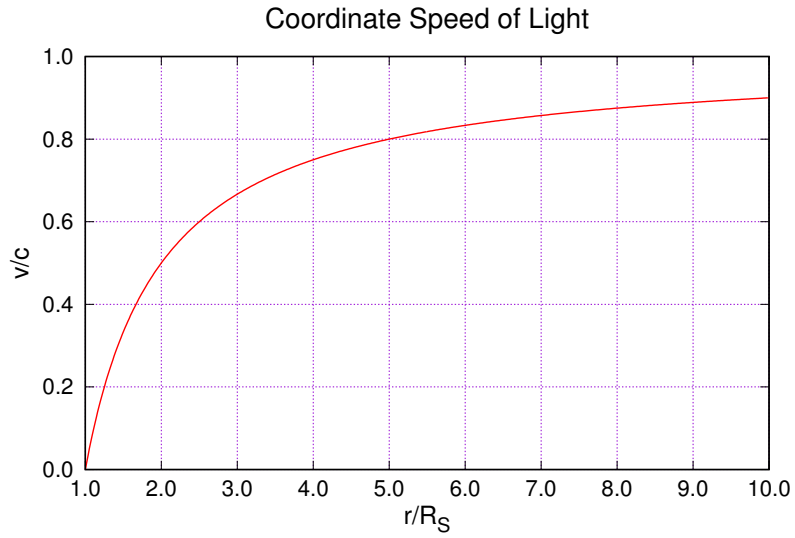


Abb. 19.5.: Lichtgeschwindigkeit in der Nähe des Ereignishorizontes.

Die Eigenzeit eines Objektes, das sich dem Ereignishorizont nähert, bleibt stehen. Für ein Objekt, das in ein schwarzes Loch fällt, sieht es so aus, wie wenn es am Ereignishorizont stehen bliebe.

19.3.1. Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind eine Konsequenz der allgemeinen Relativitätstheorie. Die hier gegebene Darstellung folgt B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07].
Für $r < R_S$ sind alle Weltlinien in räumlichen Bereichen. Reale Partikel können dort nicht existieren. Gleichzeitig werden Objekte in der Nähe des Ereignishorizontes (Schwarzschildradius) grossen Gezeitenkräften unterworfen.
Schwarze Löcher sind dadurch charakterisiert, dass die gesamte Masse innerhalb des Ereignishorizontes angeordnet ist. Es gibt nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] die folgenden Typen von schwarzen Löchern:

Primordiale schwarze Löcher haben Massen von $1 \cdot 10^{-8}$ kg bis $1 \cdot 10^5 M_\odot$. Diese sind in der Anfangsphase des Universums entstanden.

Schwarze Löcher mit sternartigen Massen Diese schwarzen Löcher bilden sich nach dem Kollaps eines genügend schweren Sterns. Die verbleibende Masse von (3 bis 15) $M_\odot$ bildet dann das schwarze Loch. Der verzögerte Kollaps von Neutronensternen kann zu Supernovae führen. Dies ist insbesondere bei Doppelsternen möglich, bei denen der schwerere Neutronenstern dem anderen Stern Masse entzieht.

Mittlere schwarze Löcher (IMBH) haben Massen von (100 bis 1000) $M_\odot$. Ultrahelle Röntgenquellen scheinen im Zentrum ein IMBH zu haben. Wie diese schwarzen Löcher gebildet werden ist nicht klar. Sie können im Zentrum von Kugelsternhaufen und leichten Galaxien sein.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Superschwere schwarze Löcher (SMBH) haben Massen von ($1{\cdot}10^5$ bis $1{\cdot}10^8$) $M_\odot$. Diese schwarzen Löcher sind im Zentrum von allen grösseren Galaxien. Deren Eigenschaften werden von den SMBH in ihrem Zentrum vorgegeben.

Rotierende schwarze Löcher werden durch die KERR-METRIK [Fli12, Gl. (48.25)] (nach Roy Kerr) oder weitergehende Metriken beschrieben (siehe B. Carter [Car68] (Gleichungen (10) und (13)) oder M. Bhat; S. Dhurandhar und N. Dadhich [BDD85] (Gleichung (2.1)), wobei in beiden Artikeln $G = c = 1$ gesetzt ist). Allgemeine Kerr-Metriken beinhalten auch die elektrische Ladung (siehe B. Carter [Car68]). Eine Kerr-Metrik für ladungsfreie rotierende Massen ist nach T. Fließbach [Fli12]:

$$ds^2 = +\frac{d^2}{\rho^2}\left(cdt - bd\phi\sin^2(\theta)\right)^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\rho^2 dr^2}{d^2} - \frac{\sin^2(\theta)\left(\left(b^2+r^2\right)d\phi - bcdt\right)^2}{\rho^2} \tag{19.3.24}$$

Dabei ist

$$d^2 = r^2 - rR_S + b^2 \tag{19.3.25a}$$
$$\rho^2 = r^2 + b^2\cos^2(\theta) \tag{19.3.25b}$$
$$b = \frac{L}{Mc} \tag{19.3.25c}$$

L ist der Drehimpuls des schwarzen Loches.
Wenn in Gleichung (19.3.24) die Hilfsvariablen substituiert werden und $L = 0$ gesetzt wird, ergibt sich die Schwarzschildmetrik nach Gleichung (19.3.17).
Wenn in Gleichung (19.3.24) d^2 (siehe Gleichung (19.3.25a)) null ist, dann divergiert die Metrik. Wenn Gleichung (19.3.25a) null ergeben soll, dann gibt es einen ausgezeichneten Radius $r_\pm$ als Lösung dieser Gleichung $0 = r^2 - rR_S + b^2$

$$r_\pm = \frac{R_S \pm \sqrt{R_S^2 - 4b^2}}{2} \tag{19.3.26}$$

Mit den Definitionen für b und R_S ergibt sich

$$0 = \frac{GM}{c^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2c^2}{G^2M^4}}\right) \tag{19.3.27}$$

Wenn die Wurzel dieser Gleichung den Wert null hat, gibt es für $r_\pm$ eine doppelte Lösung. Damit wird die Kerr-Metrik an dem Punkt mehrdeutig. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Grenze für den Drehimpuls L:

$$L \le L_{max} = \frac{G\,M^2}{c} \tag{19.3.28}$$

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] sowie nach M. J. Rees [Ree84] ist $L_{max} = \frac{G\,M^2}{c}$ der maximal mögliche Drehimpuls eines schwarzen Loches der Masse M.
Geladene schwarze Löcher werden durch die Metrik in Gleichung (19.3.24) gegeben, wobei die Definition von d^2 (siehe Gleichung (19.3.25a)) so geschrieben werden muss (siehe E. R. Harrison [Har76], Gleichung (1). Dort fehlt ein «+».)

$$d^2 = r^2 - rR_S + b^2 + \frac{G}{c^4}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{19.3.29}$$

Wieder wird $d^2 = 0$ gesetzt. Die Lösungen sind nun

$$r_\pm = \frac{R_S \pm \sqrt{R_S^2 - 4\left(b^2 + \frac{G}{c^4}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)}}{2} \tag{19.3.30}$$

Mit den Definitionen für b und R_S ergibt sich

$$0 = \frac{GM}{c^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2c^2}{G^2M^4} - \frac{1}{GM^2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}}\right) \tag{19.3.31}$$

Wenn die Wurzel dieser Gleichung wieder den Wert null hat, gibt es für $r_\pm$ eine doppelte Lösung. Damit wird die Kerr-Metrik an dem Punkt nicht eindeutig. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Grenze für den Drehimpuls L und Q:

$$1 \geq \frac{L^2c^2}{G^2M^4} + \frac{1}{GM^2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{19.3.32}$$

oder

$$\frac{G^2M^4}{c^2} \geq L^2 + \frac{GM^2}{c^2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{19.3.33}$$

Wenn $Q = 0$ ist, folgt Gleichung (19.3.28). Wenn $L = 0$ ist erhalten wir

$$1 \geq \frac{1}{GM^2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{19.3.34}$$

oder

$$Q \leq Q_{max} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 GM^2} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 cL_{max}} \tag{19.3.35}$$

Zusammen

$$L_{max}^2 \geq L^2 + \frac{L_{max}}{4\pi\varepsilon_0\, c}Q^2 \tag{19.3.36}$$

Es zeigt sich, dass Schwarze Löcher durch drei Parameter und nur drei Parameter charakterisiert werden:

- Masse
- Drehimpuls
- Ladung

Um ein rotierendes schwarzes Loch wird, wie auch um die Erde, aber in grösserem Masse, die Raumzeit mitgezogen. Wie auch bei Jupiter wird der Ereignishorizont ein Rotationsellipsoid. Ausserhalb gibt es eine torusartige Region, die ERGOSPÄRE, in der der Mitführeffekt so dominant ist, dass nur Bahnen im gleichen Drehsinn wie die Rotationsrichtung des schwarzen Loches möglich sind. Im Gravitationsfeld der Erde beträgt die durch die mitgezogene Raumzeit verursachte zusätzliche Präzession eines Kreisels nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] 0.042 ″ a^{-1}.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Steven Hawking [Haw74] entdeckte, dass schwarze Löcher über Quanteneffekte (Paarerzeugung) Energie verlieren können. Dies führt zu einer Verdampfungszeit eines schwarzen Loches von

$$t_{verdampfen} = 2560\pi^2 \left(\frac{2G\,M}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{h}\right) \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \cdot 2 \cdot 10^{67}\ \text{a} \tag{19.3.37}$$

Die Zeit ist für schwarze Löcher mit Sternmassen irrelevant. Heute müssten nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]schwarze Löcher mit einer Masse $1.7 \cdot 10^{11}$ kg gerade am explodieren sein. Sie hätten eine Strahlungsleistung von $1 \cdot 10^{13}$ W und würden Partikel mit einer Energie von 100 MeV emittieren.

19.4. Gravitationslinse

Die Darstellung lehnt sich an [CO07] an.

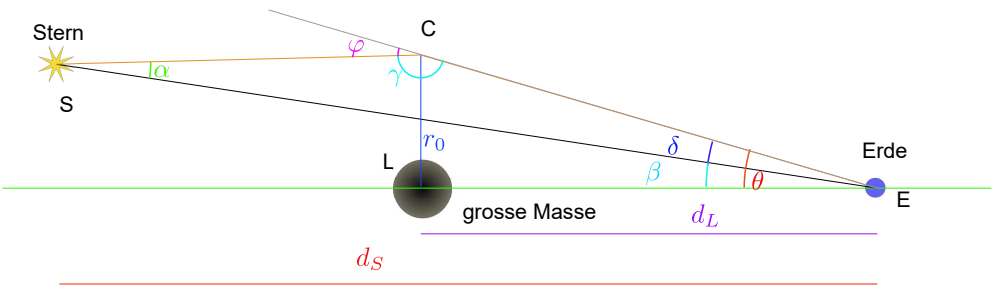


Abb. 19.6.: Geometrie zur Berechnung des Gravitationslinseneffektes.

In Abb. 19.6 verwenden wir im Dreieck ESC den Sinussatz. φ ist die Ablenkung eines Lichtstrahls nach Gleichung (19.1.7).

Um den Sinussatz anzuwenden, bemerken wir

$$\overline{SE} = \frac{d_S}{\cos(\beta)} \tag{19.4.1a}$$

$$\overline{CE} = \frac{d_L}{\cos(\theta)} \tag{19.4.1b}$$

$$\gamma = \pi - \varphi \tag{19.4.1c}$$

$$\delta = \theta - \beta \tag{19.4.1d}$$

$$\alpha = \pi - \gamma - \delta = \pi - (\pi - \varphi) - (\theta - \beta) = \varphi - \theta + \beta \tag{19.4.1e}$$

$$\sin(\theta) = \frac{r_0}{\overline{CE}} = \frac{r_0}{d_L}\cos(\theta) \longrightarrow \cos(\theta) = \frac{d_L}{r_0}\sin(\theta) \tag{19.4.1f}$$

Damit haben wir

$$\frac{\sin(\gamma)}{\overline{SE}} = \frac{\sin(\alpha)}{\overline{CE}} \tag{19.4.2a}$$

$$\frac{\sin(\pi-\varphi)}{\frac{d_S}{\cos(\beta)}} = \frac{\sin(\varphi-\theta+\beta)}{\frac{d_L}{\cos(\theta)}} \tag{19.4.2b}$$

$$\frac{\sin(\varphi)\cos(\beta)}{d_S} = \frac{\sin(\varphi-\theta+\beta)\cos(\theta)}{d_L} \tag{19.4.2c}$$

$$\frac{\sin(\varphi)\cos(\beta)}{d_S} = \frac{\sin(\varphi-\theta+\beta)\,\frac{d_L}{r_0}\sin(\theta)}{d_L} = \frac{\sin(\varphi-\theta+\beta)\sin(\theta)}{r_0} \tag{19.4.2d}$$

Wir verwenden nun, dass alle Winkel dem Betrage nach viel kleiner als eins sind, also dass der Sinus durch sein Argument und der Cosinus durch 1 ersetzt werden kann.

$$\frac{\varphi}{d_S} = \frac{(\varphi-\theta+\beta)\;\theta}{r_0} = \frac{\varphi\,\theta-\theta^2+\beta\theta}{r_0} \tag{19.4.3a}$$

$$0 = \theta^2 - \theta\,\beta + \varphi\left(\frac{r_0}{d_S} - \theta\right) \tag{19.4.3b}$$

$$0 = \theta^2 - \theta\,\beta + \varphi r_0\left(\frac{1}{d_S} - \frac{\theta}{r_0}\right) \tag{19.4.3c}$$

Aus Abb. 19.6 können wir aus dem rechtwinkligen Dreieck ELC ablesen:

$$\frac{\sin(\theta)}{r_0} = \frac{1}{\overline{CE}} \Longrightarrow \frac{\theta}{r_0} \approx \frac{1}{d_L} \tag{19.4.4}$$

Damit ist mit $\varphi\, r_0 = \frac{4GM}{c^2}$ (aus Gleichung (19.1.7))

$$0 = \theta^2 - \theta\,\beta + \varphi r_0\left(\frac{1}{d_S} - \frac{1}{d_L}\right) = \theta^2 - \theta\,\beta + \frac{4GM}{c^2}\left(\frac{1}{d_S} - \frac{1}{d_L}\right) \tag{19.4.5a}$$

$$0 = \theta^2 - \theta\,\beta - \frac{4GM}{c^2}\left(\frac{d_S - d_L}{d_L\,d_S}\right) \tag{19.4.5b}$$

Zur Erinnerung: In der Optik erhält man aus $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ mit $g = d_0 - b$

$$f = \frac{b}{d_0}(d_0 - b) \tag{19.4.6}$$

Gleichung (19.4.5b) hat zwei Lösungen. Wir setzen

$$A = \frac{4GM}{c^2}\left(\frac{d_S - d_L}{d_L\,d_S}\right)$$

und lösen

$$\theta^2 - \theta\,\beta - A = 0$$

und erhalten

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} \tag{19.4.7}$$

Die Summe der beiden Lösungen ist gerade

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} + \left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + A} \right) = \beta \tag{19.4.8}$$

Für die Masse bekommen wir bei bekanntem θ_1 und θ_2

$$M = \frac{c^2}{4G} \frac{d_L d_S}{d_S - d_L} \left(\theta_{1,2}^2 - \theta_{1,2} (\theta_1 + \theta_2) \right) = -\frac{c^2}{4G} \frac{d_L d_S}{d_S - d_L} \theta_1 \theta_2 \tag{19.4.9}$$

unabhängig von der Lösung. (Setzen Sie $\theta_{1,2} = \theta_1$ oder $\theta_{1,2} = \theta_2$, das Resultat ist gleich)
Wenn $|\beta| < \varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}$ sehr klein ist, sind die Lösungen symmetrisch um eine sehr grosse Masse

$$\theta_{1,2} = \pm\sqrt{A} = \pm\frac{2}{c} \sqrt{GM \left(\frac{d_S - d_L}{d_L \, d_S} \right)} \tag{19.4.10}$$

Abbildung 19.7 zeigt den Gravitationslinseneffekt des Galaxienclusters 19.7. Die ringförmigen Bilder der entfernten Galaxien werden Einstein-Ringe genannt.

Abb. 19.7.: Das Galaxiencluster SDSS J1038+4849 im Zentrum dieses Hubble-Bildes vergrössert und verzerrt Hintergrundgalaxien. Diese sind als ringförmige Streifen sichtbar und viel weiter weg als SDSS J1038+4849 (Credit NASA/ESA)

In einem Paper berichten I. McDonald u. a., „Kepler K2 Campaign 9 – I. Candidate short-duration events from the first space-based survey for planetary microlensing“ [McD+21] über Microlensing durch Planeten oder dunkle Objekte, die vor einem hellen Stern vorbei ziehen. Microlensing ist eine direkte Konsequenz der Allgemeinen Relativitätstheorie. Abbildung 19.8 zeigt die Entdeckung des braunen Zwerges OGLE-2015-BLG-1319 durch Microlensing. Die gemessenen Daten stammen aus dem Röntgenbereich (Swift) gemessen in einer Erdumlaufbahn, dem sichtbaren Bereich bei 800 nm des Optical Gravitational Lensing Experiment»(Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE)) in Chile und des Spitzer-Weltraumteleskops bei 3.6 nm.

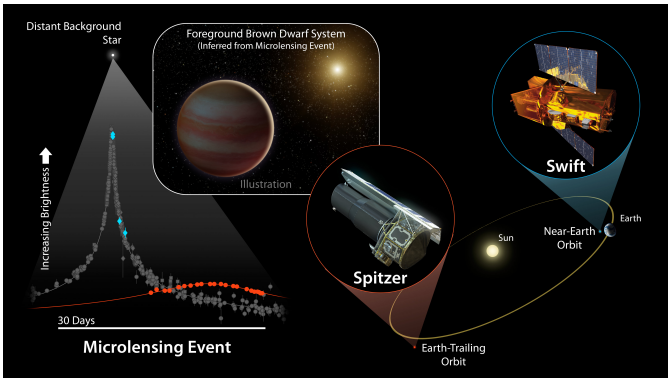


Abb. 19.8.: Der braune Zwerg OGLE-2015-BLG-1319 wurde vom es «Optical Gravitational Lensing Experiment»(OGLE) (graue Punkte), dem Spitzer-Weltraumteleskop (orange Punkte) und vom Teleskop Swift in einer Erdumlaufbahn (blaue Punkte) gemessen (Credits: NASA/JPL-Caltech).

19.5. Gravitationswellendetektoren

Für die Entdeckung der Gravitationswellen wurden Rainer Weiss, Barry Barish und Kip Thorne 2017 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

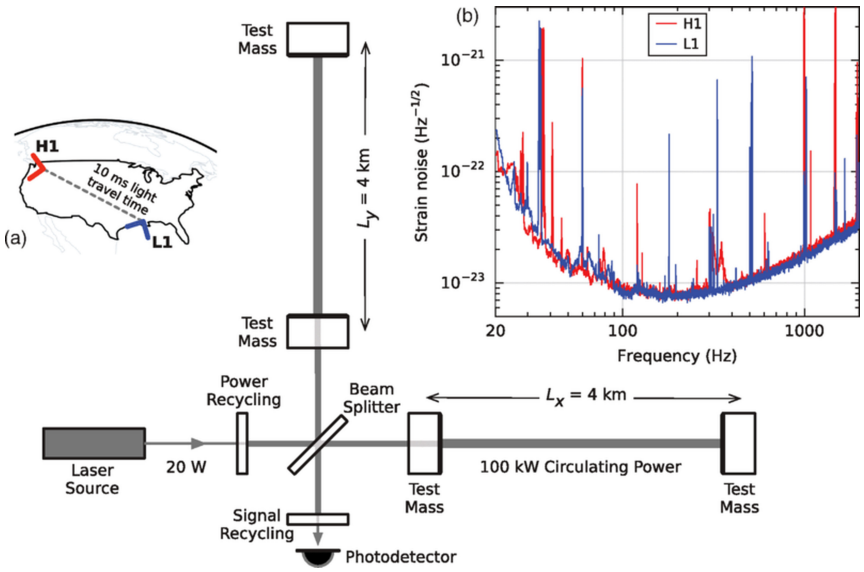


Abb. 19.9.: Gravitationswelleninterferometer LIGO (By Abbott, B. P. et al. - Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger [Abb+16], CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?ecurid=46922746).

Eine der Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen sagt Gravitationswellen voraus. Bei Gravitationswellen bleibt die Lichtgeschwindigkeit c konstant, aber der Skalenfaktor des Raumes, d.h. der metrische Tensor, verändert sich lokal. Bei einer Stauchung des Zwischenraumes trifft das Licht eher am zweiten Ort ein, bei

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

einer Dehnung später. Die Störung des metrischen Tensors breitet sich nun mit Lichtgeschwindigkeit aus. Wenn die Wellenlänge gross gegen die Abmessungen des Interferometers ist (siehe auch Abbildung 19.9, dann verstimmt sich ein Arm des Interferometers in charakteristischer Weise. Dabei ändert sich der Abstand der beiden Spiegel um Bruchteile eines Protonendurchmessers. Das Design von LIGO (siehe [Bar18; Tho18; Wei18]) erlaubt, mit enorm hoher Laserleistung zu arbeiten. Es sind im Wesentlichen zwei Fabry-Perot-Interferometer (je etwa 280 Umläufe) gekoppelt über ein Michelson-Interferometer. Details des Aufbaus können Sie aus B. P. Abbott u. a.; B. C. Barish; K. S. Thorne; R. Weiss ([Abb+16; Bar18; Tho18; Wei18]) entnehmen.
Abbildung 19.10 zeigt die Massen der beobachteten Verschmelzungen von schwarzen Löchern in den Gravitationswellendetektoren LIGO und VIRGO. Die meisten beobachteten Ereignisse führten zu schwarzen Löchern mit sternartigen Massen. Das Ereignis GW190521 wurde durch eine Verschmelzung mit einert resultierenden Masse von 142 M_{Sonne} ausgelöst. Es ist die erste eindeutige Beobachtung eines mittleren schwarzen Lochs (IBMH).

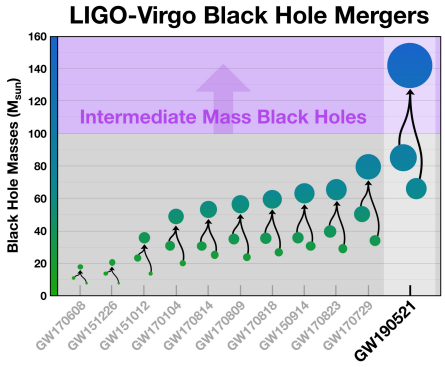


Abb. 19.10.: Durch die Gravitationswellendetektoren LIGO und Virgo beobachtete Verschmelzungen von schwarzen Löchern. (Image credit: LIGO/Caltech/MIT/R. Hurt (IPAC)).

20. Milchstrasse und ihre Sterne

Unsere Milchstrasse ist die im Detail am einfachsten zu untersuchende Galaxie. Eine Übersicht andererseits ist schwierig zu bekommen, da wir ja inmitten des Geschehens sind. Deshalb ist es sinnvoll auch entferntere Galaxien zu untersuchen und die Erkenntnisse zu kombinieren.

20.1. Sternentwicklung

Die Entwicklung von Sternen in der Milchstrasse ist ein Beispiel für Prozesse, die in vielen Galaxien ablaufen. In Ihrer Arbeit „The efficiency of star formation in galaxies as a function of galaxy size and environment“ [You99] beschreibt Judith Young wie die lokale Umgebung und die Grösse der Galaxien die Sternbildung beeinflusst. Die folgenden Abschnitte zeigen wie Sterne klassifiziert werden und wie wir denken, dass die Entwicklung abläuft.

20.1.1. Masse und Leuchtkraft

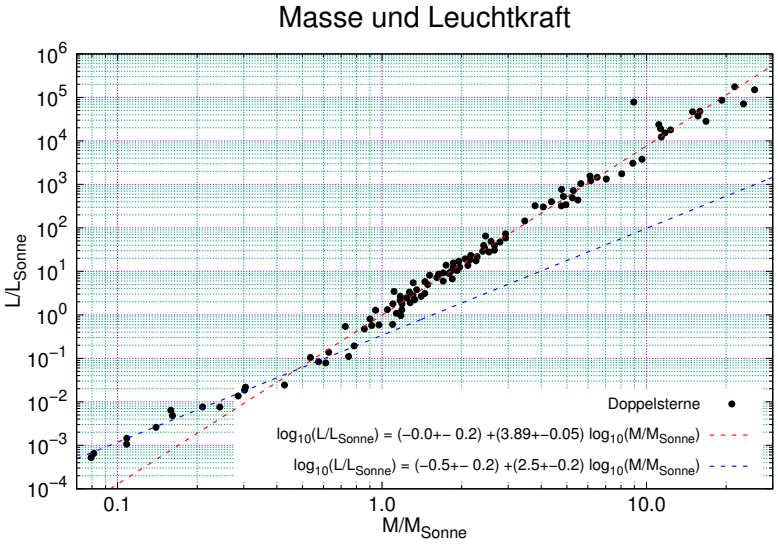


Abb. 20.1.: Zusammenhang zwischen Masse und Leuchtkraft (nach [UB91]).

Mit Doppelsternen kann der Zusammenhang zwischen Distanz, Masse und Leuchtkraft bestimmt werden (siehe A. Unsöld und B. Baschek *Der neue Kosmos* [UB91]). Der Zusammenhang zwischen der Masse und der Leuchtkraft ist in Abbildung 20.1 gezeigt. Die Abbildung zeigt, dass es für die betrachteten Sterne zwei Bereiche mit einer unterschiedlichen funktionalen Abhängigkeit gibt:

$$M > M_\odot \qquad \frac{L}{L_\odot} = \left(1^{+0.6}_{-0.4}\right) \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.89\pm0.05} \tag{20.1.1a}$$

$$M \leq M_\odot \qquad \frac{L}{L_\odot} = \left(0.32^{+0.18}_{-0.12}\right) \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2.5\pm0.2} \tag{20.1.1b}$$

Für den Massenbereich von $0.05M_\odot < M < 100M_\odot$ gibt A. Unsöld und B. Baschek [UB91] an, dass

$$L \propto M^\alpha \tag{20.1.2}$$

A. Unsöld und B. Baschek geben an, dass die Beziehungen

$$M > 3M_\odot \qquad \alpha \approx 3 \tag{20.1.3a}$$

$$M < 0.5M_\odot \qquad \alpha \approx 4 \tag{20.1.3b}$$

seien. Dies ist nicht ganz durch die Daten gegeben, könnte aber aus theoretischen Überlegungen stammen.

20.1.2. Sternspektren und Klassifikation von Sternen

Edward Pickering hatte 1884 mit seinem Katalog «Harvard Photometry» eine erste Klassifizierung vorgenommen. Diese war unvollständig und teilweise nicht korrekt. Die physikalisch korrekt angeordneten Sternklassen wurden Annie Cannon wurden 1922 von der International Astronomical Union (IAU) zum noch heute geltenden Klassifizierungssystem bestimmt. Ihre Klassifizierung beruht auch auf Vorarbeiten

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

von Williamina Fleming, Antonia Maury und Nettie Farrar.

Spektraltyp	T/K	Klassifikationskriterien
O	50000	Linien hochionisierter Atome: He II, Si IV, N III; H schwach
B0	25000	He II fehlt; He I schwach, Si III, O II; H stärker
A0	10000	He I fehlt; H maximal; Mg II, Si II stark; Fe II, Ti II schwach; Ca II schwach
F0	7600	H schwächer; Ca II stark; ionisierte Metalle Max. bei A5; neutrale Metalle gleich stark
G0	6000	Ca II sehr stark; neutrale Metalle (Fe I) stark
K0	5100	H relativ schwach; neutrale Atome stark; Molekülbanden
M0	3600	Neutrale Atome sehr stark (Ca I); TiO Banden
M5	3000	Ca I sehr stark; TiO stärker
C	3000	Starke Cn-, CH-, C_2-Banden; TiO fehlt (ältere Riesensterne)
S	3000	Starke ZrO, YO, LaO Banden; neutrale Atome wie bei K und M (ältere Riesensterne)
L	2000	sehr kalt, dunkelrot, CrH,FeH, H_2O, CO, N, K, Rb, Cs, TiO und VO schwächer
T	1300	kalt, Infrarot, starke CH_4-Banden, CO schwächer werdend
Y	400	braune Zwerge

Tab. 20.1.: Klassifikation von Sterntypen nach Edward Pickering und Annie Cannon.

Tabelle 20.1 zeigt die Klassifikation von Sternen nach Edward Pickering und Annie Cannon[1].
Junge Sterne befinden sich in den Klassen O, B, ... Alte Sterne sind in den Klassen K, M, ...zu finden. Die Sonne ist mit ihrer STERNKLASSE G2 V an der Grenze zwischen jungen und alten Sternen. Vielleicht ist die Grenze auch einfach so gewählt, dass alles was jünger als die Sonne ist «jung»ist, und umgekehrt.
Tabelle 20.1 verwendet zur Sternklassifikation Ionisationszustände. Die IONISATIONSZUSTÄNDE der Atome können nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 8.1.] aus der MAXWELL-BOLTZMANN-GLEICHUNG abgeleitet werden:

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \cdot 4\pi v^2 dv \tag{20.1.4}$$

Zur Berechnung der thermischen kinetischen Energie benötigen wir die wahrschein-

[1] Die Reihenfolge kann mit dem Merksatz «Oh, Be A Fine Girl/Guy – Kiss Me!» gelernt werden

lichste Geschwindigkeit

$$v_{wahrsch} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \tag{20.1.5}$$

und die Root-Mean-Square (RMS)-Geschwindigkeit.

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \tag{20.1.6}$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in einem Atom bei der Energie E zu finden wird durch die BOLTZMANNGLEICHUNG gegeben. Interessant ist hier nur die relative Wahrscheinlichkeit für zwei Niveaus E_a und E_b.

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{\exp\left(-\frac{E_b}{k_BT}\right)}{\exp\left(-\frac{E_a}{k_BT}\right)} = \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_BT}\right) \tag{20.1.7}$$

Bei mehrfach entarteten oder degenerierten Energieniveaus E_a und E_b müssen die GEWICHTSFAKTOREN g_a und g_b verwendet werden. Die modifizierte Wahrscheinlichkeit lautet dann

$$\frac{P(E_b)}{P(E_a)} = \frac{g_b \exp\left(-\frac{E_b}{k_BT}\right)}{g_a \exp\left(-\frac{E_a}{k_BT}\right)} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_BT}\right) \tag{20.1.8}$$

Daraus kann das Verhältnis der Anzahl Atome berechnet werden

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b \exp\left(-\frac{E_b}{k_BT}\right)}{g_a \exp\left(-\frac{E_a}{k_BT}\right)} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{(E_b - E_a)}{k_BT}\right) \tag{20.1.9}$$

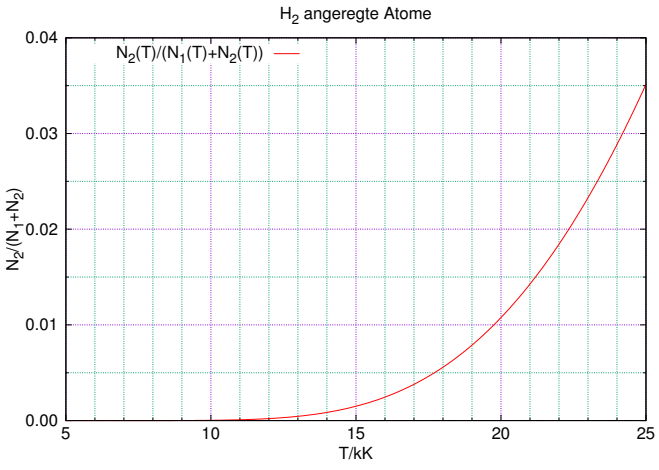


Abb. 20.2.: Anzahl der angeregten H-Atome als Funktion der Temperatur (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.7]).

Abbildung 20.2 zeigt nach (20.1.9) die Temperaturabhängigkeit der Anzahl der

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

angeregten H-Atome. Füe eine genaue Berechnung müssen die verschiedenen Ionisationszustände berücksichtigt werden. Aus der statistischen Physik wissen wir, dass die Zustandssumme

$$Z = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \exp\left(-\frac{(E_j - E_1)}{k_B T}\right) \tag{20.1.10}$$

die Grundlage aller weiterer Berechnungen ist. Wir nehmen die Werte Z_i und Z_{i+1} für den Anfangs- und den Endzustand an. Daraus ergeben sich nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 8.1.] die Gleichung für die Zahlenverhältnisse

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right) \tag{20.1.11}$$

Dabei ist χ_i die Energie um ein Elektron vom i-ten Zustand zu entfernen. n_e ist die Dichte der freien Elektronen. Gleichung (20.1.11) ist die Saha-Gleichung (nach Meghnad Saha)

Der Druck der freien Elektronen wird mit der idealen Gasgleichung $p_e = n_e k_B T$ aus der Saha-Gleichung (20.1.11) berechnet

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2k_B T Z_{i+1}}{p_e Z_i}\left(\frac{2\pi m_e k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right) \tag{20.1.12}$$

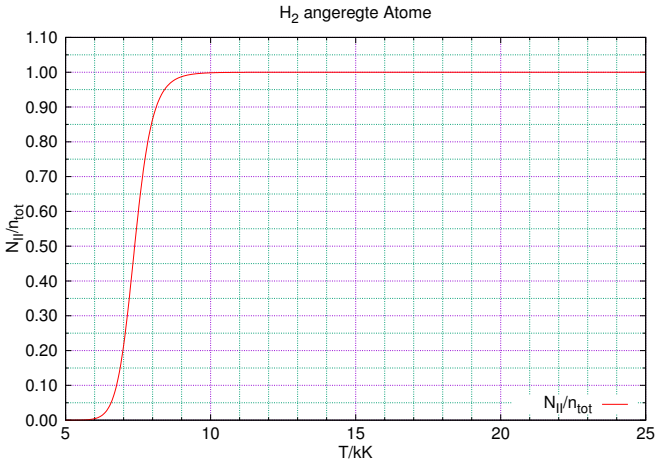


Abb. 20.3.: Saha-Gleichung für den Anteil des ionisierten Wasserstoffs beim Druck der freien Elektronen $p_e = 20$ Pa (analog zu B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.8]).

Die Zustandssumme des ionisierten Wasserstoffs mit $Z_{II} = 1$, $Z_I = 2$ (Spinzustände), der Energie $\chi_I = 13.6$ eV gibt das Verhältnis $\frac{N_{II}}{N_I + N_{II}}$. Diese Grösse ist in Abbildung 20.3 gezeigt.

Um die nicht ionisierten Atome mit zu berücksichtigen werden die Boltzmann-Gleichung und die Saha-Gleichung kombiniert

$$\frac{N_2}{N_{total}} = \left(\frac{\frac{N_2}{N_1}}{1+\frac{N_2}{N_1}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{N_{II}}{N_I}}\right) \tag{20.1.13}$$

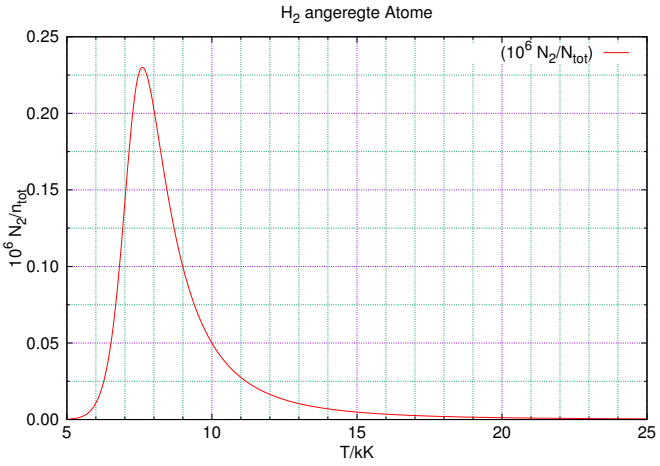


Abb. 20.4.: Stärke der Balmer-Linien beim Druck der freien Elektronen $p_e = 20$ Pa (analog zu B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Abb. 8.9]).

Gleichung (20.1.13) gibt die Stärke der Balmer-Linien an. Abbildung 20.4 stellt die Gleichung dar. Das Maximum befindet sich etwa bei 10 000 K.

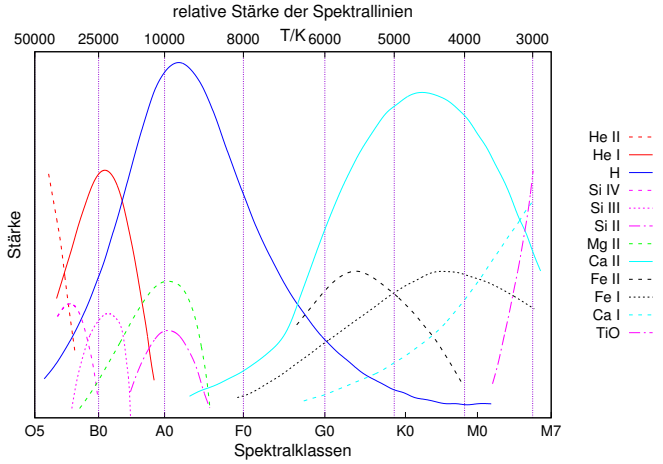


Abb. 20.5.: Linienstärken verschiedener Atome oder Verbindungen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Spektralklasse (adaptiert von B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Fig. 8.11]).

Abbildung 20.5 zeigt die Linienstärke verschiedener Atomsorten bei verschiedenen Spektralklassen. Diese Darstellung ist die Grundlage der Spektralklassifikation.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

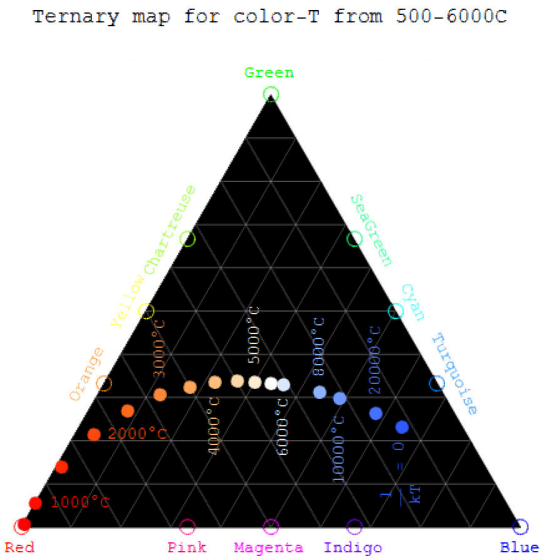


Abb. 20.6.: Sternspektren auf Kamerasensoren (Credit: P. Fraundorf, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons, TernaryColorTmap.PNG).

Kamerasensoren messen nicht Spektrallinien, sondern die relative Stärke der Farben rot, grün und blau. Abbildung 20.6 zeigt die Lage der verschiedenen Spektralklassen in Roh-Format von Kamera-Sensoren (RAW)-Dateien. Eine professionellere Variante dieser Methode ist die Verwendung von FARBINDICES U, B und V.

Spektraltyp	$T_{\text{Oberfläche}}$/K	Farbindex $B-V$	Häufigkeit/%
O5	35000	-0.45	
B0	21000	-0.31	3
B5	13000	-0.17	
A0	9700	-0.00	27
A5	8100	+0.16	
F0	7200	+0.30	10
F5	6500	+0.45	
G0	6000	+0.57	16
G5	5400	+0.7	($\odot$)
K0	4700	+0.84	37
K5	4000	+1.11	
M0	3300	+1.24	7
M5	2600	+1.61	

Tab. 20.2.: Spektraltypen. V: Helligkeit (Magnitude) m (bei 550 nm), B: Helligkeit (Magnitude) m (bei 440 nm).

Tabelle 20.2 zeigt die charakteristischen Werte der maximalen Emissionstempera-

tur der Oberfläche und des Farbindexes $B-V$ für die definierten Spektralklassen.

Symbol	Bezeichnung	Mittenwellenlänge	Bandbreite
U	Ultraviolete Magnitude	365 nm	68 nm
B	Blaue Magnitude	440 nm	98 nm
V	Sichtbare Magnitude	550 nm	89 nm

Tab. 20.3.: Definition der FARBINDICES U, B und V.

Tabelle 20.3 zeigt die Definition der FARBINDICES U, B und V. Üblicherweise werden die beiden Farbindices $U-B = M_U - M_B$ und $B-V = M_B - M_V$ verwendet.

Beachten Sie, dass die Definition für U

$$U = -2.5 \log_{10} \left(\int_0^\infty F_\lambda S_U(\lambda) d\lambda \right) + C_U \tag{20.1.14}$$

ist. Das Analoge gilt für B und V. Dann ist

$$U - B = -2.5 \log_{10} \left(\frac{\int_0^\infty F_\lambda S_U(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty F_\lambda S_B(\lambda) d\lambda} \right) + C_{U-B} \tag{20.1.15}$$

und analog für $B-V$.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

20.1.3. Geburt von Sternen

Abb. 20.7.: Orion Nebel M42, eine Kinderstube für Sterne. Links die Aufnahme der NASA mit dem Hubble-Teleskpop, rechts die Aufnahme von Christoph Klinkicht mit dem Teleskop des Fortgeschrittenenpraktikums. (Credits: links: NASA, ESA, T. Megeath (University of Toledo) and M. Robberto (STScI) h http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2006/01/image/q/ und rechts: Christoph Klinkicht: Zulassungsarbeit zum Lehramt Physik an der Universität Ulm „CCD-Astrophotografie“ [Kli13]).

Sterne entstehen aus Gaswolken wie z.B. dem ORION NEBEL in Abbildung 20.7. James Jeans veröffentliche in „I. The stability of a spherical nebula“ [Jea02] eine ausführliche Untersuchung zur Stabiltiät von Gaswolken. Eine homogene Gaswolke ist wegen der statistischen Natur der Gasbewegung gegen einen Gravitationskollaps nicht stabil. Die typische KOLLAPSZEIT beträgt etwa

$$t_{\text{Kollaps}} \approx 7 \cdot 10^6 \text{ a} \tag{20.1.16}$$

Die statistische Natur der Gasbewegung impliziert, dass eine Gaswolke an verschiedenen Orten instabil werden kann. Nach James Jeans und späteren Forschenden beginnt der Kollaps mit einer isothermen Kontraktion. Später wird die dichter werdenden Gaswolke optisch dicht. Durch die Kontraktion senkt sich die Gravitationsenergie der Massen der Gasteilchen. Da Energie erhalten werden muss, kann die freigewordene Energie sich in thermische Strahlung und in eine erhöhte kinetische Energie der Gasteilchen umwandeln: Dei Temperatur steigt. Ab einer Temperatur von 100 K ist die Kontraktion ADIABATISCH.
Die steigenden Druckkräfte kompensieren Kollaps. Dies führt zur Dissoziation von H_2-Molekülen. Der Kollaps geht beschleunigt weiter.
Mit James Jeans kann die Gasmasse bestimmt werden, die notwendig ist, dass die Gravitation den Gasdruck überwinden kann. Der thermische und der Gravitationsdruck sind:

$$p_{Gas} = \frac{\rho}{\langle m \rangle} kT \tag{20.1.17a}$$

$$p_{grav} = -\frac{3}{8} \frac{GM^2}{\pi R^4} \tag{20.1.17b}$$

Wir bekommen eine Instabilität wenn

$$p_{Gas} + p_{grav} < 0 \tag{20.1.18}$$

ist. Daraus kann die mindestens notwendige Masse berechnet werden

$$M \geq \frac{2kT}{G\langle m\rangle} R \tag{20.1.19}$$

Die Ungleichung (20.1.19) kann für eine homogene sphärische Massenverteilung mit $M = \rho V = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ in eine Ungleichung für die Dichte

$$\rho \geq \frac{3kT}{2\pi G\langle m\rangle R^2} \tag{20.1.20}$$

oder den Radius

$$R^2 \geq \frac{3kT}{2\pi G\langle m\rangle \rho} \tag{20.1.21}$$

umgewandelt werden. Mit der gleichen Beziehung $M = \rho V = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ erhält man die notwendige Mindestmasse für einen Gravitationskollaps

$$M \geq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\frac{kT}{G\langle m\rangle}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tag{20.1.22}$$

Diese Grenze hängt nur von der Dichte und der Temperatur ab, nicht von der Ausdehnung der Gasmasse.

T	1 H/cm^3	10^2 H/cm^3	10^4 H/cm^3	10^6 H/cm^3
5 K	$261M_\odot$	$26.1M_\odot$	$2.61M_\odot$	$0.27M_\odot$
10 K	$738M_\odot$	$73.8M_\odot$	$7.38M_\odot$	$0.738M_\odot$
100 K	$23300M_\odot$	$2330M_\odot$	$233M_\odot$	$23.3M_\odot$

Tab. 20.4.: Mindestmassen für Gravitationskollaps

Tabelle 20.4 zeigt die notwendigen Mindestmassen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichte von Wasserstoffatomen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

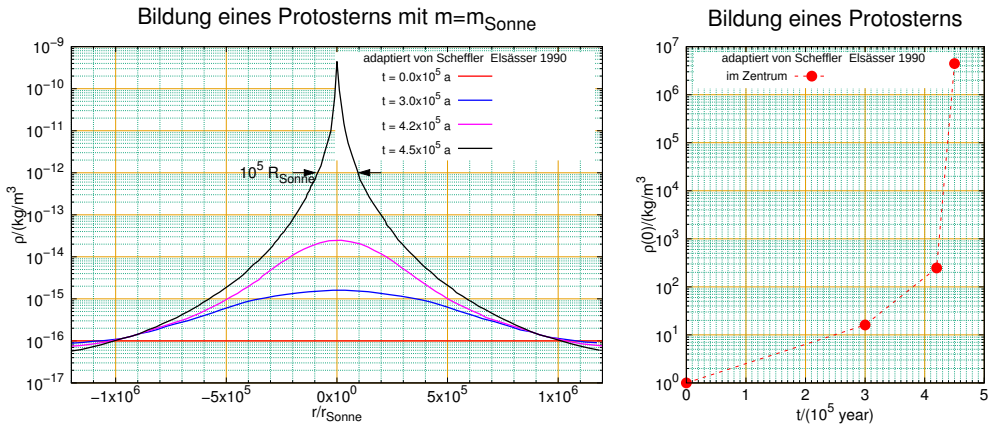


Abb. 20.8.: Kontrahierende Gaswolke. Links die Dichte der Gaswolke im Querschnitt und rechts die Dichte im Zentrum über die Zeit. (adaptiert aus fig:sterne:gaswolke:kollabierend [SE90]).

Die Dichte einer kollabierenden Gaswolke nimmt im Zentrum beim Kollaps sehr schnell zu. Abbildung 20.8 zeigt links zu vier Zeiten den radialen Verlauf der Dichte und rechts die Dichte im Zentrum.

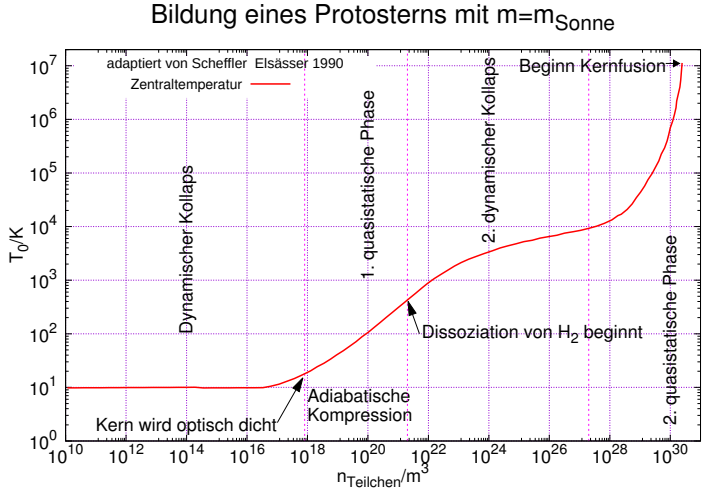


Abb. 20.9.: Temperatur beim Gravitationskollaps (adaptiert aus [SE90]).

Abbildung 20.9 zeigt die Zentraltemperatur eines sich bildenden Sterns als Funktion der Teilchendichte im Kern.

Abb. 20.10.: Bild kollabierender Gaswolken: Pleiades, NGC 1432/35, M45 (Quelle: NASA, ESA and AURA/Caltech, http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2004-20-a-full_jpg.jpg).

Abbildung 20.10 schliesslich zeigt kollabierende Gaswolken in den Plejaden.

20.1.3.1. Drehimpuls

Wenn Sterne aus Gaswolken kollabieren entsteht eine komplizierte Wechselwirkung mit Drehimpulsen und Magnetfeldern. Üblicherweise haben die vorhandenen Magnetfelder Stärken von etwa $10 \cdot 10^{-10}$ T.

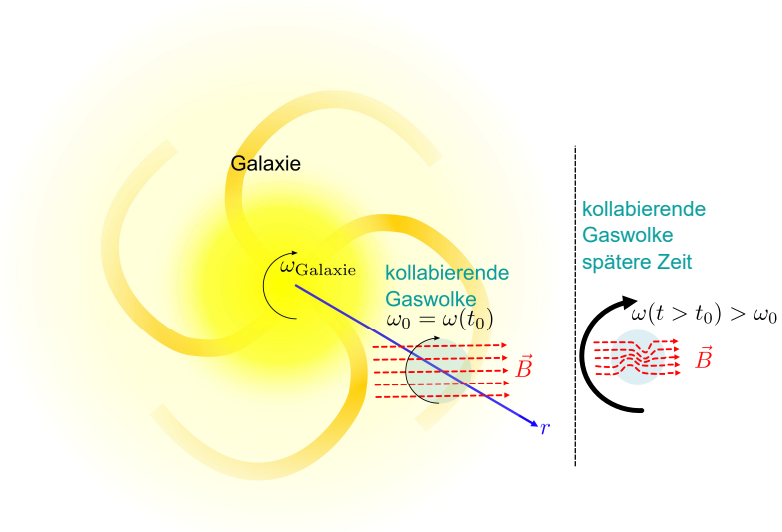


Abb. 20.11.: Kollabierende Gaswolke in einer Galaxie. (adaptiert von W. Demtröder, Kap. 11.2.3.).

Abbildung 20.11 zeigt eine Galaxie mit einer lokalisierten Gaswolke, die kollabiert. Diese Gaswolke hat ursprünglich die Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \omega(t_0)$. Wenn die Gaswolke nun geschrumpt ist muss sich der gesamte Drehimpuls des Gases erhalten (ausser es gäbe Kollisionen mit äusseren Objekten). Da der Durchmesser schrumpft (siehe Abbildung 20.8) muss die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit zunehmen: $\omega(t > t_0) > \omega 0$.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Die in der Gaswolke vorhandenen Magnetfelder werden durch ähnliche Prozesse wie bei Protuberanzen (siehe Abschnitt 18.1.2) mitgeführt. Die Wechselwirkung des Magnetfeldes mit dem Gas und mit sich selber bewirkt:

1. dass die Energie der Magnetfelder die Gaswolke gegen einen Kollaps stabilisiert. Die notwendige Masse wird deshalb leicht höher sein.
2. Weiter werden deshalb die Magnetfelder mitgeführt und aufgewickelt.
3. Schliesslich werden durch die aufgewickelten Magnetfelder ionisierte Teilchen im äusseren Bereich beschleunigt und innen gebremst. Drehimpuls wird so von innen nach aussen transportiert.

Der Transport von Drehimpuls ist besonders gut in unserem Sonnensystem sichtbar: Die Sonne beinhaltet 99 % der Gesamtmasse des Sonnensystems, trägt aber nur 1 % des gesamten Drehimpulses. Der überwiegende Anteil des Drehimpulses wird von der Bahnbewegung der Planeten, Planetoiden, Kometen, Asteroiden und sonstigen Objekten in einer Sonnenumlaufbahn getragen. Dabei vermindern die wenigen rückwärts laufenden Objekte den Gesamtdrehimpuls.

20.1.4. Hauptreihe

Wenn die von Edward Pickering begonnenen und von Annie Cannon zusammen mit Williamina Fleming, Antonia Maury und Nettie Farrar vollendete Klassifizierung auf Sterne angewandt wird zeigen sich in Diagrammen der Magnitude gegen den Farbindex Strukturen, die zum besseren Verständnis der Sternentwicklung viel beigetragen haben.

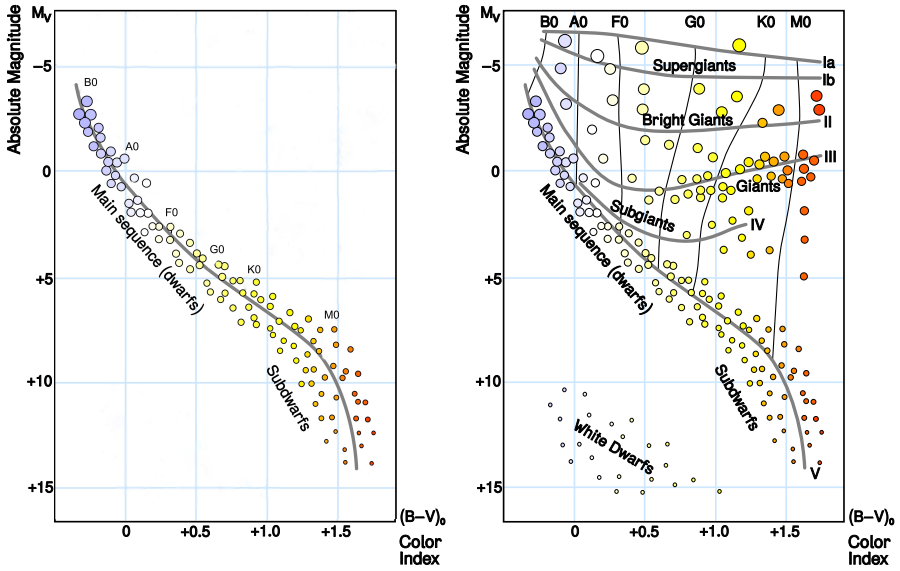


Abb. 20.12.: Links: Lage einer Vielzahl von Sternen im Magnitude gegen $B-V$-Diagramm, rechts: Farbindex und Magnitude (modifiziertes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL or CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons, File%3AH-R_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]).

Abbildung 20.12 zeigt links die Lage der Mehrheit der beobachteten Sterne in ei-

nem Diagramm Magnitude gegen Farbindex. Diese Struktur wird HAUPTREIHE genannt. Sie beginnt links oben mit grossen und heissen Sternen und endet rechts unten mit ZWERGSTERNEN oder den noch kleineren SUBZWERGSTERNEN. Es gibt noch weitere grössere Sterne. Diese sind in Abbildung 20.12 rechts gezeigt. Eingezeichnet ist bei beiden Darstellungen auch die Sternklassifizierung nach Annie Cannon.

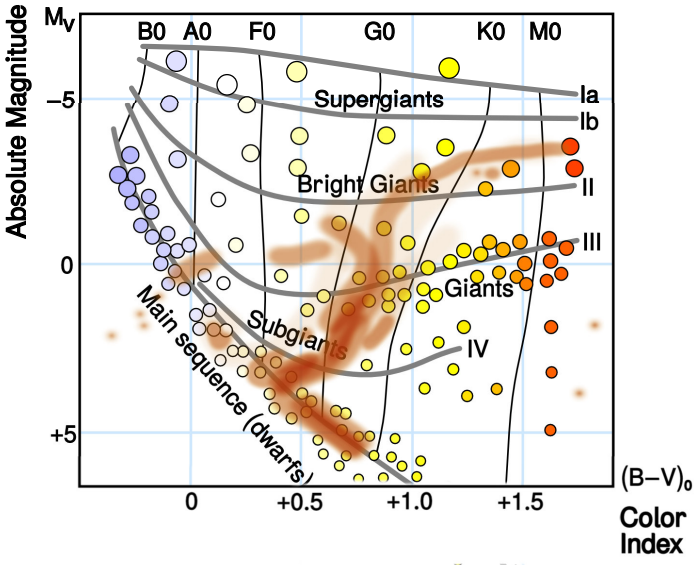


Abb. 20.13.: Farbindex und Magnitude bei der Galaxie M3. Die orange Farbe zeigt die Lage der Sterne in der Galaxie M3. (Bearbeitetes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL or CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons, File%3AH-R_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]).

Je nach Galaxis treten nur einige der möglichen Sterntypen auf. Abbildung 20.13 zeigt die im Kugelsternhaufen M3 im Sternbild der Hunde vorhandenen Sterntypen. Die orange Farbe markiert diese Sterne.

20.1.4.1. Hertzsprung-Russell-Diagramm

Das Diagramm ist nach Ejnar Hertzsprung, seinem Entdecker und Henry Russell der das Diagramm in die heutige Form gebracht hat. Die horizontale Achse ist dabei der Farbindex $B-V$ oder die Temperatur aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz. Weiter ist dies äquivalent zu den Sternklassen nach Annie Cannon. Diue vertikale Achse ist entweder die Magnitude oder die relative Luminosität.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

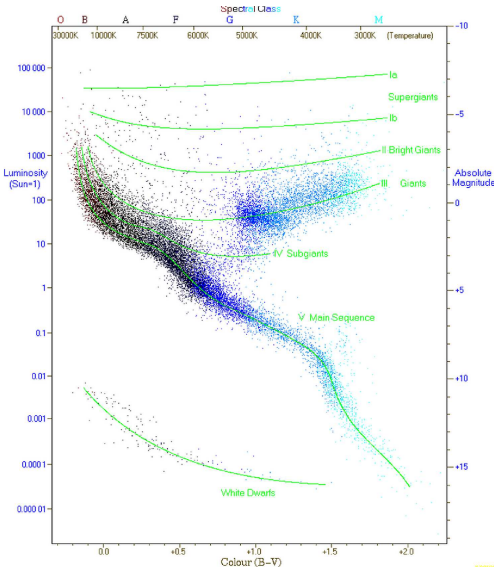


Abb. 20.14.: HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (von Richard Powell (The Hertzsprung Russell Diagram) [CC-BY-SA-2.5, via Wikimedia Commons, File:HRDiagram.png).

Abbildung 20.14 zeigt ein HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM mit sehr viel mehr Sternen. Die Hauptreihe enthält die meisten Sterne, gefolgt von den Riesensternen oben rechts. Unten links befinden sich die weissen und braunen Zwerge.

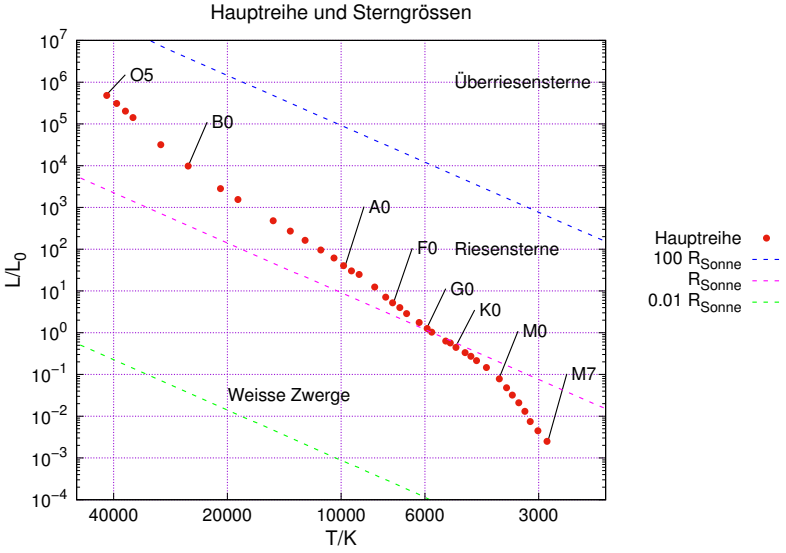


Abb. 20.15.: Temperatur und Masse von Sternen (nach [CO07, Abb. 8.14]).

In Abbildung 20.15 ist nochmals die Hauptreihe eingezeichnet, Zusammen mit der Lage von Sternen die den Sonnenradius oder das 100-fache bzw. das 0.01-fache des Sonnenradius $R_\odot$ haben. Da wo die Linie für $R = R_\odot$ diew Hauptreihe kreuzt befindet sich unsere Sonne.

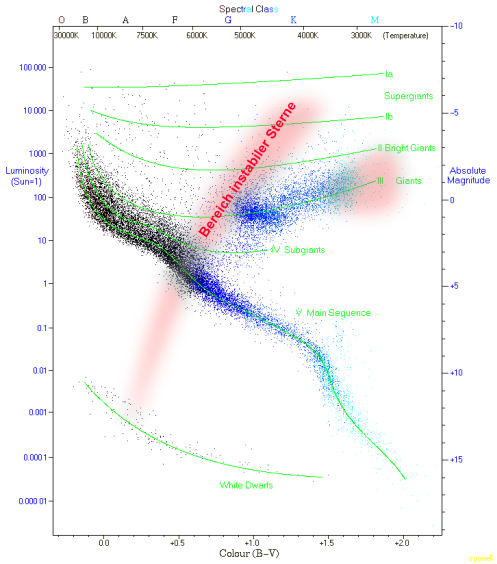


Abb. 20.16.: Bereich instabiler Sterne (nach [CO07, Abb. 8.16] ergänzt von von Richard Powell (The Hertzsprung Russell Diagram) [CC-BY-SA-2.5, via Wikimedia Commons, File:HRDiagram.png).

Abbildung 20.16 zeigt in blassrot den Bereich instabiler Sterne im HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM. Sterne ausserhalb dieses Bereiches leben bei kleiner Masse mehrere Milliarden Jahre, bei sehr grosser Masse auch nur einige zehn Millionen Jahre lang. Im Instabilen Bereich ist die Lebensdauer kürzer.

20.1.4.2. Lebensdauer von Sternen

Die Lebensdauer von Sternen hängt von ihrer Masse ab. Je grösser diese ist, desto stärker kollabiert die Ausgangsgaswolke und desto höher ist die Temperatur im Kern, die notwendig ist um einen ausreichenden Gegendruck zu erzeugen. Die Lebensdauer von Sternen beträgt näherungsweise

$$\tau_{\mathrm{HR}} \cong 6 \cdot 10^9 \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \mathrm{a} \tag{20.1.23}$$

Wir können festhalten, dass mit höherer die höher die Masse die Lebensdauer

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

kürzer wird.

Massenbereich	Bemerkungen
$0.08M_\odot < M < 0.25M_\odot$	Kleiner Kern mit p-p-Reaktion, Kein CNO-Zyklus ⇒ Der Stern endet als WEISSER ZWERG
$0.25M_\odot < M < 1.5M_\odot$	p-p-Reaktion in grossem Bereich, bewegt sich auf der Hauptachse nach links oben
$M > 1.5M_\odot$	CNO-Zyklus ist Hauptenergiequelle
$M < 1.4M_\odot$	He-Flash, der Radius $R \to 250R$ vergrössert sich vor dem Ende enorm!

Tab. 20.5.: Massenbereiche und die dabei auftretenden haupsächlichen Prozesse der Energieumwandlung.

Tabelle 20.5 listet die dominanten Prozesse der Energieumwandlung abhängig von den Massenbereichen.

20.1.4.3. Hauptreihenentwicklung

Anhand des Hertzsprung-Russell-Diagramms kann man abschätzen, wie alt Sterne sind. Conny Aerts konnte zeigen, dass akustische Schwingungen von Sternen (siehe auch für die Sonne Abschnitt 18.1.3) zur Bestimmung des Alters verwendet werden können [ACK10; Aer+03; Bed+11].

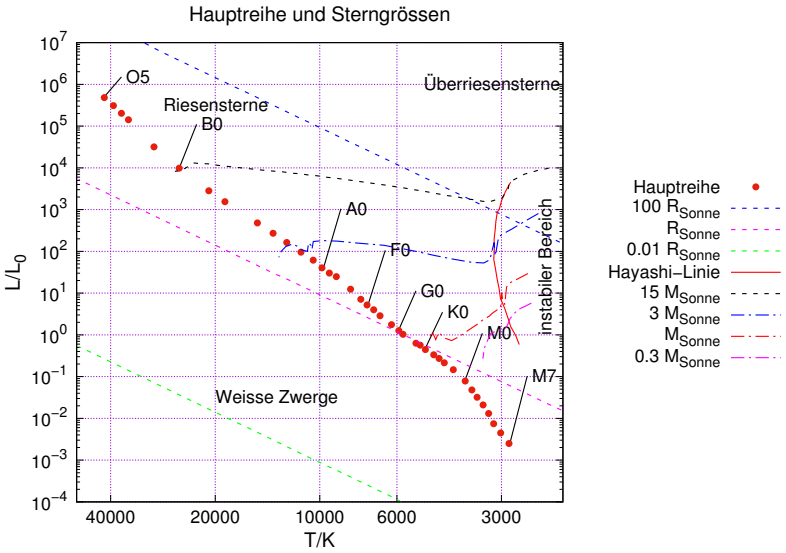


Abb. 20.17.: Weg kollabierender Gaswolken durch das HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (Kombination aus Daten von [CO07, Abb. 8.14] und [Dem10, Abb. 11.19]).

Abbildung 20.17 zeigt den Weg von Sternen weg von der Hauptreihe des HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMMS bis zum STERNTOD. Die rote Linie rechts ist die nach Ha-

yashi Chūshirō benannte Hayashi-Linie. Sie trennt den Bereich instabiler, also zerfallender Sterne rechts ab. Abhängig von der Masse sind die Wege eher direkt oder auch gewunden.

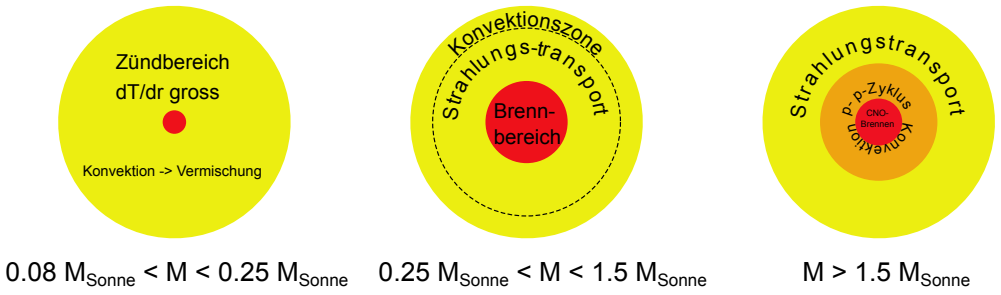


Abb. 20.18.: Hauptreihenentwicklung (nach [Dem10, Abb. 11.21]).

Zuerst soll jedoch die Sternentwicklung auf der HAUPTREIHE beschrieben werden. Abbildung 20.18 zeigt die vorherrschenden Brennmodi abhängig von der Sternmasse. In der Mitte ist die Situation wie bei unserer Sonne gezeigt. Ein relativ grosser Brennbereich für Wasserstoff (P-P-ZYKLUS) im Zentrum wird von einer Strahlungszone gefolgt. Aussen gibt es eine relativ dünne, aber trotzdem voluminöse Schicht mit Konvektion.

Bei massereicheren Sternen (rechts) ist der Brennbereich in zwei Zonen aufgeteilt, innen mit dem bei höheren Temperaturen ablaufenden CNO-ZYKLUS und darum herum den Wasserstoffbrennbereich (P-P-ZYKLUS). Die Strahlungstransportzone reicht bis an die Oberfläche des Sterns.

Bei Sternen, die leichter als 0.25 $M_\odot$ sind gibt es im Zentrum einen ganz kleinen Brennbereich für Wasserstoff (P-P-ZYKLUS) mit einem sehr starken Temperaturgradienten, gefolgt von einer Konvektionszone. Die Strahlungszone fehlt.

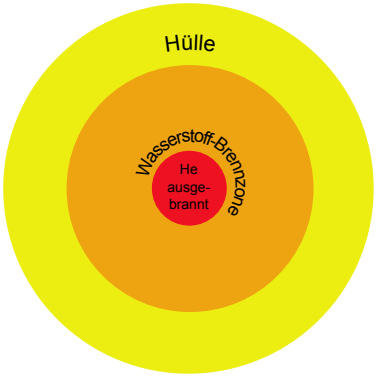


Abb. 20.19.: Hauptreihenentwicklung: Späteres Stadium bei mittlerer Masse (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.22]).

Wenn die Hauptreihenentwicklung abgeschlossen ist und sich der Stern im HERTZSPRUNG-RUSSELL-DIAGRAMM (siehe Abbildung 20.17) nach rechts bewegt, ändert sich die innere Struktur. Der Kern enthält kein brennfähiges Helium mehr. Aussen herum gibt es eine Zone mit Wasserstoffbrennen (P-P-ZYKLUS) gefolgt von einer eher schmalen Hülle.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

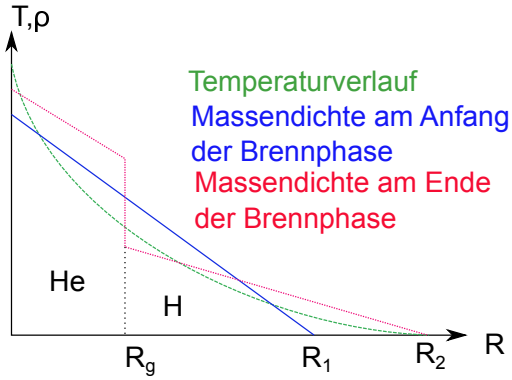


Abb. 20.20.: Hauptreihenentwicklung: Am Ende des Wasserstoffbrennens bei massereichen Sternen (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.23]).

Abbildung 20.20 zeigt schematisch den Temperaturverlauf im Inneren eines Sterns. Weiter zu sehen ist die zu Beginn des Wasserstoffbrennens (P-P-ZYKLUS) linear nach aussen abnehmende Massendichte sowie der Dichtesprung an der Grenze zwischen dem Helium-reichen Kern und der Wasserstoffhülle am Ende der Prennphase.

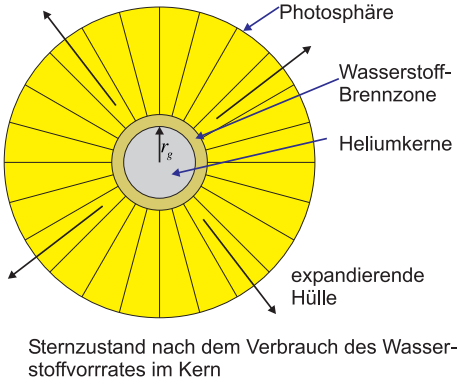


Abb. 20.21.: Sternzustand nach Verbrauch des Wasserstoffvorrates im Kern (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.24]).

Nachdem der Wasserstoffvorrat im Kern aufgebraucht wird muss die Dichte im Zentrum steigen (siehe den Dichteverlauf in der Abbildung 20.20). Abbildung 20.21 skizziert, dass dann die Hülle stark expandiert. Es wird angenommen, dass der Durchmesser der Sonne am Ende ihrer Lebensdauer grösser als der heutige Durchmesser der ERDBAHN sein wird.

20.1.4.4. Nachhauptreihenentwicklung

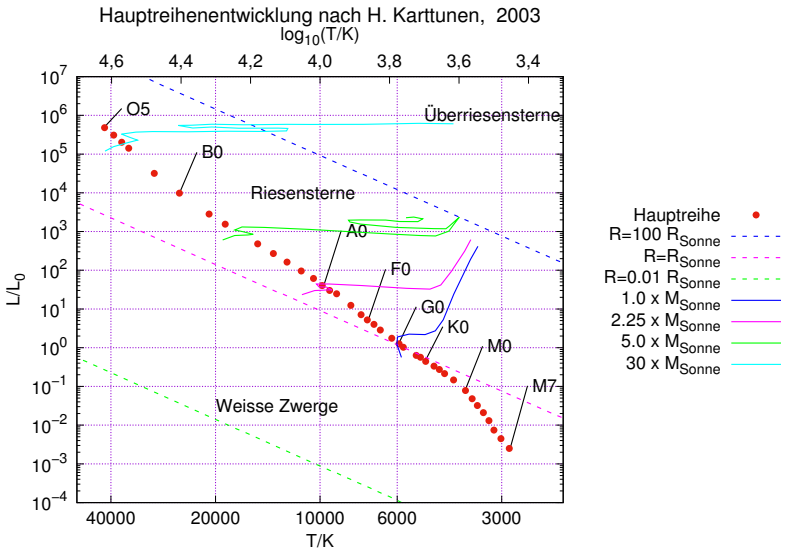


Abb. 20.22.: Nach-Hauptreihenentwicklung nach [Kar03].

Abbildung 20.21 zeigt die Nachhauptreihenentwicklung nach H. Karttunen (*Fundamental Astronomy* [Kar03]). Sterne mit der Masse der Sonne bewegen sichz entlang der blauen Linie zu grösserem Durchmesser, aber kleinerer Temperaturund verwandeln sich mit einem He-Flash, einem Lichtblitz, in einen Zwergstern. Bei Sternen mit einer Masse $\gtrapprox 2\ M_\odot$ zündet die Helium-Verbrennung im Inneren. Sterne an der unteren Grenze (lila Kurve) beenden dann ihr Leben am Ort der Zündung. Noch schwerere Sterne wandern dann wieder zurück zu höheren Temperaturen (grüne Kurve). Sehr schwere Sterne $\gtrapprox 50\ M_\odot$ kommen nie zum Helium-Zünden.

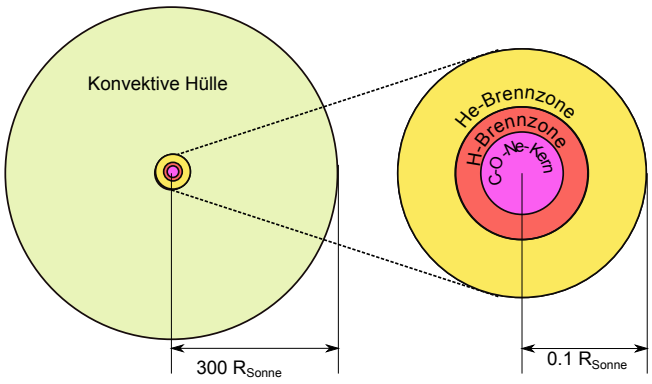


Abb. 20.23.: Entwicklung bei mittlerer Sternmasse (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.26]

Bei einer mittleren Sternmasse (siehe Abbildung 20.23) bläst sich die konvektive Hülle bis zu einem Durchmesser von $\approx 300\ R_\odot$ auf während der Reststern mit einem C, O und Ne-Kern gefolgt (nach aussen) von einer Wasserstoff-Brennzone und einer He und einer Hülle noch einen Durchmesser von $\approx 0.1\ R_\odot$ hat.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

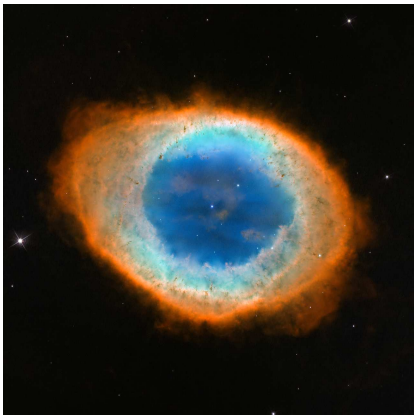


Abb. 20.24.: Ringnebel aus der Leier (NASA, ESA, and the Hubble Heritage (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration, http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2013/13/image/b/format/xlarge_web/).

Die abgestossene konvektive Hülle kann in Teleskopbildern gesehen werden. Ein Beispiel zeigt die Abbildung 20.24.

20.1.5. Veränderliche Sterne

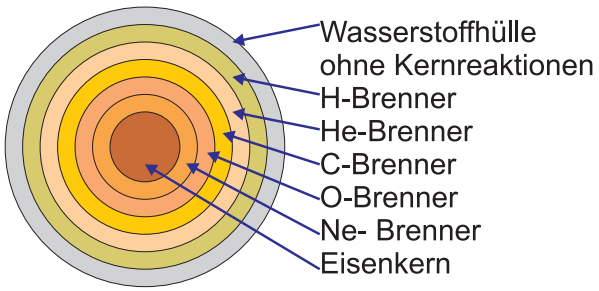
1596 entdeckte David Fabricius dass sich der Stern Mira im Sternbild Walfisch mit einer Periode von $\approx$ 331 d seine Helligkeit änderte. Erst im ausgehenden 19. Jahrhundert widmete sich Mary Watson Whitney, Direktorin der Sternwarte des Vassar College, Poughkeepsie, New York zusammen mit Caroline Furness der Untersuchung veränderlicher Sterne. Die Resultate wurden von M. W. Whitney und C. E. Furness in „Observations of variable stars made during the years 1901-12“ [WF13] publiziert.
Sterne können ihre Leuchtkraft intern oder extern ändern. Veränderliche Sterne können Periodendauern von fast $1 \cdot 10^4$ d bis hinunter zu weniger als 1 ms haben. Es gibt nach der Website der ESA zum Satelliten Hipparchos [ESA22] bis jetzt 11 597 variable Sterne. Die ESA unterscheidet die folgenden Kathegorien

- pulsierende variable Sterne
  - Cepheiden, Beispiel δ-Cephei (Hipparchos-Katalog HIP 110991)
  - RR Lyrae (Leier)-ähnliche Sterne, Beispiel RR-Lyrae (Hipparchos-Katalog HIP 95497)
  - RV-Tauri (Stier)-ähnliche Sterne, Beispiel R Scuti im Sternbild Schild (Hipparchos-Katalog HIP 92202)
  - lang-periodische oder Mira variable Sterne, nach o-Ceti im Sternbild Walfisch, genannt Mira (Hipparchos-Katalog HIP 10826), entdeckt von David Fabricius in 1596
  - halbreguläre variable Sterne, Beispiel Z Ursa Majoris im grossen Wagen (Hipparchos-Katalog HIP 58225)
  - R Coronae Borealis-ähnliche Sterne, Beispiel R Coronae im Sternbild nördliche Krone Borealis (Hipparchos-Katalog HP 77442)

- eruptive variable Sterne
  - γ-Cassiopeiae- artige Sterne, Beispiel V960 Tau(ri) im Stier (Hipparchos-Katalog HIP 26064)
  - Sich wiederholende Novae, Beispiel Nova CrB 1866 (Hipparchos-Katalog HIP 78322)
  - Symbiotische Sterne, Beispiel Z Andromedae im Sternbild Andromeda (Hipparchos-Katalog HIP 116287)
- sich abdeckende Doppelsterne, Beispiel β Persei im Sternbild Perseus, auch Algol genannt (Hipparchos-Katalog HIP 14576)
- rotierende Sterne, Beispiel RS Canum Venaticorum im Sternbild Jagdhunde (Hipparchos-Katalog HIP 64293)

Dazu kommen noch sehr viel schneller sich ändernde Sterne, die PULSARE (siehe Abschnitt 20.1.7.3).

20.1.6. Massive Sterne



Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns
nach Erlöschen der letzten Fusionsenergiequelle im Kern

Abb. 20.25.: Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns nach Erlöschen der letzten Fusionsquelle im Kern (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.28]

Massive Sterne durchlaufen am Ende ihrer Lebensdauer (siehe auch 20.23) eine sich immer schneller ablaufende Entwicklung. Nachdem H und He sowie die weiteren leichten Atomsorten aufgebraucht sind folgt die Fusion von SAUERSTOFF, das O-Brennen für einige Monate. Dann wird SILIZIUM im sogenannten Si-Brennen in einigen Tagen. aufgebraucht. Es bildet sich eine Zwiebelschalenstruktur (siehe Abbildung 20.25). Die abgeworfene Hülle leuchtet hell auf. Der Stern explodiert als TYP II SUPERNOVA.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

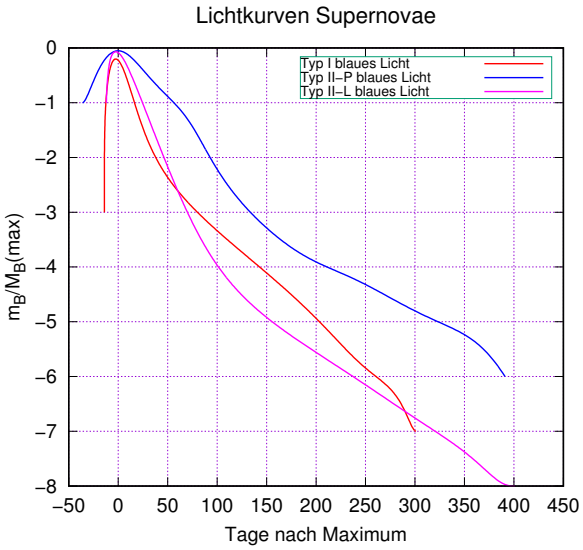


Abb. 20.26.: Lichtkurven von Supernovae nach J. B. Doggett und D. Branch [DB85].

Abbildung 20.26 zeigt den Helligkeitsverlauf von SUPERNOVAE über etwas mehr als ein Jahr. J. B. Doggett und D. Branch unterscheiden in „A comparative study of supernova light curves“ [DB85] drei Arten von SUPERNOVAE, die Typen I, II-P und II-L. SUPERNOVAE können so hell sein, dass sie in einer Millionen Lichtjahre entfernten Galaxie die Galaxie überstrahlen können. Abbildung 20.26 deutet an, dass der Helligkeitsverlauf von SUPERNOVAE universell sein könnte. Bei einigen speziellen Typen von SUPERNOVAES ist dies der Fall, sie können zur absoluten DISTANZMESSUNG verwendet werden.

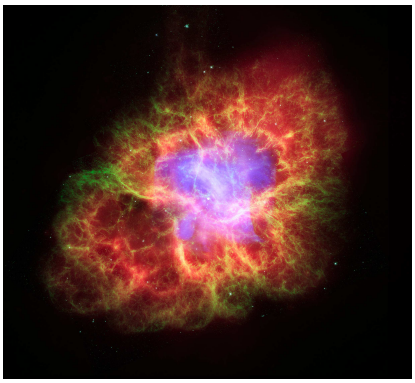


Abb. 20.27.: Supernova-Reste (Krebs-Nebel, Explosion 1054) (NASA, ESA, CXC, JPL-Caltech, J. Hester and A. Loll (Arizona State Univ.), R. Gehrz (Univ. Minn.), and STScI, http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2005-37-b-full_jpg.jpg)

Die abgeworfene Gashülle wie bei der im Jahre 1054 beobachteten Explosion im STERNBILD KREBS bilden eine leuchtende, sich ausdehnende Gaswolke. Abbildung fig:supernova:krebs zeigt ein Bild davon.

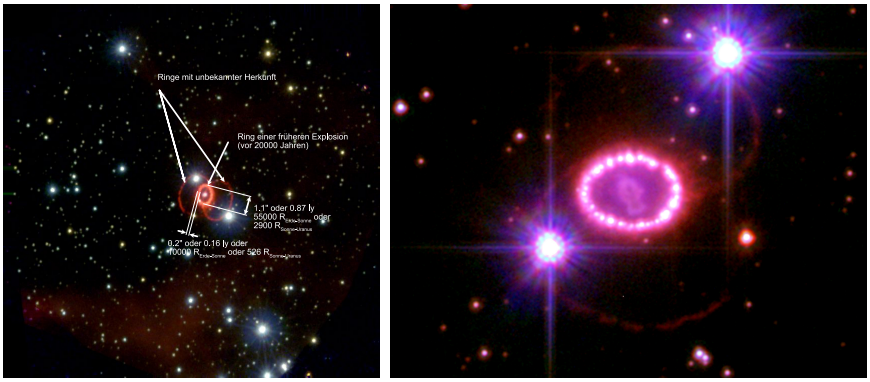


Abb. 20.28.: Supernova 1987A in Magellanscher Wolke 163 000 ly, entfernt, aufgenommen am 6. 12. 2006 durch das Hubble-Space-Telescope. Links eine Übersicht, rechts eine mit Bildverarbeitung geschärfte Aufnahme. Kleiner heller Ring mit Lichtpunkten: Schockwelle, Ringdurchmesser 0.86 ly, Breite 0.2 ly. Zentrum: radioaktive Elemente, vor allem ^{44}Ti Schockwelle, 2 schwache Ringe unbekannter Ursache (NASA, ESA, P. Challis and (rechts) R. Kirschner (Harvard-SmithsonianCenter for Astrophysics)).

Abbildung 20.28 zeigt die Überreste einer Nova aus dem Jahre 1987. Nicht alle beobachteten Strukturen sind verstanden. Heute weiss man, dass der Stern zu einem Pulsar, also einem Neutronenstern kollabiert ist.

20.1.6.1. Novae

Gegenwärtig unterscheidet man drei Arten von Novae, die Zwergnovae, die klassischen Novae und die Supernovae. Die letzteren werden in die Supernovae Typ I und die Supernovae Typ II eingeteilt.

20.1.6.1.1. Zwergnovae Zwergnovae entstehen wenn die Akkretionsscheibe eines Binärsystems mit einem weissen Zwerg aufleuchtet (Siehe [CO07, Kap. 18.4, p. 675]). Bei weissen Zwergen leuchtet die Akkretionsscheibe bei einem aktiven Transfer von Materie wesentlich stärker als der Stern selber.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

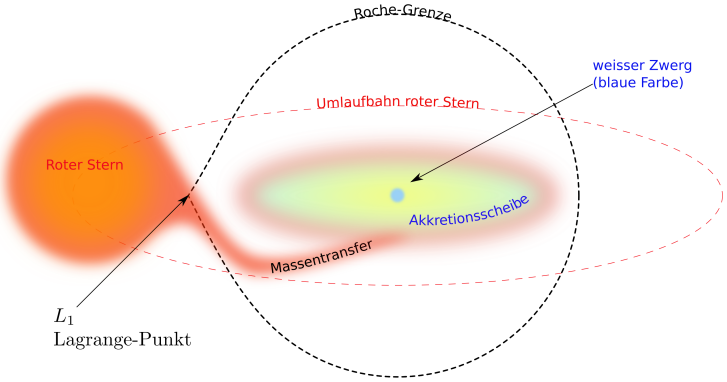


Abb. 20.29.: Symbolische Darstellung einer Akkretionsscheibe eines Binärsystems aus einem roten Stern und einem weissen Zwerg. (Nach [CO07], https://physics.weber.edu/carroll/ und https://hubblesite.org/)

Abbildung 20.29 zeigt eine Darstellung des Akkretionsvorgangs. Da die Umlaufbahn in der Regel elliptisch ist wird die ROCHE-GRENZE (siehe Abschnitt 20.2.1 und Gleichung (20.2.11)).

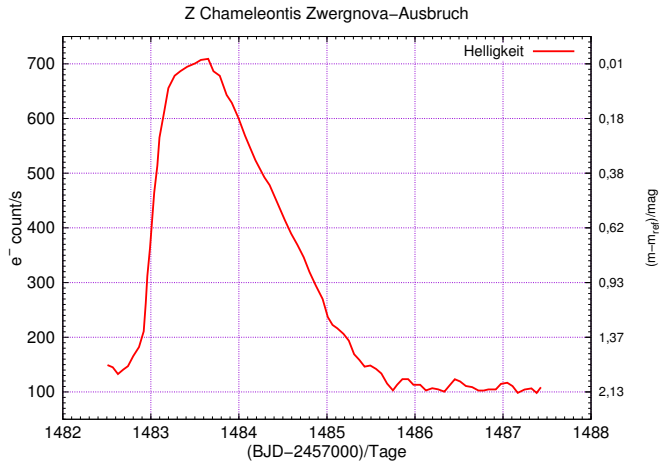


Abb. 20.30.: Helligkeitskurve der Zwergnova Z Chamaeleontis im Sternbild Chamäleon (Daten nach J. M. C. Court u. a. [Cou+19, Fig. 3])

Abbildung 20.30 zeigt die Helligkeitskurve der ZWERGNOVA Z-Chamaeleontis. Die Zeit ist im Barycentric Julian Date (BJD) Datumssystem angegeben, ein System das die Zeit im Schwerpunkt des Sonnensystems im Julian Date (JD) Datumssystem misst. Der 1. April 2022 hat die Julian Day Number (JDN) JDN = 2459671.
Das Charakteristikum von ZWERGNOVAE ist die periodisch steigende Helligkeit. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, p. 680] gibt es eine alternative Erklärung, die den Übergang von neutralem H zu ionisiertem H beinhaltet. Dies bedeutet eine Änderung der optischen Dichte, aber auch der Wärmeleitung und der Viskosität.

20.1.6.1.2. Klassische Novae Wenn die Akkretsionsrate (Rate des Massentransportes) in Doppelsternsystemen grösser ist als in ZWERGNOVAE, spricht man von

einer KLASSISCHEN NOVA. Während sich bei einer Zwergnova die Helligkeit um einige wenige Magnituden ändert (etwa 2 mag) ist die Helligkeitsänderung bei einer klassischen Nova

$$7 \text{ mag} \lessapprox \Delta m \lessapprox 20 \text{ mag} \tag{20.1.24}$$

einiges grösser. Der Anstieg der Luminosität dauert einige wenige Tage mit einem kurzen Stillstand ungefähr 2 mag unter der maximalen Helligkeit und gefolgt von einem Abfall über etwa hundert Tage. Die maximale Helligkeit ist etwa 10^5 $L_\odot$. Es wird eine Energie von etwa 10^{38} J emittiert. Abbildung 20.29 beschreibt auch den Mechanismus einer klassischen Nova.

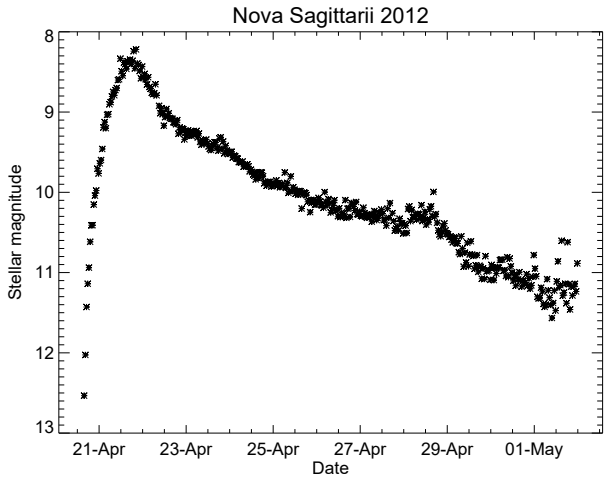


Abb. 20.31.: Helligkeitsverlauf der klassischen Nova Sagittarii 2012 (Quelle: https://stereo.gsfc.nasa.gov/tˆhompson/nova_sagittarii_2012/ und [Bew+10]).

Abbildung 20.31 zeigt als Beispiel den Helligkeitsverlauf der klassischen Nova Sagittarii 2012 (siehe D. Bewsher u. a. „Determination of the Photometric Calibration and Large-Scale Flatfield of the STEREO Heliospheric Imagers: I. HI-1“ [Bew+10]). Nach einem schnellen Anstieg der Luminosität erfolgt ein langsamer Abfall.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

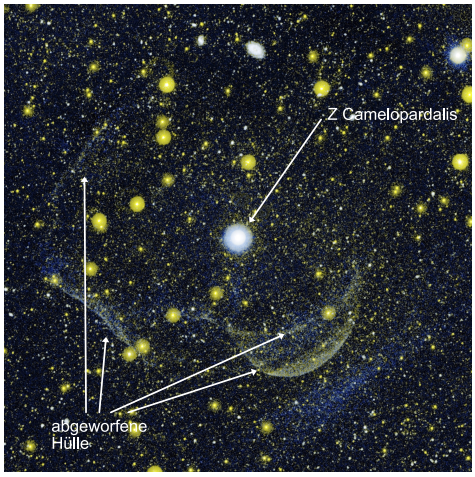


Abb. 20.32.: Überreste der klassischen Supernova Z Camelopardalis, die vor mindestens 220 Jahren explodiert ist. Heute ist Z Camelopardalis eine Zwergnova. (Credit: NASA/JPL, Quelle: https://www.jpl.nasa.gov/images/pia09220-scene-of-multiple-explosions).

Abbildung 20.32 zeigt mit den linienförmigen Strukturen die Überreste einer KLASSISCHEN NOVA, die vor mehr als 220 Jahren explodiert sein muss. Dies folgt aus der Distanz zu Z Camelopardalis und aus dem Winkelabstand der Schalenreste zum Zentralgestirn.
Heute ist Z Camelopardalis ein Doppelsternsystem, das weiter als ZWERGNOVA periodische Helligkeitsschwankungen hat.

20.1.6.1.3. Supernovae Im Gegensatz zu KLASSISCHEN NOVAE und ZWERGNOVAE bleibt bei Supernovae kein Doppelsternsystem mehr übrig. Es entstehen entweder NEUTRONENSTERNE (auch in der Form von PULSAREN) oder SCHWARZE LÖCHER.
Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] werden SUPERNOVAE in die folgenden Klassen aufgeteilt:

Typ I Im Licht der Nova können keine H-Linien detektiert werden. Dies deutet auf alte Sterne hin.

- **Typ Ia** Das Licht der Nova zeigt eine starke Si-Absorptionslinie. Diese Supernovae werden nur in Gebieten gefunden, in denen keine Anzeichen einer Neubildung von Sternen zu finden ist. Sie werden in allen Galaxientypen gefunden und zeigen eine bemerkenswerte Einheitlichkeit des Helligkeitsverlaufes.
- **Typ Ib** Das Licht der Nova zeigt starke He-Absorptionslinien. Diese Novae werden nur in Spiralgalaxien in Bereichen mit einer aktiven Sternbildung gefunden.
- **Typ Ic** Das Licht der Nova zeigt keine He-Absorptionslinien. Diese Novae werden wie die Typ Ib Novae nur in Spiralgalaxien in Bereichen mit einer aktiven Sternbildung gefunden.

Typ II Im Licht der Nova werden sehr starke H-Linien detektiert. Diese Novae sind im Maximum der Emission etwa 1.5 mag schwächer als Typ I Supernovae. Nach dem Maxi9mum verringert sich die Helligkeit um sechs bis acht Magnituden pro Jahr. Im Spektrum werden H- Linien und Linien schwererer Elemente gefunden. Typ II Supernovae können anhand des Lichtprofils in zwei Untergruppen aufgeteilt werden:

Typ IIP Diese Novae haben zwischen 30 und 80 Tagen nach dem Maximum ein Plateau (deshalb das P).

Typ IIL Diese Novae haben kein Plateau. Sie sind etwa zehnmal weniger häuffig als die Supernovae des Typs IIP.

Die Lichtkurven der verschiedenen Novae-Typen werden in den Abbildungen 16.62 und 20.26 gezeigt(nach J. B. Doggett und D. Branch „A comparative study of supernova light curves“ [DB85]). Neben der Emission von Licht senden Supernovae auch einen sehr starken Neutrinofluss aus. Dies ist ein Zeichen, dass Kerne mit einem grossen Neutronenüberschuss oder einem grossen Neutronendefizit gebildet wurden. Dies tritt auf wenn schwere Kerne unter dem Einfluss der enormen Energiefreisetzung der Explosion fusionieren und die verschmolzenen Kerne weit vom Gleichgewicht sind.
Schwere Elemente bis hin zum Uran werden durch die Vereinigung von Neutronensternen und in gewissen Typen von Supernovae gebildet. D. Yong u. a., „r-Process elements from magnetorotational hypernovae“ [Yon+21] berichten über neuere Beobachtungen über die Bildung der schweren Elemente, R-PROCESS-ELEMENTS genannt.

20.1.7. Überreste von Sternen

In diesem Abschnitt sollen die Endzustände von Sternen beschrieben werden.

20.1.7.1. Weisse Zwerge

1844 fand Friedrich Bessel heraus, dass der Stern Sirius eigentlich ein Doppelsternsystem war (nach [CO07, Kap. 16.1]). Dieser zweite Stern (Sirius B) war sehr viel leuchtschwächer als der Hauptstern Sirius A (eine Luminosität von $0.03L_{Sonne}$ gegen $23.5L_{Sonne}$ des Hauptsterns.). Es gelang, die gegenseitigen Bahnen und ihre Bahnparameter zu bestimmen. Daraus ergab sich, dass Sirius B die Masse $M_{SiriusB} = 1.053(28)M_{Sonne}$ haben muss. Spektroskopische Untersuchungen (Planck-Spektrum) ergaben eine Oberflächentemperatur von $T_{Sirius\,B} = 27\,000$ K. Aus der Temperatur und der Luminosität kann über das Stefan-Boltzmann-Gesetz (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann)

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 \tag{20.1.25}$$

der Radius des Sterns bestimmt werden

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma\, T^4}} \tag{20.1.26}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

bestimmt werden. Mit den oben gegebenen Daten ergibt sich $r = 5.521\,28 \cdot 10^6$ m. Dies ist sehr klein im Vergleich zu $r_{Sonne} = 6.957 \cdot 10^8$ m. Das heisst, Sirius B hat im Mittel eine Dichte von

$$\langle \rho_{Sirius\,B} \rangle = \frac{M_{Sirius\,B}}{\frac{4\pi}{3} r^3_{Sirius\,B}} = 2.969\,83 \cdot 10^9 \text{ kg m}^{-3} \tag{20.1.27}$$

Dies ist viel grösser als die Werte der Sonne $\langle \rho_{Sonne} \rangle = 1410$ kg m^{-3}.

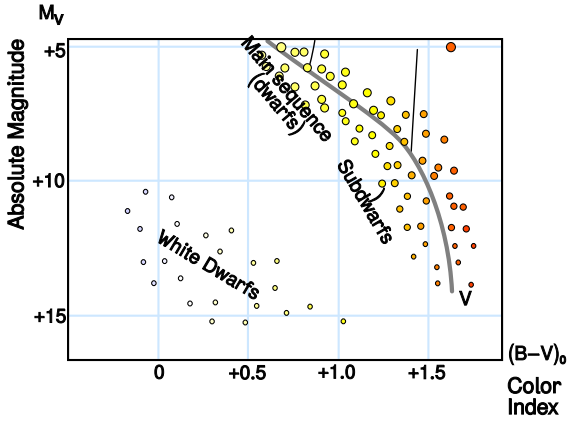


Abb. 20.33.: Lage der weissen Zwerge im Hertzsprung-Russell-Diagramm. (Bearbeitetes Diagramm By Rursus (Own work) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AHR_diagram.svg, kombiniert mit Daten aus [GSZ80]).

Im Hertzsprung-Russell-Diagramm (nach Ejnar Hertzsprung und Henry Russell) befinden sich die weissen Zwerge unten links (siehe Abbildung 20.33).
Neben der Dichte ist der Druck im Zentrum ein Anzeichen für den Zustand der Materie im weissen Zwerg. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] gilt für den Druck im Zentrum

$$p_{Zentrum} \approx \frac{3}{2}\pi G \rho^2 r^2 \tag{20.1.28}$$

Für Sirius B ist dies $p_{Zentrum,\,Sirius\,B} = 3.8 \cdot 10^{22}$ Pa. Im Zentrum hat Sirius B nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] eine Temperatur von $T_{Zentrum,\,Sirius\,B} = 7.6 \cdot 10^7$ K. Dies ist etwa $5\times$ so viel wie die Temperatur der Sonne in deren Zentrum (siehe Abbildung 18.34). bei diesen Temperaturen müsste der CNO-Zyklus über den $p-p$-Zyklus dominieren. Dann müsste aber die Luminosität von Sirius B grösser als die der Sonne sein. Es wird deshalb geschlossen, dass weisse Zwerge einen Kern aus Kohlenstoff und Sauerstoff haben und das Helium und Wasserstoff wie ein dünner Ozean die Oberfläche bedecken.
Weisse Zwerge gehören zur Spektralklasse D. Es gibt die Unterklassen (siehe [CO07])

DA Weisse Zwerge von diesem Typ haben eine Masse zwischen 0.42 bis 0.70 M_{Sonne}. Ihr Spektrum ist durch druckverbreiterte H-Linien charakterisiert, ohne andere Linien.

DAV Weisse Zwerge von diesem Typ pulsieren, da sie mit ihrer Oberflächentemperatur von $T = 12\,000$ K im Bereich von Instabilitäten liegen.

DB Weisse Zwerge von diesem Typ haben ein Spektrum mit He-Linien ohne andere Absorptionslinien.

DC Weisse Zwerge von diesem Typ haben ein Planckspektrum ohne Absorptionslinien.

DQ Weisse Zwerge von diesem Typ zeigen C-Linien im Absorptionsspektrum.

DZ Weisse Zwerge von diesem Typ zeigen Absorptionslinien von Metallen.

Die Materie in weissen Zwergen steht unter so grossem Druck, dass die Elektronenzustände der Atome entartet sind. Dies ist nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] der Fall, wenn

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \mathcal{D} = 1261 \text{ Km}^2\text{kg}^{-2/3} \tag{20.1.29}$$

ist. $\mathcal{D}$ ist eine charakteristische Konstante. Sirius B ist mit $\frac{T}{\rho^{2/3}} = 37 \text{ Km}^2\text{kg}^{-2/3}$ weit im Bereich entarteter Materie im Kern, während die Sonne mit $\frac{T}{\rho^{2/3}} = 5500 \text{ Km}^2\text{kg}^{-2/3}$ noch normale Materie hat. Zur Berechnung der Eigenschaften der Materie benötigt man das Pauli-Prinzip (nach Wolfgang Pauli).
Subrahmanyan Chandrasekhar [Cha31] fand durch vergleichen des Drucks degenerierter Elektronenzustände mit dem Druck im Zentrum von weissen Zwergen.
Der Entartungsdruck der Elektronen ist dann

$$p_{e,deg} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4}\hbar c \left(\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{\rho}{m_H}\right)^{4/3} \tag{20.1.30}$$

Dabei ist Z die Anzahl der Protonen im Atomkern und A die Anzahl der Nukleonen. m_H ist die Masse der Protonen, während $\rho = M/(4\pi/3 \cdot r^3$ die Massendichte in der betrachteten Materie ist.
Der Druck kann auch durch Gleichung (20.1.28) berechnet werden. Daraus kann dann die Chandrasekhar-Masse berechnet werden:

$$M_{Ch} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{8}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}\left(\left(\frac{Z}{A}\right)\frac{1}{m_H}\right)^2 \tag{20.1.31}$$

Dieses Resultat von S. Chandrasekhar [Cha31] kann moch verfeinert werden. Heute ist die anerkannte Chandrasekhar-Masse

$$M_{Ch} = 1.44 M_{Sonne} \tag{20.1.32}$$

Die Sonne wird also zu einem weissen Zwerg werden.
Aus all den Rechnungen kann abgeleitet werden, dass das Produkt

$$M_{weisser\,Zwerg} V_{weisser Zwerg} = \text{const} \approx 1.5 \cdot 10^{51} \text{ kgm}^3 \tag{20.1.33}$$

Dies bedeutet, dass ein weisser Zwerg um so kleiner wird, je mehr Masse er hat. Wenn er also interstellaren Staub anzieht, wird er kleiner.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Gleichzeitig wird Energie vom Inneren des weissen Zwerges an die Oberfläche transportiert. Dieser Transport geschieht nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] durch Elektronenleitung und nicht durch Strahlung. Dies resultiert in einer Abkühlzeit von einigen Milliarden Jahren. Bei dieser Abkühlung beginnt die Materie vom Kern aus zu kristallisieren. Die meisten Sterne von der Masse der Sonne enden als erdgrosse kristallisierte Kohlenstoff-Sauerstoff-Blöcke, also quasi als erdgrosse Diamanten.

20.1.7.2. Neutronensterne

Kurz nach der Entdeckung des Neutrons schlugen Walter Baade und Fritz Zwicky [BZ34] vor, dass es Neutronensterne geben sollte, Sterne, deren Dichte so hoch ist, dass geladene Teilchen nicht mehr existieren können, so dass alle Nukleonen Neutronen sind. Wenn Sterne eine grössere Masse als die Chandrasekhar-Masse für weisse Zwerge haben, können die von W. Baade und F. Zwicky beschriebenen Neutronensterne entstehen. 1967 entdeckten Jocelyn Bell Burnell und Antony Hewish den ersten solchen Netronenstern.

Neutronen sind wie Elektronen Fermionen. Das Pauli-Ausschlussprinzip (nach Wolfgang Pauli) gilt also auch. Dies führt nach einiger Rechnung nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] über den Entartungsdruck der Neutronen zur Gleichung für den Radius eines Neutronensterns.

$$R_{Neutronenstern} \approx \frac{(19\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G M_{Neutronenstern}^{1/3}} \left(\frac{1}{m_H}\right)^{8/3} \tag{20.1.34}$$

Wenn $M_{Neutronenstern} = 1.4 M_{Sonne}$ ist, dann ist $R_{Neutronenstern} \approx 4400$ m. An der Oberfläche ist der Feldvektor der Gravitation dann $g = 1.86 \cdot 10^{12}$ m/s^2. Wenn man aus einem Meter Höhe herunter hüpfte, würde man mit $v = 1.9 \cdot 10^6$ m s^{-1} auf dem «Boden» auftreffen. Die Fluchtgeschwindigkeit wäre klassisch gerechnet $0.64\,c$.

Unter hohem Druck nehmen Atomkerne immer mehr Neutronen auf. Der sonst übliche β-Zerfall (siehe Abschnitt 8.1.4.2) ist verboten, da es für die entstehenden Elektronen keine unbesetzten Zustände gibt. Ab einer Dichte von $4 \cdot 10^{14}$ kg m^{-3} kann das Energieminimum für Neutronen sich ausserhalb der Kern zu liegen kommen. Ab diesem «Neutronen-Tropfen» (auch Neutron Drip genannt) ist der Neutronenstern ein Dreiphasengemisch aus neutronenreichen Kernen, nichtrelativistische Neutronen in entarteten Zuständen und relativistischen Elektronen ebenfalls in entarteten Zuständen.

Die freien Neutronen bilden eine Flüssigkeit ohne Viskosität, also eine superfluide Flüssigkeit. Wirbel zerfallen nicht mehr. Ab einer Dichte von etwa $4 \cdot 10^{15}$ kg m^{-3} zerfallen die Kerne und Protonen bilden Cooper-Paare: Der Neutronenstern wird

supraleitend.

Phasenübergangs-druck	Zusammensetzung des Neutronensterns	dominanter Entartungs-druck
	Eisenkerne, freie nichtrelativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 1 \cdot 10^9$ kgm^{-3}	Elektronen werden relativistisch	
	Eisenkerne, freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 1 \cdot 10^{12}$ kgm^{-3}	neutronenreiche Kerne entstehen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 4 \cdot 10^{14}$ kgm^{-3}	Neutronentropfen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), freie Neutronen, freie relativistische Elektronen	Elektronen
$\approx 4 \cdot 10^{15}$ kgm^{-3}	neutronenreiche Kerne entstehen	
	neutronenreiche Kerne (nicht nur Eisen), superfluide freie Neutronen, freie relativistische Elektronen	Neutronen
$\approx 2 \cdot 10^{17}$ kgm^{-3}	Kerne zerfallen	
	superfluide freie Neutronen, supraleitende freie Protonen, freie relativistische Elektronen	Neutronen
$\approx 4 \cdot 10^{17}$ kgm^{-3}	Pionen entstehen	
	superfluide freie Neutronen, supraleitende freie Protonen, freie relativistische Elektronen, weitere Elementarteilchen, z.B. Pionen	Neutronen

Tab. 20.6.: Phasenübergänge in Neutronensternen nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]

Tabelle 20.6 listet die theoretisch berechneten Phasenübergänge in Neutronensternen auf.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

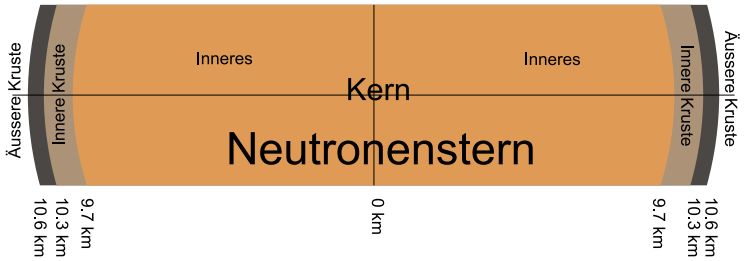


Abb. 20.34.: Querschnitt durch einen Neutronenstern nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]

Abbildung 20.34 zeigt den Querschitt durch einen Neutronenstern. Typische Eigenschaften aus Modellen von Neutronensternen sind nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]:

1. Die äussere Kruste besteht aus schweren Kernen (vorwiegend $^{56}_{26}\text{Fe}$ und je tiefer je neutronenreicher), entweder kristallisiert oder als Ozean. Die Elektronen sind relativistisch und in entarteten Zuständen. Das untere Ende ist dort wo das Nneutronentropfen beginnt.

2. Die innere Kruste enthält drei Komponenten, ein Kristallgitter aus Kernen wie $^{118}_{36}\text{Kr}$, superfluide freie Neutronen und relativistische Elektronen in entarteten Zuständen. Das Untere Ende ist dort wo sich die Kerne auflösen.

3. Das Innere besteht überwiegend aus superfluiden Neutronen, etwas weniger superfluide supraleitende Protonen und relativistische Elektronen in entarteten Zuständen.

4. Manchmal gibt es einen festen Kern aus Pionen und anderen Elementarteilchen. Die Dichte eines Neutronensterns mit $M = 1.4M_{Sonne}$ beträgt etwa $1 \cdot 10^{18}$ kg m^{-3}.

Neutronensterne sind stabil bis zu einer Masse von $1.4M_{Sonne}$. Wenn sie schnell rotieren bewirkt die Zentrifugalkraft eine zusätzliche Stabilisierung, so dass die Grenze bei $1.4M_{Sonne}$ liegt. Wenn der Neutronenstern instabil wird, kollabiert er zu einem SCHWARZEN LOCH.
Wie für weisse Zwerge gibt es für Neutronensterne die Erhaltungsgrösse:

$$M_{Neutronenstern}V_{Neutronenstern} = \text{const} \tag{20.1.35}$$

Supraleiter können Magnetfeldlinien einfrieren und so stabilisieren. Deshalb können und haben Neutronensterne Magnetfeldlinien.
Die Oberflächentemperatur von Neutronensternen beträgt etwa $T = 1 \cdot 10^6$ K. Aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz (nach Wilhelm Wien) ergibt sich für die Wellenlänge des Emissionsmaximums $\lambda_{max} = 2.9$ nm.

20.1.7.3. Pulsare

Schnell rotierende Neutronensterne mit Magnetfeldern erzeugen elektromagnetische Wellen. 1967 entdeckten Jocelyn Bell Burnell und Antony Hewish einen Pulsar,

der sich als Netronenstern entpuppte. Hewish bekam dafür den Nobelpreis, Bell Burnell nicht. Die Wellen dieser schnell rotierenden Neutronensterne können mit Radioantennen und Radioteleskopen gemessen werden.

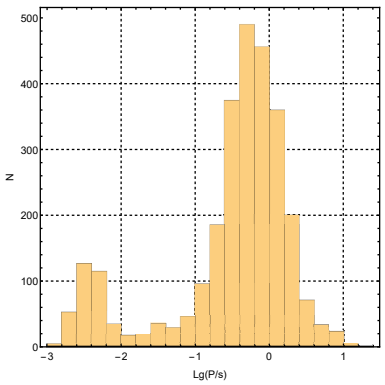


Abb. 20.35.: Rotationsperioden von 2954 Pulsaren. Die Daten stammen von R. N. Manchester u. a. [Man+05] und [Aus19].

Die meisten Pulsare haben Rotationsperioden von (0.25 bis 2) s. Die längste bekannte Periode ist 23.535 378 s des Pulsars (PSR J0250+5854) [Tan+18a]. Die kürzeste gemessene Periode ist 0.001 396 s des Pulsars (PSR J1748-2446ad) [Hes06]. Die Frequenz von Pulsaren kann genau so gut definiert sein wie von Atomuhren. Die Rotationsperiode des Pulsars (PSR 1837-2014) ist auf 15 Stellen bekannt.
Die Periodendauer aller Pulsare wird länger, da Pulsare Energie abstrahlen. Der Pulsar (PSR J1801-3210) hat eine Änderung von nur $\frac{dP}{dt} = -4.4 \cdot 10^{-23}$ [Ng+14].
Neben Neutronensternen sind nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] noch folgende Klassen von Pulsaren bekannt:

1. Doppelsterne: Zwei Neutronensterne könnten sich auf so engen Bahnen umkreisen, dass ihre Bahnperiode nur noch etwa eine Sekunde wäre. Diese Art Pulsare würde nach Kepler die Periodendauer verkleinern. Die Datenbank *ATNF Pulsar Catalogue* [Aus19] listet solche Pulsare auf.

2. Weisse Zwerge oszillieren mit Perioden von (100 bis 1000) s. Die beobachteten Frequenz sind kürzer. Weisse Zwerge könnten oszillieren. Aber diese Frequenzen sind zu gross. Bei Neutronensternen wären die beobachteten Schwingungsfrequenzen möglich.

3. Rotierende Weisse Zwerge können die benötigten Frequenzen nicht erreichen, wohl aber Neutronensterne.

20.2. Planetensysteme und Exoplaneten

Die Bildung von Exoplaneten läuft nach heutigem Kenntnisstand ab wie in Abschnitt 20.2.1 besprochen. in diesem Kapitel geht es um Methoden der Detektion und um eine Diskussion von ausgewählten Eigenschaften. Viele nützliche Informationen können bei E. Team [Tea95] und bei der NASA [NAS19c] gefunden werden.

20.2.1. Bildung von Planetensystemen

In unserem Planetensystem bewegen sich die schweren Himmelskörper mehr oder weniger in einer Ebene. Die Frage nach der Bildung solcher Systeme kam schon früh auf. Es wurde diskutiert, dass ein Zusammenstoss eines grösseren Himmelskörpers mit der Sonne diese Planeten, Asteroiden, den Kuipergürtel (nach Gerard Peter Kuiper) und auch die Kometen erzeugt haben könnte. Bei den Weiten des Weltalls ist es sehr unwahrscheinlich, dass so ein Prozess auftreten könnte. Andererseits zeigen die Forschungen zu Exoplaneten, gestartet von den beiden Nobelpreisträgern 2019 Didier Queloz und Michel Mayor, dass in unserer näheren Umgebung Planeten eher die Regel als die Ausnahme sind (siehe [Tea95] und [NAS19c]). Anne Young [You01] zeigte, dass die Staub- und Gaswolke, aus der die Planeten entstanden nicht homogen sein konnte. Sie betrachtete dazu ähnlich wie in Abb. 20.36 den Drehimpuls des Sonnensystemes und verglich ihn mit dem Drehimpuls einer protoplanetaren Staub- und Gaswolke.
Beobachtungen im Weltall deuten darauf hin, dass Sterne aus kollabierenden Gaswolken entstehen (siehe auch Abschnitt 20.1.3). Die Erhaltung des Drehimpulses dieser ausgedehnten Gebilde ist der Schlüssel zum Verständnis der Bildung von scheibenförmigen Objekten. Diese Akkumulationsscheiben sind analog zu den Trümmerscheiben um ältere Sterne.

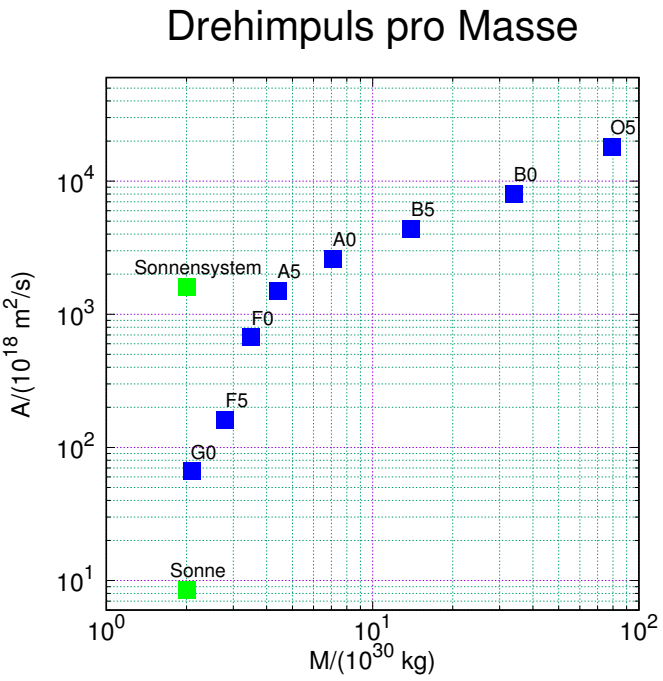


Abb. 20.36.: Mittlerer Drehimpuls und Masse von Sternen (Daten aus [McN65]).

Vergleichen wir nach Carrol und Ostlie [CO07] die Drehimpulse von verschiedenen Sterntypen (siehe Abschnitt 20.1.2) so sehen wir, dass die Sonne (ein G2-Stern) und das Sonnensystem ziemlich aus dem Rahmen fallen. Nach Carroll und Ostlie könnte dies durch Transport von Drehimpulsen durch magnetische Felder gelöst werden. Es könnte aber auch sein, dass die Planeten und sonstigen kleinen Körper nicht berücksichtigt werden.

Innere Planeten sind reich an Eisen und Silizium, wärend die grossen äusseren Planeten Gasplaneten sind. Die Atmosphären wechseln von leichten Elementen (N_2 und O_2 oder CO_2 zu Gasen wie Methan (CH_4).

Interessant ist die Temperaturverteilung in der Gasscheibe um eine werdende Sonne. Die innere Energie ist proportional zur kinetischen Energie und bei einem idealen Gas proportional zur Temperatur. Die kinetische Energie kann nach dem Virialsatz bei kreisförmigen Bahnen aus der potentiellen Gravitationsenergie berechnet werden. Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, pp. 662-664] kann die Temperatur abgeschätzt werden, indem man in der Projektion einen Kreisring im Abstand r vom Zentrum mit der Breite dr betrachtet. Dieser strahlt thermisch auf zwei Seiten ab. Die Strahlungsleistung ist durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz (siehe [MG19, pp. 43-44, Gl. (3.2.54)]), die kinetische Energie und den Zusammenhang zwischen Energie und Leistung zu berechnen.

$$T = \left(\frac{G\,M\,\frac{dM}{dt}}{8\pi\,\sigma\,R^3} \right)^{1/4} \left(\frac{R}{r} \right)^{3/4} \tag{20.2.1}$$

In Gleichung (20.2.1) ist σ die Stefan-Boltzmann-Konstante (nach Josef Stefan und Ludwig Boltzmann), R und M der Radius und die Masse des Sterns, r den Beobachtungsort und $\frac{dM}{dt}$ die Rate, mit der Masse zum Stern transferiert wird. Gleichung (20.2.1) sagt also eine $r^{-3/4}$-Proportionalität der Temperatur T voraus.

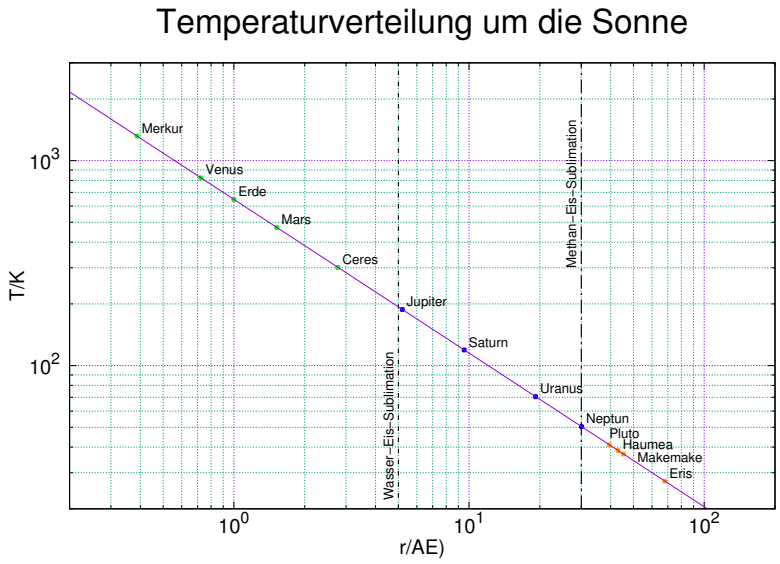


Abb. 20.37.: Temperaturverteilung bei der Entstehung der Planeten nach Carroll und Ostlie [CO07, pp. 662-664] und nach Gleichung (20.2.1). Die vertikalen Linien geben die Grenze der Wassereis- und der Methaneissublimation an. Die Positionen der Himmelskörper sind die heutigen.

Zur Berechnung der Kurve in Abbildung 20.37 wurde in Gleichung (20.2.1)die Werte für die Sonne und die physikalischen Konstanten eingetragen. Geschätzt wurde

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M_{Sonne}}{1 \cdot 10^4 \text{ a}} \tag{20.2.2}$$

Die Zeit von $1 \cdot 10^4$ a ist etwa die Kollapszeit der Gaswolke zur Sonne.
Im Laufe der Bildung der Himmelskörper in einem Planetensystem wurde diese vor allem in der Anfangszeit von anderen Objekten häufig getroffen. Man würde erwarten, dass Himmelskörper eine Mischung von leichten und schwereren Elementen aufweisen würden. Der Mond besteht aber vorwiegend aus schwereren Elementen. Es wird angenommen, dass er durch die Kollision eines Planetisimalen (so etwas wie grosse Zwergplaneten) entstanden ist. Das Gleiche wird von Merkur angenommen. Durch diese Kollisionen können die Rotationsachsen ihre Richtung drehen, oder die Bahnebene kann gekippt werden.
Jupiter, der massereichste Planet wird lokal den gleichen Prozess in Gang gebracht haben.

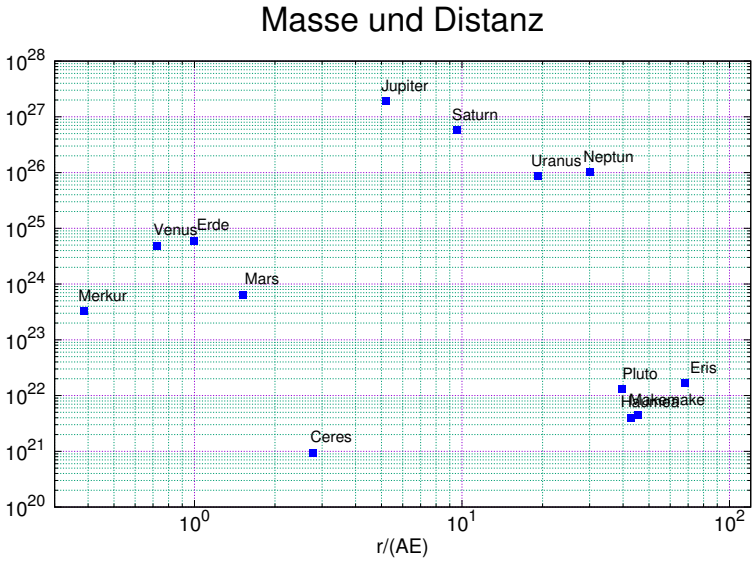


Abb. 20.38.: Distanzabhängigkeit der Masse in unserem Sonnensystem (Daten von [NAS19f]).

Abbildung 20.38 zeigt die Masse der Planeten als Funktion der Distanz.
Die Bildung unseres Planetensystems kann in den folgenden Schritten abgelaufen sein:

- Interstellares Gas und Überreste von einer oder mehreren Supernovae hatten im Gebiet unserer Sonne das Jeans-Kriterium (nach James Jeans) erfüllt (siehe Abschnitt 20.1.3). Das interstellare Gas besteht vorwiegend aus Wasserstoff und Helium. In den Überresten der Supernova jedoch finden sich Elemente bis zu Uran und wahrscheinlich auch noch darüber hinaus. Diese gemischte Gaswolke begann sich nun gravitativ zu zusammenziehen. Es entstand die Sonne.

- Die Gaswolke mit der Dichte ρ und dem Radius R ist in einem vom Zentrum der Milchstrasse aus sich ändernden Geschwindigkeitsfeld mit der Grösse $\frac{dv(r)}{dr}$. Deshalb gibt es bezüglich des Schwerpunktes r_0 der Gaswolke eine

Rotation. Wenn $\frac{dv(r)}{dr}$ sich über die Gaswolke kaum ändert, ist die relative Geschwindigkeit

$$v_R(R) = v(r_0 + R) - v(r_0) = v(r_0) + \frac{dv(r_0)}{dr}R - v(r_0) = \frac{dv(r_0)}{dr}R \quad (20.2.3)$$

Dies entspricht einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v_R(R)}{R} = \frac{dv(r_0)}{dr} \quad (20.2.4)$$

Damit hat die Gaswolke bezogen auf ihren Schwerpunkt bei r_0 den Drehimpuls (homogene Kugel!)

$$L_{Gas} = I\omega = \frac{2}{5}MR^2\frac{dv(r_0)}{dr} = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}R^3R^2\frac{dv(r_0)}{dr} = \frac{8\pi}{15}R^5\frac{dv(r_0)}{dr} \quad (20.2.5)$$

Dieser Drehimpuls L_{Gas} ist auch der erhaltene Drehimpuls des sich bildenden Sonnensystems. Aus dem Jeans-Kriterium (siehe Abschnitt 20.1.3) ergibt sich die Mindestgrösse des Drehimpulses

$$L_{Gas} \geq \frac{3\sqrt{6}(kT)^{5/2}}{5\pi^{3/2}\rho^{3/2}(G\langle m\rangle)^{5/2}} \left.\frac{dv(r)}{dr}\right|_{r_0} \quad (20.2.6)$$

Wenn die Temperatur des Gases $T = 5$ K ist, die Dichte 42 000 cm^{-3} Wasserstoffatome ist und die Gaswolke am Jeans-Kriterium ist, dann ist die Masse etwa eine Sonnenmasse und der Drehimpuls $L_{Gas} = 1.5$ kgm^{2}s^{-1}.

- Das effektive Potential eines Teilchens der Masse m bei der Bewegung im Abstand r um eine zentrale Masse $M(r)$ im mitbewegten Bezugssystem (Zentrifugalpotential) ist

$$E_{pot,eff} = -G\frac{m \cdot M(r)}{r} + \frac{L^2}{2m\,r^2} \quad (20.2.7)$$

Ein Teilchen, das im Abstand R eine Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \frac{dv}{dr}$ hat, hat im Abstand r die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(r) = \omega_0\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (20.2.8)$$

Wenn wir für eine Punktmasse m $L(m,r) = mr^2\omega = mR^2\omega_0 = mR^2\frac{dv}{dr}$ einsetzen, erhalten wir

$$E_{pot,eff} = -G\frac{m \cdot M(r)}{r} + \frac{mR^4\omega_0^2}{2r^2} \quad (20.2.9)$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Durch Ableiten bekommen wir das Minimum bei

$$r_{min} = \frac{R^4}{G\,M}\left(\frac{dv}{dr}\right) \tag{20.2.10}$$

Diese Rechnung gibt eine unrealistisch kleine Distanz.

- Durch Stösse können Körper auf elliptischen Bahnen mit kleinerem Perihel Drehimpuls auf äussere Objekte übertragen.

- Weit draussen, etwa bei 5.5 AU gab es eine lokal erhöhte Dichte: Jupiter entstand.

- Gravitationsinstabilität. Durch Schwankungen der Dichte können Objekte entstehen, die wieder andere Objekte anziehen. Dadurch könnten die Planeten entstanden sein.

- Durch Gravitation und Rotation entstehen Gezeitenkräfte, die das kleinere Objekt, den Mond, zerreissen können und so die Masse des Zentralkörpers erhöhen. Die Grenze heisst Roche-Grenze [CO07, pp. 723-724] (nach ´Edouard Roche)

$$r < 2.456\left(\frac{\langle\rho_{Planet}\rangle}{\langle\rho_{Mond}\rangle}\right)^{1/3} R_{Planet} \tag{20.2.11}$$

R_{Planet} ist der Radius des Planeten. In der Klammer stehen die respektiven gemittelten Dichten. Wenn ein Mond näher als die Roche-Grenze am Planeten ist, wird er zerrissen. Z.B. liegt die Roche-Grenze bei Saturn ausserhalb der Ringe, d.h. die Ringe sind die Überreste der von Gezeitenkräften zerrissenen Objekte.

Wenn ein Objekt genügend langsam in die Nähe eines grösseren kommt, kann es vom Planetismalen angezogenwerden, wenn es sich innerhalb des Hill-Radius befindet [CO07, p. 864]. Der Hill-Radius (nach William Hill) ist die Grenze, bei der die Gravitationskraft der Sonne kleiner wird als die Gravitationskraft des Planetismals.

$$R_H = \frac{R}{\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv \left(\frac{\rho_{Sonne}}{\rho_P}\right)^{1/3} \frac{R_{Sonne}}{a} \tag{20.2.12}$$

R ist der Radius des Planetismals, a ist der Abstand des Planetismals zur Sonne und R_{Sonne} der Radius der Sonne. In der Gleichung treten auch die Dichten auf. Auf der Bahn des Jupiters hätte der Hill-Radius eines Objektes mit $\rho = 1000$ kg m^{-3} und einem Radius von 5 km bei $\rho_{Sonne} = 1410$ kg m^{-3} den Wert $R_H = 9.588 \cdot 10^2$ km.

- Die Gasplaneten Jupiter bis Neptun haben alle einen Kern von etwa 10 bis 15 Erdmassen. Sie waren in der Lage, ein eigenes Planeten- und Ringsystem aufzubauen.

- Durch Jupiter wurden Objekte in seiner Nähe auf exzentrische Bahnen gebracht. Diese Objekte konnten dann innerhalb des Hill-Radius von schon vorhandenen Planeten aufgenommen werden. Natürlicherweise gab es auch heftige Kollisionen, z.B. so dass unser Mond entstand.

- Weiter wanderten Objekte näher an die Sonne. Jupiter ist heute 10% näher an der Sonne als zum Zeitpunkt seines Entstehens.

- Die nichtlinearen Kräfte der Gravitation führen zu chaotischen Bahnen und/oder zu Resonanzeffekten. Ein Beispiel ist die 3:2-Resonanz zwischen Neptun und Pluto [CO07, p.868]

20.2.2. Methode der radialen Geschwindigkeitsvariation

Den ersten Hinweis auf einen Planeten, der um einen sonnenähnlichen Stern kreist, fanden Michel Mayor und Didier Queloz im Jahre 1995, indem sie aus der Farbschwankung des Sterns 51 Pegasi auf einen Exoplaneten schlossen [MQ95].

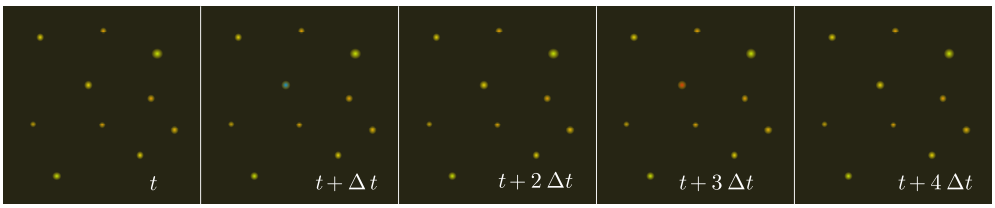


Abb. 20.39.: Effekt eines Exoplaneten. Ein Stern (welcher?) ändert periodisch seine Farbe.

Abbildung 20.42 zeigt eine schematische Abfolge der Farbschwankungen. Wenn charakteristische Emissions- oder Absorptionslinien blauverschoben sind, muss sich wegen des Dopplereffektes (siehe auch [Mar14, Kap. 5.3.5.]) der Stern auf den Beobachter zubewegen, entlang des Sichtradius. Bei einer Rotverschiebung bewegt sich der Stern vom Beobachtenden weg.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

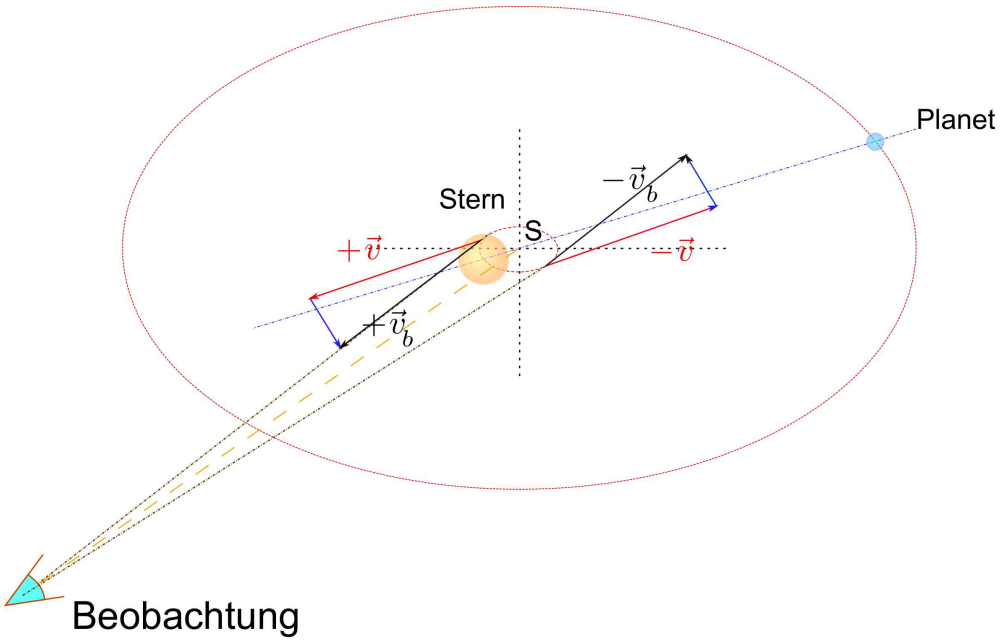


Abb. 20.40.: Skizze der Messung der Radialgeschwindigkeit

Abbildung 20.40 zeigt die Geometrie der Messung. Stern und Planet drehen um einen gemeinsamen Schwerpunkt. Auch wenn der Planet unsichtbar ist, bewegt sich der Stern auf uns zu oder von uns weg. Je nach Lage der Bahnebene ist der Effekt grösser oder kleiner. Durch die Drehimpulserhaltung bei der Bildung der Galaxie und der Sonnensysteme ist es jedoch wahrscheinlich, dass die Drehimpulsvektoren in etwa in die gleiche Richtung zeigen. https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1 zeigt eine Animation dieser Methode.

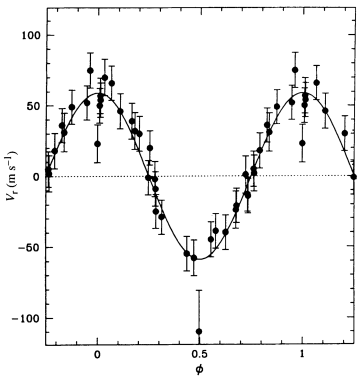


Abb. 20.41.: Radialgeschwindigkeitsmethode. Geschwindigkeitsvariation entlang der Sichtlinie von 51 Pegasi B (aus [Ric14, Fig. 1], https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).

Das Problem kann gelöst werden, wenn die Masse des Zentralgestirns bekannt ist und wenn die Masse m_{Pl} des Planeten gegen die Masse des Zentralgestirns m_{ZS} vernachlässigt werden kann. Die Umlaufdauer T wie auch die Amplitude der

Geschwindigkeit des Zentralgestirns sind bekannt (Siehe Messung in Abbildung 20.41). Nach [CO07, pp. 848-849] ergibt sich für den Abstand a Zentralgestirn-Exoplanet

$$a = \left(\frac{G\,T^2\,(m_{ZS} + m_{Pl})}{4\pi^2} \right)^{1/3}. \tag{20.2.13}$$

Weiter ergibt sich die Orbitalgeschwindigkeit des Planeten zu

$$v = \frac{2\pi a}{T}. \tag{20.2.14}$$

Schliesslich kann über die Lage des Schwerpunktes bei zwei Massen (siehe [Mar14, Kap. 4.4.2.] aus der gemessenen Geschwindigkeit des Zentralgestirns, aus seiner (z.B. über Spektren, Distanz und Leuchtkraft bestimmten) Masse und der berechneten Orbitalgeschwindigkeit des Planeten die Planetenmasse bestimmt werden.

Bei mehreren Planeten wird das Geschwindigkeitsmuster kompliziert. Es kann jedoch durch eine Fourieranalyse in die Beiträge der einzelnen Planeten separiert werden.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 713 Sonnensysteme gefunden mit 960 Planeten. 171 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.3. Abschattung

Eine weitere, von der Anzahl her die erfolgreichste Methode ist die Messung der Abschattung des Zentralgestirns durch einen Planeten.

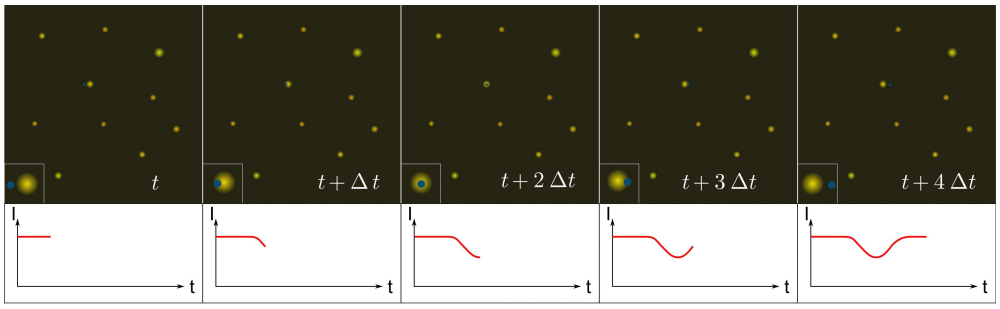


Abb. 20.42.: Beobachtung der Abschattung eines Sternes durch einen Exoplaneten. Unten links ist eine Vergrösserung. Die Graphen zeigen den Verlauf der gemessenen Intensität

Abbildung 20.42 zeigt wie die Abschattung die Helligkeit eines Sterns temporär verringern kann.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

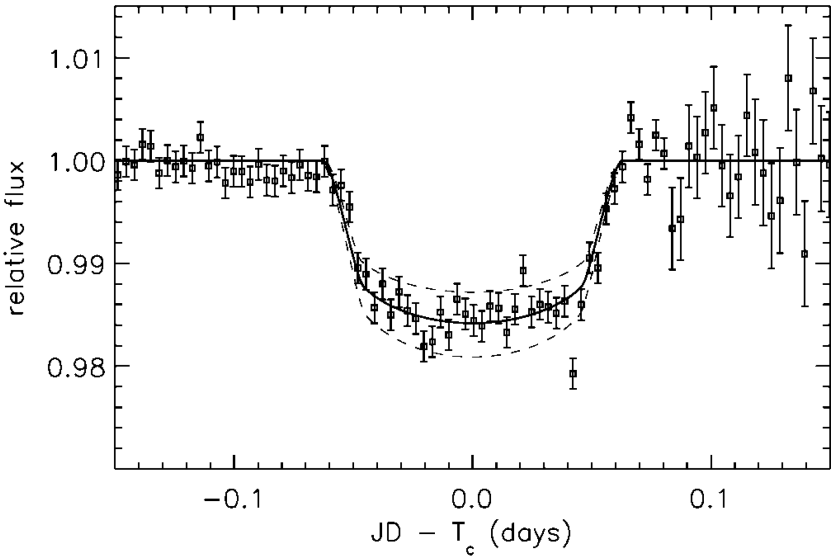


Abb. 20.43.: Abschattungsmethode. Leichte Verringerung der Helligkeit, wenn ein Planet den Stern HD209458 passiert (aus [Ric14, Fig. 2], https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).

Abbildung 20.43 zeigt, dass minimalste Schwankungen von 1% oder weniger gemessen werden müssen. Die Schwankungen durch die Turbulenzen in der Erdatmosphäre sind von dieser Grössenordnung. Wenn eine übliche CCD-Kamera mit 8 Bit Digitalisierung verwendet wird, ist dies eine Schwankung auf dem zweitletzten Bit. Werden hochwertige Kameras im RAW-Modus verwendet, ist die Bittiefe zwischen 10 und 14 Bit. Entweder werden wissenschaftliche Kameras mit 16 Bit Auflösung auf Berggipfeln oder auf Raumsonden verwendet, oder viele Amateurastronomen filmen den gleichen Stern an verschiedenen Orten. Die Aufnahmen müssen zeitgenau korreliert werden. Korrelierte Schwankungen zeigen, dass es eventuell einen Exoplaneten gibt. Nach der ursprünglichen Entdeckung von M. Mayor und D. Queloz [MQ95] wurden in der Anfangsphase viele Planetensysteme auf diese Art von Amateuren gefunden.

https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/2 zeigt eine Animation dieser Methode.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 2578 Sonnensysteme gefunden mit 3432 Planeten. 555 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.4. Micro-Lensing

Die Methode des Micro-Lensing beruht auf der allgemeinen Relativitätstheorie (siehe auch [BC10; Fli12; Wey21]).

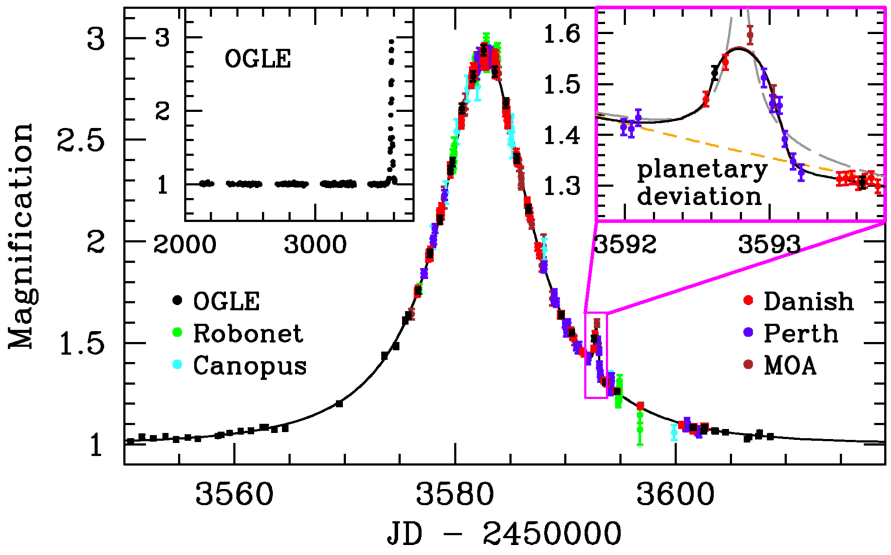


Abb. 20.44.: Micro-Lensing. Die Gravitationslinse führt zu einer leichten Erhöhung der Helligkeit. Der Planet des Sterns stört die Symmetrie. (aus [Ric14, Fig. 3], https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).

Wenn ein Stern mit einem Planeten vor einem weit entfernten leuchtenden Objekt (Quasar, Galaxie, ...) vorbei zieht, wirkt die Masse des Sterns als Linse. Die Helligkeit des weit entfernten Objektes steigt kurzfristig an. Ein eventuell vorhandener Planet wirkt wie eine zweite, schwächere, Linse, die nochmals ganz kurz die Helligkeit des entfernten Objektes erhöht. Eine solche Messkurve zeigt Abbildung 20.44. Eine Animation dazu finden Sie bei `https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/4`.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 141 Sonnensysteme gefunden mit 157 Planeten. 6 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

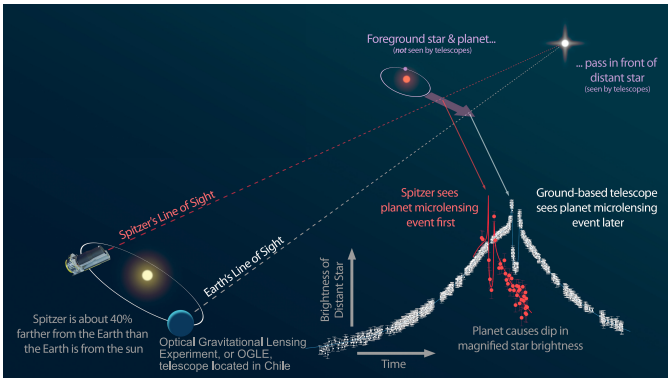


Abb. 20.45.: Geometrie der Tandembeobachtung mit dem Teleskop des «Optical Gravitational Lensing Experiment»(OGLE) und dem Spitzer-Weltraumteleskop, das etwa 1.4 au von der Erde entfernt auf der Erdumlaufbahn steht (Credit NASA/JPL-Caltech).

In jüngerer Zeit werden vermehrt erdgebundene Teleskope wie das Teleskop des «Optical Gravitational Lensing Experiment»(OGLE) und Weltraumteleskope wie das Spitzer-Weltraumteleskop verwendet (siehe Abbildung 20.45). Der Zeitunterschied zwischen der Beobachtung des Weltraumteleskopes und des Erdgebundenen Teleskopes kann zur Distanzbestimmung über die Triangulation verwendet werden. Das erdgebundene Teleskop arbeitet mit einer Wellenlänge von 800 nm während das Weltraumteleskop bei 3.6 µm misst. Abbildung 20.46 zeigt die beiden Lichtkurven mit etwas besserer Auflösung.

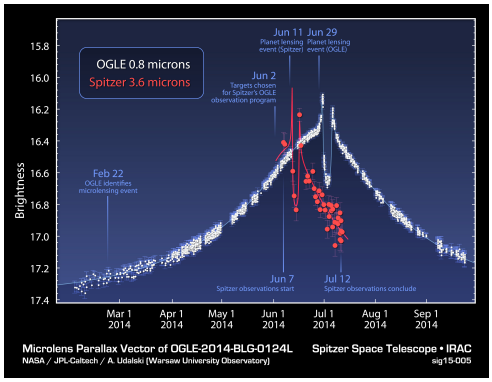


Abb. 20.46.: Das Teleskop des «Optical Gravitational Lensing Experiment»(OGLE) detektiert den Beginn eines Microlensing-Ereignisses. Das Weltraumteleskop Spitzer, etwa 1.4 au von der Erde entfernt, auf der Erdumlaufbahn, sieht das gleiche Ereignis etwas früher (Credit: NASA/JPL-Caltech/Warsaw University Observatory).

20.2.5. Direkte Abbildung

Wenn das Sonnensystem nahe genug an der Erde ist, können Planeten direkt abgebildet werden. Dazu muss das Licht des Zentralgestirns abgeschwächt werden.

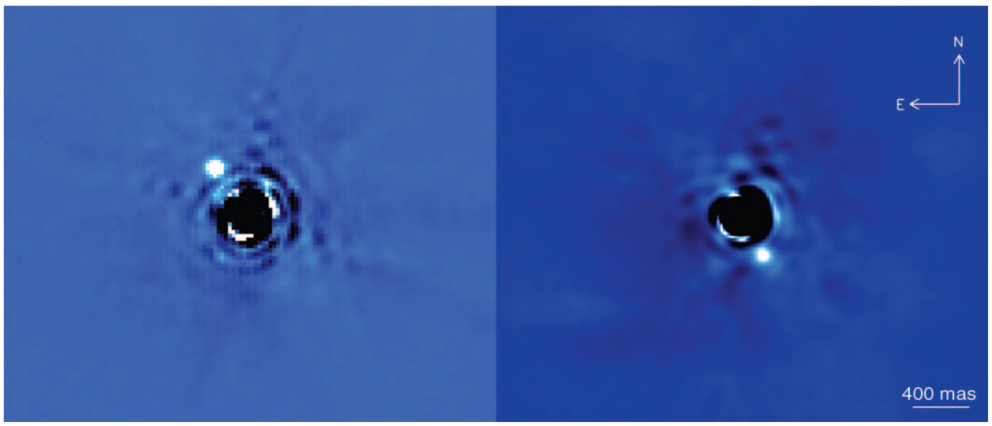


Abb. 20.47.: Direkte Abbildung im Infraroten. Zwei Bilder aufgenommen 2003 und 2009 zeigen, dass β Pictoris einen sich bewegenden Begleiter hat (aus [Ric14, Fig. 4], https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/).

Abbildung 20.47 zeigt eine Abbildung eines Planeten. https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/3 zeigt dazu eine Animation.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 110 Sonnensysteme gefunden mit 151 Planeten. 6 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

20.2.6. Astrometrie

Wenn das Zentralgestirn nahe genug ist, kann die Schwankung der Position durch die Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt mit dem Planeten direkt gemessen werden. https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/5 zeigt dazu eine Animation.

Mit dieser Methode wurden nach [Tea95], Stand 15. 7. 2021, 3 Sonnensysteme gefunden mit 14 Planeten. Abbildung 20.51 zeigt das Prinzip.

20.2.7. Einordnung der mehr als 4000 bekannten Exoplaneten

Insgesamt wurden nach [Tea95], Stand 15. Juli 2021, 3549 Sonnensysteme gefunden mit 4796 Planeten. 788 Systeme haben mehrere detektierbare Planeten.

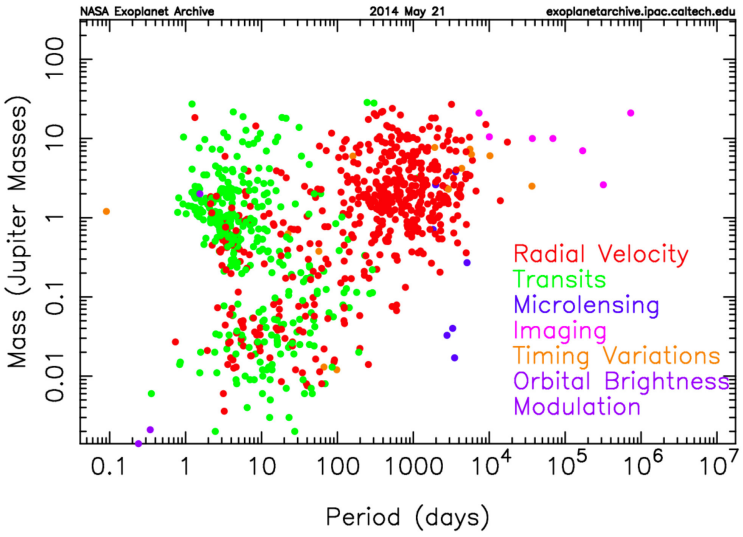


Abb. 20.48.: Vergleich der Methoden. (aus [Ric14, Fig. 4], https://www.mdpi.com/2078-1547/5/2/296, This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/ und NASA Exoplanet Archive,).

Abbildung 20.48 zeigt eine Zusammenfassung aller gefundenen Exoplaneten.

20.2.8. Atmosphäre von Exoplaneten

Wenn ein Exoplanet vor einem Zentralgestirn vorbei zieht, erzeugt seine Atmosphäre eine leichte Veränderung des Spektrums des Zentralgestirns. Eine Analyse dieser Veränderung und der Vergleich mit dem ungestörten Spektrum erlaubt Rückschlüsse auf die Zusammensetzung der Atmosphäre. Aus der Leuchtkraft des Zentralgestirns und dem berechneten Abstand kann die Temperatur abgeschätzt werden. Bewohnbare Planeten (für Erdlinge) sollten etwa 290 K warm sein und eine sauerstoffhaltige Atmosphäre haben. Mehr Informationen gibt es z.B. bei [NAS19d]

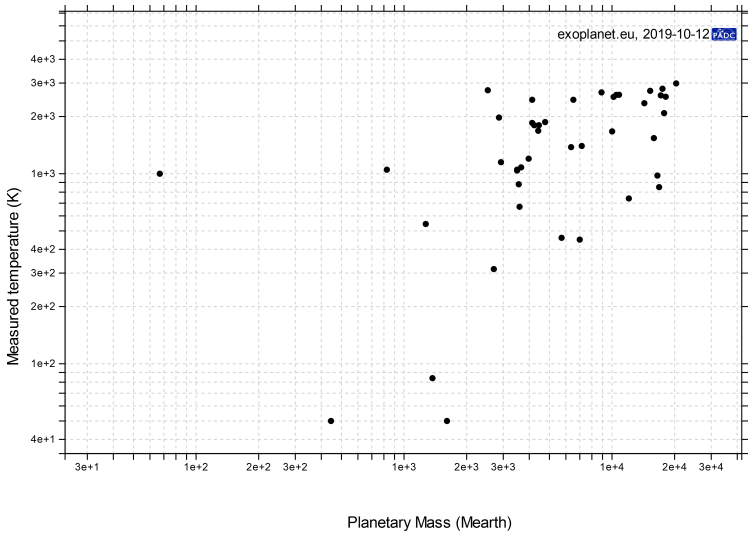


Abb. 20.49.: Masse und Temperatur von Exoplaneten (generiert mit [Tea95], CC-BY 4.0 International, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr).

Abbildung 20.49 zeigt eine Zusammenstellung von 43 Exoplaneten, von denen die Temperatur der Oberfläche bekannt sind. Die Temperatur ist im Bereich (30. . . 2000) K. Bei etwa 300 K ist kein Planet vorhanden.

20.3. Binärsysteme

Binärsysteme sind Systeme mit zwei etwa gleich massereichen Sternen. Wir unterscheiden

- visuelle Doppelsterne,
- astrometrische Doppelsterne,
- Spektroskopische Doppelsterne und
- photometrische Doppelsterne.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

20.3.1. Visuelle Doppelsterne

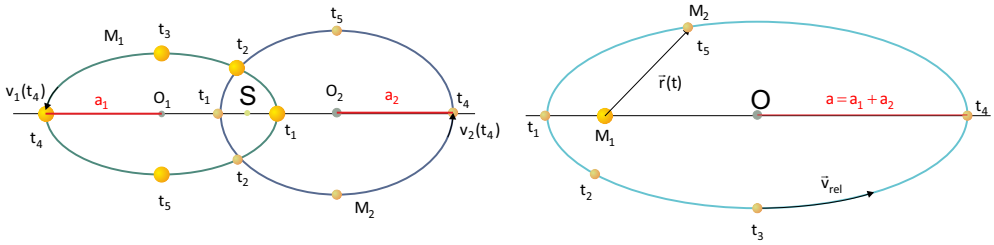


Abb. 20.50.: Schematische Darstellung visueller Doppelsterne (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.6]

Unter visuellen Doppelsternen verstehen wir zwei Sterne, deren Abstand $r > 0.1''$ ist. Dann können die besten optischen Instrumente die beiden Sterne als getrennte Objekte auflösen. Abbildung 20.50 zeigt links die Geometrie, wie Sie real existiert, d.h. dass beide Sterne sich jeweils auf einer Ellipsenbahn bewegen, bei der der gemeinsame Schwerpunkt jeweils im Brennpunkt jeder Ellipse liegt. Die rechte Skizze in 20.50 gibt die Bahngeometrie mit reduzierten Massen an. Der letztere Fall ist äquivalent zum ersten, aber einfacher zu berechnen.

20.3.2. Astrometrische Doppelsterne

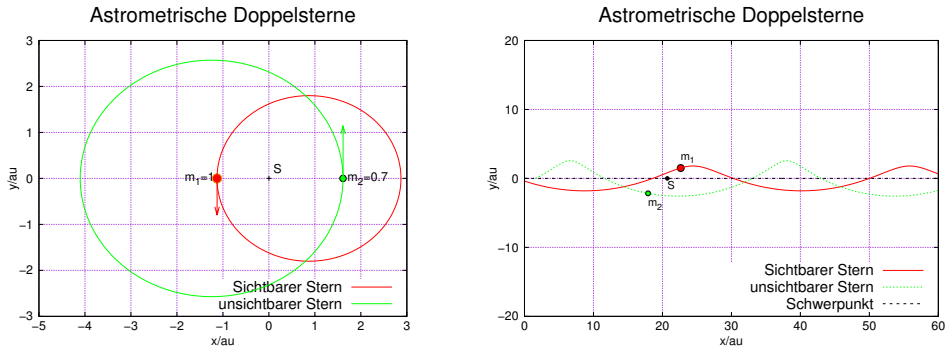


Abb. 20.51.: Gezeigt ist links die Bewegung eines Doppelsternsystems in zufälligen Koordinaten mit $m_2/m_1 = 0.7$. Rechts ist die Bewegung aus der Ferne gezeigt.

Bei astrometrischen Doppelsternen ist nur einer der beiden Sterne sichtbar ist, z.B. weil der zweite Stern ein Neutronenstern oder ein brauner Zwerg ist. Die Position des sichtbaren Sternes schwankt. Da ohne äussere Kräfte sich der Schwerpunkt eines Doppelsternsystems sich geradlinig bewegt kann man auf die relative Masse des unsichtbaren Begleiters und dessen Abstand schliessen (Siehe Abbildung 20.51).

20.3.3. Spektroskopische Doppelsterne

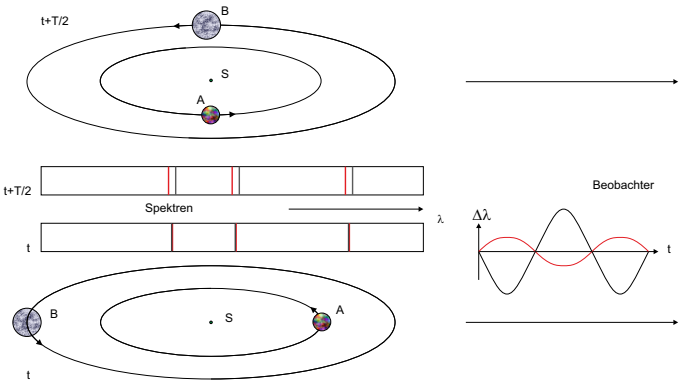


Abb. 20.52.: Skizze spektroskopischer Doppelsterne (nach Demtröder [Dem10, Abb. 11.8])

Wenn die beiden Teile eines Doppelsternsystems winkelmässig so nahe beieinander stehen dass sie in einem Teleskop nicht mehr aufgelöst werden können, dann verraten sie sich immer noch über die Dopplerverschiebung der Spektrallinien. Abbildung 20.52 zeigt die periodische Rot- und Blauverschiebung der Linien. Dabei sind die Spektrallinien der beiden Sterne immer entgegengesetzt verschoben. Die unterschiedliche Maximalverschiebung hängt mit der unterschiedlichen Maximalgeschwindigkeit zusammen. Da der Gesamtimpuls konstant ist kann daraus auf die Massenverhältnisse und die Abstandsverhältnisse geschlossen werden.

20.3.4. Photometrische Doppelsterne

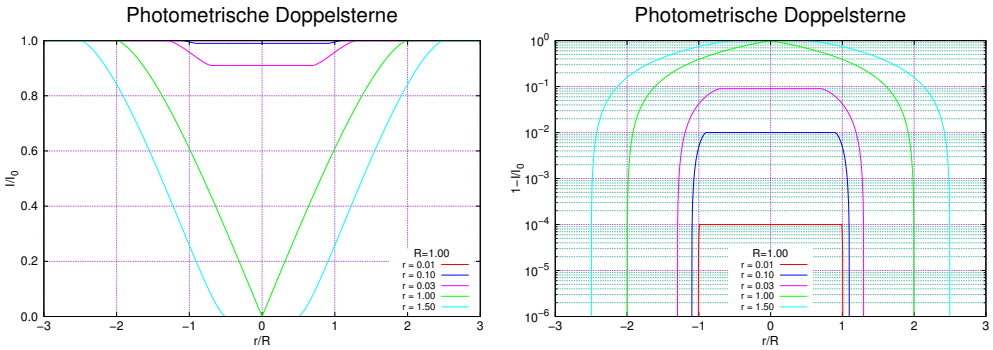


Abb. 20.53.: Helligkeitsverlauf bei photometrischen Doppelsternen in Abhängigkeit des Radius' des dunklen Sterns r. Der helle Stern hat $R = 1$. Links sind die relativen Helligkeiten I/I_0 angegeben, rechts in einer logarithmischen Darstellung $1 - I/I_0$.

Bei PHOTOMETRISCHEN DOPPELSTERNEN schwankt die Helligkeit, wenn der eine Stern vor dem anderen vorbeizieht. In Abbildung 20.53 ist der Fall berechnet, dass ein dunkler Stern um einen hellen Stern kreist (oder umgekehrt).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

20.4. Struktur der Milchstrasse

Die Untersuchung und Beobachtung der dreidimensionalen Struktur der Milchstrasse ist schwierig. Wir sehen eine Projektion, aber wir sind mitten drin. Ein analoges Problem ist, wenn man auf einem grossen Platz mit einem Bauwerk in der Mitte seine Position innerhalb einer Menschenmasse bestimmen möchte. Die Frage nach der Struktur der Milchstrasse ist analog zur Frage, wie die Verteilung von Menschen ist, mit dem Problem, dass nicht alle Menschen gesehen werden können, weil sie hinter dem Bauwerk sind.

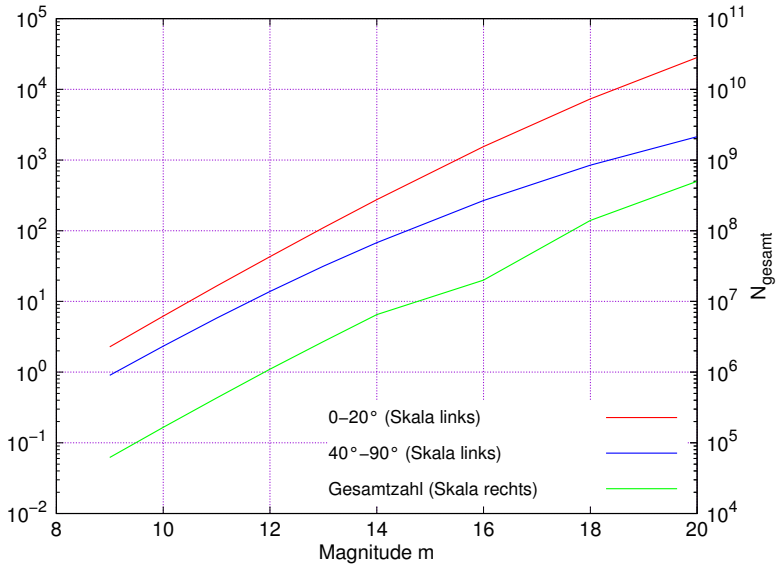


Abb. 20.54.: Anzahl Sterne in der Milchstrasse (nach [Dem10, Tab. 12.3]).

Abbildung 20.54 zeigt die Anzahl der Sterne in verschiedene Richtungen in Abhängigkeit ihrer Magnitude. Unter der Annahme, dass die Sterne eine ähnliche durchschnittliche Helligkeit haben zeigt diese Darstellung ob die Dichte abnimmt. Dies könnte bei der blauen Kurve der Fall sein.

Die Distanz kann mit der Beziehung

$$r = 0.768 \cdot 10^{1.0+0.2*m} \tag{20.4.1}$$

berechnet werden. Dabei wurde die Distanz zur und die Magnitude der Wega verwendet um den Vorfaktor zu berechnen. Weiter ist die Anzahl der Sterne in einer Schale der Dicke Δr mit der Dichte ρ durch

$$n(r) = \rho * r^2 \Delta r \tag{20.4.2}$$

gegeben.

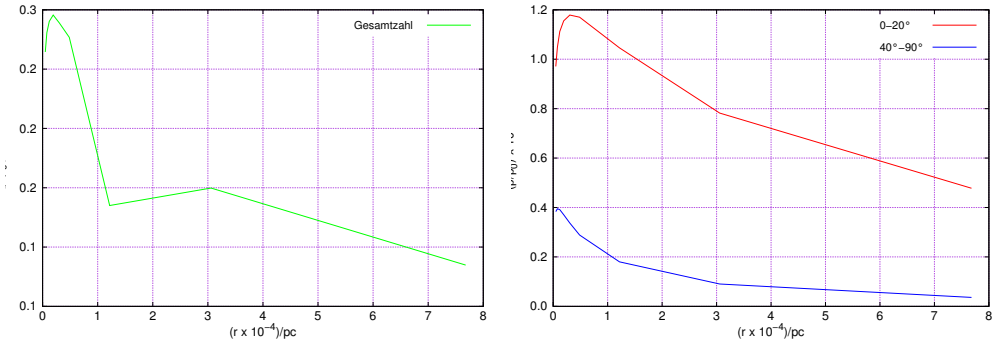


Abb. 20.55.: Links ist die gemittelte Dichte der Sterne in alle Richtungen gezeigt, rechts die Dichte in der Ebene der Milchstrasse ((0 bis 20)°) und in etwa senkrecht zur galaktischen Ebene ((40 bis 90)°) gezeigt.

Abbildung 20.55 zeigt die mit den Daten aus Abbildung 20.54 berechneten Dichten im Gesamten und in zwei Richtungen. Diese Kurven sind Schätzungen. Sie zeigen, dass es in einer kleinen Entfernung eine sehr hohe Dichte hat, das Zentrum der Milchstrasse. Weiter ist ersichtlich, dass die Milchstrasse relativ dünn ist.

20.4.1. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis

In diesem Abschnitt sollen Verfahren zur Messung der Geschwindigkeit von Sternen in der MILCHSTRASSE relativ zum Sonnensystem oder zu galaktischen Koordinaten vorgestellt werden.

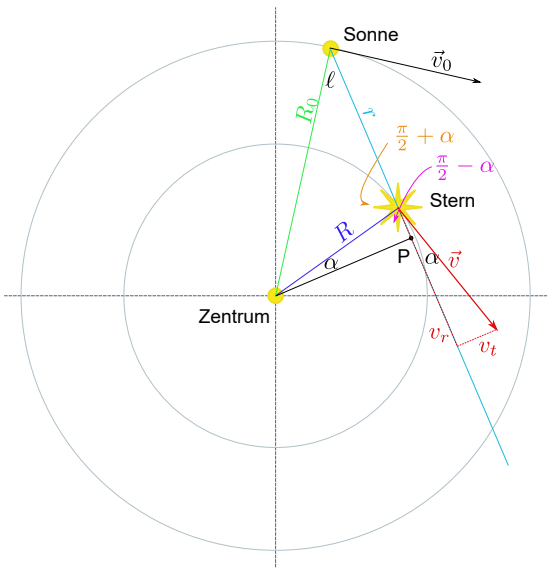


Abb. 20.56.: Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis.

Abbildung 20.56 zeigt die Geometrie zur Berechnung von Geschwindigkeiten. Aus ihr liest man die folgenden Beziehungen ab:

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\frac{\sin(\ell)}{\sin(\pi/2+\alpha)} = \frac{R}{R_0} \tag{20.4.3a}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{R_0}{R}\sin(\ell) \tag{20.4.3b}$$

sowie

$$r + R\sin(\alpha) = R_0\cos(\ell) \tag{20.4.3c}$$

$$R\sin(\alpha) = R_0\cos(\ell) - r \tag{20.4.3d}$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned} v_r &= v\cos(\alpha) - v_0\sin(\ell) = \omega R\frac{R_0}{R}\sin(\ell) - \omega_0 R_0\sin(\ell) \\ v_r &= R_0\left(\omega-\omega_0\right)\sin(\ell) \qquad (20.4.4a) \\ v_t &= v\sin(\alpha) - v_0\cos(\ell) \\ &= \omega R\sin(\alpha) - \omega_0 R_0\cos(\ell) = \omega\left[R_0\cos(\ell) - r\right] - \omega_0 R_0\cos(\ell) \\ v_t &= R_0\left(\omega-\omega_0\right)\cos(\ell) - \omega r \qquad (20.4.4b) \end{aligned}$$

wobei $|\boldsymbol{v}_0| = \omega_0 R_0$ und $|\boldsymbol{v}| = R\omega$ ist. Wenn die Geschwindigkeiten v_t und v_r, die Distanzen R_0 und r und der Winkel ℓ bekannt sind, kann so die Winkelgeschwindigkeit der Sonne (ω_0) und des Sterns (ω) um das galaktische Zentrum bestimmt werden.

20.4.2. Oort'sche Gleichung und Oort'sche Konstanten

Die beiden Gleichungen (20.4.4a) und (20.4.4b) können umgeschrieben werden, wenn man ω mit ω_0 in eine Taylor-Reihe entwickelt.

$$\omega \approx \omega_0 + \Delta R\left.\frac{d\omega}{dR}\right|_{R=R_0} + O\left(\frac{d^2\omega}{dR^2}\right) \tag{20.4.5}$$

Für nahe Sterne ist $\Delta R = -r\cos(\ell)$. Damit haben wir

$$\omega \approx \omega_0 - r\left.\frac{d\omega}{dR}\right|_{R=R_0}\cos(\ell) \tag{20.4.6}$$

Eingesetzt ergeben sich Produkte $\sin(\ell)\cos(\ell)$ und $\cos^2(\ell)$. Beide Produkte führen auf Winkelfunktionen von 2ℓ, wobei bei $\cos^2$ noch ein konstanter Term vorhanden ist. Weiter wird der Term mit r^2 vernachlässigt, da $r/R_0 \ll 1$ ist. Schliesslich wird $\omega = |\boldsymbol{v}(R)|/R = v/R$ und $\omega_0 = |\boldsymbol{v}(R_0)|/R_0 = v_0/R_0$ ersetzt
Die Approximationen für kleine Distanzen $r/R_0 \ll 1$ heissen Oort'sche Gleichungen (nach Jan Hendrik Oort):

$$v_r = r\cdot A\cdot\sin(2\ell) \tag{20.4.7a}$$

$$v_t = r\cdot\left(A\cdot\cos(2\ell) + B\right) \tag{20.4.7b}$$

Die Grösse der Oort'schen Konstanten ist ([Bov17])

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR}\right)_{R_0}\right] \approx 15.3(4)\ \text{km kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.8a}$$

$$B = -\frac{1}{2}\left[\frac{v_0}{R_0} + \left(\frac{dv}{dR}\right)_{R_0}\right] \approx -11.9(4)\ \text{km/kpc} \tag{20.4.8b}$$

Daraus ergeben sich die Relationen

$$A - B = \frac{v_0}{R_0} = \omega_0 \tag{20.4.9a}$$

$$A + B = -\left(\frac{dv}{dR}\right)_{R_0} = R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_0} \tag{20.4.9b}$$

Das galaktische Zentrum ist 8.0(3) kpc von der Sonne entfernt ([Cam+18]). Daraus ergibt sich mit den Oort'schen Konstanten (nach Jan Hendrik Oort)

$$\omega_0 = 8.8 \cdot 10^{-16}\ \text{s}^{-1} \qquad v_0 = 217.6\ \text{km s}^{-1} \tag{20.4.10a}$$

$$\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R_0} = 1.4 \cdot 10^{-17}\ \text{kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.10b}$$

Weiterführende Modelle der Galaxis berücksichtigen die gebrochene Zylindersymmetrie ([Bov17; LZY19]). In einem Koordinatensystem mit dem Nullpunkt im Zentrum der Galaxis mit den Koordinaten der Sonne $(R_0, 0)$ und des Sterns (R, ϕ) kann man vier Oort'sche Konstanten definieren ([Bov17]):

$$2A = \frac{1}{R_0}\frac{d\langle v\rangle}{d\phi} - \frac{d^2\langle v\rangle}{d\phi\, dR} - \frac{1}{R_0}\frac{d^2\langle v\rangle}{d\phi\, dR} \qquad A = 15.3(4)\ \text{km kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.11a}$$

$$2B = -\frac{1}{R_0}\frac{d\langle v\rangle}{d\phi} - \frac{d^2\langle v\rangle}{d\phi\, dR} + \frac{1}{R_0}\frac{d^2\langle v\rangle}{d\phi\, dR} \qquad B = -11.9(4)\ \text{km kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.11b}$$

$$2C = -\frac{1}{R_0}\frac{d\langle v\rangle}{dR} + \frac{d^2\langle v\rangle}{d^2R} - \frac{1}{R_0}\frac{d^2\langle v\rangle}{d^2\phi} \qquad C = -3.2(4)\ \text{km kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.11c}$$

$$2K = \frac{1}{R_0}\frac{d\langle v\rangle}{dR} + \frac{d^2\langle v\rangle}{d^2R} + \frac{1}{R_0}\frac{d^2\langle v\rangle}{d^2\phi} \qquad K = -3.3(6)\ \text{km kpc}^{-1}\ \text{s}^{-1} \tag{20.4.11d}$$

Diese Gleichungen setzen ein zylindrisches galaktozentrisches Koordinatensystem voraus (siehe auch Abschnitt 16.2.5). Die Konstanten beschreiben die folgenden physikalischen Effekte

A lokale azimutale Scherung des Geschwindigkeitsfeldes

B Wirbelstärke (Vortizität) des lokalen Geschwindigkeitsfeldes

C lokale radiale Scherung des Geschwindigkeitsfeldes

K lokale Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] geben eine gute Ableitung der Gleichungen ausgehend von einem Stömungsfeld

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \tag{20.4.12}$$

in der Galaxis. Wegen lokalen Wechselwirkungen hat unsere Sonne die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{0,r}$ gegen dieses Strömungsfeld. Nach R. P. Olling und W. Dehnen kann dann die Geschwindigkeit am Ort $\boldsymbol{r}$ in diesem Strömungsfeld in einer Approximation erster Ordnung als

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{v}_{0,r} + \mathsf{H}\boldsymbol{x} + O(\boldsymbol{x}^2) \tag{20.4.13}$$

geschrieben werden. Dabei wird ein lokales Koordinatensystem verwendet, bei dem die x-Achse in die Richtung $\ell = 0$ im galaktischen Koordinatensystem zeigt und die y-Achse in die Richtung $\ell = \frac{\pi}{2}$.
Der Tensor H wird am Ort der Sonne (bei $\boldsymbol{x} = 0$) ausgewertet. Er ist

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=0} = \begin{pmatrix} K + C & A - B \\ A + B & K - C \end{pmatrix} \tag{20.4.14}$$

mit den VERALLGEMEINERTEN OORT'SCHEN KONSTANTEN verknüpft. Die von R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] durchgeführten Rechnungen führen auf Gleichung (20.4.11). Weiter geben die Autoren eine Anleitung zur Messung der OORT'SCHEN KONSTANTEN.
R. P. Olling und W. Dehnen [OD03, Tab. 1] weisen darauf hin, dass es drei Klassen von OORT'SCHEN KONSTANTEN gibt

1. Die WAHREN OORT'SCHEN KONSTANTEN A, B, C und K von geschlossenen Umlaufbahnen im Gravitationspotential der Galaxis und ihrem Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$
2. Die WAHREN LOKALEN OORT'SCHEN KONSTANTEN $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ und $\overline{K}$ im Geschwindigkeitsfeld $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$ einer Gruppe benachbarter Sterne
3. Die aus den Fourier-Koeffizienten der scheinbaren Bewegung benachbarter Sterne abgeleiteten Oort'schen Konstanten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ und $\tilde{K}$.

Wenn nach R. P. Olling und W. Dehnen [OD03] das Gravitationspotential gegeben durch die Massen der Sterne, des Gases und sonstiger Materie in der Galaxis die Grundlage zur Berechnung der OORT'SCHEN KONSTANTEN ist, dann muss das Vorhandensein DUNKLER MATERIE nach A. Ravi u. a. [Rav+19] sich auf Beschleunigungen von der Sonne benachbarten Sternen auswirken. Die Abweichungen dieser Beschleunigungen von den aus den OORT'SCHEN GLEICHUNGEN bestimmten Werten könnten in diesem Vorschlag für ein Messprogramm Hinweise zum besseren Verständnis dunkler Materie ergeben.

20.4.3. Spiralarme

Wenn wir andere Galaxien anschauen, so finden wir häufig SPIRALARME. Aus den Positionen und Distanzen von Sternen in unserer Galaxie muss man schliessen, dass auch die MILCHSTRASSE Spiralarme hat.

Abb. 20.57.: Die Sombrero-Galaxie M 104 (Credit NASA and The Hubble Heritage Team (STScI/AURA), http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?IM_ID=9967).

Abbildung 20.57 zeigt die SOMBREROGALAXIE M 104. Wir erkennen, dass diese Galaxis im Wesentlichen in einer Ebene angeordnet ist, eine Erkenntnis, die wir auch schon aus den Kurven in Abbildung 20.55 gezogen haben. Weiter scheint der Rand der Sombrerogalaxie aus stärker absorbierendem, weniger leuchtendem Material zu bestehen.

Abb. 20.58.: Spiralarme der ANDROMEDA-GALAXIE M 31 (Credit NASA/JPL-Caltech, http://photojournal.jpl.nasa.gov/jpeg/PIA08787.jpg).

Das Falschfarbenbild der ANDROMEDA-GALAXIE M 31 in Abbildung 20.58 zeigt sehr deutliche Spiralarme. Die ANDROMEDA-GALAXIE M 31 ist die unserer MILCHSTRASSE nächste grosse Galaxie. Sie bewegt sich auf die Milchstrasse zu. In einigen Milliarden Jahren werden sich die ANDROMEDA-GALAXIE M 31 und die Milchstrasse durchdringen. Es besteht dann die Möglichkeit, dass die beiden zentralen schwarzen Löcher sich zu einem noch grösseren Gebilde vereinen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abb. 20.59.: Die Galaxie NGC 1275 im Zentrum des Galaxienhaufen A426 im Sternbild Perseus. Der Galaxienhaufen ist etwa $240 \cdot 10^6$ ly entfernt und enthält etwa 500 bis 1000 Galaxien (Credit: NASA, ESA, and L. Frattare (STScI), http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2008-28-c-full_jpg.jpg).

Galaxien bilden Galaxienhaufen, so wie die Andromeda-Galaxie M 31 und unsere Milchstrasse. Abbildung 20.59 zeigt die Galaxie NGC 1275 im Galaxienhaufen A426. Dieses Gebilde enthält 500 bis 1000 Galaxien.

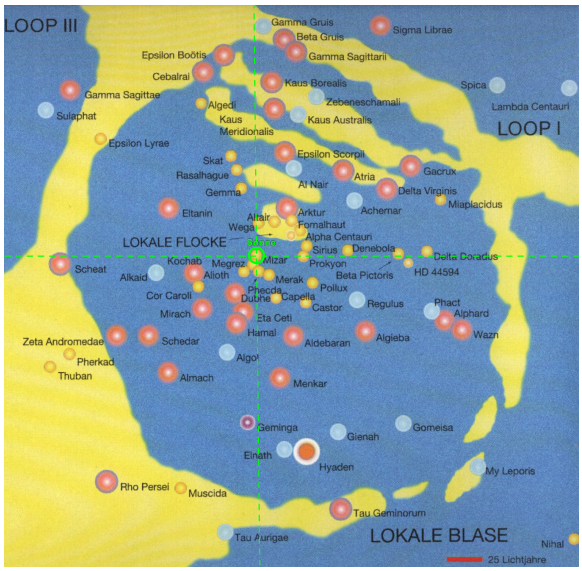


Abb. 20.60.: Lokale Umgebung der Sonne (Credit: N. Henbest / H. Couper, Jschmied at de.wikipedia, CC BY-SA 2.0 DE <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en>, via Wikimedia Commons, Milchstrasse_lokale_blase_25_lj.jpg).

Innerhalb der Milchstrasse sind die Sterne in der Umgebung der Sonne nicht gleichmässig verteilt. Abbildung 20.60 zeigt die Sonne (grüner Kreis und Schnittpunkt der zwei Linien).

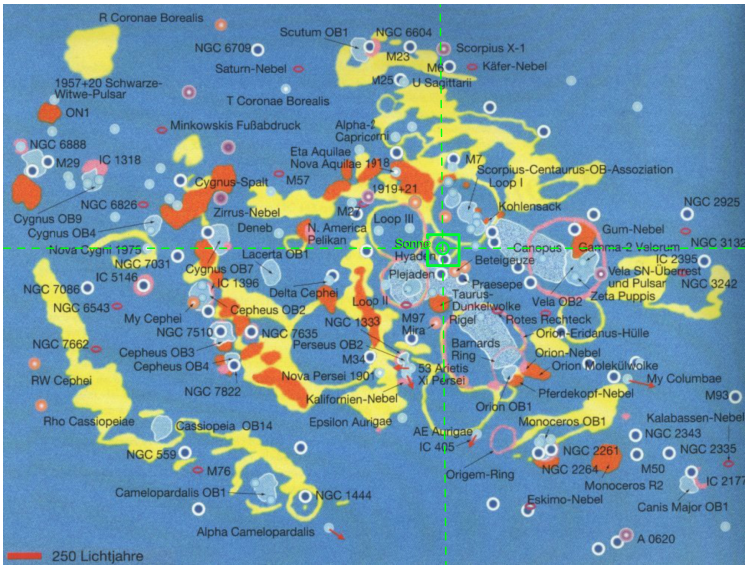


Abb. 20.61.: Lokale Umgebung der Sonne (Credit: N. Henbest / H. Couper, Jschmied at de.wikipedia, CC BY-SA 2.0 DE <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en>, via Wikimedia Commons, Milchstrasse_lokale_blase_250_lj.jpg).

Die grössere Umgebung wird in Abbildung 20.61 gezeigt. Wieder ist die Sonne durch einen grünen Kreis und den Schnittpunkt der zwei Linien markiert. Das grüne Quadrat zeigt die Lage des in Abbildung 20.60 gezeigten Bereiches.

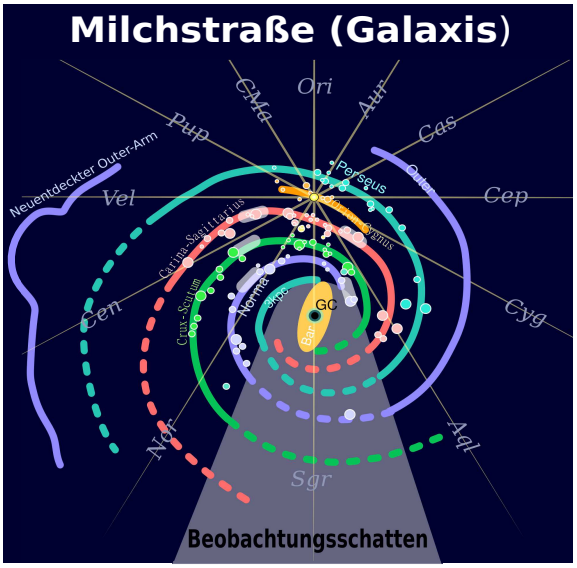


Abb. 20.62.: Schematische Struktur der Milchstrasse (Credit: Milky_Way_Arms.svg: User:Rursusderivative work: Andys, CC BY-SA 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons).

Abbildung 20.62 zeigt die Struktur der Balkengalaxis Milchstrasse. Der Perseus-Arm und der Crux-Scutum-Arm (auch Scutum-Centaurus-Arm genannt) beginnen am Balken unserer Galaxis. Es gibt noch zwei weitere lange

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Arme, den Carina-Sagittarius-Arm und der Äussere Arm. Von letzterem wurde eine Verlängerung entdeckt. Schliesslich gibt es noch den kleinen Orion-Cygnus-Arm. In diesem befindet sich unsere Sonne.

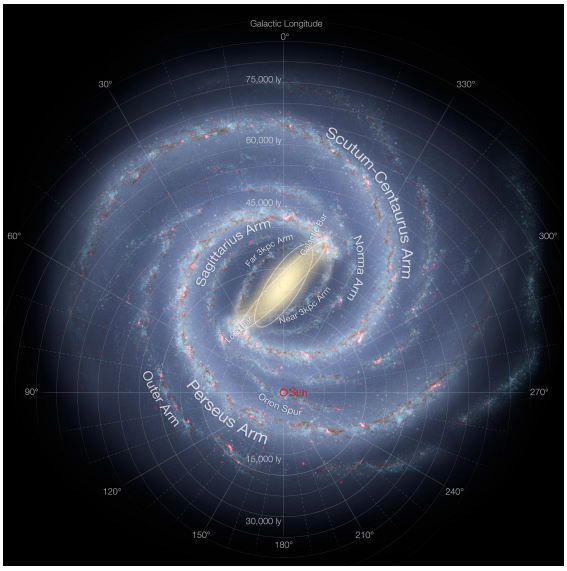


Abb. 20.63.: Struktur der Milchstrasse. Dies ist eine Zeichnung, basierend auf Messungen (Credit: NASA/JPL-Caltech/ESO/R. Hurt, Public domain, via https://www.eso.org/public/images/eso1339e/).

Das was in Abbildung 20.62 schematich skizziert wurde wird in Abbildung 20.63 so gezeichnet dargestellt wie eine Galaxie aussehen würde.

Abb. 20.64.: Seitliche Ansicht der Milchstrasse vom Satelliten COBE aus. Die Wellenlängen von 1.25 µm, 2.2 µm und 3.5 µm sind als blau, grün und rot dargestellt. Die zentrale Verdickung der Milchstrasse ist gut sichtbar (Credit: NASA, GSFC, COBE, Public domain, via Wikimedia Commons).

Abbildung 20.64 zeigt den Kern der Milchstrasse im infraroten Licht, gemessen von dem Satelliten COBE.

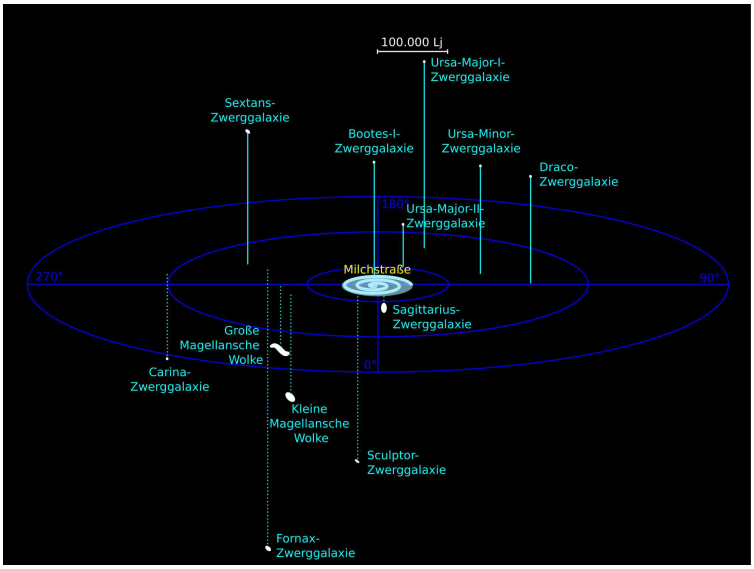


Abb. 20.65.: Begleitgalaxien der Milchstrasse (Credit: This file was derived from: Satellite_Galaxies.svg, CC0, via Wikimedia Commons).

Das grössere Bild ist in Abbildung 20.65 gezeigt. Um die MILCHSTRASSE gruppiert sich eine Anzahl ZWERGGALAXIEN und KUGELSTERNHAUFEN. Die bekanntesten sind die MAGELLANSCHEN WOLKEN.

20.4.4. Kugelsternhaufen

Abb. 20.66.: Kugelsternhaufen M13 (T. Bash, J. Fox, and A. Block/NOAO/AURA/NSF, http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2008/40/image/c/).

Kugelsternhaufen wie exemplarisch in Abbildung 20.66 sind lokal gravitativ gebundene Ansammlungen von Sternen. Die gegenseitige Wechselwirkung über «Stösse» führt zu einer kugelsymmetrischen Massendichteverteilung. Kugelsternhaufen fin-

den sich im Halo von Galaxien (siehe auch Abbildung 20.65) und Zwerggalaxien. Nach [CO07, Kap. 13.3] bestehen Kugelsternhaufen aus einigen zehn bis einigen tausend Sternen. Der Kugelsternhaufen M13 aus Abbildung 20.66 besteht aus metallarmen Sternen der POPULATION II. Das bedeutet, dass die Sterne vor langer Zeit entstanden, als das Universum einige Milliarden Jahre alt war.

Es gibt weiter die OFFENEN STERNHAUFEN. Diese bestehen aus POPULATION I-Sternen. Diese enthalten relativ viele Metallatome, sind also relativ jung. OFFENE STERNHAUFEN sind in der Regel kleiner (haben weniger Sterne) als KUGELSTERNHAUFEN.

20.4.5. Schwarzes Loch im Zentrum

Im Zentrum der Milchstrasse befindet sich ein riesiges schwarzes Loch. Dieses wurde in den 1990-er Jahren durch Andrea Ghez und unabhängig davon durch Reinhard Genzel und ihre jeweiligen Arbeitsgruppen entdeckt. Zuvor wurde am 13. 2. und 15. 2. 1974 durch Robert Hanbury Brown und Bruce Balick die energiereiche Radioquelle Saggitarius A^* entdeckt. Erste Hinweise darauf entdeckte Karl Guthe Jansky schon 1932.

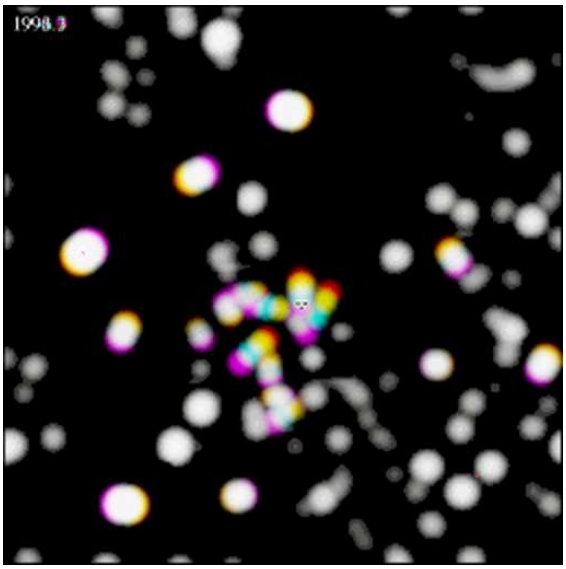


Abb. 20.67.: Infrarotbild des Zentrums der Milchstrasse (Grösse: $(0.5\text{ pc})^2$) (adaptiert von http://apod.nasa.gov/apod/ap001220.html, A. Eckart (U. Koeln) & R. Genzel (MPE-Garching), SHARP I, NTT, La Silla Obs., ESO, siehe auch [Eck+95])

Abbildung 20.67 zeigt eine Überlagerung von Bildern zu den Zeiten 1992-0, 1993-3, 1994-7, 1996-1, 1997-4 und 1998-9. Das Gesichtsfeld ist $(0.5\text{ pc})^2$. Im Zentrum liegt SgtA*, das galaktische Zentrum, ein vermutetes schwarzes Loch. Die Bilder wurden im Infrarotbereich aufgenommen. Die höhere Materiedichte im Zentrum der Milchstrasse blockiert sichtbares Licht. Die Sonne z.B. wärmt auch durch Wolken, obwohl sie nicht mehr sichtbar ist.

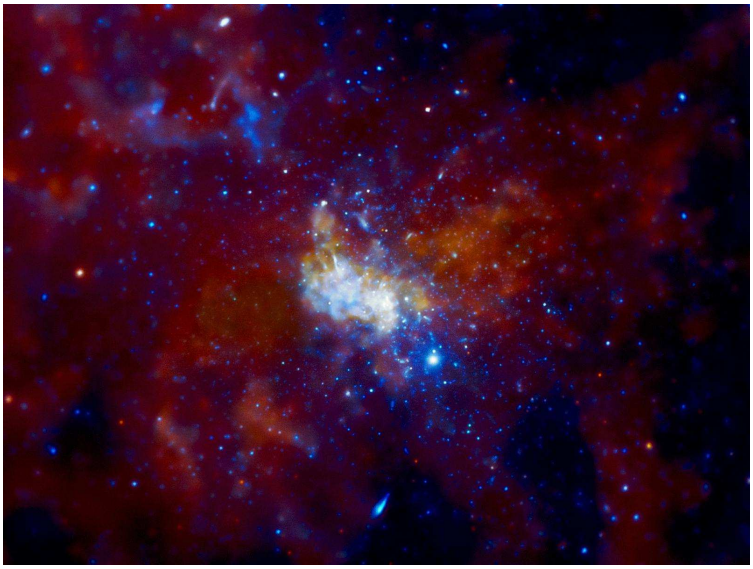


Abb. 20.68.: Bild des Zentrums der Milchstrasse im Röntgenlicht. (NASA/CXC/MIT/F. Baganoff, R. Shcherbakov et al. http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1559.html)

Abbildung 20.68 zeigt das Zentrum im Röntgenlicht aufgenommen durch CHANDRA. Im Röntgenlicht kann die Aktivität des schwarzen Loches im Zentrum gemessen werden. Wenn Masse vom schwarzen Loch aufgenommen wird, dann wird Röntgenlicht ausgestrahlt.

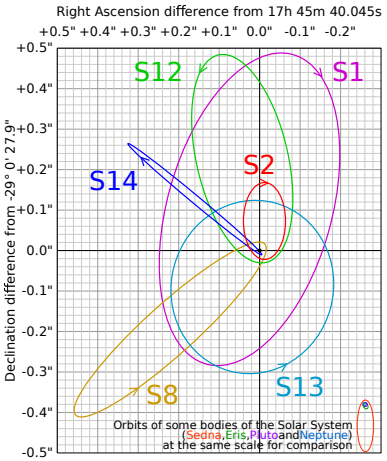


Abb. 20.69.: Umlaufbahnen um das galaktische Zentrum (By Cmglee (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0) or GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)], via Wikimedia Commons, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galactic_centre_orbits.svg)

Die berechneten Bahnen um das zentrale schwarze Loch in Abbildung 20.69 stammen aus der Arbeit „SINFONI in the Galactic Center: Young Stars and Infrared Flares in the Central Light-Month“ von F. Eisenhauer u. a. [Eis+05]. Der Stern S2 kommt so nahe an das schwarze Loch, dass im Infraroten eine merkbare Rot-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

verschiebung im Gravitationsfeld zu sehen ist (siehe Abb. 19.4).

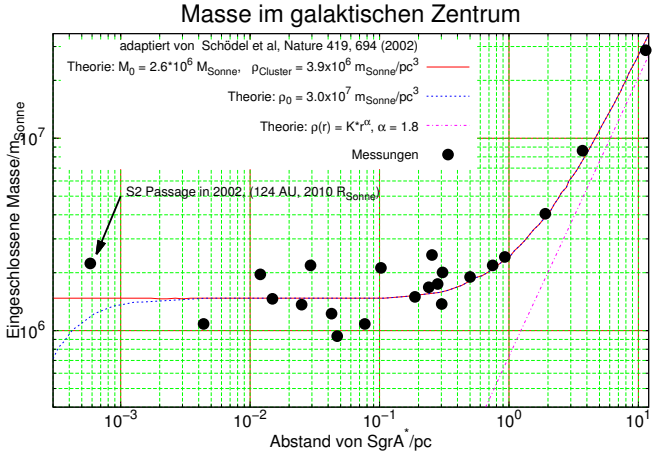


Abb. 20.70.: Masse im Zentrum der Milchstrasse (nach [Sch+02]).

Aus den Bahnparametern der Keplerbahnen (korrigiert um allgemein relativistische Effekte) kann die von der Masse auf einer Bahn umrundete Zentralmasse bestimmt werden. Abbildung 20.70 zeigt die Messwerte zusammen mit verschiedenen Theorien. Die Daten stammen aus „A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way“ von R. Schödel u. a. [Sch+02].

20.4.6. Geschwindigkeit der Sterne

Wenn von Aussen auf Galaxien geschaut wird, kann man anhand der Leuchtkraft die Massendichte und anhand der positionsabhängigen DOPPLERVERSCHIEBUNG die Geschwindigkeit abschätzen. Vera Rubin [RTF78] beobachtete und verstand als Erste, dass die Rotationsraten von Galaxien einige noch nicht verstandene physikalische Effekte verbargen. Die von ihr studierten Rotationskurven (siehe Abb. 20.71) können mit der sichtbaren Masse nicht richtig erklärt werden.

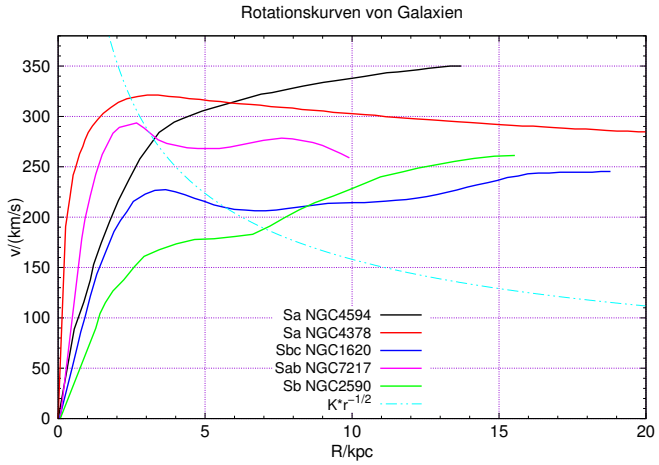


Abb. 20.71.: Rotationskurven von Galaxien. Aufgetragen ist die Geschwindigkeit von Sternen als Funktion des Abstandes zum Zentrum der Galaxis. (Nach [RTF78, Fig. 3] und [Dem10, p. 416])

Abbildung 20.71 basierend auf Daten von V. C. Rubin; N. Thonnard und J. Ford W. K. („Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC“ [RTF78]) zeigt für verschiedene Galaxientypen, wie die Sterngeschwindigkeiten mit dem Abstand vom Zentrum sich verhalten. Zum Vergleich ist die erwartete Geschwindigkeit bei einer dominierenden zentralen Masse angezeigt. Die $\frac{K}{r^2}$-Kurve wird immer erwartet, wen die Masse bei grösseren Distanzen klein gegen die eingeschlossene Masse ist.

Ein sehr naives Modell kann aus der Identifikation der Gravitation und der Zentripetalkraft hergeleitet werden:

$$F_G = -G\frac{Mm}{r^2} \equiv F_Z = -m\frac{v^2}{r} \tag{20.4.15}$$

Daraus kann mit dem Gauss'schen Gesetz für die Gravitation

$$M(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2\sin(\theta)d\mathfrak{r}\,d\theta\,d\phi = 4\pi\int_0^{r}\rho(\mathfrak{r})\mathfrak{r}^2 d\mathfrak{r} \tag{20.4.16}$$

die Masse bestimmt werden. Über die Geschwindigkeit und deren Ableitung bekommt man

$$\rho(r) = \frac{2v(r)}{4\pi G}\frac{dv(r)}{dr}\frac{1}{r} + \frac{v^2(r)}{4\pi G}\frac{1}{r^2} \tag{20.4.17}$$

Mit Gleichung (20.4.17) kann so aus der beobachteten Geschwindigkeitsverteilung die vom Radius abhängige eingeschlossene Masse bestimmt werden.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

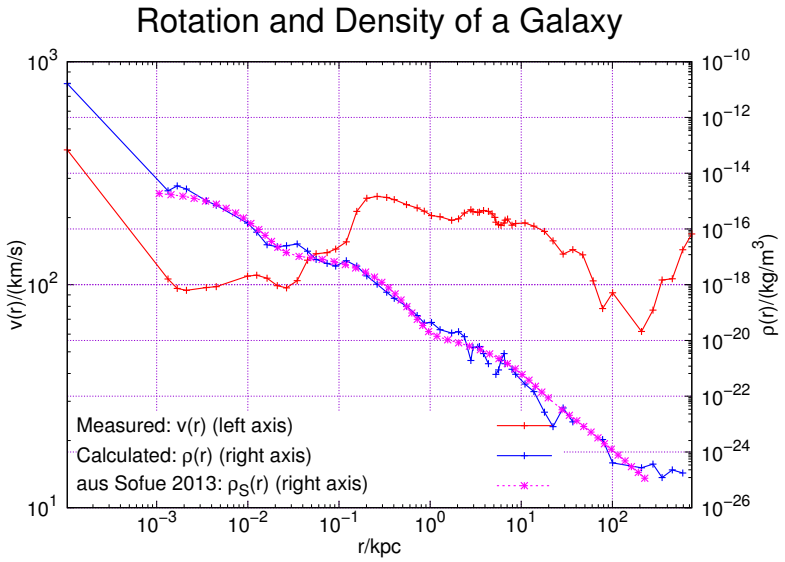


Abb. 20.72.: Rotationsgeschwindigkeit und Massendichteverteilung (Berechnet aus Daten von Y. Sofue [Sof13, Fig. 9]) sowie das Resultat von Y. Sofue [Sof13, Fig. 12, links].

Abbildung 20.72 zeigt in der roten Kurve eine gemessene Geschwindigkeitsverteilung unserer Milchstrasse (Y. Sofue, „Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From Black Hole to Entire Galaxy —“ [Sof13, Fig. 9]). Die blaue Kurve (Skala rechts) zeigt die mit Gleichung (20.4.17) in einer Excel-Tabelle berechnete Massenverteilung. Die lila Kurve schliesslich ist das Resultat von Y. Sofue [Sof13, Fig. 12, links].

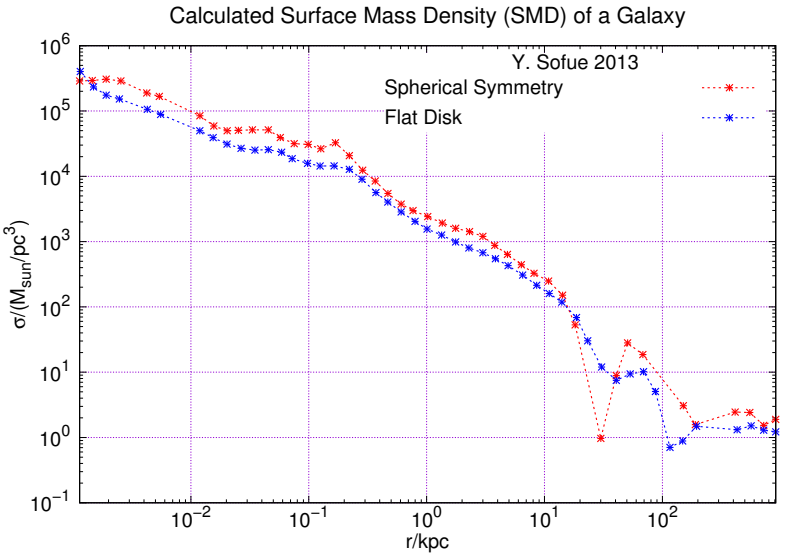


Abb. 20.73.: Rotationsgeschwindigkeit und Flächenmassenverteilung nach Y. Sofue [Sof13, Fig. 13, links]).

Da Galaxien in der Regel eher flache Objekte sind wird in der Astrophysik in der Regel die FLÄCHENMASSENDICHTE σ mit der Einheit kg m^{-2} verwendet. In der englischsprachigen Astrophysikliteratur wird dies als Surface Mass Density, Flä-

chenmassendichte (SMD) bezeichnet, oft mit der Einheit $M_{\odot}pc^{-2}$. Durch die FLÄCHENMASSENDICHTE hat man eine direkte Korrelation zur lokalen Leuchtstärke einer Galaxis. Die Abbildung 20.73 zeigt zu den Daten aus Abbildung 20.72 die Berechnung von Y. Sofue [Sof13] für zwei Fälle, eine sphärisch symmetrische Massenverteilung und eine flache Scheibe.

20.4.6.1. Dunkle Materie

Die Rotationskurven von Galaxien, auch der unseren, zeigen, dass die sichtbare Materie nicht alles sein kann, was gravitativ wechselwirkt. Diese Materie wird DUNKLE MATERIE genannt. Die Präsidentin J. Stachel der Deutschen Physikalische Gesellschaft hat eine kurze Zusammenfassung der Physik veröffentlicht [Sta13]. Die Zusammenfassung basiert auf den Artikeln „Kinematical and Chemical Vertical Structure of the Galactic Thick disk. II. A Lack of Dark Matter in the Solar Neighborhood“ von C. M. Bidin u. a. [Bid+12] sowie von „Ont the local dark matter density“ von J. Bovy und S. Tremaine [BT12]. Eine weitere lesbare Darstellung finden Sie in „Dem Dunklen Universum auf der Spur“ von M. Steinmetz und M. Bartelmann [SB10].

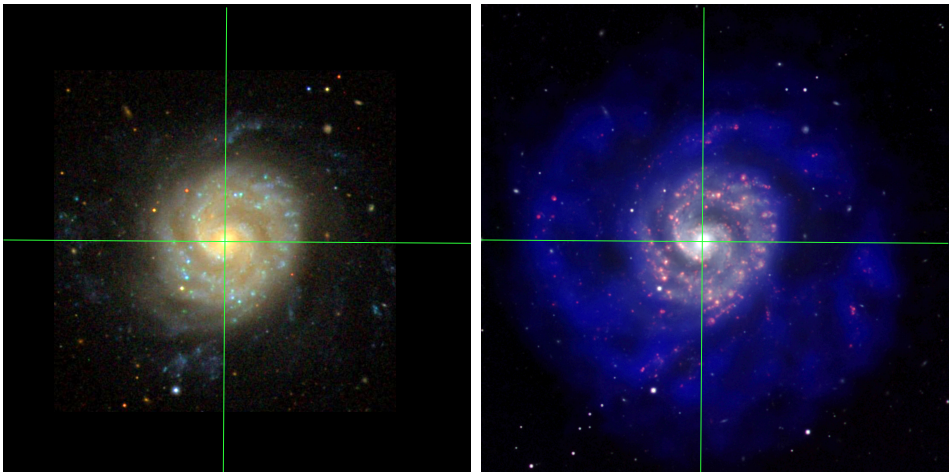


Abb. 20.74.: Links ist ein Bild im sichtbaren Frequenzbereich, rechts eines im Radiowellenbereich (21 cm, H, überlagert mit dem sichtbaren Bild (Credit: Links: Astrophysics Science Division at NASA/GSFC, rechts: T. Burchell and B. Saxton (NRAO/AUI/NSF) from data provided by A. C. Boley and L. van Zee, Indiana University; D. Schade and S. Côté, Herzberg Institute for Astrophysics)

Abbildung 20.74 zeigt im gleichen Massstab links das sichtbare Bild der Galaxis NGC 3596 und rechts in blau das Radiowellenbild auf der Wasserstofffrequenz 21 cm. Die grünen Linien markieren das Zentrum. Es ist offensichtlich, dass mehr Masse da ist als das sichtbare Licht zeigt.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

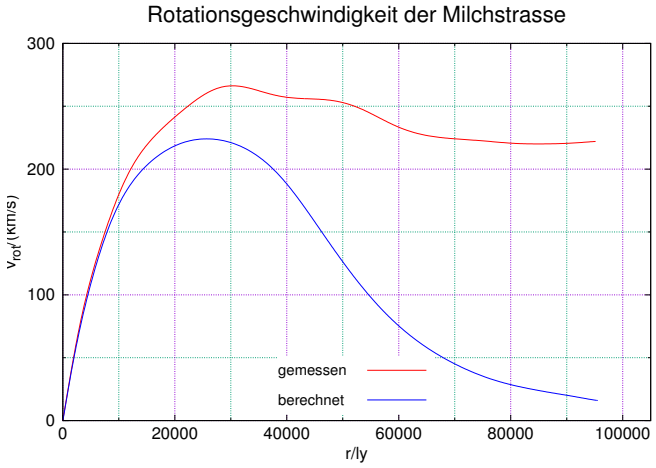


Abb. 20.75.: Gemessene und berechnete Rotationskurve der Milchstrasse (Daten aus [SB10]).

Unter der Annahme einer Zylindersymmetrie (Roatationssymmetrisch um z sowie einer Spiegelsymmetrie an der xy-Ebene) kann aus der beobachteten sichtbaren Masse die Rotationskurve einer Galaxie berechnet werden. Diese Kurve ist in Abbildung 20.75 in blauer Farbe eingezeichnet.

Aus dem Gravitationsgesetz ergibt sich

$$v(r) = \sqrt{\frac{G\,M(r)}{r}} \tag{20.4.18}$$

Bei Zylindersymmetrie ergibt sich auf der xy- Ebene und dort repräsentativ für $r = x$ die auf die Ebene projizierte Masse

$$\begin{aligned} v(r) &= \sqrt{\frac{G}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{r} \rho(\mathfrak{r},z)\,\frac{2(r-\mathfrak{r})}{\sqrt{(r-\mathfrak{r})^2+z^2}}\,\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}\,dz\,d\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi G}{r}\int_0^{\infty}\int_0^{r} \rho(\mathfrak{r},z)\,\frac{(r-\mathfrak{r})}{\sqrt{(r-\mathfrak{r})^2+z^2}}\,\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}\,dz} \end{aligned} \tag{20.4.19}$$

Die gemessene Kurve in Abbildung 20.75 ist die rote Kurve. Offensichtlich gibt es Masse, die gravitativ wirksam ist und die nicht elektromagnetisch wechselwirkt.

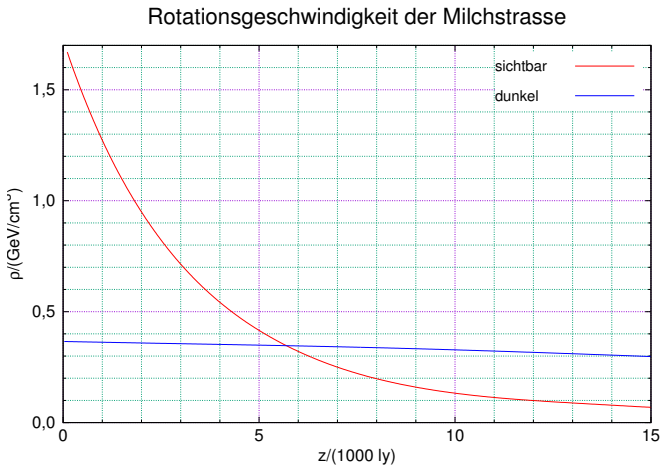


Abb. 20.76.: Dichte der sichtbaren und der dunklen Materie in Abhängigkeit von der Distanz von Ebene der Milchstrasse (Daten aus [Sta13]).

Abbildung 20.76 zeigt die Dichte der sichtbaren und der dunklen Materie über der Ebene der Milchstrasse. Die Milchstrasse hat einen grossen Halo aus dunkler Materie. Durch Präzisionsmessungen der Geschwindigkeit benachbarter Sterne haben A. Ravi u. a. [Rav+19] versucht eine Schätzung der Dichte der dunklen Materie zu erhalten.
Auch für die Physik des Weltalls ist die Dunkle Materie von Bedeutung [Sta14].

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

21. Universum

In diesem Abschnitt geht es um das grosse Ganze, das Universum.

21.1. Beobachtungen

Alles was wir über das Universum wissen, wissen wir aus Beobachtungen von der Erde aus, oder in jüngster Zeit, aus dem Sonnensystem heraus. Bilder, Spektren und die Analyse von Teilchenströmen und Gravitationswellen sind die verfügbaren Quellen. Es werden Modelle erzeugt, die nicht im Widerspruch zu den Beobachtungen sein sollten.

21.1.1. Olbers' Paradox

Heinrich Olbers erkannte, dass ein unendliches Universum mit homogener Sternverteilung unweigerlich zu einer Lichtkatastrophe führen müsste.

Abb. 21.1.: Olbers' Paradox. Auf kurze Strecken ist der Wald durchsichtig, auf lange jedoch blickdicht.

Olbers' Paradox ist eine Erkenntnis für ein klassisches unbegrenztes Universum. Abbildung 21.1 zeigt ein Bild eines Waldes. Egal wie weit die Bäume voneinander stehen, in einem unendlich tiefen Wald gibt es immer eine Distanz, ab der immer ein Stamm die Sicht blockiert, wo man also nicht weiter schauen kann.

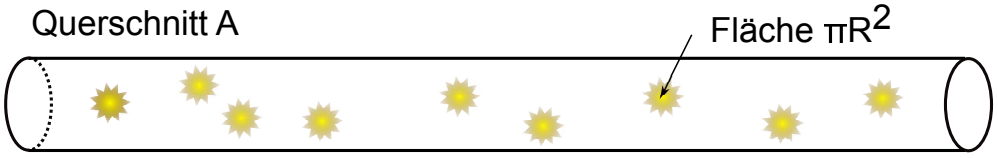


Abb. 21.2.: Skizze zur Berechnung von Olbers' Paradox.

Wenn die Stämme aus Abbildung 21.1 selbst leuchten würden, wäre es sehr hell. Da der Fluss des Lichtes mit r^2 abnimmt, die Zahl der möglichen Sterne aber mit r^2 zunimmt, trägt jede Kugelschale um einen Beobachter das Gleich zur Helligkeit bei. Es gibt unendlich viele Kugelschalen in einem klassischen Universum, also müsste der Nachthimmel unendlich hell sein, egal wie schwach ein Stern leuchtet. Mit Abbildung 21.2 kann dies berechnet werden. Die Anzahl Sterne in $d\Omega$ ist

$$N(r) = nr^2 dr d\Omega \tag{21.1.1}$$

wobei der Abstand r, die Schichtdicke dr und die Zahlendichte der Sterne n ist. Dies führt mit der Fläche $A = \pi R^2$ eines Sternes zur Beziehung für den Abstand r_{max}, wo sich Sterne immer überlappen, der Sichtweite

$$N \cdot \pi R^2 = n \cdot A \cdot r_{max} \cdot \pi R^2 \stackrel{!}{=} A \tag{21.1.2}$$

Damit erhalten wir

$$r_{max} = \frac{1}{n \cdot \pi R^2} \tag{21.1.3}$$

für die Sichtweite. Wenn L mittlere Leuchtkraft der Sterne ist, ist die beobachtete Intensität eines Sterns auf der Erde

$$I_1 = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{21.1.4}$$

Die Anzahl der Sterne zwischen r und $r + dr$ ist

$$dN = n \cdot 4\pi r^2 dr \tag{21.1.5a}$$

$$dI = dN\, I_1 = dN \frac{L}{4\pi r^2} = nL dr \tag{21.1.5b}$$

$$I(r_{max}) = nL \int_0^{r_{max}} dr = nL r_{max} \tag{21.1.5c}$$

Zur Berechnung der Abdeckung nehmen wir an, dass der mittlere Radius R eines Sterns bekannt sei. Dies führt im Zylinder in Abbildung 21.2 zur effektiven Fläche A_{eff}:

$$A_{\text{eff}} = n \cdot A \cdot r_{max} \cdot \pi R^2 \tag{21.1.6}$$

Wir haben eine dichte Abdeckung wenn $A_{\text{eff}} = A$ der Querschnittsfläche des Zylinders ist.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$r_{max} = \frac{1}{(n\pi R^2)} \tag{21.1.7a}$$

$$I(r_{max}) = nLr_{max} = \frac{L}{\pi R^2} \tag{21.1.7b}$$

Unsere Überlegungen gehen von einer Isotropie der Sternverteilung aus. Das Resultat muss unabhängig von Richtung sein; Alles ist gleich hell.
Zum Schluss vergleichen wir das Olbers'sche Resultat mit dem Standardmodell des expandierenden Universums

$$r_{\text{Standard}} = 13.6 \cdot 10^9 \text{ ly} \tag{21.1.8a}$$

$$r_{\text{Olbers}} = 1.7 \cdot 10^{23} \text{ ly} \tag{21.1.8b}$$

Die Sichtweite des Olbers'schen statischen Universums sind viel grösser als die Sichtweite bis zum Urknall.
Wenn wir ein statisches Universum kombiniert mit Absorption hätten, würde das Olbers'sche Paradox gelten.

21.1.2. Unmöglichkeit eines statischen Universums

Die Diskussion im vorherigen Abschnitt 21.1.1 hat gezeigt, dass ein unendliches statisches und homogenes Universum mit einer unendlichen Leuchtdichte einher geht. Wir wissen, dass das Universum durch die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein ([Ein15a; Ein15d; Ein15c]) beschrieben werden muss. Arthur Eddington zeigte in seiner Arbeit „On the Instability of Einstein's Spherical World" [Edd30], dass der Gleichgewichtspunkt eines statischen, sphärisch symmetrischen Universums, so wie es sich Einstein vorgestellt hatte, nicht stabil sei. D. Soares gibt in seinem Paper „Einstein's static universe" [Soa12] eine leicht verständliche Ableitung der Eddington'schen Argumente. Abbildung 21.3 zeigt die potentielle Energie mit einem Maximum, also einem instabilen Extremum.

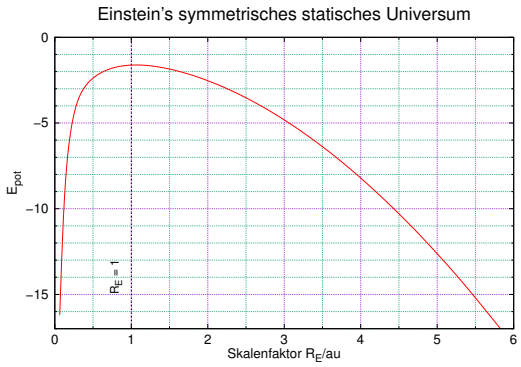


Abb. 21.3.: Verlauf der potentiellen Energie in Einsteins statischem sphärisch symmetrischem Universum (Grafik mit Daten aus [Soa12, Abb. 1])

Ein Universum, das durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird

kann also nicht statisch und sphärisch symmetrisch sein. Messungen zeigen, dass das Universum expandiert, dann muss es einen Anfang gehabt haben.

21.1.3. Isotropie der Fluchtbewegung

Wenn man die Geschwindigkeiten von fernen Galaxien entlang der Sichtlinie beobachtet, stellt sich heraus, dass viele von uns weg sich bewegen, und zwar um so schneller, je weiter weg diese sind.

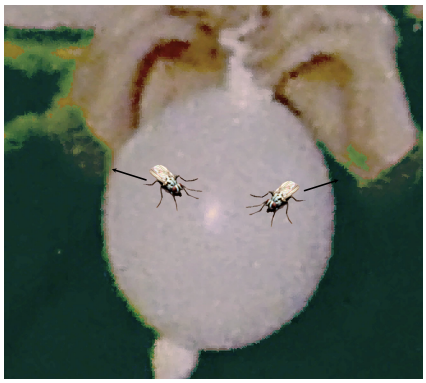


Abb. 21.4.: Modell der Expansion im Universum

Abbildung 21.4 veranschaulicht, dass zwei Insekten, die sich auf einem Luftballon befinden, sich trotzdem voneinander wegbewegen, wenn der Ballon aufgepumpt wird. Lokal gibt es keine messbaren Änderungen der Längenskala, global schon.

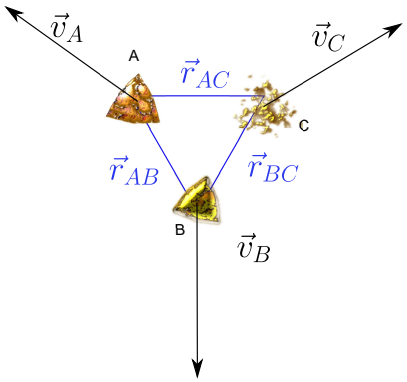


Abb. 21.5.: Skizze zur Isotropie der Ausdehnungsbewegung (nach Demtröder [Dem10, Abb. 12.3]).

Um eine quantitative Aussage zu machen verwenden wir die Skizze in Abbildung 21.5. Es gilt

$$\boldsymbol{v}_{BC} = \boldsymbol{v}_{AC} - \boldsymbol{v}_{AB} \tag{21.1.9}$$

sowie

$$v_{AB} = H_0 r_{AB} \qquad v_{AC} = H_0 r_{AC} \tag{21.1.10}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Daraus folgt

$$\boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{r}_{AC} - \boldsymbol{r}_{AB} \tag{21.1.11a}$$
$$\boldsymbol{v}_{BC} = \boldsymbol{v}_{AC} - \boldsymbol{v}_{AB} \tag{21.1.11b}$$
$$= H_0 \left(\boldsymbol{r}_{AC} - \boldsymbol{r}_{AB}\right) \tag{21.1.11c}$$
$$= H_0 \boldsymbol{r}_{BC} \tag{21.1.11d}$$

21.2. Hubble-Gesetz

Durch genaue optische Spektroskopie können mit dem Dopplereffekt die Geschwindigkeiten von Galaxien von uns weg gemessen werden. Edwin Hubble [Hub29] entdeckte, dass es einen Zusammenhang zwischen der Fluchtgeschwindigkeit und der Distanz eines Objektes zu uns gibt:

$$v = H \cdot r \tag{21.2.1}$$

H ist die sogenannte «Hubble-Konstante», deren Wert nach neueren Erkenntnissen nicht konstant ist. Ihr heute anerkannter Wert ist:

$$H_0 = 73(7)\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1} \tag{21.2.2}$$

Die Unsicherheit der Grösse der Hubble-Konstante wird ausgedrückt durch die folgende Definition

$$H_0 = 100h\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1} \text{ mit } h = 0.5 \ldots 1 \tag{21.2.3}$$

In Gleichung (21.2.2) wäre also $h = 0.73$.

21.2.1. Distanzangaben ferner Objekte

Durch die Unsicherheit über die Grösse der Hubble-Konstante sind auch alle anderen Grössen mit dem selben systematischen Fehler behaftet. Unsere Teleskope messen nur Winkel. Wenn also eine Struktur einen gewissen Winkel α weg von einem Objekt im Abstand d beobachtet wird, ist der Abstand für kleine Winkel $r = \alpha d$. Wenn nun der wahre Abstand $d_w = k \cdot d$ ist, dann ist auch $r_w = k \cdot r$. Es ist also der gleich relative systematische Fehler ausgedrückt durch die Konstante k.
Das Hubblegesetz ist so definiert, dass h neben r steht. Dann ist $r \propto h^{-1}$. Damit ist der Korrekturfaktor $k = h^{-1}$. Ein Abstand wird unabhängig vom aktuellen Wert der Hubble-Konstante dann als

$$d = 13h^{-1}\ \text{kpc} \tag{21.2.4}$$

angegeben. Der Zahlenwert 13 ist hier ein Platzhalter.

21.3. Struktur

Wenn wir die Struktur des Universums beschreiben sollen, müssen wir berücksichtigen, dass wir das Universum von einem Punkt aus betrachten. Wir können leuchtende Materie sehen (Licht, Röntgenstrahlen, Radiowellen, γ-Strahlen, wir können Geschwindigkeiten messen und wir können Elementarteilchen betrachten.

In unserem Universum gibt es eine hierarchische Strukturierung. Es gibt Sonnensysteme, lokale Blasen, Sternhaufen, Galaxien, Galaxienhaufen und Superhaufen. Auf ganz grosser Skala existieren Filamente und Leerstellen, Voids.

21.3.1. Objekte

Objekt	Lineardimension	Mittlere Entfernung der Teilsysteme	Anzahl der Teilsysteme	Masse des Objektes
Kugelsternhaufen	$10 - 100$ pc		$10^5 - 10^7$	$10^5 - 10^7$ $M_\odot$
offene Sternhaufen	$2 - 20$ pc		$10 - 10^3$	
Galaxien	$1 - 100$ kpc	$3 - 5$ pc	$10^2 - 10^3$ Kugelsternhaufen, 10^{11} Sterne	$10^6 - 10^{13}$ $M_\odot$
Galaxienhaufen	$2 - 10$ Mpc	1 Mpc	$10 - 10^4$	$10^{12} - 10^{15}$ $M_\odot$
Superhaufen	$(50 - 150)\ h^{-1}$ Mpc	$25\ h^{-1}$ Mpc	$5 - 50$	$\sim 10^{16}$ $M_\odot$
Voids	$(25 - 100)\ h^{-1}$ Mpc	$50\ h^{-1}$ Mpc		
Zelluläre Strukturen	$(100 - 200)\ h^{-1}$ Mpc	$100\ h^{-1}$ Mpc		

Tab. 21.1.: Objekte im Universum. $0.4 \leq h \leq 1$ Unsicherheitsfaktor. (nach K.-H. Spatschek, *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen* [Spa03]).

Tabelle 21.1 zeigt die Einteilung von Objekten nach dem *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen* von K.-H. Spatschek [Spa03]. Superhaufen sind Ansammlungen vovon Galaxienhaufen, diese wiederum sind Ansammlungen von Galaxien, offenen Sternhaufen und Kugelsternhaufen. Die letzten drei Objekte bestehen aus Sternen mit ihren Planetensystemen. Es ist wahrscheinlich, dass einzelne Sonnen und/oder Planeten fernab von Galaxien durch die Weiten des Universums ziehen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

21.3.1.1. Galaxien

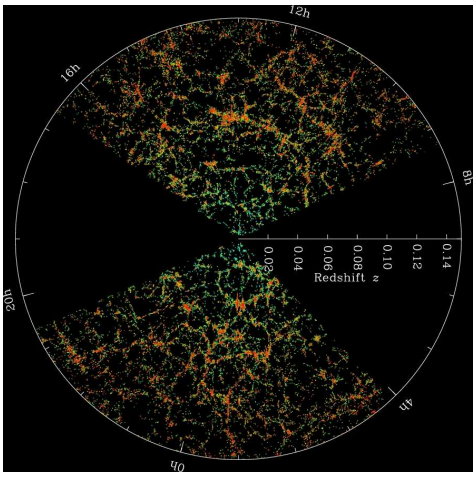


Abb. 21.6.: Verteilung von Galaxien (Credit: M. Blanton and the Sloan Digital Sky Survey., https://www.sdss3.org/science/gallery_sdss_pie2.php)

Abbildung 21.6 zeigt die Verteilung von Galaxien. Die fehlenden Teile beruhen darauf, dass wir nur senkrecht zur Ebene der Milchstrasse, also zur galaktischen Ebene und dort in einem gewissen Winkelbereich eine gute Sicht haben.

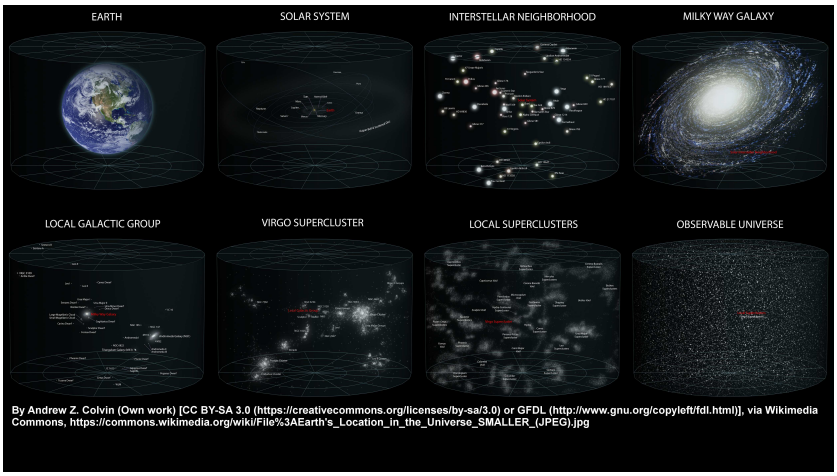


Abb. 21.7.: Position der Erde im Universum (By Andrew Z. Colvin (Own work) [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0) or GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/ File:Earth's_Location_in_the_Universe_SMALLER_(JPEG).jpg)

Abbildung 21.7 zeigt die Position der Erde im Universum. Wegen der begrenzten Lichtgeschwindigkeit ist die Erde im Zentrum des sichtbaren Universums. Die Ersde ist ein Teil des Sonnensystems. Dieses ist in einer lokalen Nachbarschaft eingebettet (Siehe Abbildungen 20.60 und 20.61). Diese Lokale Umgebung ist Teil der Milchstrasse, einer Galaxie. Diese wiederum ist das zweitgrösste Mitglied der loka-

len galaktischen Gruppe. Deren grösstes Mitglied ist die ANDROMEDA-GALAXIE. Die lokale Gruppe ist Teil des VIRGO-SUPERCLUSTERS. Dieses ist Teil einer lokalen Gruppe von Superclustern. Deren Positionen bilden Filamente in der grossen Struktur des Universums.

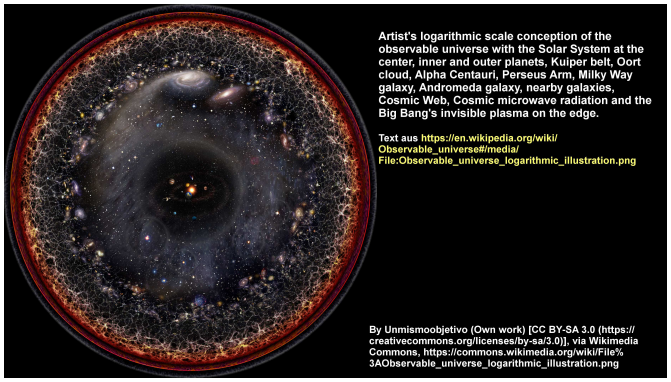


Abb. 21.8.: Logarithmische Darstellung des Universums (By Unmismoobjetivo (Own work) [CC BY-SA 3.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/ File:Observable_universe_logarithmic_illustration.png)

Die Information von Abbildung 21.7 wird in der Abbildung 21.8 logarithmisch dargestellt. Vom Zentrum aus werden nach aussen die Grössenordnungen linear nach oben gezählt. Der Rand des sichtbaren Universums ist aussen, die Erde ist im Zentrum.

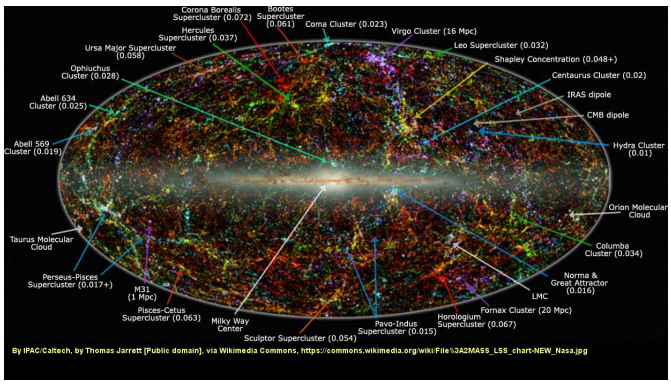


Abb. 21.9.: Struktur des Universums auf grossen Skalen (By IPAC/Caltech, by Thomas Jarrett [Public domain], via Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/ File:2MASS_LSS_chart-NEW_Nasa.jpg)

Abbildung 21.9 ist eine Darstellung der Milchstrasse und der Filamentstruktur des Universums. Die Skalen der Milchstrasse und der Filamentstruktur stimmen nicht überein.

21.3.1.1.1. Struktur von Galaxien Nach der Arbeit „The Evolution of Galaxy Number Density at $z < 8$ and Its Implications“ von C. J. Conselice u. a.

[Con+16] gibt es im sichtbaren Universum mindestens $2^{+0.6}_{-0.7} \cdot 10^{12}$ Galaxien mit $M > 1 \cdot 10^6$ $M_\odot$ [1]. Das sichtbare Universum ist dabei der Bereich, bei dem der Rotverschiebungsparameter $Z \lessapprox 8$ ist. Alle diese Galaxien haben unterschiedliche Grössen und Strukturen.

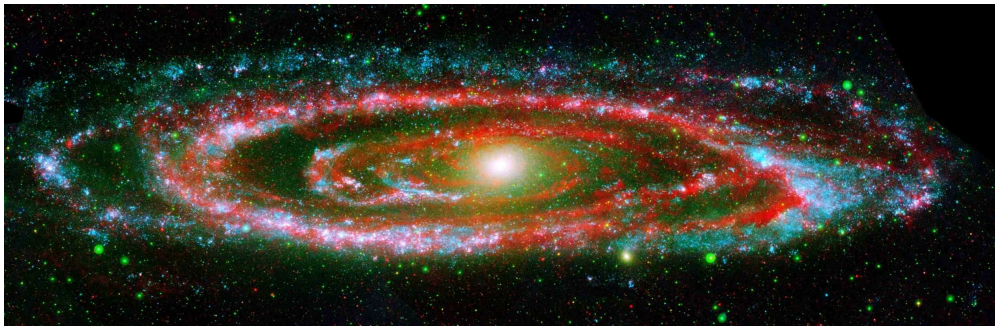


Abb. 21.10.: Bild der Andromeda-Galaxie (NASA/JPL-Caltech, http://photojournal.jpl.nasa.gov/jpeg/PIA08787.jpg)

Ein häufig vorkommender Typ von Galaxien sind Spiralgalaxien wie die in Falschfarben in Abbildung 21.10 gezeigte Andromedagalaxie.

Abb. 21.11.: Galaxienhaufen wie A426 (Perseus-Haufen) sind lokale Ansammlungen von Galaxien. (NASA, ESA, and L. Frattare (STScI), http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-2008-28-c-full_jpg.jpg)

Wie schon erwähnt ist es wahrscheinlich in der Nähe einer Galaxie eine weitere zu finden. Diese Galaxienhaufen wie der in Abbildung 21.11 gezeigte Perseushaufen sind wichtige Strukurelement des Universums.

[1] Auf jeden Menschen kommen mindestens 200 Galaxien.

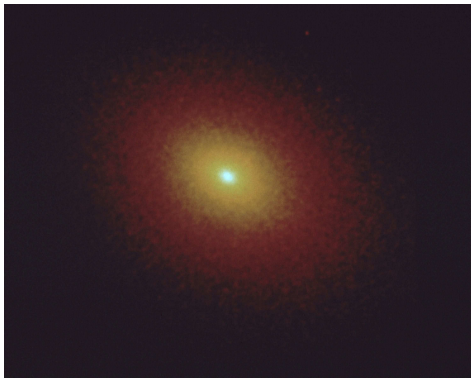


Abb. 21.12.: Die Zwerggalaxie M32, Typ E2, ist eine Begleiterin der Andromeda-Galaxie (Tod R. Lauer/NASA, http://imgsrc.hubblesite.org/hu/db/images/hs-1992-09-a-full_jpg.jpg).

Es gibt aber auch kleinere Strukturen als Galaxien wie die Andromeda-Galaxie. Diese Zwerggalaxien wie die Galaxie M32 in Abbildung 21.12 sind häufig Begleiterinnen von grösseren Galaxien.
Obwohl jede Galaxie unterschiedlich ist, gibt es doch klar erkennbare Klassen von Galaxien und Galaxien, die in kein Schema passen.

21.3.1.1.2. Hubble's Galaxienklassifikation Edwin Hubble schlug die im Folgenden vorgestellte Klassifikation von Galaxien vor.

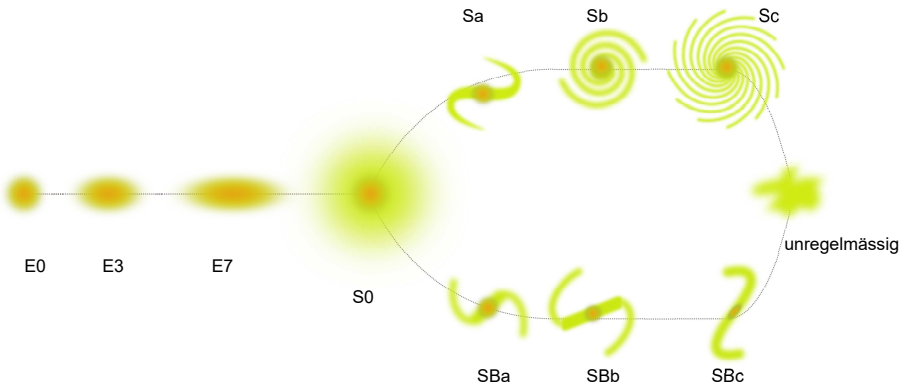


Abb. 21.13.: Klassifikation der Galaxien nach Hubble.

Die Klassifikation nach Hubble (siehe Abbildung 21.13) ist heute noch in Gebrauch. Die Klassen sind:

E0 Kugelförmig ohne Sternscheibe

E1 - E7 Elliptisch mit steigender Elliptizität

S0 Kugelförmig mit unstrukturierter kreisförmiger Scheibe

Sa - Sc Spiralgalaxien mit kugelförmige, Kern und zunehmender Anzahl Armen

SBa - SBc Balkengalaxien mit immer längerem Balken

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

irregulär Passt nicht in die obigen Kategorien

In Abbildung 21.12 wird die Zwerggalaxie M32 als Typ E2 charakterisiert, also als eine leicht elliptische kompakte Galaxie.

21.3.2. Gekrümmter Raum

Das sich ausdehnende Universum kann als 3D-Oberfläche in einem 4D-Raum modelliert werden. Das Buch *Flatland: A romance of many dimensions* von E. A. Abbott [Abb84; Abb12] beschreibt in seinem zweiten Teil sehr schön, wie man als Wesen einer 2-dimensionalen Welt feststellen kann, dass man in einer dreidimensionalen Welt eingebettet ist. Um den Prozess zu verstehen wird auch beschrieben, wie ein 2D-Wesen in einer 1D-Welt lebt und wie festgestellt werden kann, dass eine 3D-Kugel die 1D-Welt kreuzt. Die Gedanken in diesem Buch können verwendet werden um die Krümmung des Universums zu verstehen.

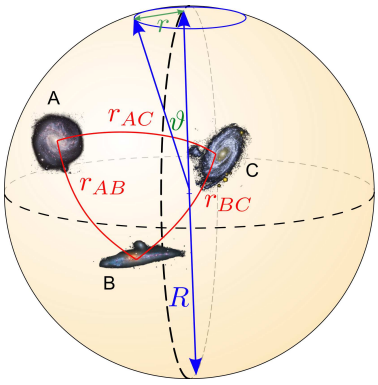


Abb. 21.14.: 2D-Modell eines gekrümmten Raumes eingebettet in 3D.

Wir beginnen mit einer 2D-Welt als Oberfläche einer 3D-Kugel (siehe Abbildung 21.14). Dies ist äquivalent zu einem Luftballon oder dem Schalltrichter einer Posaune. Wir definieren eine Metrik der Kugeloberfläche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \tag{21.3.1a}$$
$$x_1 = R \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \tag{21.3.1b}$$
$$x_2 = R \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \tag{21.3.1c}$$
$$x_3 = R \cdot \cos\vartheta \tag{21.3.1d}$$

Deren Linienelement auf der Oberfläche ist

$$d\ell^2 = R^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta \cdot (d\varphi)^2 \right] \tag{21.3.2}$$

Dabei ist der Radius der 3D-Kugel R ein Skalenfaktor. Am Nordpol (da sind die Überlegungen am einfachsten) haben wir Kreisfläche mit $r = R\sin\vartheta$. Dabei sei $r \ll R$. Das Gebilde ist ein Kreis mit der Oberfläche $A = 2\pi r$ (Umfang, denken Sie an *Flatland: A romance of many dimensions* [Abb84; Abb12]).
Bei einer Änderung des Skalenfaktors R ist der neue Radius des Kreises

$$r = \frac{R}{R_0} r_0 \tag{21.3.3}$$

Aus

$$\cos\vartheta = \sqrt{1-\sin^2\vartheta} = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2} \tag{21.3.4}$$

und

$$r = R\sin\vartheta \Longrightarrow dr = R\cos\vartheta d\vartheta \tag{21.3.5}$$

erhalten wir auf der 2D-Kugeloberfläche der 3D-Kugel für das Längenelement die Beziehungen

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2\left[(d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\cdot(d\varphi)^2\right] \\ &= R^2\left[\frac{dr^2}{R^2\cos^2\vartheta} + \frac{r^2}{R^2}\cdot(d\varphi)^2\right] \end{aligned} \tag{21.3.6a}$$

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2\left[\frac{dr^2}{R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} + \frac{r^2}{R^2}\cdot(d\varphi)^2\right] \\ &= \frac{dr^2}{\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} + r^2 d\varphi^2 \end{aligned} \tag{21.3.6b}$$

Es zeigt sich, dass hier sich $d\ell$ mit R ändert ohne dass dr sich ändern muss.
Wir führen jetzt die exakt analogen Überlegungen für die 3D-Oberfläche einer 4D-Kugel durch. Die Metrik der Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 \tag{21.3.7a}$$

$$x_1 = R\cdot\sin\psi\sin\vartheta\cdot\cos\varphi \tag{21.3.7b}$$

$$x_2 = R\cdot\sin\psi\sin\vartheta\cdot\sin\varphi \tag{21.3.7c}$$

$$x_3 = R\cdot\sin\psi\cos\vartheta \tag{21.3.7d}$$

$$x_4 = R\cdot\cos\psi \tag{21.3.7e}$$

Analog zur 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel können wir die orthogonalen Längenelemente in der 3D-Oberfläche der vierdimensionalen Kugel aufschreiben.

$$d\ell_\psi = R\cdot d\psi \tag{21.3.8a}$$

$$d\ell_\vartheta = R\cdot\sin\psi d\vartheta \tag{21.3.8b}$$

$$d\ell_\varphi = R\cdot\sin\psi\sin\vartheta d\varphi \tag{21.3.8c}$$

Wieder ist der Radius der 4D-Kugel R ein SKALENFAKTOR. Das Volumen der 3D-Oberfläche ist (analog zur Behandlung der 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel)

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} R^3\sin^2\psi\sin\vartheta d\psi d\vartheta d\varphi = 2\pi^2 R^3 \tag{21.3.9}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Das Linienelement (Abstand zweier Punkte) ist auf der Oberfläche der 4D-Kugel

$$d\ell^2 = d\ell_\psi^2 + d\ell_\vartheta^2 + d\ell_\varphi^2 = R^2\left[d\psi^2 + \sin^2\psi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \tag{21.3.10}$$

Wie bei der 2D-Oberfläche einer 3D-Kugel ist $r = R\sin\psi$ mit $r \ll R$ auf der 3D-Oberfläche der 4D-Kugel ein «Kreis», in Wirklichkeit eine 3D-Kugel, mit der Oberfläche $A = 4\pi r^2$.
Bei einer Änderung des Skalenfaktors R ändert sich r, der Radius der 3D-Kugel wie

$$r = \frac{R}{R_0}r_0 \tag{21.3.11}$$

Analog zum Fall der 2D-Oberfläche der 3D-Kugel erhalten wir aus

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2} \tag{21.3.12}$$

und

$$r = R\sin\psi \Longrightarrow dr = R\cos\psi d\psi \tag{21.3.13}$$

auf der 3D-Kugeloberfläche der 4D-Kugel für das Längenelement die Beziehungen

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2\left[d\psi^2 + \sin^2\psi\cdot\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \\ &= R^2\left[\frac{dr^2}{R^2\cos^2\psi} + \frac{r^2}{R^2}\cdot\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right] \end{aligned} \tag{21.3.14a}$$

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= R^2\left[\frac{dr^2}{R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} + \frac{r^2}{R^2}\cdot\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)^2\right] \\ &= \frac{dr^2}{\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{21.3.14b}$$

(21.3.14c)

Wieder ändert sich hier $d\ell$ mit R ohne dass dr sich ändern muss. Wir haben also einen Mechanismus gefunden, wie mit einem Skalenfaktor Abstände verändert werden können, ohne dass sich die Form der Metrik ändern muss.

21.3.2.1. Grenzwerte

Aus der im vorherigen Abschnitt21.3.2 haben wir eine Metrik. Wir hatten dort angenommen, dass der 3D-Raum auf der Oberfläche einer 4D-Kugel sei. Es könnte aber auch sein, dass wir uns auf einer 4D-Posaune befinden.
Lassen wir $R \to \infty$ gehen erhalten wir die euklidische Metrik eines flachen Raumes zurück.

$$\lim_{R\to\infty} d\ell^2 = dr^2 + r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{21.3.15}$$

In unserer realen Welt ist aber dieser Grenzwert offensichtlich nicht realisiert. Das heisst, wir haben abhängig vom Vorzeichen von $\kappa = R^{-2}$ (komplexe Zahlen sind in der Physik üblich) unterschiedliche Situationen.

Wir definieren die Krümmung des Raumes als

$$\kappa = R^{-2} \tag{21.3.16}$$

und erhalten die Fälle:

Fall $\kappa > 0$: ein sphärisches oder elliptisches Universum

Fall $\kappa = 0$: ein flaches Universum

Fall $\kappa < 0$: ein hyperbolisches Universum

Aus den Beobachtungen von Edwin Hubble wissen wir, dass alle weiter entfernten Galaxien sich von uns wegbewegen. Das heisst mit zunehmender Zeit nimm der Skalenfaktor R zu. Das heisst rückwärts betrachtet, dass es eine Zeit gegeben haben muss, bei der der Skalenfaktor sehr klein oder gar null gewesen sein muss.

$$\lim_{R\to 0} d\ell^2 = r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right] \tag{21.3.17}$$

Der Abstand wird unabhängig von dr und hängt über r nur noch von $d\vartheta$ und $d\varphi$ ab. Es kann geschlossen werden, dass beim Urknall kein Punkt ausgezeichnet ist.

Der gekrümmte 3D-Raum eingebettet in eine 4D-Welt hat ein Volumen von $2\pi^2R^3$, aber er hat keine Begrenzung.

21.3.3. Quasare

Unter den weit entfernten Objekten am Rande des beobachtbaren Universums gibt es Quasare und aktive Galaxien.

Mit den ersten Radioteleskopen wurden extrem starke Radioquellen im All gefunden. Diese wurden Quasi-Stellar Radio Source (QUASAR) genannt. Es gelang dann optische Objekte an der gleichen Stelle zu finden. Das optische Objekt hatte eine sehr schwache relative Magnitude $m = 16$) und gleichzeitig ein stark ausgeschmiertes optisches Spektrum, zuerst ohne erkennbare Linien.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

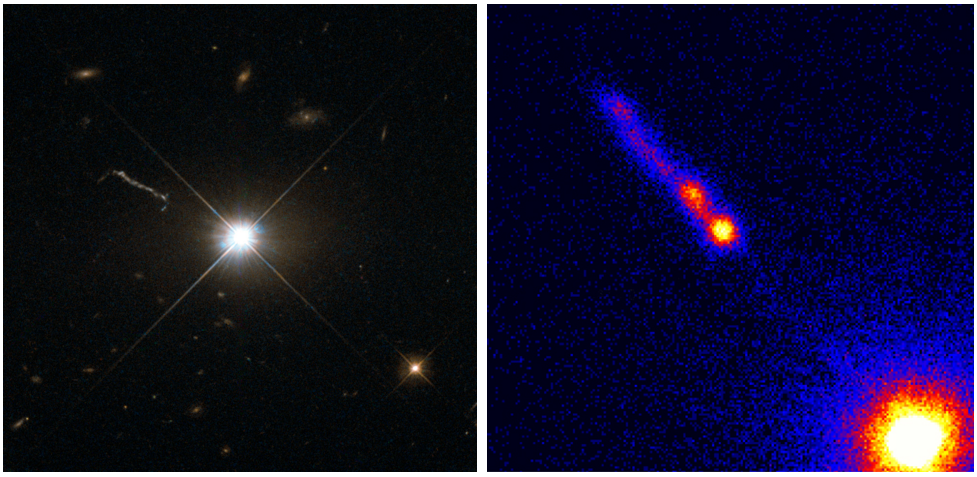


Abb. 21.15.: Links: Bild im sichtbaren Spektralbereich des Quasars 3C273, aufgenommen durch das Hubble-Teleskop (Credit: ESA/Hubble & NASA). Rechts: Röntgenaufnahme des Quasars 3C273 durch Chandra (Bildfeld 24 ″), (Credit: NASA/CXC/SAO/H.Marshall et al.)

Abbildung 21.15 zeigt eine heutige Aufnahme eines der frühen bekannten Quasars, 3C273. Bei ihm stellte es sich heraus, dass die verschwommenen Linien als Wasserstofflinien angesehen werden konnten, wenn der Rotverschiebungsparameter $z = 0.158$ (nach [CO07]) gesetzt wurde. Daraus folgt, dass $v_{3C273} = 0.146c$ ist. Der Jet aus dem Quasar in Abbildung 21.15 reicht etwa $39h^{-1}$ kpc weit hinaus.

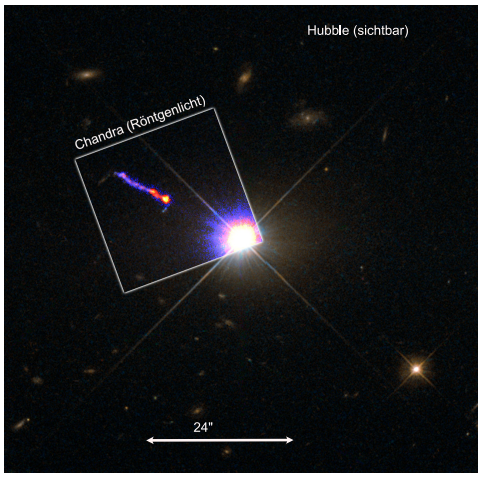


Abb. 21.16.: Bild im sichtbaren Spektralbereich des Quasars 3C273, aufgenommen durch das Hubble-Teleskop (Credit: ESA/Hubble & NASA). überlagert mit einer Röntgenaufnahme durch Chandra , (Credit: NASA/CXC/SAO/H.Marshall et al.)

Abbildung 21.16 zeigt das Röntgenbild überlagert mit dem sichtbaren Bild. Die intensive Röntgenstrahlung deutet auf ein sehr aktives Objekt hin. Belinda Wilkens [WE87] untersuchten die Emission weicher Röntgenstrahlen und konnten eine universelle Charakteristik finden.

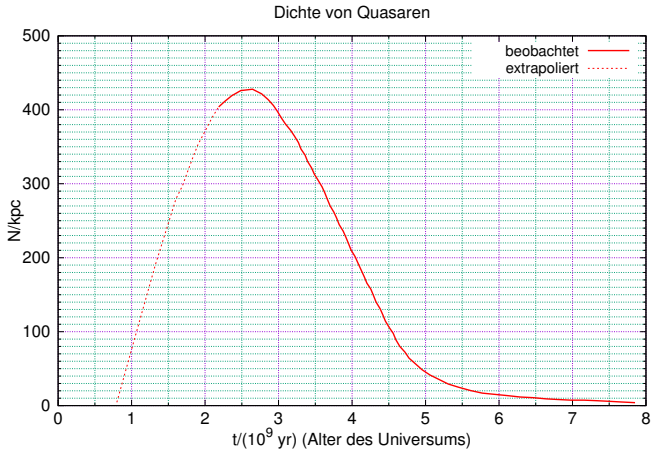


Abb. 21.17.: Dichte von Quasaren als Funktion des Alters des Universums (nach Demtröder Band 4, Abb 12.25 [Dem10]).

Abbildung 21.17 gibt die Anzahl der Quasare als Funktion des Alters an. Wenn wir annehmen, dass das Universum $13 \cdot 10^9$ a alt ist, gibt $(13 \cdot 10^9 \text{ a} - \text{Alter})$ die Distanz an.

Heute kennt man über 46 000 Quasare [CO07, Kap. 28.1, p. 1099]. Quasare werden heute häufig auch Quasi-Stellar Object (QSO) genannt.

21.3.4. Aktive Galaxien

Ein Teil der Quasare sind Galaxien mit einem aktiven Kern, diese werden im Englischen Active Galactic Nucleus (AGN) genannt. Wie alle Galaxien haben auch AKTIVE GALAXIEN ein supermassives schwarzes Loch im Zentrum. Anders als zum Beispiel in der Milchstrasse saugt das schwarze Loch einer aktiven Galaxie viel Masse pro Zeiteinheit an. Dies führt zu starken Beschleunigungen und zur Emission von Radiowellen, sichtbarem Licht und Röntgenstrahlung. Unter [NG16] finden Sie eine englischsprachige Beschreibung des Phänomens. [NG16] sagt, dass der Fall von Materie in ein schwarzes Loch zu einer AKKRETIONSSCHEIBE führt. Gleichzeitig gibt es senkrecht zu dieser Ebene auf beiden Seiten einen Jet mit hoher Geschwindigkeit ausgestossenen Materials (siehe Abb 21.18).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

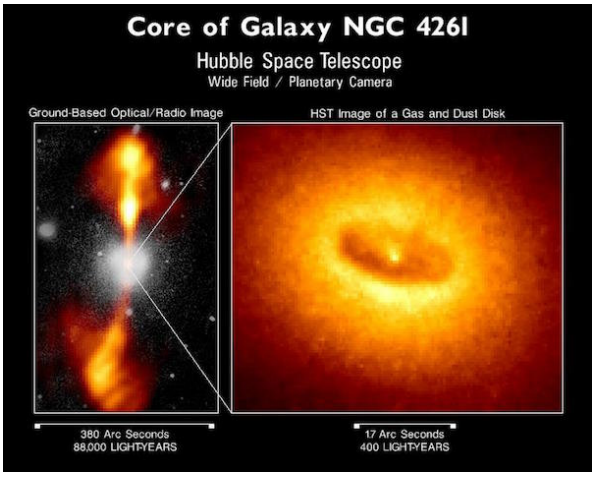


Abb. 21.18.: Links ein optisches Bild der Galaxie NGC 4261 überlagert mit dem Radiowellenbild (weiss). Sichtbar im optischen Bild ist der Jet. Rechts das Bild der Galaxie mit dem Hubble-Teleskop (Credit: NRAO, Cal Tech, Walter Jaffe/Leiden Observatory, Holland Ford/JHU/STScI, and NASA),

Abbildung 21.19 zeigt die Galaxie NGC 4151 im sichtbaren und im Röntgenlicht. Das Röntgenlicht zeigt die Lage des Kerns dieser aktiven Galaxie.

Abb. 21.19.: Überlagerung eines Bildes im sichtbaren Spektrum der Spiralgalaxie NGC 4151 mit einem Röntgenbild von CHANDRA (blau). (Credit: X-ray: NASA/CXC/CfA/J.Wang et al.; Optical: Isaac Newton Group of Telescopes, La Palma/Jacobus Kapteyn Telescope, Radio: NSF/NRAO/VLA)

Abbildung 21.20 zeigt eine Übersichtskarte der bekannten aktiven Galaxien, gemessen mit dem FERMI GAMMA-RAY SPACE TELESCOPE. Der Helle Bereich ist die galaktische Ebene. Oben leicht rechts von der Mitte findet sich der erste entdeckte Quasar 3C273. Die Kreise markieren die aktivsten Galaxien.

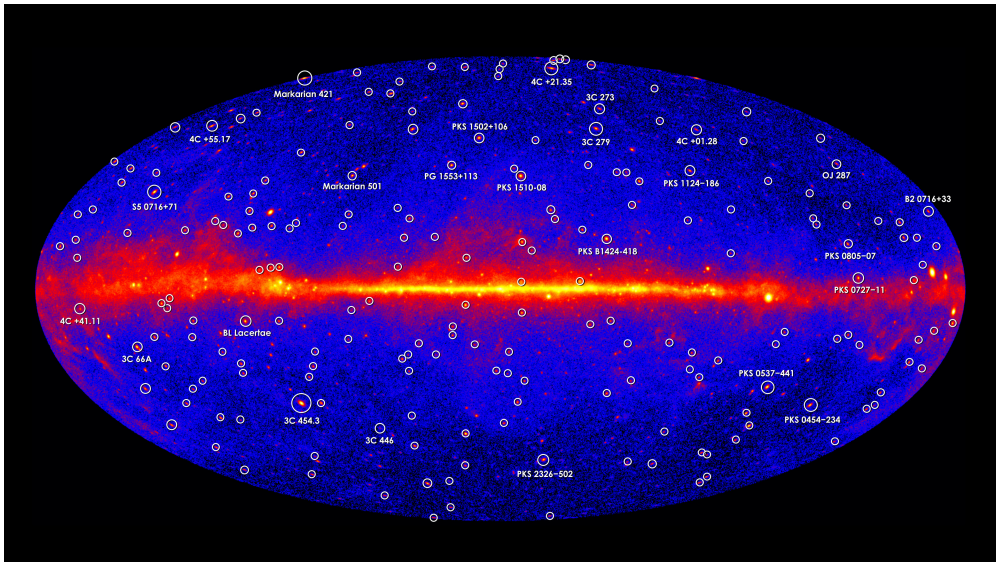


Abb. 21.20.: Übersichtskarte der bekannten aktiven Galaxien gemessen mit dem FERMI GAMMA-RAY SPACE TELESCOPE (Credit: NASA/DOE/Fermi LAT Collaboration).

21.3.5. Galaxienhaufen

Auf grosser Skala im Universum treten Galaxien nie alleine auf. So wie die Andromeda-Galaxie und unsere Milchstrasse Teil der LOKALEN GRUPPE sind, sind andere Galaxien Teil eines Galaxienhaufens (siehe Abb. 21.21).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

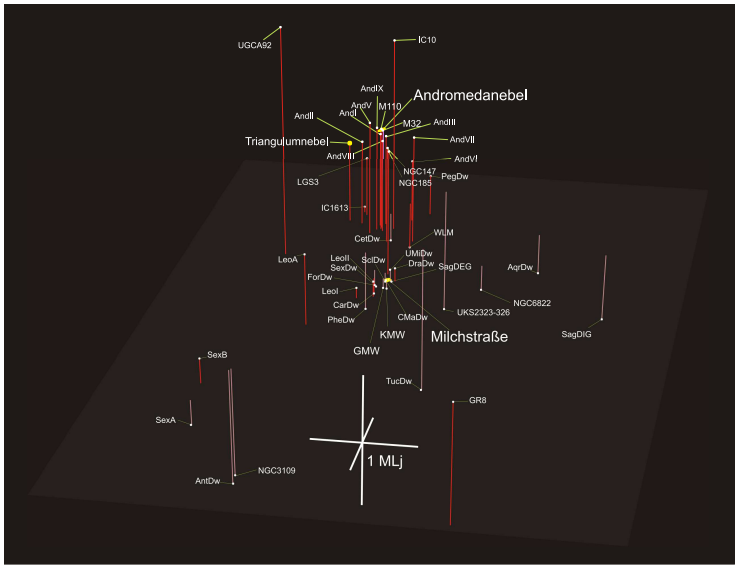


Abb. 21.21.: Räumliche Darstellung der lokalen Gruppe mit den beiden dominierenden Galaxien der Milchstrasse und der Andromeda-Galaxie (Credit: CWitte, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons, Lokale_gruppe.svg).

Die beiden grössten Galaxien der LOKALEN GRUPPE sind die ANDROMEDA-GALAXIE und die MILCHSTRASSE. Die lokale Gruppe beinhaltet alle Objekte im Umkreis von ($5 \cdot 10^6$ bis $8 \cdot 10^6$) ly. Sie hat die Form eines Ellipsoids. 95 % der sichtbaren Masse befindet sich in den beiden grössten Galaxien, der Milchstrasse und der Andromeda-Galaxie. Es wird angenommen, dass die lokale Gruppe gravitativ gebunden ist. Die Andromeda-Galaxie bewegt sich auf die Milchstrasse zu, oder umgekehrt. Dies ist ein Zeichen für die Wirkung der Gravitation. Auf dem Weg könnten kleiner Galaxien oder Sternhaufen in die beiden grossen Galaxien integriert werden. L. L. Watkins u. a. [Wat+19] beschreibt in dem Artikel die Abschätzung der Masse der Milchstrasse unter Berücksichtigung der dunklen Materie. Dazu wurde die Bewegung der milchstrassennahen Begleitsternhaufen ausgewertet. Die Keplergesetze erlauben dann eine Abschätzung der Masse. Das Resultat ist $1.5 \cdot 10^9$ $M_\odot$. Es wird vermutet, dass die Andromeda-Galaxie etwa die gleiche Masse hat. Weiter kann die lokale Gruppe in mehrere Untergruppen aufgeteilt werden. Diese beinhalten jeweils Galaxien und Sternhaufen, die nahe beieinander sind.

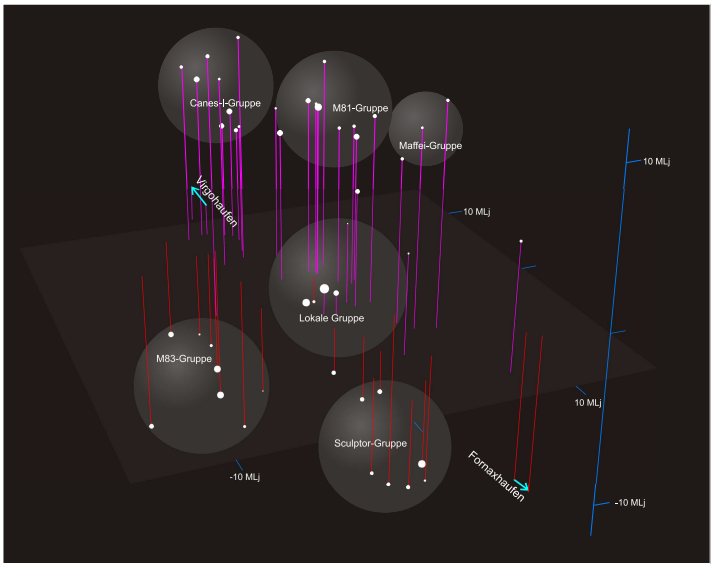


Abb. 21.22.: Galaxiengruppen in der Nachbarschaft der lokalen Gruppe (Credit: CWitte, CC BY-SA 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>, via Wikimedia Commons, Lokale_Gruppe_3D_Nachbarschaft.svg).

In der Nachbarschaft der lokalen Gruppe gibt es weitere Galaxienhaufen (siehe Abb. 21.22). Galaxienhaufen verändern sich auch auf der Zeitskala des Universums nur langsam (siehe auch [NG21]). Sie sind ein Abbild der Fluktuationen im frühen Universum. Während Galaxien durch Supernovaexplosionen Gas verlieren scheinen Cluster dieses zu binden und nicht entweichen zu lassen. Durch die Analyse der Gaszusammensetzung kann die Geschichte der Entstehung der Elemente rekonstruiert werden [NG21]. Die die Galaxienhaufen bindende Gravitationskraft kommt zum überwiegenden Teil von nicht sichtbarer Materie, also von im Sichtbaren nicht detektierbaren, im Röntgenbereich aber messbaren Gaswolken (mehr Masse als alle Sterne zusammen) zwischen den Galaxien und von noch mehr Masse in Form von DUNKLER MATERIE.
Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 27.3.] haben GALAXIENGRUPPEN die folgenden Eigenschaften:

- Sie haben in der Regel 50 oder weniger Mitglieder (Galaxien).
- Ihr Durchmesser ist $\approx 1.4\ \mathrm{h}^{-1}\,\mathrm{Mpc}$.
- Die Geschwindigkeit der Mitglieder untereinander variiert um 150 km s^{-1}.
- Die Masse des gesamten Haufens ist um $2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{h}^{-1}\,\mathrm{M}_\odot$ abgeleitet aus dem VIRIALTHEOREM (siehe Abschnitt 17.2).
- Das Verhältnis von Masse zu Luminosität ist $\approx 260\ \mathrm{h}\,\frac{M_\odot}{L_\odot}$.

GALAXIENHAUFEN andererseits haben nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 27.3.] diese Eigenschaften:

- Sie haben in der Regel 50 bis $>$ 1000 Mitglieder (Galaxien).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

- Ihr Durchmesser ist $\approx 6\ \mathrm{h}^{-1}\,\mathrm{Mpc}$.
- Die Geschwindigkeit der Mitglieder untereinander variiert um (800 bis 1000) $\mathrm{km\,s}^{-1}$.
- Die Masse des gesamten Haufens ist um $1 \cdot 10^{15}\ \mathrm{h}^{-1}\,\mathrm{M}_\odot$ abgeleitet aus dem Virialtheorem (siehe Abschnitt 17.2).
- Das Verhältnis von Masse zu Luminosität ist $\approx 400\ \mathrm{h}\,\frac{M_\odot}{L_\odot}$.

Weiter werden auch Superhaufen beobachtet, also Haufen von Galaxienhaufen.

21.3.6. Dunkle Materie

Eine wichtige Frage ist die nach der Masse des Universums. Aus der Masse und dem Energiegehalt kann berechnet werden, ob die Grösse des Universums immer zunimmt, ob es statisch ist oder ob es wieder kollabieren kann. Neta Bahcall beschäftigte sich mit der Masse des Universums. Anhand von Daten des Hubble-Space-Teleskops und weiteren Daten berechnete sie einen Schätzwert für die Masse des Universums[Bah16; BB03].

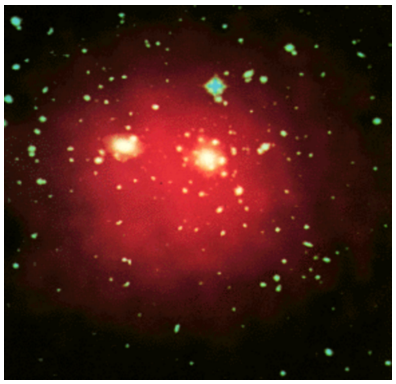


Abb. 21.23.: Coma-Galaxienhaufen (Coma-Cluster) mit blau dem sichtbaren Licht und rot dem Röntgenlicht (Credit: Einstein satellite X-ray image, Palomar Sky Survey optical image).

Der Astronom Fritz Zwicky untersuchte im Jahre 1933 den Coma-Galaxienhaufen. Abbildung 21.23 zeigt diesen im Röntgenlicht und im sichtbaren Licht. Fritz Zwicky schloss aus der Bewegung unter Zuhilfenahme des Virialtheorems, dass sehr viel mehr Masse vorhanden sein müsse als durch die Beobachtung angedeutet. Er entdeckte die dunkle Materie. Dunkle Materie sind keine der in diesem Skript diskutierten Elementarteilchen. Die genau Natur ist nicht klar. Aussichtsreiche Kandidaten sind Weakly Interacting Massive Particle (WIMP)s, deutsch: schwach wechselwirkende schwere Teilchen.

21.3.7. Dunkle Energie

Die aus der Bewegung von Galaxien oder Galaxienhaufen abgeleitete dunkle Materie (Siehe Abschnitte 20.4.6.1 und 21.3.6) bewirkt grosse Gravitationskräfte, die

die aus Modellen berechnete Ausdehnung des Universums sehr viel kleiner ausfallen lässt als beobachtet. Die DUNKLE ENERGIE muss postuliert werden, damit der Gravitationsdruck des Universums kompensiert werden kann und es eine Gesamtenergie haben kann, die mit dem gemessenen Zeitverlauf übereinstimmt.
J. Stachel [Sta14] hat eine lesbare Zusammenfassung des Themas veröffentlicht. Abbildungen 21.24 und 21.25 zeigen einen Vergleich gemessener Daten aus A. Conley u. a. [Con+10] mit vier Modellen

de Sitter-Modell mit 100 % dunkler Energie. Willem de Sitter hat ein maximal symmetrisches Universum mit konstanter positiver Krümmung vorgeschlagen.

Einstein-de Sitter-Modell Das Einstein-de Sitter-Modell von Albert Einstein und Willem de Sitter hat eine verschwindende Krümmung. Die kosmologische Konstante ist auch null.

Milne-Modell nach Edward Milne. Dieses Modell beruht auf der speziellen Relativitätstheorie und macht keine Annahmen. Es dient als Referenz.

ΛCDM-Modell Diese Modell, auch das Standard-Modell der Kosmologie genannt, beschreibt das Universum mit sechs Parametern.

- H_0 der Hubble-Konstante
- Ω_b dem Anteil der baryonischen Materie an der Gesamtenergiedichte inklusive dunkler Materie und dunkler Energie)
- Ω_m dem Anteil der Materie (baryonische und dunkle Materie) an der Gesamtenergiedichte inklusive dunkler Materie und dunkler Energie)
- τ der optischen Dichte bis zum Zeitpunkt der Reionisierung
- A_S der Amplitude der Krümmungsfluktuation der skalaren Komponente der ursprünglichen Schwankungen
- n_s der spektrale Index der skalaren Komponente der ursprünglichen Schwankungen

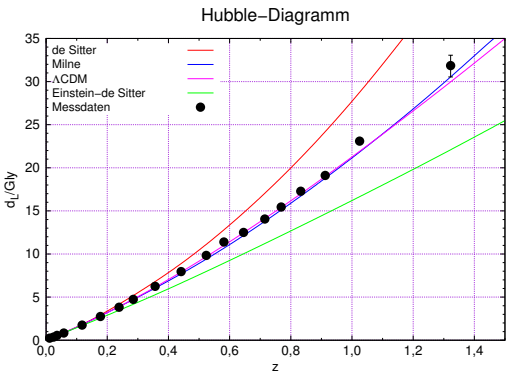


Abb. 21.24.: Dunkle Energie und die Ausdehnung des Universums (Daten aus [Sta14] und [Con+10]).

Die Abbildung 21.25 zeigt die Messdaten als Abweichung vom MILNE-MODELL der Entwicklung des Kosmos.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

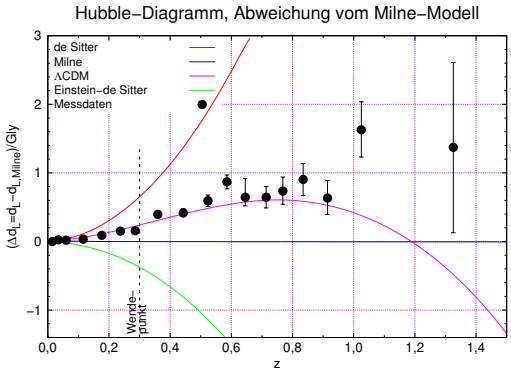


Abb. 21.25.: Dunkle Energie und die Ausdehnung des Universums, Abweichung vom Milne-Modell (Daten aus [Sta14] und [Con+10]).

21.4. Kosmologie

Das Teilgebiet der Kosmologie beschäftigt sich mit der Entwicklung des Universums von Anbeginn. Sie versucht die Gesetze dieser Entwicklung zu ergründen und letztlich auch Voraussagen zur Zukunft zu machen. Die Folien *A Quick Review of Cosmology:The Geometry of Space, Dark Matter, and theFormation of Structure* von H.-W. Rix [Rix22] geben eine gute und kompakte erste Übersicht.

21.4.1. Big-Bang-Theorie

Die Big-Bang-Theorie (siehe z.B. „Relativistic Cosmology with an Introduction to Inflation“ von M. Z. Mughal; I. Ahmad und J. L. G. Guirao [MAG21]) schliesst aus den Beoachtungen von Edwin Hubble, dass das Universum zu einem Zeitpunkt vor $(13\cdot10^9\text{-}14\cdot10^9)$ a, etwas genauer etwa $13.8\cdot10^9$ a begonnen hat. Da das Universum im Prinzip in einem Punkt eingeschlossen war, muss es eine hohe Nullpunktsenergie gehabt haben. Kurz nach der Entstehung war die Temperatur extrem heiss

Anfangszeit bis etwa 4 min wurden die Elemente ${}^1_1\mathrm{H}$, ${}^2_1\mathrm{H}$, ${}^4_2\mathrm{He}$ und etwas Li gebildet.

Schwerere Elemente bis Fe und Ni werden durch Fusion in Sternen gebildet.

Noch schwerere Elemente benötigen Supernovae zur Entstehung.

Entkopplung Etwa nach $5\cdot10^5$ a entkoppeln Licht und Materie. Bis dahin existierten nur gekoppelte Strahlungs-Materie-Quantenzustände. Danach wechselwirkt Licht nur noch schwach mit Materie (Streuung, Absorption). Es bilden sich neutrale Moleküle.

Galaxien Nach etwa $(1\cdot10^7\text{-}1\cdot10^8)$ a bilden sich die ersten Galaxien.

Edwin Hubble stellte das Gesetz

$$v = H\cdot r \quad \text{mit} \quad H = 73(7)\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}} \tag{21.4.1}$$

auf. Das heisst, dass die frühen Galaxien in sehr grosser Distanz beobachtet werden können. Das *James Webb Space Telescope* [Nas22] detektiert deshalb Infrarotstrahlung. Damit können diese frühen Galaxien beobachtet werden.
Die Nobelpreisträger Arno Penzias und Robert Wilson („A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.“ [PW65]) fanden bei einer Mikrowellenantenne mit gekühltem Empfänger eine Rauschtemperatur von 3 K. Diese war nicht durch die Physik des Gerätes zu erklären. In einem gleichzeitig erschienen Artikel „Cosmic Black-Body Radiation.“ erklären R. H. Dicke u. a. [Dic+65] das Phänomen als die HINTERGRUNDSSTRAHLUNG, die vom Urknall oder Big-Bang übrig geblieben ist.

21.4.2. Anfangsgrösse des Universums

Im folgenden soll die Antwort auf die Frage «Wie gross war das Universum an Anfang?» skizziert werden. Der Artikel „Topics in Cosmology—Clearly Explained by Means of Simple Examples“ von J. de Haro und E. Elizalde [HE22] gibt eine Übersicht über die verschiedenen möglichen Ideen.
Die Energiedichte der HINTERGRUNDSTRAHLUNG kann wie folgt berechnet werden: Die gesamte Energiedichte (Integral über das Planck-Spektrum, nach Max Planck) ist

$$w(T) = \frac{4\pi^5 k^4}{15h^3c^3}T^4 \tag{21.4.2}$$

In Zahlen ist die gesamte Energiedichte bei 2.7 K

$$w(2.7\text{ K}) = 4 \cdot 10^{-14}\text{ Wsm}^{-3} \tag{21.4.3}$$

Aus der Energiedichte kann nach Albert Einstein eine Massendichte berechnet werden:

$$\rho = \frac{w(T)}{c^2} = 4.5 \cdot 10^{-31}\text{ kgm}^{-3} < \rho(R_0) \approx 4 \cdot 10^{-28}\text{ kgm}^{-3} \tag{21.4.4}$$

Sei $\rho(R_0)$ die heutige Massendichte des Universums bei einer Krümmung $R_0 \approx 1 \cdot 10^{26}$ m. Dann gilt

$$\rho(R) \propto R^{-3}w(R) \qquad \propto R^{-4} \tag{21.4.5a}$$

für die Energiedichte und die Massendichte. Grund für diesen Unterschied ist die DOPPLERVERSCHIEBUNG.
Aus den aktuellen Werten $\rho(R_s) = \rho(R_0)\left(\frac{R_0}{R_s}\right)^3 = w(R_s)c^{-2} = w(R_0)\left(\frac{R_0}{R_s}\right)^4 c^{-2}$ können wir zurück rechnen und erhalten wir für den Wert des Krümmungsradius' beim Übergang von der Strahlungs- zur Massendominanz

$$R_s = 1.125 \cdot 10^7\text{ ly} \tag{21.4.6}$$

Bei kleinerem Durchmesser ist das Weltall strahlungsdominiert, heute bei einem sehr viel grösseren Durchmesser ist es massedominiert.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

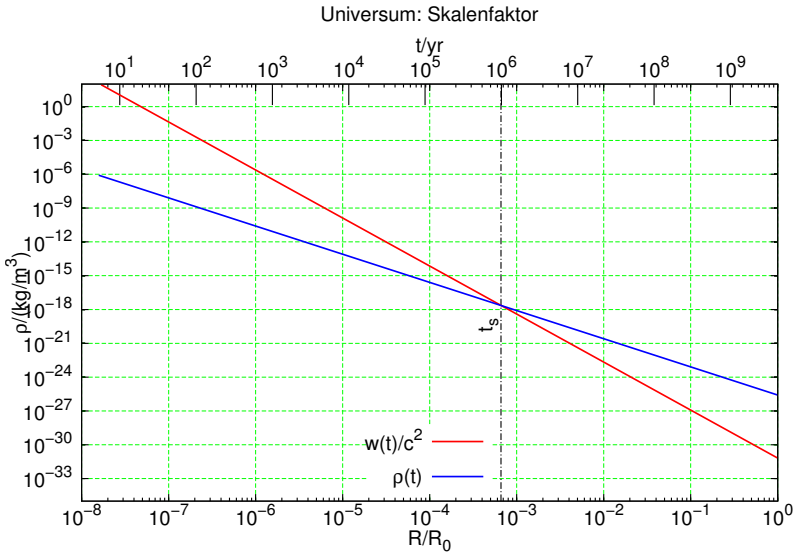


Abb. 21.26.: Massendichte und Skalenfaktor (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.5]).

Abbildung 21.26 zeigt die Massendichte als Funktion des Skalenfaktors. Vor der Zeit t_s dominiert die Energiedichte, danach die Massendichte.

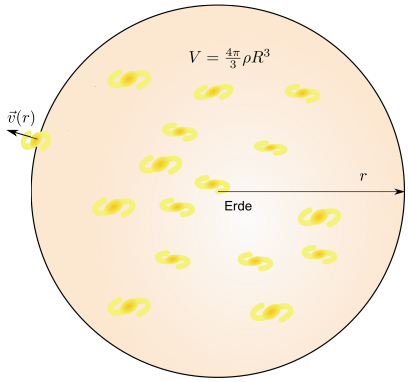


Abb. 21.27.: Volumen und Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien (nach [Dem10, Abb. 12.6]).

Abbildung 21.27 zeigt eine Skizze des Universums und der mit dem Abstand zunehmenden Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien. Hier soll der Hubble-Parameter und kritische Dichte miteinander verknüpft werden. Wir betrachten eine Kugelschale von Galaxien im Abstand r. Die kinetische Energie kann aus dem Hubble-Gesetz berechnet werden.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH_0^2r^2 \tag{21.4.7}$$

Die kinetische Energie soll über das Gauss'sche Gesetz mit der potentiellen Energie der eingeschlossenen Masse verknüpft werden:

$$E_{pot} = -G\frac{m \cdot M_{innerhalb}(r)}{r} = -G\frac{4}{3}\pi m\rho r^2 \tag{21.4.8}$$

Wir erhalten die Gesamtenergie

$$E = mr^2 \left[\frac{1}{2}H_0^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho\right] \tag{21.4.9}$$

Wenn die eckige Klammer das Vorzeichen wechselt, ist die kritische Massendichte ($E = 0$) erreicht. Der Inhalt der eckigen Klammer muss null sein. Die kritische Massendichte ist dann

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi}\frac{H_0^2}{G} \tag{21.4.10}$$

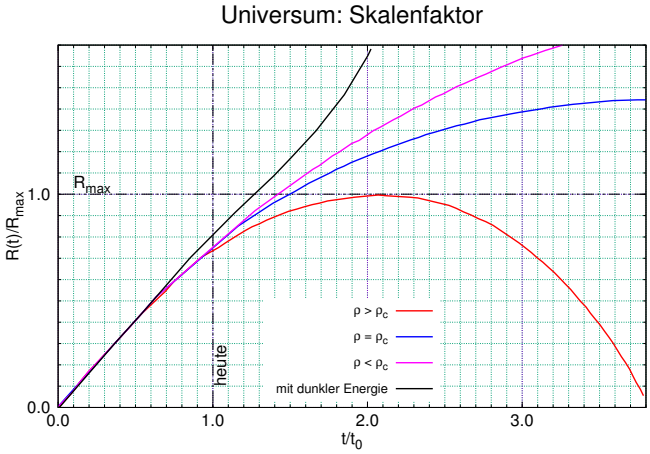


Abb. 21.28.: Zeitabhängigkeit des Skalenparameters (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.7]).

Abbildung 21.28 zeigt die Zeitabhängigkeit des Skalenparameters Massendichte ρ im Vergleich zur kritischen Massendichte ρ_c.

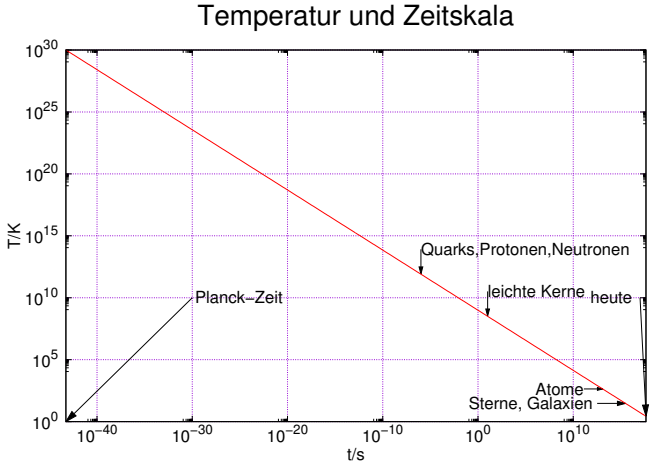


Abb. 21.29.: Zeitskalen in der Astronomie (nach Spatschek, Astrophysik [Spa03] und Ellwanger, Vom Universum zu den Elementarteilchen [Ell15])

Die Physik des Universums ändert sich logarithmisch mit der Zeit vom Urknall.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Abbildung 21.29 zeigt die relevanten Zeitskalen. Sie impliziert auch, dass auf dieser Skale der Nullpunkt nicht erreichbar ist. Die Definition der PLANCK-ZEIT ist in 21.4.3 und Gleichung (21.4.13) gegeben.

Zeitabschnitt	Zeit / s	Temperatur / K	Zustand
Planck-Ära	$t = 0$	?	Urknall Alle 4 Wechselwirkungen vereinigt
GUT-Ära n	$t = 10^{-43} \ldots 10^{-35}$	$T = 10^{32}$	Gravitation entkoppelt (Grand Unification)
Inflationäre Phase	$t = 10^{-35} \ldots 10^{-32}$	$T = 10^{28}$	Starke und elektroschwache Wechselwirkung separieren
Quark-Ära	$t = 10^{-32} \ldots 10^{-12}$	$T = 10^{25}$	Quark-Gluon-Plasma aus Quarks, Leptonen, Photonen
Ende Quark-Ära	$t = 10^{-12}$		
Hadronen-Ära	$t = 10^{-7} \ldots 10^{-4}$		p, n, $\overline{p}$, $\overline{n}$ gebildet, ν entkoppelt
Leptonen-Ära	$t = 10^{-4} \ldots 1$	$T = 10^{12}$	e^- und e^+ zerstrahlen, μ zerfallen
Ende Leptonen-Ära	$t = 1$	$T = 10^{10}$	
Nukleonsynthese	$t = 10$	$T = 3 \cdot 10^9$	He-, D-, Li-Kerne gebildet
Ende Nukleosynthese	$t = 180$	$T = 10^9$	

Tab. 21.2.: Zeittafel des Universums (nach Demtröder [Dem10, Abb 12.9]).

Tabelle 21.2 zeigt die Phasen der Entstehung der Elementarteilchen zu Beginn des Universums. Einen Überblick über die Synthese von Elementarteilchen gibt „Cosmological particle production: a review“ von L. H. Ford [For21].

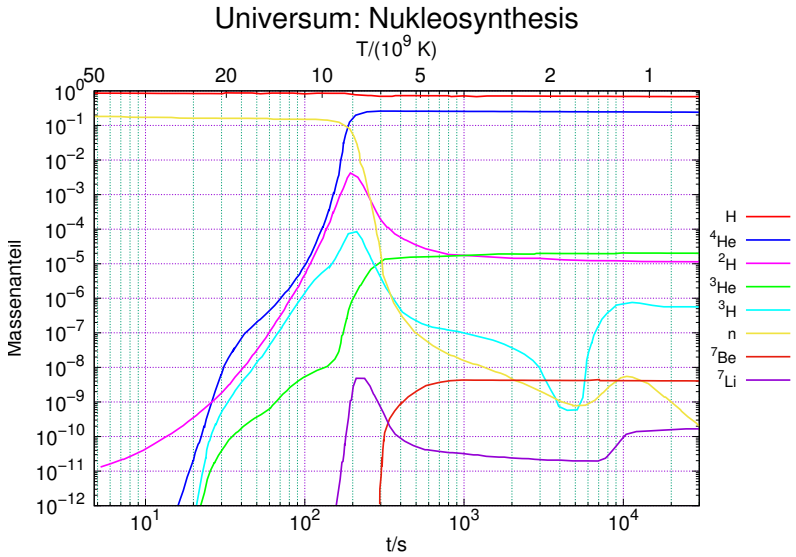


Abb. 21.30.: Häufigkeit der leichten Elemente (Daten von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 3]).

Abbildung 21.30 zeigt die Zusammensetzung von Elementen in der Frühzeit des Universums. Die Daten beruhen auf der Arbeit „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 3].

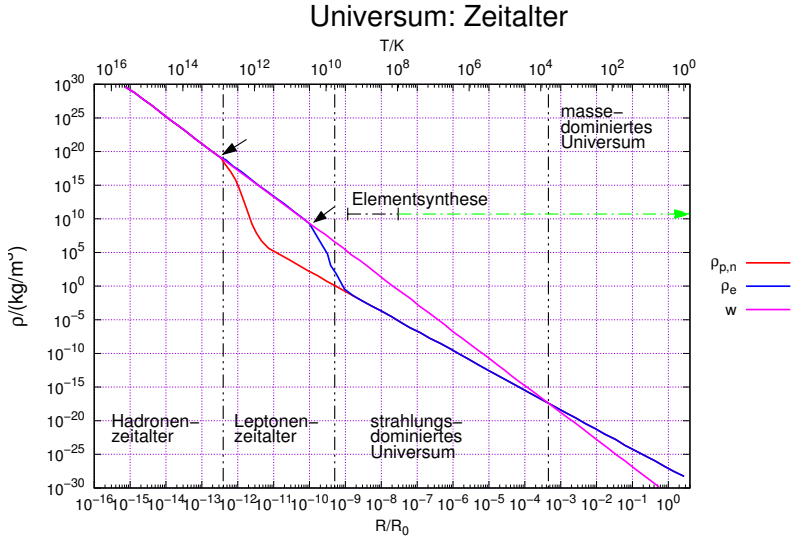


Abb. 21.31.: Epochen im Universum (nach [Dem10, Abb. 12.10], Daten von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 1])).

Abbildung 21.31 ist eine Darstellung der verschiedenen Epochen des Universums nach „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“ von R. V. Wagoner; W. A. Fowler und F. Hoyle [WFH67, Fig. 1]. Die Daten korrespondieren mit der Tabelle 21.2.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

21.4.3. Das frühe Universum

Das frühe Universum wird durch das Standardmodell und die Weiterentwicklung Inflation beschrieben.

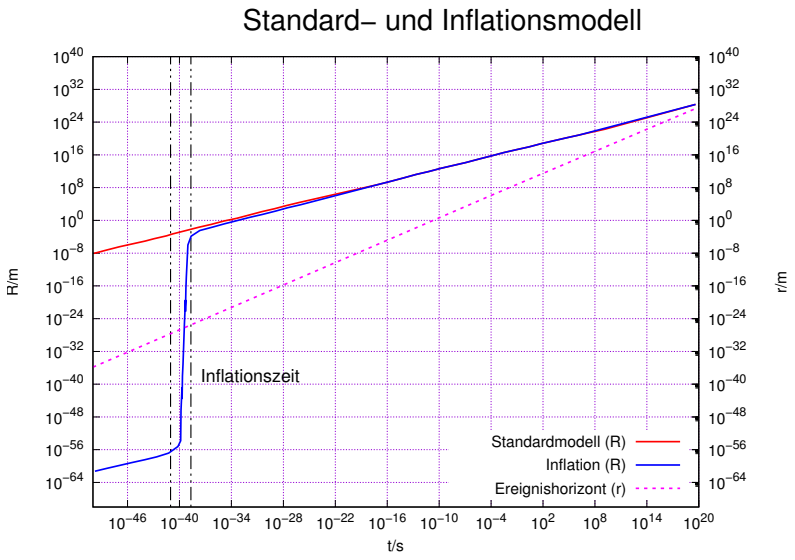


Abb. 21.32.: Standardmodell und Inflationsmodell (nach [Dem10, Abb. 12.17]).

Das Standardmodell der Kosmologie hat Schwierigkeiten die Zusammensetzung des frühen Universums, die beobachteten Geschwindigkeiten und die Expansionsrate zu erklären. Deshalb wurde ein neues Modell mit einer Phase starker Expansion entwickelt. Ein neuerer Überblick darüber findet sich in von J. A. Vazquez; L. E. Padilla und T. Matos [VPM20].
Wichtig sind die Elementarteilchen, wie sie im Abschnitt beschrieben werden. Für das Standardmodell gibt es nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07] drei Kategorien:

Leptonen Leptonen sind die geladenen Teilchen $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$ und $\tau^{\pm}$, die neutralen massearmen Neutrinos ν_e, ν_μ und ν_τ sowie die dazugehörigen Antineutrinos $\overline{\nu}_e$, $\overline{\nu}_\mu$ und $\overline{\nu}_\tau$. Alle Leptonen sind Fermionen (Name nach Enrico Fermi).

Quarks Es gibt sechs Sorten von Quarks u, d, s, c, b und t sowie die Antiteilchen. Jede Quarkart hat drei mögliche Farbladungen. Quarks sind Fermionen. Quarks bilden die Familie der Hadronen. Baryonen wie das Proton werden aus drei Quarks gebildet; sie sind Fermionen. Mesonen werden aus zwei Quarks gebildet, sie sind Bosonen.

Austauschteilchen Austauschteilchen vermitteln Kraftwechselwirkungen. Es gibt das Photon für die elektromagnetische Wechselwirkung, acht Arten von Gluonen für die starke Wechselwirkung, drei Vektoreichbosonen ($W^{\pm}$ und Z^0) für die schwache Wechselwirkung sowie das skalare Higgs-BosonBoson, das die Massen erzeugt. Alle Austauschteilchen sind Bosonen.

Elementar-Teilchen	Anzahl Arten	Anzahl Antiteilchen n_{anti}	Anzahl Spinzustände n_{spin}	Freiheitsgrade g	Fermionen-Vorfaktor f	Beitrag zu g_*
Photon	1	1	2	2	1	2.00
Geladene Leptonen	3	2	2	12	$\frac{7}{8}$	10.50
Neutrinos	3	2	1	6	$\frac{7}{8}$	5.25
Quarks	18	2	2	72	$\frac{7}{8}$	63.00
Gluonen	8	1	2	16	1	16.00
Eichbosonen	3	1	3	9	1	9.00
skalares Higgs-Boson	1	1	1	1	1	1.00

Tab. 21.3.: Elementarteilchen im Standardmodell (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Tab. 30.1]).

Nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07, Kap. 30.1] wird g_* durch die Gleichung

$$g_* = \sum_{i(\text{Bosonen})} g_i + \frac{7}{8} \sum_{j(\text{Fermionen})} g_j \left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 \tag{21.4.11}$$

gegeben. Dabei dürfen nur relativistische Teilchen verwendet werden. Der Faktor $\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4 = \left(\frac{4}{11}\right)^{3/4}$ wird nur für Neutrinos verwendet und nur wenn die Temperatur unter $k_B T \approx 3$ MeV fällt. Gleichung (21.4.11) wird benötigt, um die Temperatur als Funktion der Zeit zu berechnen [CO07, Gl. 29.89]:

$$T(t) = \left(1.81 \cdot 10^{10}\ \text{Ks}^{1/2}\right) g_*^{-1/4} t^{-1/2} \tag{21.4.12}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

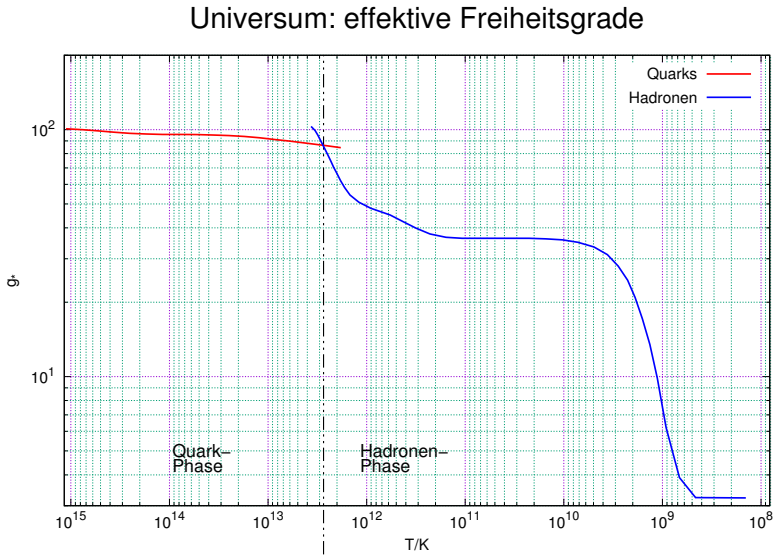


Abb. 21.33.: Freiheitsgrade im frühen Universum nach [CR03, Fig. 2]

Abbildung 21.33 zeigt die Freiheitsgrade der Teilchen im frühen Universum. Je heisser, desto mehr Teilchen werden relativistisch und tragen zur Entropie und inneren Energie bei.
In der Betrachtung ist die DUNKLE ENERGIE und DUNKLE MATERIE nicht berücksichtigt.
Die Grenzen physikalischer Beschreibung werden durch die folgenden Grössen beschrieben:

Planck-Zeit: Sie gibt die frühest mögliche Zeit an, die noch beschrieben werden kann.

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} =\approx 5.391\,247(60)\cdot 10^{-44}\ \mathrm{s} \tag{21.4.13}$$

Planck-Masse: Die kleinsten möglichen schwarzen Löcher werden durch die Planck-Masse gegeben:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} =\approx 2.176\,434(24)\cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg} \gg m_{\mathrm{Proton}} \tag{21.4.14}$$

Planck-Länge: Das kleinste mögliche schwarze Loch hat (bis auf einen Faktor 2 die Planck-Länge als Schwarzschild-Radius:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = ct_P \approx 1.616\,255(18)\cdot 10^{-35}\ \mathrm{m} \tag{21.4.15}$$

Planck-Temperatur: Die Planck-Temperatur gibt einen Hinweis auf die beim Urknall mögliche Temperatur

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = \frac{t_P c^5}{G k_B} \approx 1.416\,784(16)\cdot 10^{32}\ \mathrm{K} \tag{21.4.16}$$

Planck-Ladung: Sie gibt eine weitere Definition der Ladung

$$q_P = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx 1.875\,545\,956(41) \cdot 10^{-18}\ \mathrm{C} > e \tag{21.4.17}$$

Bei der Planck-Zeit t_P hatte das Universum die Temperatur $T \approx 10^{32}$ K $\triangleq$ 10^{19} GeV. Während die PLANCK-ZEIT t_P und die PLANCK-MASSE m_P die Grenze der Anwendbarkeit der allgemeinen Relativitätstheorie angeben wird die PLANCK-MASSE m_P zusammen mit den beiden anderen Grössen sowie der PLANCK-TEMPERATUR und der PLANCK-LADUNG verwendet um ein universelles nur auf Naturkonstanten basierendes Einheitensystem zu definieren. Max Planck merkte an, dass dieses System überall im Universum verstanden würde.

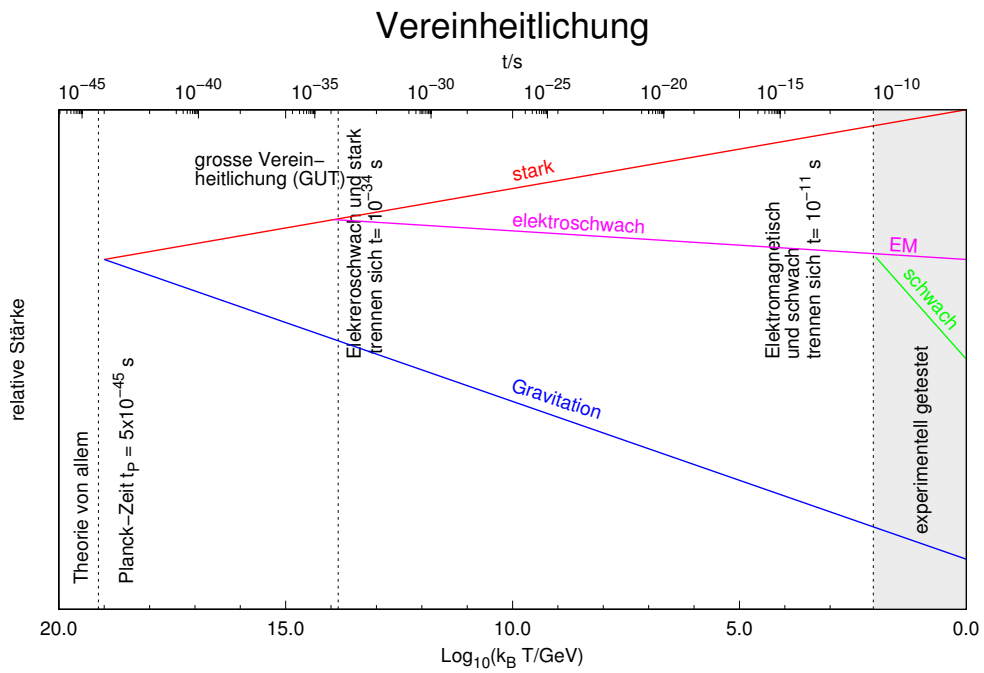


Abb. 21.34.: Grade der Vereinheitlichung verschiedener Kräfte. Die grau hinterlegte Fläche ist der Bereich experimenteller Tests (nach B. W. Carroll und D. A. Ostlie [CO07]).

Das Universum beginnt nach der STANDARDTHEORIE in im URKNALL, englisch BIG BANG. Die bestehenden Beobachtungen sprechen jedoch dafür, dass die Standardtheorie nicht stimmen kann:

- Die kosmische HINTERGRUNDSTRAHLUNG ist zu gleichmässig (das HORIZONTPROBLEM).
- Nach allem was Messungen hergeben ist die Raum-Zeit des Universums beinahe flach. Wenn es davon abwiche, dann gäbe es entweder nicht so viele Objekte, oder das Universum wäre schon kollabiert. (das FLACHHEITS-PROBLEM
- Bei den hohen Energien zu Beginn hätten auch magnetische Monopole ($mc^2 \approx 10^{16}$ GeV) entstehen müssen. Nur ein Experiment fand einmal einen Hinweis

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

auf einen magnetischen Monopol, zu wenig um kompatibel mit der Standardtheorie zu sein (das Problem der Monopole).

Lösungen könnten die Theorie der Inflation, des falschen Vakuums oder Quantenfluktuationen sein. Eine andere Frage ist die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie.
Schliesslich muss eine Theorie auch die grossskaligen Fluktuationen in der Verteilung von Galaxien erklären können.

A. Literaturhinweise

Folgende Bücher und Informationsportale können zur Vorlesung gelesen werden:

Wolfgang Demtröder Experimentalphysik, Band 4 Kern-, Teilchen- und Astrophysik [Dem10]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311220053

Ulrich Ellwanger From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions [Ell12]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=35235657X

Ulrich Ellwanger Vom Universum zu den Elementarteilchen : eine erste Einführung in die Kosmologie und die fundamentalen Wechselwirkungen [Ell15]

Theo Mayer-Kuckuk Kernphysik : eine Einführung [May02]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=09839374X

Ashok Das and Thomas Ferbel Introduction to nuclear and particle physics [DF09]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311263771

Jörn Bleck-Neuhaus Elementare Teilchen : von den Atomen über das Standard-Modell bis zum Higgs-Boson [Ble13]

Erich Lohrmann Hochenergiephysik [Loh92]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=027687368

Abraham Seiden Particle physics : a comprehensive introduction [Sei09]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=118641662

Karl-Heinz Spatschek Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen [Spa03]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=105864617

Bradley W. Carroll; Dale A. Ostlie An introduction to modern astrophysics [CO07]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=381290948

Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger Astronomie mit dem Personal Computer [MP99]

Jan-Markus Schwindt Tutorium Quantenmechanik : von einem erfahrenen Tutor - für Physik- und Mathematikstudenten [Sch13]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=393504891

Manfred Böhm Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik : eine Einführung in die mathematischen Grundlagen [Böh11]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=34625891X

John Stillwell Naive Lie theory [Sti10b]

Karl Schilcher Quantenelektrodynamik kompakt [Sch19]

Pieter Thyssen und Arnout Ceulemans Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table [TC17]

Jürgen Brandes; Jan Czerniawski Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Physiker und Philosophen : Einstein- und Lorentz-Interpretation, Paradoxien, Raum und Zeit, Experimente [BC10]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=334001927

Klaus Stierstadt. Unter Mitw. von Günther Fischer Atommüll - wohin damit? [Sti10a]

Permalink: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=333126351

Jakob Schwichtenberg Physics from Symmetry [Sch15]

IAEA-Website Datenbank mit Hinweisen auf das gesamte veröffentlichte Wissen über Kerne und ihre Eigenschaften.

https://www-nds.iaea.org/

IAEA-Interaktive Nuklidkarte Interaktive Nuklidkarte.

https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html

Joachim Wambsganß Universum für alle [Wam12]

NASA Eclipse Kalender astronomischer Ereignisse und Software zur Beobachtungsplanung. `https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SKYCAL/SKYCAL.html` [YC19]

Astropixels Ephemeriden (Daten zur Beobachtung) `http://astropixels.com/ephemeris/ephemeris.html` [Esp21]

Astronomie-Info `https://www.astronomie.info/` [Ver19]

Vorlesung Optik Othmar Marti http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/op-2016-2017/op-2016-2017.pdf

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

B. Weitere physikalische Methoden und Begriffe

B.1. Streuung

Differentieller Wirkungsquerschnitt bei Coulomb-Streuung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \tag{B.1.1}$$

B.1.1. Berechnung

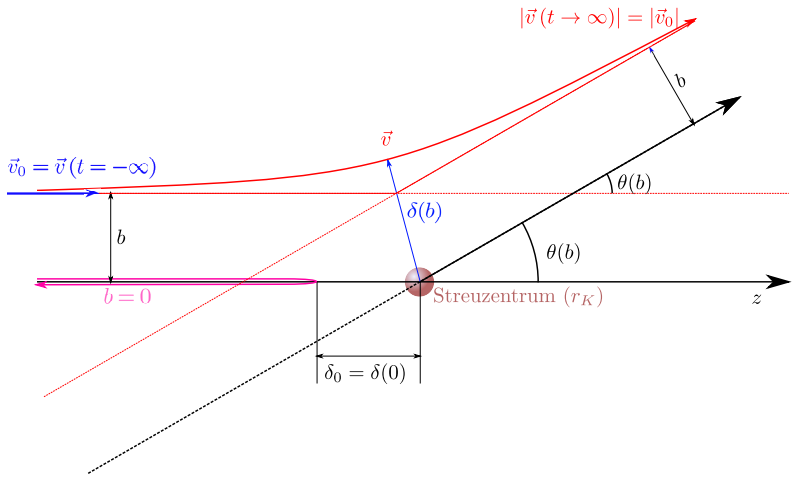


Abb. B.1.: Klassische Berechnung der Streuung (adaptiert aus Demtröder Band 4, Abb 2.3 [Dem10]

Wir verwenden die reduzierte Masse μ. Für den Drehimpuls haben wir dann

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times \mu\boldsymbol{v}| = \mu v b = \mu\omega r^2 = m\frac{d\phi}{dt}r^2 \tag{B.1.2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \quad \Rightarrow \frac{d\phi}{vb} = \frac{dt}{r^2} \tag{B.1.3}$$

$\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor in der Richtung vom Streuzentrum zum Punkt der nächsten Annäherung. Aus Symmetriegründen ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{n}$ und der Geschwindigkeit des einlaufenden Teilchens für $t \to -\infty$ betragsmässig gleich dem Winkel zwischen $\boldsymbol{n}$ und der Geschwindigkeit des auslaufenden Teilchens für $t \to \infty$.

Der auf $\boldsymbol{n}$ projizierte Impuls ist dann:

$$p_{-\infty} = -\mu v \sin\frac{\vartheta}{2} \qquad p_{+\infty} = \mu v \sin\frac{\vartheta}{2} \tag{B.1.4}$$

Über den ganzen Streuprozess kompensieren sich die Kraftkomponenten senkrecht zu $\boldsymbol{n}$. Wir müssen deshalb nur die Projektion der Kraft auf die Richtung $\boldsymbol{n}$ betrachten, also

$$F_n(t) = |\boldsymbol{F}|\,(t)\cos(\phi(t)) \tag{B.1.5}$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\Delta p = 2\mu v \sin\frac{\vartheta}{2} &= \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\phi\,dt \\ &= \int_{\frac{-(\pi-\vartheta)}{2}}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b}\cos\phi\,d\phi = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b}\sin\phi\Big|_{\frac{-(\pi-\vartheta)}{2}}^{\frac{\pi-\vartheta}{2}} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b}\left(\sin\frac{\pi-\vartheta}{2} - \sin\frac{-(\pi-\vartheta)}{2}\right)\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

Wir bemerken, dass der maximale Winkel ϕ_{max} aus Symmetriegründen für $t \to \pm\infty$ gleich ist, nämlich ϕ_{max}. Dann ist $\vartheta + 2\phi_{max} = \pi$ oder

$$\phi_{max} = \frac{\pi - \vartheta}{2} \tag{B.1.7}$$

Daraus ergeben sich die in Gleichung (B.1.6) verwendeten Integrationsgrenzen.

Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ folgt:

$$\begin{aligned}\Delta p = 2\,\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 v b}\sin\frac{\pi-\vartheta}{2} &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 v b}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \overset{!}{=} 2\mu v \sin\frac{\vartheta}{2} & \\ \Rightarrow \tan\frac{\vartheta}{2} &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2 b} \qquad \text{(Streufunktion)}\end{aligned}$$

Aus

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}\cdot\frac{1}{b} \tag{B.1.8}$$

folgt:

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \frac{1}{\tan\frac{\vartheta}{2}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \cot\frac{\vartheta}{2} \tag{B.1.9a}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{b}{\sin\vartheta}\frac{db}{d\vartheta}\right| \tag{B.1.9b}$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \cdot \frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right) \tag{B.1.9c}$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \tag{B.1.9d}$$

mit $\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \tag{B.1.9e}$$

mit $\frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{kin}}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \quad \text{(Diff. Querschnitt nach Rutherford)} \tag{B.1.9f}$$

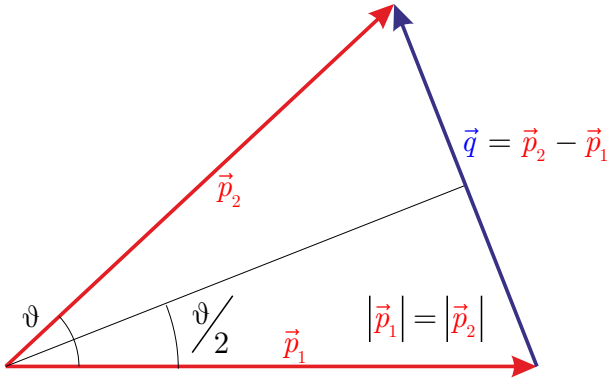


Abb. B.2.: Impulsübertrag nach [Dem10, Abb. 2.10]

Mit dem Impulsübertrag eines elastisch gestreuten Teilchens (siehe Abbildung B.2) folgt mit $|\boldsymbol{p_2}| = |\boldsymbol{p_1}| = |\boldsymbol{p}|$:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{q}{2|\boldsymbol{p}|} \qquad E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^4 = (2mE)^2$$

$$\Rightarrow \sin^4\frac{\vartheta}{2} = \frac{q^4}{16p^4} = \frac{q^4}{64(mE^4)} = \frac{q^4}{16\cdot(2mE)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2 \cdot 2m}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{q^4}$$

Dabei ist q ein Impuls, der Impulsübertrag.

B.2. Namen der Bänder nach Fraunhofer

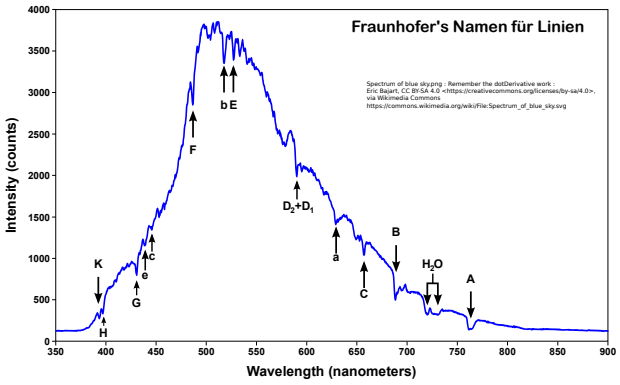


Abb. B.3.: Spektralnamen nach Fraunhofer (Spectrum of blue sky.png : Remember the dotDerivative work : Eric Bajart, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons)

Abbildung B.3 zeigt die von Joseph Fraunhofer verwendeten Spektralnamen. Diese

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

werden auch heute noch verwendet. Tabelle B.1 zeigt die Linien.

Symbol	Element	Wellenlänge in nm	Symbol	Element	Wellenlänge in nm
y	O2	898.765	c	Fe	495.761
Z	O2	822.696	F	Hβ	486.134
A	O2	759.370	d	Fe	466.814
B	O2	686.719	e	Fe	438.355
C	Hα	656.281	G'	Hγ	434.047
a	O2	627.661	G	Fe	430.790
D1	Na	589.594	G	Ca	430.774
D2	Na	588.997	h	Hδ	410.175
D3 oder d	He	587.562	H	Ca^+	396.847
e	Hg	546.073	K	Ca^+	393.368
E2	Fe	527.039	L	Fe	382.044
b1	Mg	518.362	N	Fe	358.121
b2	Mg	517.270	P	Ti^+	336.112
b3	Fe	516.891	T	Fe	302.108
b4	Fe	516.751	t	Ni	299.444
b4	Mg	516.733			

Tab. B.1.: Namen der Fraunhoferlinien (aus [Wik21d]).

C. Mathematische Sätze

C.1. Rechnen mit Vektoren

[Bro+08, p. 190]
Im Folgenden sind $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{f}$ Vektoren oder vektorielle Funktionen, a, b, c und f ihre Längen, k eine Zahl und $\varphi(\boldsymbol{r})$ eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

C.1.1. Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

$$k = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\, b\, \cos\left(\angle\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right)\right) \tag{C.1.1}$$

Vektorprodukt

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \qquad |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = a\, b \sin\left(\angle\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right)\right) \tag{C.1.2}$$

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \tag{C.1.3}$$
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{C.1.4}$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \tag{C.1.5}$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{C.1.6}$$

Doppeltes Vektorprodukt

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} \tag{C.1.7}$$

Spatprodukt oder gemischtes Produkt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\ &= (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\ &= -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}\\ &= -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\ &= -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}\\ &= a_xb_yc_z+a_yb_zc_x+a_zb_xc_y-(a_zb_yc_x+a_xb_zc_y+a_yb_xc_z)\end{aligned} \tag{C.1.8}$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0 \tag{C.1.9}$$

Lagrangesche Identität

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{C.1.10}$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{f})\,\boldsymbol{c}-((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{f} \tag{C.1.11}$$

C.1.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{da_x}{dt}\\\frac{da_y}{dt}\\\frac{da_z}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{a}_x\\\dot{a}_y\\\dot{a}_z\end{pmatrix} \tag{C.1.12}$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)\boldsymbol{a}(t))=\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a}+\varphi\frac{d}{dt}\boldsymbol{a} \tag{C.1.13}$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \tag{C.1.14}$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \tag{C.1.15}$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2=const.$ Aus Gleichung (C.1.14) folgt

$$0=\frac{da^2}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{a}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\perp\boldsymbol{a} \tag{C.1.16}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\boldsymbol{a}(t+\tau) = \boldsymbol{a}(t) + \tau \left.\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left.\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}\right|_t + \ldots + \frac{\tau^n}{n!} \left.\frac{d^n\boldsymbol{a}}{dt^n}\right|_t + \ldots \tag{C.1.17}$$

C.1.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{c}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{c}) - \varphi(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{C.1.18}$$

Ableitung $\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{e_c}}$ in Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{e_c}$ in Richtung von $\boldsymbol{c}$

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{c}} = |\boldsymbol{c}| \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{e_c}} \tag{C.1.19}$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$)

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{e_c}} = \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{n}} \cos\left(\angle\boldsymbol{e}\boldsymbol{c}, \boldsymbol{n}\right) \tag{C.1.20}$$

C.1.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes $\boldsymbol{a}$ nach einer Richtung

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{c}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}+\varepsilon\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{C.1.21}$$

Ableitung $\frac{\partial\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{e_c}}$ in Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{e_c}$ in Richtung von $\boldsymbol{c}$

$$\frac{\partial\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{c}} = |\boldsymbol{c}| \frac{\partial\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{e_c}} \tag{C.1.22}$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{c}} &= (\boldsymbol{c}\cdot \mathbf{grad}\ )\,\boldsymbol{a} \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{rot}\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + \mathbf{grad}\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\cdot \text{ div } \boldsymbol{a}\right. \\ &\quad \left. -\boldsymbol{a}\cdot \text{ div } \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\times \mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\times \mathbf{rot}\ \boldsymbol{c}\right]\end{aligned} \tag{C.1.23}$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad}\ (\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\,\mathbf{grad}\ \varphi_2 + \varphi_2\,\mathbf{grad}\ \varphi_1 \tag{C.1.24}$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad}\ \varphi_1\,(\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\,\mathbf{grad}\ \varphi_2 \tag{C.1.25}$$

Gradient eines Skalarproduktes

$$\textbf{grad}\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\ \textbf{grad}\ )\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\ \textbf{grad}\ )\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{a} \quad \text{(C.1.26)}$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors $\boldsymbol{k}$ mit einem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$

$$\textbf{grad}\ (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \quad \text{(C.1.27)}$$

Divergenz eines Produktes

$$\text{div}\ (\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\,\text{div}\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\,\textbf{grad}\ \varphi \quad \text{(C.1.28)}$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors $\boldsymbol{k}$ mit einem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$

$$\text{div}\ (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|} \quad \text{(C.1.29)}$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\text{div}\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{b} \quad \text{(C.1.30)}$$

Rotation eines Produktes

$$\textbf{rot}\ (\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\,\textbf{rot}\ \boldsymbol{a} + \ \textbf{grad}\ \varphi\times\boldsymbol{a} \quad \text{(C.1.31)}$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\textbf{rot}\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\ \textbf{grad}\ )\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\ \textbf{grad}\ )\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\,\text{div}\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\,\text{div}\ \boldsymbol{a} \quad \text{(C.1.32)}$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\textbf{rot}\ (\ \textbf{grad}\ \varphi) = \boldsymbol{0} \qquad \forall\varphi \quad \text{(C.1.33)}$$

Divergenz einer Rotation

$$\text{div}\ (\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{a}) = 0 \qquad \forall\boldsymbol{a} \quad \text{(C.1.34)}$$

Rotation einer Rotation

$$\textbf{rot}\ (\ \textbf{rot}\ \boldsymbol{a}) = \ \textbf{grad}\ (\ \text{div}\ \boldsymbol{a}) - \ \text{div}\ (\ \textbf{grad}\ \boldsymbol{a}) \quad \text{(C.1.35)}$$

C.2. Vektorsätze

C.2.1. Satz von Gauss

Der Satz von K. F. Gauss (1777-1855) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.
Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$
- eine geschlossene Fläche S, die das Volumen $V(S)$ umschliesst.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\int\limits_{V(S)} \text{div } \boldsymbol{v} dV = \int\limits_{S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int\limits_{S} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} da \tag{C.2.1}$$

Man kann auch schreiben $\text{div } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.

C.2.2. Satz von Green

Der SATZ VON G. GREEN (1793-1841) verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.
Gegeben seien

- eine skalare Ortsfunktion $\Psi(\boldsymbol{r})$
- eine geschlossene Fläche S, die das Volumen $V(S)$ umschliesst.

$$\int\limits_{V(S)} \Delta\Psi dV = \int\limits_{S} \textbf{grad } \Psi d\boldsymbol{a} = \int\limits_{S} \textbf{grad } \Psi \boldsymbol{n} da \tag{C.2.2}$$

Man kann auch schreiben $\textbf{grad } \Psi = \boldsymbol{\nabla}\Psi$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.

C.2.3. Satz von Stokes

Der SATZ VON G. G. STOKES (1819-1903) verknüpft ein Oberflächenintegral mit einem Linienintegral.
Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$
- eine geschlossener Weg s, der die Oberfläche $a(s)$ umrandet.

$$\int\limits_{a(s)} \textbf{rot } \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int\limits_{a(s)} \textbf{rot } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} da = \oint\limits_{s} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{C.2.3}$$

Man kann auch schreiben $\textbf{rot } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der NABLA-OPERATOR ist.
Dabei wird jedes Flächenelement so umlaufen, dass die entsprechende Normale $\boldsymbol{n}$ der Bewegung einer Rechtsschraube entspricht.

C.3. Typen von Zahlen, Vektoren und mehr

Wir betrachten hier das Verhalten von mathematischen Objekten bei einer RAUMSPIEGELUNG (Punktspiegelung am Ursprung) in kartesischen Koordinaten

$$P : f(\boldsymbol{r} \to \tilde{f}(\boldsymbol{r}) = f(-\boldsymbol{r}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n \text{ und } n \in \mathbb{N} \tag{C.3.1}$$

Die Abbildung wird auch PARITÄTSOPERATION genannt. Die Definition in Gleichung (C.3.1) bezieht sich explizit auf kartesische Koordinaten. Für andere Koordinatensysteme können auch Paritätsoperationen definiert werden.

C.3.1. Skalare

Unter einer Paritätsoperation ändert ein SKALAR oder eine Zahl $a \in \mathbb{R}^1$ sein Vorzeichen nicht. Zahlen stellen Grössen dar ohne Richtung. Deshalb kann eine Änderung des Koordinatensystems keinen Einfluss haben.

C.3.2. Vektoren

Bei Vektoren $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) stellt die Länge, ob in einer oder in mehreren Dimensionen eine Richtung dar. Die Paritätsoperation wechselt das Vorzeichen aller Koordinaten. Deshalb ändert die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bei einer Paritätstransformation die Richtung ins Entgegengesetzte. Die Geschwindigkeit ist wie alle normalen Vektoren ein POLARER VEKTOR[1].

Der Drehimpuls kann als Vektorprodukt $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ geschrieben werden. Sowohl $\boldsymbol{r}$ wie $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ sind polare Vektoren, die bei einer Paritätstransformation das Vorzeichen (oder die Richtung wechseln. Der Vektor $\boldsymbol{L}$ des Drehimpulses ändert deshalb seine Richtung nicht. Er gehört zur Klasse der AXIALEN VEKTOREN. Mit dem Drehimpuls sind auch alle analog definierten Grössen wie der Spin, die magnetische Induktion oder das Drehmoment axiale Vektoren[2] Axiale Vektoren werden auch PSEUDOVEKTOREN genannt.

Das Vektorprodukt eines axialen Vektors mit einem axialen Vektor ergibt wieder einen axialen Vektor.

C.3.3. Pseudoskalare

Das Skalarprodukt eines polaren Vektors mit einem polaren Vektor ändert bei einer PARITÄTSTRANSFORMATION das Vorzeichen nicht. Das Resultat ist also ein Skalar. Ebenso ergibt das Skalarprodukt eines axialen Vektors mit einem axialen Vektor einen Zahlenwert, der bei der Paritätstransformation das Vorzeichen nicht ändert.

Wir aber das Skalarprodukt eines polaren Vektors (wie z.B. $\boldsymbol{v}$) und eines axialen Vektors (wie z.B. $\boldsymbol{s}$) berechnet ändert die resultierende Zahl ihr Vorzeichen bei der Paritätstransformation. Diese Skalarprodukt zwischen axialem und polarem Vektor ergibt einen PSEUDOSKALAR, eine Zahl die bei einer Paritätsoperation das Vorzeichen ändert.

C.3.4. Tensoren und Pseudotensoren

Wie bei Vektoren gibt es neben Tensoren (Objekte die bei einer Paritätstransformation alle Vorzeichen der Komponenten wechseln) auch Pseudotensoren, die die Vorzeichen ihrer Komponenten bei der Paritätsoperation nicht ändern.Das Vektorprodukt kann auch als Pseudotensor aufgefasst werden.

[1] Diese Vektoren haben eine umkehrbare Richtung, also eine Polarität.

[2] Alle diese Grössen haben eine **Achse**, um die die physikalische Grösse rotiert, deshalb axialer Vektor.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

C.4. Distributionen

C.4.1. Binomialdistribution

Die Poissondistribution ist ein Grenzfall der Binonomialdistribution[Tay97, Kap. 10 und Kap. 11]. Diese beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Experimenten ν Erfolge (für Zerfälle: Ereignisse) geschehen, wenn p die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ist und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für kein Ereignis.

$$B_{n,p}(\nu) = \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} = \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} \tag{C.4.1}$$

Der Erwartungswert von ν ist

$$\begin{aligned}
\langle \nu \rangle_B &= \sum_{\nu=0}^{n} \nu B_{n,p}(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \nu \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} && \text{(C.4.2a)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \nu \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} && \text{(C.4.2b)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(\nu-1)!((n-1)-(\nu-1))!} p \cdot p^{\nu-1} (1-p)^{(n-1)-(\nu-1)} && \text{(C.4.2c)} \\
&= n\,p \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(\nu-1)!((n-1)-(\nu-1))!} p^{\nu-1} (1-p)^{(n-1)-(\nu-1)} && \text{(C.4.2d)} \\
&= n\,p \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^\nu (1-p)^{n-\nu} = n\,p\,(p + (1-p))^{n-1} = n\,p && \text{(C.4.2e)}
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung kann mit einer ähnlichen Methode berechnet werden. Sie ist

$$\sigma_{\nu,B} = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{n\,p\,(1-p)} \tag{C.4.3}$$

C.4.2. Poisson-Distribution

Für den Fall, dass wir sehr viele Versuche (d.h. Atome) $1 \ll n \approx 10^{20}$ und sehr wenige Erfolge (d.h. Zerfälle) haben, also $\nu \ll n$ und dass damit die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses klein ist $1 \gg p \approx 10^{-20}$ geht die Binomialdistribution in die Poisson-Distribution über.

Diese ist durch

$$P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} \tag{C.4.4}$$

gegeben. Deren Mittelwert bei unendlich vielen Versuchen ist

$$\langle \nu \rangle_P = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_\mu(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \tag{C.4.5a}$$

$$= \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu \tag{C.4.5b}$$

da $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu^\nu}{\nu!} = e^\mu$ die Taylorreihe der Exponentialfunktion ist.

Zur Berechnung der Standardabweichung nutzen wir die Gleichung für ddie Binomialdistribution und verwenden den Grenzfall zur Poissson-Distribution

$$\sigma_{\nu,B} = \sqrt{n\,p\,(1-p)} \overset{p \ll 1}{\approx} = \sqrt{n\,p} \tag{C.4.6}$$

Auf der anderen Seite wissen wir, dass die Binomialdistribution in die Poissondistribution übergeht, also $\langle \nu \rangle_B = np \overset{n \gg 1, p \ll 1}{=} \mu = \langle \nu \rangle_P$. Deshalb ist

$$\sigma_{\nu,P} = \sqrt{\mu} \tag{C.4.7}$$

Eine Zusammenfassung findet sich auch in [Bro+08, Kap. 16.2.3.3].

C.5. Sphärische Trigonometrie

C.5.1. Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

(Siehe M. Waldmeier, Leitfaden der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung [Wal68, pp. 11])

Die folgenden Beziehungen verknüpfen Operationen zwischen Winkelfunktionen.

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{C.5.1}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{C.5.2}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} \tag{C.5.3}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) \mp 1}{\cot(\alpha) \pm \cot(\beta)} \tag{C.5.4}$$

$$\sin(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.5}$$

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.6}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{C.5.7}$$

$$1 + \cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.8}$$

$$1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.9}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{C.5.10}$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{C.5.11}$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{C.5.12}$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{C.5.13}$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{C.5.14}$$

C.5.1.1. Halbwinkelsätze

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{C.5.15}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin(b)\cdot\sin(c)}} \tag{C.5.16}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s)\cdot\sin(s-a)}{\sin(b)\cdot\sin(c)}} \tag{C.5.17}$$

C.5.2. Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie

a, b und c sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks, α, β und γ die gegenüberliegenden Winkel (siehe Abb. C.1).

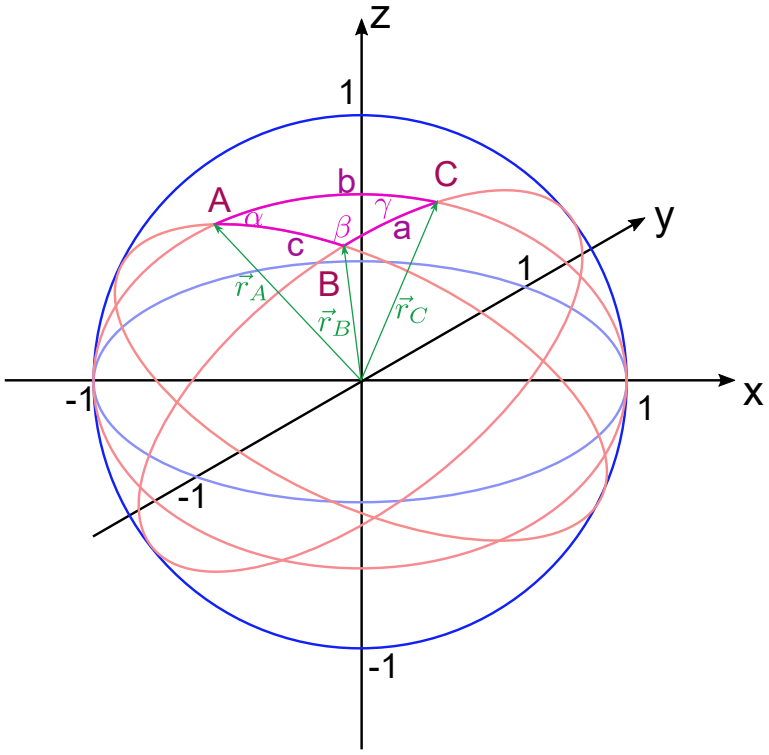


Abb. C.1.: Sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel

C.5.2.1. Sinussatz

$$\sin(a) \cdot \sin(\beta) = \sin(b) \cdot \sin(\alpha) \tag{C.5.18}$$
$$\sin(b) \cdot \sin(\gamma) = \sin(c) \cdot \sin(\beta) \tag{C.5.19}$$
$$\sin(c) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) \tag{C.5.20}$$

C.5.2.2. Cosinusseitensatz

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) \tag{C.5.21}$$
$$\cos(b) = \cos(c) \cdot \cos(a) + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.22}$$
$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.23}$$

C.5.2.3. Cosinuswinkelsatz

$$-\cos(\alpha) = \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(a) \tag{C.5.24}$$
$$-\cos(\beta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(b) \tag{C.5.25}$$
$$-\cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(c) \tag{C.5.26}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

C.5.2.4. Beziehung zwischen vier Stücken

$$\sin(\alpha) \cdot \cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(c) - \cos(c) \cdot \cos(\alpha) \tag{C.5.27}$$
$$\sin(\beta) \cdot \cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(a) - \cos(a) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.28}$$
$$\sin(\gamma) \cdot \cot(\alpha) = \cot(a) \cdot \sin(b) - \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.29}$$
$$\sin(\alpha) \cdot \cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(b) - \cos(b) \cdot \cos(\alpha) \tag{C.5.30}$$
$$\sin(\beta) \cdot \cot(\alpha) = \cot(a) \cdot \sin(c) - \cos(c) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.31}$$
$$\sin(\gamma) \cdot \cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(a) - \cos(a) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.32}$$

C.5.2.5. Beziehung zwischen fünf Stücken

$$\sin(a) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(c) - \sin(b) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\alpha) \tag{C.5.33}$$
$$\sin(b) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(a) - \sin(c) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.34}$$
$$\sin(c) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(b) - \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.35}$$
$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) - \sin(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\alpha) \tag{C.5.36}$$
$$\sin(b) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(c) - \sin(a) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.37}$$
$$\sin(c) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(a) - \sin(b) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.38}$$

C.5.2.6. Gausssche Gleichungen

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.39}$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)=\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.40}$$

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.41}$$

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.42}$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{c+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{C.5.43}$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{C.5.44}$$

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{c+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{C.5.45}$$

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{c-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \tag{C.5.46}$$

$$\sin\left(\frac{c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.47}$$

$$\sin\left(\frac{c}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.48}$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.49}$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.50}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

C.5.2.7. Nepersche Analogien

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}\tan\left(\frac{c}{2}\right) \tag{C.5.51}$$

$$\tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}\tan\left(\frac{c}{2}\right) \tag{C.5.52}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)}\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.53}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)}\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{C.5.54}$$

$$\tan\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)}\tan\left(\frac{a}{2}\right) \tag{C.5.55}$$

$$\tan\left(\frac{b-c}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\right)}\tan\left(\frac{a}{2}\right) \tag{C.5.56}$$

$$\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(b-c)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(b+c)\right)}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.57}$$

$$\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(b-c)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(b+c)\right)}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.58}$$

$$\tan\left(\frac{c+a}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\right)}\tan\left(\frac{b}{2}\right) \tag{C.5.59}$$

$$\tan\left(\frac{c-a}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\right)}\tan\left(\frac{b}{2}\right) \tag{C.5.60}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(c-a)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}(c+a)\right)}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.61}$$

$$\tan\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(c-a)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(c+a)\right)}\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{C.5.62}$$

C.5.3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck

Wir setzen $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

C.5.3.1. Sinussatz

$$\sin(b) = \sin(a) \cdot \sin(\beta) \tag{C.5.63}$$
$$\sin(c) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) \tag{C.5.64}$$

C.5.3.2. Cosinusseitensatz

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) \tag{C.5.65}$$

C.5.3.3. Cosinuswinkelsatz

$$\cos(a) = \cot(\beta) \cdot \cot(\gamma) \tag{C.5.66}$$
$$\cos(b) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\gamma)} \tag{C.5.67}$$
$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\beta)} \tag{C.5.68}$$

C.5.3.4. Beziehung zwischen vier Stücken

$$\cot(\beta) = \cot(b) \cdot \sin(c) \tag{C.5.69}$$
$$\cot(\gamma) = \cot(c) \cdot \sin(b) \tag{C.5.70}$$
$$\tan(b) = \tan(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.71}$$
$$\tan(c) = \tan(a) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.72}$$

C.5.3.5. Beziehung zwischen fünf Stücken

$$\sin(a) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(c) \tag{C.5.73}$$
$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) \tag{C.5.74}$$
$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) \tag{C.5.75}$$
$$\cos(a) \cdot \sin(c) = \sin(a) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\beta) \tag{C.5.76}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

C.5.4. Astronomisches Dreieck

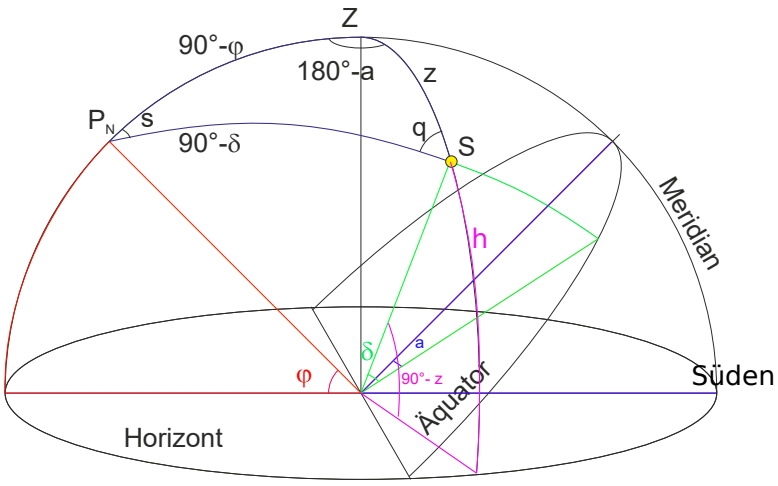


Abb. C.2.: Das astronomische Dreieck

C.5.4.1. Beziehungen zwischen φ, δ, s und z, a

$$\cos(z) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(s) \tag{C.5.77}$$

$$\cos(z) = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin^2\left(\frac{s}{2}\right) \tag{C.5.78}$$

$$\sin(z) \cdot \sin(a) = \cos(\delta) \cdot \sin(s) \tag{C.5.79}$$

$$\sin(z)\cos(a) = -\sin(\delta) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\delta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(s) \tag{C.5.80}$$

$$\cot(a) \cdot \sin(s) = \sin(\varphi) \cdot \cos(s) - \cos(\varphi) \cdot \tan(\delta) \tag{C.5.81}$$

$$\cos(\delta) \cdot \cos(s) = \cos(z) \cdot \cos(\varphi) + \sin(z) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(a) \tag{C.5.82}$$

C.5.4.2. Beziehungen zwischen φ, δ, s und z, q

$$\sin(z) \cdot \sin(q) = \cos(\varphi) \cdot \sin(s) \tag{C.5.83}$$

$$\sin(z) \cdot \cos(q) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\delta) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\delta) \cdot \cos(s) \tag{C.5.84}$$

C.5.5. Koordinatentransformationen

C.5.5.1. Berechnung von z und a aus δ und s

$$\cot(a) = \frac{\sin(\varphi) \cdot \cos(s) - \tan(\delta) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(s)} \tag{C.5.85}$$

$$\cos(z) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(s) \tag{C.5.86}$$

C.5.5.2. Berechnung von δ und s aus z und a

$$\cot(s) = \frac{\cot(z) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(a)}{\sin(a)} \tag{C.5.87}$$

$$\sin(\delta) = \cos(z) \cdot \sin(\varphi) - \sin(z) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(a) \tag{C.5.88}$$

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Versuchsliste

1. Versuch Geiger-Müller-Zählrohr 46
2. Versuch Nebelkammer: Ulmer Nebel 51

Abbildungsverzeichnis

2.1. Relativistische Geschwindigkeit und Beschleunigung 24
2.2. Kinetische Energie relativistisch und klassisch 25
2.3. Zurückgelegte Distanz relativistisch und klassisch 26
2.4. Eigenzeit relativistisch und klassisch 27
2.5. Zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit 28
2.6. Wirkungsgrad bei der Streuung 30
2.7. Elektrostatischer Beschleuniger 31
2.8. Van-de-Graaff-Generator zur Herstellung von Hochspannung . . . 31
2.9. Kaskaden-Hochspannungsgenerator 32
2.10. Skizze eines Driftröhrenbeschleunigers 32
2.11. Schematischer Aufbau eines Zyklotrons 34
2.12. Aufbau eines Betatrons 35
2.13. Schematischer Aufbau eines Synchrotrons 36
2.14. Prinzip der starken Fokussierung 39
2.15. Starke Fokussierung 40
2.16. Fokussierung in Beschleunigern 41
2.17. Nachsteuerung der magnetischen Induktion 42
2.18. Teilchenpakete im Beschleuniger 43
2.19. LHC Layout 43
2.20. Ionisationskammer: Funktionsweise und Ausgangspuls 44
2.21. Gas-Ionisationsbereiche 45
2.22. Photozelle und Photomultiplier 46
2.23. Szintillationsdetektor: Aufbau 46
2.24. Spektrum eines Szintillators 47
2.26. Schema der p+nn+-Fotodiode 48
2.25. Detektionslimits 48
2.27. Cerenkov-Effekt 49
2.28. Berechnung Energie 50
2.29. Streamer-Kammer 52
2.30. Mehrdraht-Funkenkammer 52
2.31. Messung des π^+-Zerfalls (nach O. Chamberlain u. a. [Cha+50] und W. Demtröder [Dem10]. 53
2.32. Zerfall des Pi-Plus 53

4.1. Berechnung eines Streuquerschnittes 67
4.2. Differenzieller Streuquerschnitt 68
4.3. Aufbau eines Streuversuches 69
4.4. Wellennatur der Streuung 70
4.5. Elektronenstreuung im Schwerpunktssystem 72
4.6. Berechnung der Hofstadter-Streuung 76
4.7. Formfaktoren verschiedener Ladungsverteilungen 77
4.8. Verlauf der Streuamplitude der Rutherford-Streuung 78

4.9. Rutherford- und Mott-Streuung . . . 79
4.10. Streuung von Bosonen und Fermionen . . . 79
4.11. Paarerzeugung nach Dirac . . . 81
4.12. Paarvernichtung nach Dirac . . . 82
4.13. Dominante Streuprozesse . . . 82
4.14. Streuquerschnitte in Pb . . . 83

5.1. Verluste beim Durchgang durch Materie . . . 86
5.2. Streuung von Neutronen an Urankernen . . . 87

6.1. Rutherfords Streuversuch . . . 90
6.2. Streuung bei unterschiedlichen Streuparametern . . . 91
6.3. Coulomb-Streuung an Blei und Gold . . . 93
6.4. Ladungsdichteverteilung in Kernen . . . 94
6.5. Fit der Ladungsverteilung bei Ca . . . 94
6.6. Iterative Methoden . . . 95
6.7. Streuung von Elektronen an Atomkernen nach Hofstadter . . . 96
6.8. Streumessung mit Beugung . . . 96
6.9. Streuung von Elektronen an O . . . 97
6.10. Definition der Streuebene . . . 103
6.11. Massedichteverteilung . . . 105
6.12. Bindungsenergie pro Nukleon: Experiment und Tröpfchenmodell . 109
6.13. Woods-Saxon-Potential . . . 114
6.14. Kastenpotential für Neutronen und Protonen . . . 115
6.15. Vergleich der Potentiale von Neutronen und Protonen . . . 115
6.16. Nukleonenaufbau der leichten Kerne . . . 116
6.17. Energie des ersten angeregten Zustandes . . . 117
6.18. Separationsenergie . . . 122
6.19. Paarenergie eines Neutronenpaares . . . 123
6.20. Stabile Isotope . . . 123
6.21. Vergleich der Kernmodelle . . . 124
6.22. Bindungsenergie von Kernen . . . 125
6.23. Bindungsenergie von Kernen, leichte Kerne . . . 126
6.24. Mittlere Bindungsenergie . . . 126
6.25. Stabilste Kerne . . . 127
6.26. Nuklidkarte . . . 127
6.27. Bezeichnungen in einem Rotationsellipsoid . . . 128
6.28. Definition der Integrationsfläche . . . 128
6.29. Definition der Integrationsfläche . . . 129
6.30. Kernspins . . . 132
6.31. Messung des gyromagnetischen Verhältnisses nach Rabi . . . 133
6.32. Messung des magnetischen Moments des Neutrons . . . 134
6.33. Prinzip der Magnetresonanzmessung . . . 136

7.1. Lage der Minima nach Bethe-Weizsäcker . . . 144
7.2. Stabilitätsbereiche . . . 144
7.3. Stabile Kerne . . . 145

8.1. Energielandschaft beim Alpha-Zerfall . . . 153

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

8.2. Bahnen von α-Teilchen . . . 154
8.3. *alpha*-Zerfall von Fr . . . 155
8.4. Geiger-Nuttall-Darstellung . . . 157
8.5. Alpha-Zerfall . . . 157
8.6. Gamow-Theorie des α-Zerfalls . . . 159
8.7. Gamma-Zerfall . . . 160
8.8. γ-Spektrum . . . 161
8.9. Statistische Gewichte S(L) für Multipolübergänge . . . 164
8.10. beta-Spektrums bei innerer Konversion . . . 165
8.11. Isomere und Oktupolübergang . . . 166
8.12. Oktupolzerfall: Niveauschema . . . 166
8.13. β-Zerfall . . . 167
8.14. β-Spektrum von $^{32}_{15}$P nach Lyman . . . 169
8.15. Nachweis des Antineutrinos . . . 169
8.16. Umwandlung von Protonen in Neutronen und umgekehrt . . . 170
8.17. Entwicklung der Neutronenlebensdauer . . . 171
8.18. Fermi-Kurie-Diagramm . . . 173
8.19. Fermi-Kurie-Diagramm: Hohe Energien . . . 174
8.20. K-Einfang . . . 174
8.21. Zerfallsreihen von Uran nach Radium und Actinium . . . 176
8.22. Zerfallsreihen von Uran nach Thorium und Neptunium . . . 177

9.1. Höhenstrahlung auf der Erde . . . 180
9.2. Dosisleistung in der Nähe eines KKWs . . . 181
9.3. Aufbau eines Dosimeters . . . 182
9.4. Elektronisches Dosimeter . . . 183
9.5. Radiojodaufnahme der Schilddrüse . . . 184
9.6. PET: Positronen-Emissions-Tomographie . . . 185
9.7. Suche nach wenigen Atomen . . . 186
9.8. Altersbestimmung . . . 187
9.9. C14-Methode . . . 187
9.10. Altersbestimmung von Gesteinen . . . 188

10.1. Bereich möglicher exothermer Kernspaltung . . . 191
10.2. Energieverteilung der Spaltneutronen bei der Kernspaltung . . . 193
10.3. Spaltquerschnitte mittelschwerer Kerne . . . 194
10.4. Neutronenspektrum bei stossinduzierter Kernreaktion . . . 195
10.5. Aktivierung und Aktivität . . . 197
10.6. Energiebeiträge pro Nukleon . . . 200
10.7. Massenverteilung der Spaltprodukte bei der Kernspaltung . . . 202

11.1. Chicago Pile 1, Stapelversuch . . . 207
11.2. Schichtung des Chicago Pile-1 . . . 208
11.3. Stagg Field Reaktor . . . 208
11.4. Vergleich der Streuquerschnitte von U-235 mit U-238 . . . 209
11.5. Absorptionsquerschnitt von Bor für Neutronen . . . 210
11.6. Kontrollstäbe . . . 211
11.7. Brennstäbe im Kernreaktor . . . 211
11.8. Impulsantwort der Spaltneutronen . . . 214

11.9. Druckwasserreaktor . . . 215
11.10. Siedewasserreaktor . . . 216
11.11. Reaktorgebäude . . . 217
11.12. Containment eines Reaktors . . . 217
11.13. Mark-I Siedewasserreaktor . . . 218
11.14. Graphitmoderierter Reaktor RBMK . . . 218
11.15. Brutreaktor . . . 219
11.16. kinetische Energie und Coulombbarriere . . . 220
11.17. Tokamak: Asdex Upgrade 2 . . . 221
11.18. Tokamak des ITER-Projektes: Grössenvergleich . . . 221
11.19. Der Tokamak des ITER-Projektes . . . 222
11.20. ITER-Tokamak im Gebäude . . . 222
11.21. Magnetfelder im Tokamak . . . 223
11.22. Prinzip des Stellerators . . . 224
11.23. Roadmap Kernfusion . . . 224
11.24. Abfallzyklus der Kernspaltung . . . 225
11.25. Modell eines Castors . . . 226
11.26. Restwärmeleistung Brennelemente . . . 227

12.1. Feynman-Diagramme: Koordinatensystem . . . 234
12.2. Feynman-Diagramme: Weltlinien . . . 235
12.3. Feynman-Diagramm: Vertex . . . 235
12.4. Feynman-Diagramm: Innere Linie . . . 236
12.5. Feynman-Diagramm: zweite Orientierung . . . 236
12.6. Feynman-Diagramm ohne Achsen . . . 237
12.7. Feynman-Diagramm: Teilchentypen . . . 237
12.8. Feynman-Diagramme höherer Ordnung . . . 238
12.9. Emission im Feynmanbild . . . 239
12.10. Absorption im Feynmanbild . . . 239
12.11. Streuung im Feynmanbild . . . 240
12.12. Comptoneffekt im Feynmanbild . . . 241
12.13. Wellenfunktion eines Photons vereinfacht im Impulsraum . . . 241
12.14. Wellenfunktion eines Elektrons im Impulsraum . . . 242
12.15. Wechselwirkung Photon mit Elektron . . . 242
12.16. Summe bis zur ersten Ordnung . . . 242
12.17. Amplitudenquadrat bis zur ersten Ordnung . . . 243
12.18. Feynman-Diagramme berechnen: Grafik . . . 245
12.19. Feynman-Diagramme berechnen: massive Austauschteilchen . . . 245
12.20. Stösse von Elektronen und Positronen . . . 246
12.21. Nachweis zweier Neutrinosorten . . . 249

13.1. SO(2) und der Tangentialraum . . . 257
13.2. Mesonennonett . . . 266
13.3. Streuung p+p -> Hadronen . . . 268
13.4. Stärke und Reichweite fundamentaler Kräfte . . . 269
13.5. Baryonenoktett . . . 270
13.6. Quarkmodell für Baryonen . . . 271
13.7. Baryonenmultiplett bis Charm . . . 271
13.8. Klassifizierung von Hadronen . . . 276

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

13.9. Spektrum des Psí' . . . 277
13.10. Mesonen-Supermultiplett . . . 278
13.11. Massen von Quarks und Leptonen . . . 281

14.1. Rosenkäfer im zirkular polarisierten Licht . . . 285
14.2. DNA als Symmetriebrechung . . . 285
14.3. Definition der Parität . . . 286
14.4. Wu-Experiment zur Paritätsverletzung . . . 288
14.5. Paritätstransformation bei Co-Kern . . . 289
14.6. Prinzip des Wu-Experiments . . . 289
14.7. Feynman-Diagramme des Kaon-Zerfalls . . . 294
14.8. Semileptonischer KL0-Zerfall . . . 296
14.9. Neutronenzerfall . . . 299
14.10. Tau-Zerfall und schwacher geladener Strom . . . 299
14.11. Tau-Zerfall, 2. Möglichkeit . . . 300
14.12. Schwacher neutraler Strom . . . 300
14.13. Streuung eines Neutrinos an einem Proton . . . 301
14.14. Streuung eines Neutrinos an einem Myon . . . 301

15.1. Elementarteilchen im Standardmodell . . . 306
15.2. Teilchen und Wechselwirkungen . . . 308
15.3. Farbe in der Quark-Gluon-Wechselwirkung . . . 308
15.4. Farbladung . . . 310
15.5. Quark-Gluon-Wechselwirkung . . . 310
15.6. Emission eines Higgs-Teilchens . . . 311
15.7. Potentielle Energie des Higgs-Feldes . . . 312

16.1. Teleskop nach Kepler . . . 321
16.2. Teleskop nach Galilei . . . 322
16.3. Teleskop nach Newton . . . 322
16.4. Das 5-Meter-Hale-Teleskop von Mount Palomar . . . 326
16.5. Spiegelgrösse von Teleskopen . . . 327
16.6. Parallaktische Montierung . . . 328
16.7. Coudé-Fokus . . . 328
16.8. Aufbau eines Radioteleskopes . . . 329
16.9. Das Radioteleskop von Effelsberg . . . 330
16.10. Das grosse Radioteleskop in Aricibo . . . 330
16.11. Reflektivität im Röntgenbereich . . . 331
16.12. Wolter-Spiegel eines Röntgenteleskopes . . . 331
16.13. Skizze des ROSAT-Röntgensatelliten . . . 332
16.14. Wolter-Spiegel des ROSAT-Röntgensatelliten . . . 332
16.15. Detektor des ROSAT-Röntgensatelliten . . . 333
16.16. Chandra-Röntgensatelliten . . . 333
16.17. Röntgenaufnahme und optische Aufnahme . . . 334
16.18. Beugungsbegrenzung der Auflösung . . . 334
16.19. Prinzip Long Baseline Interferometry . . . 336
16.20. Orbits im galaktischen Zentrum . . . 338
16.21. Aufbau eines Gitterspektrometers . . . 339
16.22. Beugungsmuster an einem Gitter . . . 340

16.23. Beugungsmuster eines Einzelspaltes . . . 341
16.24. Lage der Gitterordnungen . . . 341
16.25. Beugungsmuster eines Gitters . . . 342
16.26. Beugungsmuster: Variation des Gitterelementes . . . 342
16.27. Beugungsmuster: Variation der Linienzahl . . . 343
16.28. Schematische Darstellung eines Gitter-Reflexionsspektrometers. . . . 343
16.29. Gitter-Reflexionsspektrometer mit Zeilendetektor. . . . 344
16.30. Kommerzielles Gitterspektrometer . . . 345
16.31. Integriertes Gitter-Reflexionsspektrometers mit Zeilendetektor. . . . 345
16.32. Échelle-Spektrometer . . . 346
16.33. Échelle-Spektrometer Lage der Spektren . . . 346
16.34. Spektrum mit Échelle-Spektrometer . . . 347
16.35. Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers . . . 347
16.36. Bild des Michelson-Interferometers aus der Vorlesungssammlung . 349
16.37. Aufbau des Michelson-Interferometers. . . . 349
16.38. Sagnac-Interferometer . . . 351
16.39. Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung . . . 354
16.40. Strahlengang bei einem Fabry-Perot-Etalon . . . 355
16.41. Berechnung des Strahlengangs bei einem Fabry-Perot-Etalon . . . 355
16.42. Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon . . . 360
16.43. Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon . . . 360
16.44. Strahlengang im Michelson-Sterninterferometer . . . 361
16.45. Intensitäts-Korrelationsinterferometer Hanbury Brown und Twiss . 362
16.46. Empfindlichkeitskurve Hanbury Brown und Twiss-Interferometers 363
16.47. Sichtwinkel im Hanbury Brown und Twiss-Interferometer . . . 363
16.48. Astronomische Koordinatensysteme . . . 365
16.49. Nautisches Dreieck . . . 366
16.50. Äquatorsystem . . . 366
16.51. Ekliptikales System . . . 367
16.52. Galaktisches Koordinatensystem . . . 367
16.53. Galaktozentrisches Koordinatensystem . . . 368
16.54. Definition der Parallaxensekunde . . . 369
16.55. Auflösungsbegrenzung durch Seeing . . . 370
16.56. ESA Guide Star System . . . 371
16.57. Brechung in der Atmosphäre . . . 371
16.58. Distanzmessung mit Triangulation . . . 372
16.59. Distanzmessung mit Triangulation . . . 372
16.60. Relative und absolute Magnitude . . . 374
16.61. Helligkeitskurve von Cepheiden . . . 376
16.62. Helligkeitskurven von Supernovae . . . 377
16.63. Supernova in Galaxie . . . 378
16.64. Distanzmessung mit Doppelsternen . . . 379

17.1. Von den Griechen zu Kepler . . . 382
17.2. Schema: Epizyklen . . . 383
17.3. Epizyklen . . . 383
17.4. Bahnen der äusseren Planeten von der Ferne gesehen . . . 384
17.5. Bahnen der äusseren Planeten von der Erde aus gesehen . . . 385

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

17.6. 2. Keplersches Gesetz . . . 386
17.7. Newtonsches Gravitationsgesetz . . . 388
17.8. Keplersche Ellipsenbahn . . . 390
17.9. Inklination, aufsteigender Knoten und Periapsis . . . 392
17.10. Masse aus Ellipsenbahnen . . . 393
17.11. Merkur . . . 395
17.12. Wolken in der Venusatmosphäre . . . 396
17.13. Venusoberfläche ohne Wolken . . . 396
17.14. Erde von Voyager gesehen . . . 397
17.15. Erstes Bild der Erde von aussen . . . 398
17.16. Mond vor Erde . . . 398
17.17. Milanković-Zyklen der Erde . . . 399
17.18. Bahnexzentrizität zwischen -4000 und 8000 . . . 400
17.19. Erdbahnexzentrizität . . . 400
17.20. Strahlungsgleichgewicht der Erde . . . 401
17.21. Energieflüsse in der Erdatmosphäre . . . 401
17.22. Temperaturschwankungen über letzte 1.8 Millionen Jahre . . . 402
17.23. Temperatur über die letzten 420000 Jahre . . . 403
17.24. Temperatur- und CO_2-Verlauf . . . 403
17.25. Temperaturverteilung Erdatmosphäre . . . 404
17.26. Teilchenzahldichte der Atmosphäre . . . 405
17.27. Verlauf von Erdbebenwellen . . . 407
17.28. Magnetpole und geographische Pole . . . 408
17.29. Magnetfeld der Erde . . . 408
17.30. Häufigkeit der Meteoriteneinschläge . . . 409
17.31. Entstehung des Mondes . . . 411
17.32. Mars mit Valles Marineris . . . 411
17.33. Mars in seinen jungen Tagen (künstlerisch) . . . 412
17.34. Partielle Sonnenfinsternis durch Phobos auf dem Mars . . . 413
17.35. Jupiter . . . 415
17.36. Galileische Jupitermonde . . . 416
17.37. Galileische Jupitermonde . . . 416
17.38. Saturn . . . 417
17.39. Titan, Saturnmond . . . 418
17.40. Uranus . . . 419
17.41. Neptun . . . 420
17.42. Pluto . . . 422
17.43. Berge auf Pluto . . . 423
17.44. Charon, der grösste Mond Plutos . . . 423
17.45. Zwergplanet Eris . . . 424
17.46. Haumea mit Hi'iaka und Namaka . . . 425
17.47. Makemake . . . 425
17.48. Kuipergürtel und Oort'sche Wolke . . . 426
17.49. Asteroiden, die die Erdbahn kreuzen . . . 426
17.50. Ceres . . . 427
17.51. Oort'sche Wolke . . . 428

18.1. Sonne im sichtbaren Licht und Oberfläche . . . 430

18.2. Sonnenflecken im H_α-Spektrum . . . 431
18.3. Sonnenfleckenzahl als Funktion der Zeit . . . 431
18.4. Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA . . . 432
18.5. Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA . . . 432
18.6. Historische Sonnenfleckenzahl nach der NASA . . . 433
18.7. Sonnenfleckenzahl über 11000 Jahre . . . 433
18.8. Schwankung der Zahl der Sonnenflecken . . . 434
18.9. Bewegung der Sonnenflecken und Sonnenfleckenzahl . . . 434
18.10. Struktur von Sonnenflecken . . . 435
18.11. Sonnenflecken und Magnetfelder . . . 435
18.12. Differenzielle Rotation der Sonne . . . 436
18.13. Messung von Magnetfeldern mit dem Zeeman-Effekt . . . 436
18.14. Nicols-Prisma . . . 437
18.15. Messung der Richtung von Magnetfeldern . . . 437
18.16. Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare . . . 438
18.17. Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare . . . 438
18.18. Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare: Koronaschlaufen . . . 439
18.19. Magnetfelder und Sonnenfleckenpaare: G-Band . . . 439
18.20. Protuberanzen . . . 440
18.21. Magnetfelder und differenzielle Rotation . . . 440
18.22. Stromfläche des Sonnenmagnetfeldes . . . 441
18.23. Sonne, gesehen von der TRACE-Sonde . . . 442
18.24. Sonnenkorona . . . 443
18.25. Sonnenkorona mit Kometen . . . 443
18.26. Details der Sonnenkorona . . . 444
18.27. Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche . . . 445
18.28. Radar-Doppleraufnahme der Sonnenoberfläche, Ausschnitt . . . 445
18.29. Schallwellen in der Sonne . . . 446
18.30. Ausbreitung seismischer Moden . . . 446
18.31. Frequenzspektrum der Helioseismizität . . . 447
18.32. Schwingungsmode der Sonne . . . 447
18.33. Querschnitt durch die Sonne mit Transportmechanismen . . . 451
18.34. Temperatur und Druck in der Sonne . . . 452
18.35. Luminosität in der Sonne . . . 453
18.36. Absorptionslinien in der Sonnenatmosphäre . . . 453
18.37. Äussere Atmosphäre der Sonne . . . 454
18.38. CNO-Zyklus in der Sonne . . . 459
18.39. Energieproduktion der p-p- und CNO-Prozesse . . . 459
18.40. Temperaturabhängigkeit der Raten (p-p- und CNO-Prozesse) . . . 460
18.41. Elementhäufigkeit in der Sonne . . . 460

19.1. Lichtablenkung durch Massen . . . 463
19.2. Gravitationslinse . . . 464
19.3. Berechnung der Ablenkung von Licht . . . 464
19.4. Rotverschiebung im Gravitationsfeld . . . 467
19.5. Lichtgeschwindigkeit in der Nähe des Ereignishorizontes . . . 470
19.6. Berechnung des Gravitationslinseneffektes . . . 473
19.7. Gravitationslinse . . . 475

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

19.8. Dunkler brauner Zwerg wird durch Microlensing sichtbar 476
19.9. LIGO Gravitationswelleninterferometer 476
19.10. Durch Gravitationswellen beobachtete Ereignisse 477

20.1. Masse und Leuchtkraft 479
20.2. Anzahl angeregt H 482
20.3. Saha-Gleichung für Wasserstoff 483
20.4. Stärke der Balmer-Linien 484
20.5. Linienstärke und Spektralklassen 484
20.6. Sternspektren auf Kameras 485
20.7. Orion-Nebel M42, eine Kinderstube von Sternen 487
20.8. Kontrahierende Gaswolke 489
20.9. Temperatur beim Gravitationskollaps 489
20.10. Bild kollabierender Gaswolken 490
20.11. Kollabierende Gaswolke in Galaxie 490
20.12. Farbindex und Magnitude 491
20.13. Farbindex und Magnitude bei M13 492
20.14. Hertzsprung-Russell-Diagramm 493
20.15. Temperatur und Masse 493
20.16. Bereich instabiler Sterne 494
20.17. Weg kollabierender Gaswolken 495
20.18. Hauptreihenentwicklung 496
20.19. Hauptreihenentwicklung: Mittlere Masse 496
20.20. Hauptreihenentwicklung: Grosse Masse 497
20.21. Sternzustand nach Verbrauch des Wasserstoffvorrates 497
20.22. Nach-Hauptreihenentwicklung 498
20.23. Entwicklung bei mittlerer Sternmasse 498
20.24. Ringnebel aus der Leier 499
20.25. Zwiebelschalenstruktur eines massereichen Sterns 500
20.26. Lichtkurven von Supernovae 501
20.27. Supernova-Reste (Krebs-Nebel, Explosion 1054) 501
20.28. Supernova 1987A 502
20.29. Akkretionsscheibe einer Zwergnova 503
20.30. Helligkeitskurve einer Zwergnova 503
20.31. Hellikeitsverlauf einer klassischen Nova 504
20.32. Überreste einer klassischen Nova 505
20.33. Lage der weissen Zwerge im HR-Diagramm 507
20.34. Querschnitt durch einen Neutronenstern 511
20.35. Rotationsperioden von Pulsaren 512
20.36. Drehimpuls und Masse von Sternen 513
20.37. Temperaturverteilung bei Planetenentstehung 514
20.38. Masse und Distanz 515
20.39. Beobachtung Radialgeschwindigkeit 518
20.40. Skizze Messung der Radialgeschwindigkeit 519
20.41. Radialgeschwindigkeitsmethode 519
20.42. Beobachtung Abschattung 520
20.43. Abschattungsmethode 521
20.44. Micro-Lensing 522

20.45. Microlensing mit 2 Teleskopen . . . 523
20.46. Microlensing von Stern und Planet . . . 523
20.47. Direkte Abbildung . . . 524
20.48. Vergleich der Methoden . . . 525
20.49. Masse und Temperatur von Exoplaneten . . . 526
20.50. [Schematische Darstellung visueller Doppelsterne . . . 527
20.51. Astrometrische Doppelsterne . . . 527
20.52. Skizze spektroskopischer Doppelsterne . . . 528
20.53. Photometrische Doppelsterne . . . 528
20.54. Anzahl Sterne in der Milchstrasse . . . 529
20.55. Sterndichte in der Milchstrasse . . . 530
20.56. Geschwindigkeitsmessung in der Galaxis . . . 530
20.57. Galaktische Ebene anhand von M 104 . . . 534
20.58. Andromeda-Galaxie M 31 . . . 534
20.59. Galaxie NGC 1275 im Galaxienhaufen A426 im Perseus . . . 535
20.60. Lokale Umgebung der Sonne . . . 535
20.61. Lokale Umgebung der Sonne . . . 536
20.62. Schematische Struktur der Milchstrasse . . . 536
20.63. Struktur der Milchstrasse . . . 537
20.64. Seitenansicht der Milchstrasse . . . 537
20.65. Begleitgalaxien der Milchstrasse . . . 538
20.66. Kugelsternhaufen M13 . . . 538
20.67. Infrarotbild des Zentrums der Milchstrasse . . . 539
20.68. Bild des Zentrums der Milchstrasse . . . 540
20.69. Umlaufbahnen um das galaktische Zentrum . . . 540
20.70. Masse im Zentrum der Milchstrasse . . . 541
20.71. Rotationskurven von Galaxien . . . 542
20.72. Rotationsgeschwindigkeit und Massendichte . . . 543
20.73. Rotationsgeschwindigkeit und Flächenmassendichte . . . 543
20.74. NGC 3596 - sichtbar und Radiowellen . . . 544
20.75. Rotationsgeschwindigkeit der Milchstrasse . . . 545
20.76. Dichte sichtbarer und dunkler Materie . . . 546

21.1. Olbers' Paradox . . . 547
21.2. Skizze zur Berechnung von Olbers' Paradox . . . 548
21.3. Einsteins statisches sphärisch symmetrisches Universum . . . 549
21.4. Modell Expansion im Universum . . . 550
21.5. Ausdehnungsbewegung . . . 550
21.6. Verteilung von Galaxien . . . 553
21.7. Position der Erde im Universum . . . 553
21.8. Logarithmische Darstellung des Universums . . . 554
21.9. Struktur des Universums auf grossen Skalen . . . 554
21.10. Andromeda-Galaxie . . . 555
21.11. Galaxienhaufen: Perseus-Haufen . . . 555
21.12. Elliptische Zwerggalaxie M32 . . . 556
21.13. Klassifikation der Galaxien nach Hubble . . . 556
21.14. Modell des gekrümmten Raumes . . . 557
21.15. Quasar 3C273 sichtbar und Röntgenlicht . . . 561

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

21.16. Quasar 3C273 Overlay 561
21.17. Dichte von Quasaren 562
21.18. Quasar der Galaxie NGC 4261 563
21.19. Galaxie NGC 4151 mit Quasar 563
21.20. Karte der aktiven Galaxien 564
21.21. Lokale Gruppe 565
21.22. Nachbarschaft der lokalen Gruppe 566
21.23. Coma-Galaxienhaufen 567
21.24. Universum Modelle und dunkle Energie 568
21.25. Universum Modelle und dunkle Energie, Abweichung 569
21.26. Massendichte und Skalenfaktor 571
21.27. Volumen und Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien 571
21.28. Zeitabhängigkeit des Skalenparameters 572
21.29. Zeitskalen in der Astronomie 572
21.30. Häufigkeit der leichten Elemente 574
21.31. Epochen im Universum 574
21.32. Vergleich Standardmodell und Inflationsmodell 575
21.33. Freiheitsgrade im frühen Universum 577
21.34. Vereinheitlichungen 578

B.1. Klassische Berechnung der Streuung 583
B.2. Impulsübertrag 585
B.3. Spektralnamen nach Fraunhofer 586

C.1. Sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel 598
C.2. Das astronomische Dreieck 603

Tabellenverzeichnis

6.1. Begriffe aus der Atomphysik . . . 89
6.2. Isospinzustände bei zwei Nukleonen . . . 99
6.3. Masse der Nukleonen . . . 107
6.4. Magische Zahlen Elektronen . . . 117
6.5. Magische Zahlen Kern . . . 117
6.6. Gefüllte Schalen im Kastenmodell . . . 118
6.7. Magische Zahlen im Kastenmodell . . . 119
6.8. Entartete Niveaus im harmonischen Oszillator . . . 120
6.9. Entartungen im harmonischen Oszillator . . . 120
6.10. Magische Zahlen im Kastenmodell . . . 120
6.11. Kerne und Kernmassen . . . 125
6.12. Kennzahlen von Nukleonen und Elektron . . . 135
6.13. Starke Wechselwirkung Austauschwechselwirkung . . . 141

7.1. Radioaktive Kerne in der Natur . . . 148

8.1. Multipolmoden des elektromagnetischen Feldes . . . 163
8.2. Übergangswahrscheinlichkeiten von Multipolübergängen . . . 164

9.1. Gewichtsfaktoren für ionisierende Strahlung . . . 179
9.2. Radioaktivität in der Umwelt . . . 180
9.3. Arten der Strahlenbelastung . . . 181

10.1. Spaltbarkeitsparameter . . . 191
10.2. Compoundkerne bei der Kernspaltung . . . 193
10.3. Energiebilanz einer Spaltreaktion . . . 203

11.1. Kritische Massen von U-235 und Pu-239 . . . 213

12.1. Leptonenfamilien . . . 249

13.1. Isospin,Baryonenzahl und Ladung der Delta . . . 254
13.2. Isospin,Baryonenzahl und Ladung der rho . . . 254
13.3. Wellenfunktionen bei der Bildung des Delta . . . 255
13.4. Tabelle einiger pseudoskalarer Mesonen . . . 269
13.5. Tabelle einiger Vektormesonen . . . 270
13.6. Quarkfamilien . . . 280

14.1. Stabile Teilchen . . . 290
14.2. Symmetrieoperationen und Messgrössen . . . 297

15.1. Erhaltungsgrössen und Wechselwirkungen . . . 305
15.2. Fermionen unter den Elementarteilchen . . . 306
15.3. Grosse vereinheitlichte Theorien . . . 307

16.1. Auflösung typischer Teleskope 335
16.2. Distanzen und Magnituden 374
16.3. Beispiele von Distanzen und Magnituden 375

17.1. Erdähnliche Planeten 394
17.2. Wirkung von auftreffenden Objekten auf die Erde 410
17.3. Riesenplaneten 414
17.4. Einige Zwergplaneten 421

18.1. p-p-Zyklus auf der Sonne 458

20.1. Klassifikation von Sterntypen 481
20.2. Spektraltypen 485
20.3. Definition von U, V und B 486
20.4. Mindestmassen für Gravitationskollaps 488
20.5. Massenbereiche und Prozesse in Sternen 495
20.6. Phasenübergänge in Neutronensternen 510

21.1. Objekte im Universum 552
21.2. Zeittafel des Universums 573
21.3. Elementarteilchen im Standardmodell 576

B.1. Namen der Fraunhoferlinien 587

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Personenregister

Conny Aerts Aerts, Conny Clara, 26. 1. 1966 (Brasschaat, Belgien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Conny_Aerts
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Conny_Aerts . 495

Hannes Alfvén Alfvén, Hannes Olof Gösta, 13. 6. 1911 (Norrköping, Schweden) bis 2. 4. 1995 (Djursholm, Schweden),
https://de.wikipedia.org/wiki/Hannes_Alfv%C3%A9n
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Hannes_Alfv%C3%A9n . 456

Luis Walter Alvarez Alvarez, Luis Walter, 30. 5. 1908 (San Francisco, California, USA) bis 1. 9. 1988 (Berkeley, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Luis_Walter_Alvarez
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Luis_Walter_Alvarez . 33

Anaxagoras Anaxagoras (Ἀναξαγόρας), 499 v. Chr. (Klazemonai, heute Türkei) bis etwa 428 v. Chr. (Lampsakos, heute europäischer Teil der Türkei),
https://de.wikipedia.org/wiki/Anaxagoras. 430

Charles Anderson Anderson, David «Charles», 3. 9. 1905 (New York City, New York, USA) bis 11. 1. 1901 (San Marino, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Anderson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_David_Anderson . 246

Aristarchos von Samos Aristarchos von Samos (Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος), 310 v. Chr. (Samos, Griechenland) bis etwa 230 v. Chr.,
https://de.wikipedia.org/wiki/Aristarchos_von_Samos. 382, 384

Aristoteles Aristoteles (Ἀριστοτέλης), 384 v. Chr. (Stagira, Griechenland) bis etwa 322 v. Chr. (Chalkis, Euböa, Griechenland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles. 382

Avicenna Abū Alī al-Husain ibn Abd All=ah ibn Sīn=a (ابن سينا in persisch, أبو علي الحسين بن عبد الله ابن سينا in arabisch), kurz vor 980 (Afschana bei Buchara, heute Usbekistan) bis 1037 (Hamadan, Iran),
https://de.wikipedia.org/wiki/Avicenna
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Avicenna . 430

Walter Baade Baade, Wilhelm Heinrich Walter, 24. 3. 1893 (Schröttinghausen, Deutschland) bis 25. 6. 1960 (Göttingen, Deutschland)

https://de.wikipedia.org/wiki/Walter_Baade
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Walter_Baade . 509

Neta Bahcall Bahcall, Neta Assaf (נטע אסף בקל), 1942 (Israel)
https://en.wikipedia.org/wiki/Neta_Bahcall . 567

Barry Barish Barish, Barry Clark, 27. 1. 1936 (Omaha, Nebraska, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Barry_Barish
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Barry_Barish . 476

Henri Becquerel Becquerel, Antoine Henri, 15. 12. 1852 (Paris, Frankreich), bis 25. 8. 1908 (Le Croisic, Département Loire-Atlantique, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Henri_Becquerel
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Becquerel . 179

Jocelyn Bell Burnell Bell Burnell, Susan Jocelyn, 15. 7. 1943 (Lurgan, Northern Ireland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Jocelyn_Bell_Burnell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Jocelyn_Bell_Burnell . 509, 511

Friedrich Bessel Bessel, Friedrich Wilhelm, 22. 7. 1784 (Minden, Minden-Ravensberg, Deutschland), bis 17 3. 1846 (Königsberg, Preussen, heute Russland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Wilhelm_Bessel . 506

Hans Bethe Bethe, Hans Albrecht, 2. 7. 1906 (Strassburg, Elsass, heute Frankreich), bis 6. 3. 2005 (Ithaca, New York, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Bethe
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Bethe . 85, 109, 144, 190, 200, 207

Erika Böhm-Vitense Böhm-Vitense, Erika, 3. 6. 1923 (Curau, Schleswig-Holstein, Deutschland), bis 21. 1. 2017
https://de.wikipedia.org/wiki/Erika_Böhm-Vitense
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Erika_Böhm-Vitense . 451

Aage Bohr Bohr, Aage Niels, 19. 6. 1922 (Kopenhagen, Dänemark), bis 8. 9. 2009 (Kopenhagen, Dänemark)
https://de.wikipedia.org/wiki/Aage_Niels_Bohr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Aage_Bohr . 123

Niels Bohr Bohr, Niels Henrik David, 7. 10. 1885 (Kopenhagen, Dänemark), bis 18. 11. 1962 (Kopenhagen, Dänemark)
https://de.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr . 89, 197

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Ludwig Boltzmann Boltzmann, Ludwig Eduard, 10. 2. 1844 (Wien, Österreich), bis 5. 9. 1906 (Duino, Österreich-Ungarn, heute Italien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann . 405, 506, 514

Max Born Born, Max, 11. 12. 1882 (Breslau, Preussen, jetzt Polen), bis 5. 1. 1970 (Göttingen, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Max_Born
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Born . 74

Satyendranath Bose Bose, Satyendranath (সত্যেন্দ্রনাথ বসু), 1. 1. 1894 (Kalkutta, Britisch-Indien, jetzt Indien), bis 4. 2. 1974 (Kalkutta, Britisch-Indien, jetzt Indien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Satyendranath_Bose
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Satyendra_Nath_Bose . 307

James Bradley Bradley, James, 1692 (Sherbourne, Gloucestershire, England) bis 13. 7. 1762 (Chalford, Gloucestershire, England),
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Bradley. 338

Tycho Brahe Brahe, Tycho auch Brahe, Tyge Ottesen, 1692 (Schloss Knutstorp, Schonen, Dänemark, heute Schweden) bis 24. 10. 1601 (Benátky bei Prag, Königreich Böhmen, heute Tschechien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe. 381, 382

Louis-Victor de Broglie Broglie, Louis-Victor Pierre Raymond de, 15. 8. 1892 (Dieppe, Normandie, Frankreich), bis 19. 3. 1987 (Louveciennes, Département Yvelines, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie . 73, 95

Annie Cannon Cannon, Annie Jump, 11. 12. 1863 (Dover, Delaware, U.S.A.) bis 13. 4. 1941 (Cambridge, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Annie_Jump_Cannon
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Annie_Jump_Cannon . 480, 481, 491, 492

Pavel Alexeevič Čerenkov Čerenkov, Pavel Alexeevič auch Tscherenkow, Pawel Alexejewitsch (Черенков, Павел Алексеевич), 18. 7. 1904 (Nowaja Tschigla, Russland) bis 6. 1. 1990 (Moskau, Russland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Pawel_Alexejewitsch_Tscherenkow . 48

James Chadwick Jadwick, James, 20. 10. 1891 (Bollington, Cheshire East, England), bis 24. 7. 1974 (Cambridge, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick . 86, 93

Subrahmanyan Chandrasekhar Chandrasekhar, Subrahmanyan, 19. 10. 1910 (Lahore, Indien), bis 21. 8. 1995 (Cicago, Illinois, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Subrahmanyan_Chandrasekhar
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Subrahmanyan_Chandrasekhar . 508

Rudolf Clausius Clausius, Rudolf, 2. 1. 1822 (Koszalin, auch Köslin, Westpommern, heute Polen) bis 24. 8. 1888 (Bonn, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Clausius. 389

Rudolf Clebsch Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 19. 1. 1833 (Königsberg, Preussen, heute Russland) bis 7. 11. 1872 (Göttingen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Clebsch . 274

John Cockcroft Cockcroft, John Douglas, 27. 5. 1897 (Todmorden, England) bis 18. 9. 1967 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/John_Cockcroft
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Cockcroft . 194

Arthur Compton Compton, Arthur Holly, 10. 9. 1892 (Wooster, Ohio, USA) bis 15. 3. 1962 (Berkeley, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Arthur_Holly_Compton . 80

Charles Augustin de Coulomb de Coulomb, Charles Augustin, 14. 6. 1736 (Angoulême, Frankreich) bis 23. 8. 1806 (Paris, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Augustin_de_Coulomb
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_Coulomb . 71, 74, 90, 158

Ernest D. Courant Courant, Ernest David, 26. 3. 1920 (Göttingen, Deutschland) bis 21. 4. 2020 (Ann Arbor, Michigan, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_D._Courant . 38

Paul Dirac Dirac, Paul Adrien Maurice, 8. 8. 1902 (Bristol, England), bis 20. 10. 1984 (Tallahassee, Florida, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac . 59, 81, 82, 149, 233, 246, 280

Arthur Eddington Eddington, Sir Arthur Stanley, 28. 12. 1882 (Kendal, England), bis 22. 11. 1944 (Cambridge, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Arthur_Stanley_Eddington
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Eddington . 549

Albert Einstein Einstein, Albert, 14. 3. 1879. (Ulm, Deutschland) bis 18. 4. 1955 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein . 58, 85, 207, 232, 233, 381, 385, 463, 467, 468, 549, 568, 570

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

François Englert Englert, François, 6. 11. 1932 (Etterbeek, Belgien),
https://de.wikipedia.org/wiki/François_Englert
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/François_Englert. 310

Loránd Ágoston Eötvös Eötvös, Loránd Ágoston, 27. 7. 1848. (Buda, Ungarn) bis 8. 4. 1919 (Budapest, Ungarn),
https://de.wikipedia.org/wiki/Loránd_Eötvös . 393

Eudoxos von Knidos Eudoxos von Knidos (Εὔδοξος), 397-390 v. Chr. (Knidos, Kleinasien, heute Türkei) bis nach 345-338 v. Chr. (Knidos, Kleinasien, heute Türkei),
https://de.wikipedia.org/wiki/Eudoxos_von_Knidos . 382, 383

David Fabricius Fabricius, David, 7. 3. 1564 (Esens, Niedersachsen, Deutschland) bis 7. 5. 1617 (Osteel, Niedersachsen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/David_Fabricius . 499

Johannes Fabricius Fabricius, Johannes, 8. 1. 1597 (Resterhafe, Niedersachsen, Deutschland) bis 10. 1. 1617 (Dresden, Sachsen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Fabricius_(Astronom) . 430

Charles Fabry Fabry, Maurice Paul Auguste Charles, 11. 6. 1867 (Marseille, Frankreich) bis 11. 12. 1945 (Paris, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Fabry. 353

Nettie Farrar Farrar, Nettie A.. 481, 491

Pierre de Fermat Fermat, Pierre de, 31. 10. - 6. 12. 1607 (Beaumont-de-Lomagne, Frankreich) bis 12. 1. 1665 (Castres, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat. 407

Enrico Fermi Fermi, Enrico, 29. 9. 1901 (Rom, Italien), bis 28. 11. 1954 (Chicago, Illinois, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi . 94, 105, 107, 110, 112, 121, 150, 172, 173, 207, 208, 306, 575

Richard Feynman Feynman, Richard Phillips, 11. 5. 1918 (Queens, New York City, New York, USA), bis 15. 2. 1988 (Los Ageles, California, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman . 64, 238–241, 243–245

Williamina Fleming Fleming, Williamina Paton Stevens, 15. 5. 1857 (Dundee, Schottland) bis 21. 5. 1911 (Boston, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Williamina_Fleming
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Williamina_Fleming . 481, 491

Ralph Fowler Fowler, Ralph Howard, 17. 1. 1889 (Fedsden, Essex, England), bis 28. 7. 1944 (Cambridge, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Ralph_Howard_Fowler
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_H._Fowler . 246

Joseph Fraunhofer Fraunhofer, Joseph von, 6. 3. 1787 (Straubing, Deutschland), bis 7. 6. 1826 (München, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_von_Fraunhofer . 439, 586

Otto Frisch Frisch, Otto Robert, 1. 10. 1904 (Wien, Österreich) bis 22. 9. 1979 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Frisch
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Robert_Frisch . 192, 207

Caroline Furness Furness, Caroline Ellen, 24. 06. 1896 (Cleveland, Ohio, U.S.A.) bis 9. 2. 1936 (New York, New York, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Caroline_Ellen_Furness
oder weniger ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Caroline_Furness . 499

Galileo Galilei Galilei, Galileo, 15. 2. 1564 (Pisa, Italien) bis 29. 12. 1642 (Arcetri bei Florenz, Italien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei. 384, 416, 430

Johann Gottfried Galle Galle, Johann Gottfried, 9. 6. 1812 (Radis, Wittenberg, Deutchland) bis 10. 7. 1910 (Potsdam, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottfried_Galle
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Gottfried_Galle . 419

George Gamow Gamow, George Anthony (**Гамов, Георгий Антонович**), 4. 3. 1904 (Odessa, Russland, heute Ukraine) bis 19. 8. 1968 (Boulder, Colorado, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/George_Gamow
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/George_Gamow . 157–159

Hans Geiger Geiger, Johannes Wilhelm «Hansfrqq, 30. 9. 1882 (Neustadt an der Haardt, Deutschland) bis 24. 9. 1945 (Potsdam, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Geiger_(Physiker)
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Geiger . 45, 156, 157

Murray Gell-Mann Gell-Mann, Murray, 15. 9. 1929 (New York City, New York, USA) bis 24. 5. 2019 (Santa Fe, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Murray_Gell-Mann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Murray_Gell-Mann . 266, 278

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Reinhard Genzel Genzel, Reinhard, 24. 3. 1952 (Bad Homburg vor der Höhe, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Genzel
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Genzel . 539

Walther Gerlach Gerlach, Walther, 1. 8. 1889 (Biebrich am Rhein), bis 10. 8. 1979 (München, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Walther_Gerlach
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Walther_Gerlach . 58

Andrea Ghez Ghez, Andrea M., 16. 6. 1965 (New York City, New York, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Andrea_Ghez
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Andrea_M._Ghez . 539

Sheldon Lee Glashow Glashow, Sheldon Lee, 5. 12. 1932 (New York City, New York, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Sheldon_Lee_Glashow
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Sheldon_Lee_Glashow . 316

Maria Goeppert-Mayer Goeppert-Mayer, Maria Gertrude, 28. 6. 1906 (Kattowitz, Oberschlesien, heute Polen) bis 20. 2. 1972 (San Diego, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Maria_Goeppert-Mayer
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Maria_Goeppert_Mayer . 121, 124

Paul Gordan Gordan, Paul Albert, 29. 4. 1837 (Breslau, Preussen, heute Polen) bis 21. 12. 1912 (Erlangen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Gordan . 274

Robert Jemison Van de Graaff Graaff, Robert Jemison Van de, 20. 12. 1901 (Tuscaloosa, Alabama, USA) bis 16. 12. 1967 (Boston, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Jemison_Van_de_Graaff
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_J._Van_de_Graaff . 31

Louis Gray Gray, Louis Harold, 10. 11. 1905 (London, England), bis 9. 7. 1965 (Northwood, heute London, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_Harold_Gray
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Harold_Gray . 179

Otto Hahn Hahn, Otto Emil, 8. 3. 1879 (Frankfurt am Main, Deutschland) bis 28. 7. 1986 (Göttingen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Hahn
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Hahn . 192, 207

Robert Hanbury Brown Hanbury Brown, Robert, 31. 8. 1916 (Aruvankadu, Indien) bis 16. 1. 2002 (Andover, Hampshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Hanbury_Brown
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hanbury_Brown . 362, 539

Steven Hawking Hawking, Stephen William, 8. 1. 1941 (Oxford, England) bis 14. 3. 2018 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking . 473

Hayashi Chūshirō Hayashi Chūshirō (林 忠四郎), 25. Juli 1920 (Kyōto; Japan) bis 28. Februar(Kyōto; Japan),
https://de.wikipedia.org/wiki/Hayashi_Ch%C5%ABshir%C5%8D oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Chushiro_Hayashi . 495

Werner Heisenberg Heisenberg, Werner Karl, 5. 12. 1901 (Würzburg, Deutschland) bis 1. 2. 1976 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg . 59, 63, 75, 97, 113, 209, 251

Herakleides Pontikos Herakleides Pontikos (Ἡρακλείδης ὁ Ποντικός), 390 v. Chr. (Herakleia Pontike, Griechenland) bis nach 322 v. Chr.,
https://de.wikipedia.org/wiki/Herakleides_Pontikos . 382

Friedrich Wilhelm Herschel Herschel, Friedrich Wilhelm, 15. 11. 1738 (Hannover, Deutschland) bis 25. 8. 1822 (Slough, Berkshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Herschel
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/William_Herschel . 418

Ejnar Hertzsprung Hertzsprung, Ejnar, 8. 10. 1873 (Frederiksberg, Dänemark) bis 21. 10. 1967 (Roskilde, Dänemark),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ejnar_Hertzsprung
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ejnar_Hertzsprung . 492, 507

Antony Hewish Hewish, Antony, 11. 5. 1924 (Fowey, Cornwall, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/Antony_Hewish
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Antony_Hewish . 509, 511

Peter Higgs Higgs, Peter Ware, 29. 5. 1929 (Newcastle upon Tyne, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Higgs
oder ausführlicher
https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Higgs. 310, 317

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

William Hill Hill, George William, 3. 3. 1838 (New York City, new York, USA) bis 16. 4. 1914 (West Nyack bei New York City, New York, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/George_William_Hill
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/George_William_Hill . 517

Hipparchos von Nicäa Hipparchos von Nicäa (Ἵππαρχος), 390 v. Chr. (Herakleia Pontike, Griechenland) bis nach 322 v. Chr.,
https://de.wikipedia.org/wiki/Hipparchos_(Astronom) . 382

Robert Hofstadter Hofstadter, Robert, 5. 2. 1915 (New York City, New York, USA) bis 17. 11. 1990 (Stanford, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Hofstadter
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hofstadter. 76, 94–96, 114

Edwin Hubble Hubble, Edwin, 20. 11. 1889 (Marshfield, Missouri, USA) bis 28. 9. 1953 (San Marino, Kalifornien, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_Hubble. 379, 551, 556, 560, 569

Karl Guthe Jansky Jansky, Karl Guthe, 22. 10. 1905 (Norman, Oklahoma, USA) bis 14. 2. 1950 (Red Bank, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Guthe_Jansky
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Guthe_Jansky . 539

James Jeans Jeans, James Hopwood, 11. 9. 1877 (Ormskirk, Lancashire, England) bis 16. 9. 1946 (Dorking, Surrey, England)
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Jeans
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Jeans . 487, 515

Irène Joliot-Curie Joliot-Curie, Irène, 12. 9. 1897 (Paris, Frankreich), bis 17. 3. 1956 (Paris, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Irène_Joliot-Curie
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Irène_Joliot-Curie . 196

Frédéric Joliot-Curie Joliot-Curie, Jean Frédéric, 19. 3. 1900 (Paris, Frankreich), bis 14. 8. 1958 (Paris, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Frédéric_Joliot-Curie
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Frédéric_Joliot-Curie . 196

Johannes Kepler Kepler, Johannes auch Keppler genannt, 27.12. 1571 (Weil der Stadt, Deutschland) bis 15. 11. 1630 (Regensburg, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler . 381, 385

Roy Kerr Kerr, Roy Patrick, 16. 5. 1934, (Kurow, Neuseeland))
https://de.wikipedia.org/wiki/Roy_Kerr
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Roy_Kerr . 471

Nikolaus Kopernikus Kopernikus, Nikolaus eigentlich Koppernigk, Niklas, 19. 2. 1473 (Toruń oder Thorn, Polen) bis 24. 5. 1543 (Frombork, auch Frauenburg, Polen),
https://de.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_Kopernikus . 381, 382, 384

Gerard Peter Kuiper Kuiper, Gerard Peter, eigentlich Kuiper, Gerrit Pieter, 7. 12. 1905 (Harenkarspel, Niederlande) bis 24. 12. 1973 (Mexico City, Mexico),
https://de.wikipedia.org/wiki/Gerard_Peter_Kuiper
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Gerard_Kuiper . 425, 513

Franz Kurie Kurie, Franz Newell Devereux, 6. 2. 1907 (Victor, Colorado, USA), bis 12. 6. 1972 (San Diego, California, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Franz_N._D._Kurie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_N._D._Kurie . 173

Alfred Landé Landé, Alfred, 13. 12. 1888 (Elberfeld, heute Wuppertal, Deutschland), bis 30. 10. 1976 (Columbus, Ohio, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Landé
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_Landé . 131

Ernest Orlando Lawrence Lawrence, Ernest Orlando, 8. 1. 1901 (Canton, South Dakota, USA) bis 27. 8. 1958 (Palo Alto, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Lawrence
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Lawrence . 33

Henrietta Swan Leavitt Leavitt, Henrietta Swan, 4. 7. 1868 (Lancaster, Massachusetts, USA) bis 12. 12. 1921 (Cambridge, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Henrietta_Swan_Leavitt
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henrietta_Swan_Leavitt. 375, 376

Inge Lehmann Lehmann, Inge, 13. 5. 1888 (Kopenhagen, Dänemark) bis 21. 2. 1993 (Kopenhagen, Dänemark),
https://de.wikipedia.org/wiki/Inge_Lehmann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Inge_Lehmann . 407, 446

Sophus Lie Lie, Marius Sophus, 17. 12. 1842 (Nordfjordeid, Norwegen) bis 18. 2. 1899 (Christiania, dann Kristiania, heute Oslo, Norwegen),
https://de.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie . 256

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

M. Stanley Livingston Livingston, Milton Stanley, 25. 5. 1905 (Broadhead, Wisconsin, USA) bis 25. 8. 1986 (Santa Fe, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/M._Stanley_Livingston
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/M._Stanley_Livingston . 38

Ludwig Mach Mach, Ludwig, 18. 11. 1868 (Prag, Österreich, heute Tschechien) bis 1951,
https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Mach. 347

Josef Mattauch Mattauch, Josef, 21. 11. 1895 (Mährisch-Ostrau, Österreich-Ungarn, heute Tschechien) bis 10. 8. 1971 (Klosterneuburg , Österreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Josef_Mattauch
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Josef_Mattauch . 145

Antonia Maury Maury, Antonia Caetana de Paiva Pereira), 21. 3. 1866 (Cpld-Spring-on-Hudson, New York, U.S.A.) bis 8. 1. 1952 (Dobbs Ferry, New York, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Antonia_Maury
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Antonia_Maury . 481, 491

James Clerk Maxwell Maxwell, James Clerk, 13. 6. 1831 (Edinburgh, Schottland) bis 5. 11. 1879 (Cambridge , England),
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell . 89

Michel Mayor Mayor, Michel Gustave Édouard, 12. 1. 1942 (Echallens, Waadt, Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Michel_Mayor
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Mayor . 513, 518

Edwin McMillan McMillan, Edwin Mattison, 18. 9. 1907 (Redondo Beach, California, USA) bis 7. 9. 1991 (El Cerrito, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edwin_Mattison_McMillan
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_McMillan . 36

Simon van der Meer Meer, Simon van der, 24. 11. 1929 (Den Haag, Niederlande) bis 4. 3. 2011 (Genève, Schweiz),
https://de.wikipedia.org/wiki/Simon_van_der_Meer
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Simon_van_der_Meer . 302

Lise Meitner Meitner, Lise (eigentlich Elise), 7. 11. 1878 (Wien, Österreich) bis 27. 10. 1968 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Lise_Meitner

oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Lise_Meitner . 192, 207

John Michell Michell, John, 25. 12. 1724 (Eakring, Nottinghamshire, England) bis 21. 4. 1793 (Thornhill, Yorkshire, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/John_Michell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Michell . 469

Albert Michelson Michelson, Albert Abraham, 19. 12. 1852 (Streino, Preussen, heute Polen) bis 9. 5. 1931 (Pasadena, Kalifornien, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Abraham_Michelson. 349, 361

Milutin Milanković Milanković, Milutin (Миланковић, Милутин), 28. 5. 1879 (Dalj, Österreich-Ungarn, heute Kroatien) bis 12. 12. 1958 (Belgrad, Jugoslawien, heute Serbien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Milutin_Milanković
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Milutin_Milanković . 399

Edward Milne Milne, Edward Arthur, 14. 2. 1896 (Hull, Yorkshire, England) bis 21. 9. 1950 (Dublin, Irland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Arthur_Milne
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Arthur_Milne . 568

Henry Moseley Moseley, Henry, 23. 11. 1887 (Weymouth, Dorset, England), bis 10. 8. 1915 (Gallipoli, Türkei, Schlacht von Gallipoli)
https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Moseley_(Physiker)
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Moseley . 97

Nevill Mott Mott, Nevill Francis, 30. 9. 1905 (Leeds, England) bis 8. 8. 1996 (Milton Keynes, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Nevill_Francis_Mott
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Nevill_Francis_Mott. 78, 79

Ben Mottelson Mottelson, Ben Roy, 9. 7. 1926 (Chicago, Illinois, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ben_Mottelson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ben_Roy_Mottelson. 123

Walther Müller Müller, Walther, 6. 9. 1905 (Hannover, Deutschland) bis 4. 12. 1979 (Walnut Creek, California, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Walther_Müller_(Physiker) . 45

Isaac Newton Newton, Isaac, 4. 1. 1643 (Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, England) bis 31. 3. 1727 (Kensington, heute Stadtteil von London, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton . 381, 385–389, 469

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Kazuhiko Nishijima Nishijima, Kazuhiko (西島 和彦), 4. 10. 1926 (Tsuchiura, Japan) bis 15. 2. 2009 (Tokyo, Japan),
https://de.wikipedia.org/wiki/Kazuhiko_Nishijima
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Kazuhiko_Nishijima . 278

Emmy Noether Noether, Amalie Emmy, 23. 03. 1882 (Erlangen, Deutschland) bis 14. 4. 1935 (Bryn Mawr, Pennsylvania, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether . 262, 290

John Nuttall Nuttall, John Mitchell, 21. 87. 1890 (Todmorden, England) bis 28. 1. 1958,
https://de.wikipedia.org/wiki/John_Mitchell_Nuttall . 156, 157

Wilhelm von Ockham Ockham, Wilhelm von, auch William of Ockham oder Occam, 1288 (Ockham, Surrey, England) bis 9. 4. 1347 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_von_Ockham. 384, 385

Heinrich Olbers Olbers, Heinrich Wilhelm Matthias, 11. 10. 1758 (Arbergen bei Bremen, Deutschland) bis 2. 3. 1840 (Bremen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Wilhelm_Olbers . 547

Mark Oliphant Oliphant, Sir Marcus «Mark» Laurence Elwin, 8. 10. 1901 (Adelaide, Australien) bis 14. 7. 2000 (Canberra, Australien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Mark_Oliphant
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Mark_Oliphant . 36

Jan Hendrik Oort Oort, Jan Hendrik, 28. 4. 1900 (Franeker, Niederlande) bis 5. 11. 1992 (Leiden, Niederlande),
https://de.wikipedia.org/wiki/Jan_Hendrik_Oort
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Jan_Oort . 428, 531, 532

Eugene Parker Parker, Eugene Newman, 10. 6. 1927 (Houghton, Michigan, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Eugene_N._Parker
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Parker . 454

Wolfgang Pauli Pauli, Wolfgang Ernst, 25. 4. 1900 (Wien, Österreich), bis 15. 12. 1958 (Zürich, Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli . 98, 99, 107, 150, 267, 279, 314, 508, 509

Arno Penzias Penzias, Arnold Allan, 26. 04. 1933 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Arno_Penzias
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Arno_Allan_Penzias . 570

Alfred Perot Perot, Jean-Baptiste Gaspard Gustave Alfred, 3. 11. 1863 (Metz, Frankreich) bis 27. 11. 1925 (Paris, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Pérot
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Alfred_Perot
Nach der französischen Quelle (hier vertrauenswürdiger) schreibt sich die Familie als Perot und nicht Pérot.. 353

Philolaos Philolaos (Φιλόλαος), 470 v. Chr. bis nach 399 v. Chr. (Griechenland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Philolaos . 382

Edward Pickering Pickering, Edward Charles, 19. 7. 1846 (Boston, Massachusetts, U.S.A.) bis 3. 2. 1919 (Cambridge, Massachusetts, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Edward_Charles_Pickering
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Charles_Pickering . 480, 481, 491

Max Planck Planck, Max Karl Ernst Ludwig, 23. 2. 1858 (Kiel, Herzogtum Holstein, Dänemar, heute Deutschland) bis 4. 10. 1947 (Göttingen, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Max_Planck
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck . 570, 578

Norman Pogson Pogson, Norman Robert, 23. 3. 1823 (Nottingham, England) bis 23. 6. 1891 (Madras, Indien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Norman_Robert_Pogson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/N._R._Pogson. 373

Claudius Ptolemäus Ptolemäus, Claudius (Κλαύδιος Πτολεμαῖος), bekannt als Ptolemäus von Alexandria, etwa 100 (in Ägypten) bis etwa 160 (Alexandria, Ägypten),
https://de.wikipedia.org/wiki/Claudius_Ptolemäus . 373, 382–384

Pythagoras Pythagoras (Πυθαγόρας), etwa 570 v. Chr. (Samos, Griechenland) bis etwa 510 v. Chr. (Metapont, Basilicata, Italien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras. 382

Didier Queloz Queloz, Didier Patrick, 23. 2. 1966 (Schweiz)
https://de.wikipedia.org/wiki/Didier_Queloz
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Didier_Queloz . 513, 518

Isidor Rabi Rabi, Isidor Isaac, 29. 7. 1898 (Rymanów, Galizien, Österreich-Ungarn, heute Polen), bis 11. 1. 1988 (New York City, New York, USA)

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

https://de.wikipedia.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Isidor_Isaac_Rabi . 132, 133

James Rainwater Rainwater, Leo James, 9. 12. 1917 (Council, Idaho, USA) bis 30. 15. 1986 (New York, New York, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/James_Rainwater
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Rainwater. 123

Norman Ramsey Ramsey, Norman Foster, 27. 8. 1915 (Washington, D.C., USA) bis 4. 11. 2011 (Wayland, Middlesex County, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Norman_Ramsey
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Norman_Foster_Ramsey_Jr.. 297

Bernhard Riemann Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 17. 9. 1826 (Breselenz bei Dannenberg (Elbe), Deutschland), bis 20. 7. 1966 (Selasca bei Verbania am Lago Maggiore, Italien)
https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann . 467

Édouard Roche Roche, Édouard Albert, 17. 10. 1820 (Montpellier, Frankreich), bis 18. 4. 1883 (Montpellier, Frankreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Édouard_Albert_Roche
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Édouard_Albert_Roche . 517

Wilhelm Conrad Röntgen Röntgen, Wilhelm Conrad, 17. 3. 1845 (Lennep, heute Remscheid, Deutschland) bis 10. 2. 1923 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Conrad_Röntgen. 65

Carlo Rubbia Rubbia, Carlo, 31. 3. 1934 (Gorizia, Italien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Carlo_Rubbia
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Carlo_Rubbia . 302

Vera Rubin Rubin, Vera Florence Cooper, 23. 7. 1928 (Philadelphia, Pennsylvania, USA) bis 25. 12. 2016 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Vera_Rubin
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Vera_Rubin . 541

Henry Russell Russell, Henry Norris, 25. 10. 1877 (Oyster Bay, New York, USA) bis 18. 2. 1957 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Henry_Norris_Russell
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Norris_Russell . 492, 507

Ernest Rutherford Rutherford, Ernest, 30. 8. 1871 (Spring Grove, Nelson, Neuseeland) bis 19. 11. 1937 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford

oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford. 72, 75, 77, 89, 90, 106, 194

Johannes Rydberg Rydberg, Johannes Robert, 8. 11. 1854 (Halmstad, Schweden) bis 28. 12. 1919 (Lund, Schweden),
https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Rydberg
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Rydberg. 97

Georges Sagnac Sagnac, Georges, 14. 10. 1869 (Périgueux, Frankreich) bis 26. 02. 1926 (Meudon-Belleville, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Georges_Sagnac. 351

Meghnad Saha Saha, Meghnad (মেঘনাদ সাহা) Sāhā, Meghnād, 6. 10. 1893 (Sheoratali, Indien, heute Bangladesh) bis 16. 2. 1956 (Delhi, Indien),
https://de.wikipedia.org/wiki/Meghnad_Saha
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Meghnad_Saha . 483

Bunji Sakita Sakita, Bunji (崎田 文二), 1930 (Präfektur Toyama, Japan) bis 31. 8. 2000 (Japan),
https://de.wikipedia.org/wiki/Bunji_Sakita
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Bunji_Sakita . 256

Erwin Schrödinger Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander, 12. 8. 1887 (Wien-Erdberg, Österreich-Ungarn, heute Österreich), bis 4. 1. 1961 (Wien-Alsergrund, Österreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrödinger
oder
https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrödinger . 73, 110, 117

Karl Schwarzschild Schwarzschild, Karl, 9. 10. 1873 (Frankfurt am Main, Deutschland), bis 11. 5. 1916 (Potsdam, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild . 467, 469

Rolf Sievert Sievert, Rolf Maximilian, 6. 5. 1896 (Stockholm, Schweden), bis 3. 10. 1966 (Stockholm, Schweden)
https://de.wikipedia.org/wiki/Rolf_Sievert
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Maximilian_Sievert . 179

Willem de Sitter Sitter, Willem de, 6. 5. 1872 (Sneek, Niederlande), bis 20. 11. 1934 (Leiden, Niederlande)
https://de.wikipedia.org/wiki/Willem_de_Sitter
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Willem_de_Sitter . 568

Hartland Snyder Snyder, Hartland, 1913 (Salt Lake City, Utah, USA) bis 1962,
https://de.wikipedia.org/wiki/Hartland_Snyder. 38

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Lyman Spitzer Spitzer, Lyman Jr., 26. 6. 1914 (Toledo, Ohio, USA) bis 31. 3. 1997 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Lyman_Spitzer
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Lyman_Spitzer . 224

Josef Stefan Stefan, Josef, auch Štefan, Jožef, 24. 3. 1835 (St. Peter bei Ebenthal, heute Klagenfurt, Österreich), bis 7. 1. 1893 (Wien, Österreich)
https://de.wikipedia.org/wiki/Josef_Stefan . 405, 506, 514

Otto Stern Stern, Otto M., 17. 2. 1888 (Sohrau, Oberschlesien, Preusse, heute Żory, Polen), bis 17. 8. 1969 (Berkeley, California, U.S.A.)
https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_(Physiker) . 58, 207

Fritz Straßmann Straßmann, Friedrich Wilhelm «Fritz», 22. 2. 1902 (Boppard, Deutschland) bis 22. 4. 1980 (Mainz, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Fritz_Straßmann
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Fritz_Strassmann . 192, 207

Theophrastos von Eresos Theophrastos von Eresos (Θεόφραστος), 371 v. Chr. (Eresos, Insel Lesbos, Griechenland) bis etwa 287 v. Chr. (Athen, Griechenland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Theophrastos_von_Eresos
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Theophrastus . 430

Jean Thibaud Thibaud, Jean, 12. 5. 1901 (Lyon, Frankreich) bis 22. 5. 1960 (Lyon, Frankreich),
https://de.wikipedia.org/wiki/Jean_Thibaud
oder ausführlicher
https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean_Thibaud. 33

J. J. Thomson Thomson, Joseph John , 18. 12. 1856 (Cheetham Hill bei Manchester, England) bis 30. 8. 1940 (Cambridge, England),
https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_John_Thomson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/J._J._Thomson . 89

Kip Thorne Thorne, Kip Stephen, 17. 6. 1940 (Logan, Utah, USA
https://de.wikipedia.org/wiki/Kip_Thorne
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Kip_Thorne . 476

Clyde Tombaugh Tombaugh, Clyde William, 4. 2. 1906 (Streator, Illinois, USA) bis 17. 1. 1997 (Las Cruces, New Mexico, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Clyde_Tombaugh
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Clyde_Tombaugh . 422

Richard Q. Twiss Twiss, Richard Quintin, 24. 8. 1920 bis 20. 5. 2005,
https://de.wikipedia.org/wiki/Richard_Twiss
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Q._Twiss . 362

Ernest Walton Walton, Ernest Thomas Sinton, 6. 10. 1903 (Dungarvan, County Waterford, Irland) bis 25. 6. 1995 (Nelfast, Nordirland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ernest_Walton
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernest_Walton . 194

Rainer Weiss Weiss, Rainer «Ray», 29. 9. 1932 (Berlin, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Rainer_Weiss
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Rainer_Weiss . 476

Victor Weisskopf Weisskopf, Victor Frederick 19. 9. 1908 (Wien, Österreich), bis 22. 4. 2002 (Newton, Massachusetts, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Victor_Weisskopf
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Weisskopf . 163, 207

Carl Friedrich von Weizsäcker Weizsäcker, Carl Friedrich von, 28. 6. 1912 (Kiel, Deutschland), bis 28. 4. 2007 (Söcking am Starnberger See, Deutschland)
https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_von_Weizsäcker
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_von_Weizsäcker . 109, 144, 190, 200

Wladimir Weksler Weksler, Wladimir Iossifowitsch, auch Veksler, Vladimir Iosifovič (Векслер, Владимир Иосифович), 4. 3. 1907 (Schytomyr, Russland, heute Ukraine) bis 22. 09. 1966 (Moskau, UdSSR, heute Russland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wladimir_Iossifowitsch_Weksler
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Veksler. 36

Mary Watson Whitney Whitney, Mary Watson, 11. 9. 1847 (Waltham, Massachusetts, USA) bis 21. 1. 1921 (Waltham, Massachusetts, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Mary_Watson_Whitney
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Mary_Watson_Whitney . 499

Rolf Wideröe Wideröe, Rolf, auch Widerøe, Rolf, 11. 7. 1902 (Oslo, Norwegen) bis 16. 2. 1997 (Nussbaumen, Schweiz),
https://de.wikipedia.org/wiki/Rolf_Wideröe
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Widerøe . 35

Wilhelm Wien Wien, Wilhelm «Willy» Carl Werner Otto Fritz Franz, 13. 1. 1864 (Gaffken bei Fischhausen im Samland, Ostpreussen, Preussen, heute Russland) bis 30. 8. 1928 (München, Deutschland),
https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Wien . 90, 511

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Eugene Wigner Wigner, Eugene Paul, auch Wigner Jenő Pál, 17. 11. 1902 (Budapest, Österreich-Ungarn, heute Ungarn) bis 1. 1. 1995 (Princeton, New Jersey, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Eugene_Paul_Wigner
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Wigner . 207, 256

Belinda Wilkens Wilkens, Belinda J., geb. Staffordshire, England,
https://en.wikipedia.org/wiki/Belinda_Wilkes . 561

Robert Wilson Wilson, Robert Woodrow, 10. 1. 1936 (Houston, Texas, U.S.A.),
https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Woodrow_Wilson
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Woodrow_Wilson . 570

Chien-Shiung Wu Wu, Chien-Shiung (吳健雄), 13. 5. 1912 (Liuhe, Taicang, Jiangsu, China) bis 11. 10. 1996 (New York City, New York, USA),
https://de.wikipedia.org/wiki/Chien-Shiung_Wu
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Chien-Shiung_Wu. 288, 289

Anne Young Young, Anne Sewell, 2. 1. 1871 (Bloomington, Wisconsin, USA) bis 15. 8. 1961 (Claremont, California, USA)
https://en.wikipedia.org/wiki/Anne_Sewell_Young . 513

Judith Young Young, Judith S., 15. 9. 1952 bis 23. 5. 2014
https://en.wikipedia.org/wiki/Judith_Young_(astronomer) . 479

Hideki Yukawa Yukawa, Hideki (湯川 秀樹), 23. 1. 1907 (Azabu, Tokio (heute: Minato, Tokio), Japan), bis 8. 9. 1981 (Kyōto, Japan)
https://de.wikipedia.org/wiki/Hideki_Yukawa
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Hideki_Yukawa . 141, 251, 252, 301

Pieter Zeeman Zeeman, Pieter, 25. 5. 1865 (Zonnemaire auf der Insel Schouwen-Duiveland, Zeeland, Niederlande), bis 9. 10. 1943 (Amsterdam, Niederlande)
https://de.wikipedia.org/wiki/Pieter_Zeeman
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Pieter_Zeeman . 132, 436

Ludwig Zehnder Zehnder, Ludwig Louis Albert, 4. 5. 1845 (Illnau, Illnau-Effretikon, Schweiz) bis 24. 3. 1948 (Oberhofen, Schweiz),
https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Zehnder. 347

George Zweig Zweig, George, 30. 5. 1937 (Moskau, Russland),
https://de.wikipedia.org/wiki/George_Zweig
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/George_Zweig . 266

Fritz Zwicky Zwicky, Fritz, 14. 2. 1898 (Warna, Fürstentum Bulgarien, heute Bulgarien) bis 8. 2. 1974 (Pasadena, California, USA)
https://de.wikipedia.org/wiki/Fritz_Zwicky
oder ausführlicher
https://en.wikipedia.org/wiki/Fritz_Zwicky . 509, 567

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Glossar

Astrophysik Die Physik der Sterne und des Weltalls. 18, 19

Ganghöhe Die Ganghöhe ist die Distanz, die sich eine Schraube bei einer Umdrehung um 360° bewegt. Üblicherweise ist dies auch der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gewindefalzen.. 286

Grosse vereinheitlichte Theorie Die grosse vereinheitlichte Theorie, englisch «Grand Unified Theory», abgekürzt GUT, ist ein Versuch, alle drei Wechselwirkungen von Elementarteilchen zu vereinen.. 307, 308

Horizontsystem Das natürliche Koordinatensystem für eine beobachtende Person. Die Werte für einen Stern sind an jedem Ort unterschiedlich. Die erste Koordinate ist die Höhe des Sterns über dem Horizont, oder $90° - z$, wobei z Die Distanz zum Zenit ist. Die zweite Koordinate beschreibt die Lage der Ebene durch die Verbindungslinie Beobachter-Zenit und durch den Stern. Die Koordinate wird von Süden (0°) aus Richtung Westen (90°) gemessen. 365, 366

Isomer Isomer bedeutet am gleichen Platz. Gemeint sind Kerne, die angeregt sind, also die gleiche Neutronen- und Protonenzahl haben, aber wegen der geänderten Bindungsenergie im angeregten Zustand eine leicht andere Masse haben. 89, 166

K-Einfang Elektronen im Grundzustand ($1s$ oder K) haben am Kern eine nicht verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit und können so mit Kernbausteinen eine Teilchenreaktion eingehen. 174, 175

K-Schale die K-Schale bezeichnet Elektronen im Grundzustand ($1s$ oder K). 85

Kernphysik Befasst sich mit Atomen und deren Kernen. Radioaktivität, Kernenergie, Fusion, Periodensystem und die Auswirkungen auf den Mensch sind das Thema. . 18, 19

Radioteleskop Eine in der Regel parabolförmige Spiegelfläche, die die Radiowellen aus einer Richtung auf einen Empfänger konzentriert. 329

Reflektor Teleskop mit einem Spiegel als erstem optischem Element. 326

Refraktor Teleskop mit einer Linse als erstem optischem Element. 326

Swing-By-Manöver Wenn eine Sonde sich einem Planeten ungefähr entlang der Planetenbahn nähert, ist die Relativgeschwindigkeit bei der Annäherung und der Entfernung unterschiedlich. Dazwischen kann die Sonde einen beliebigen

Winkel, besonders einfach ist 180° um den Planeten in dessen Referenzsystem fliegen. Die Geschwindigkeit ist in diesem System bei gleichem Abstand konstant. Bezüglich der Sonne wir aber die Geschwindigkeit des Planeten addiert oder subtrahiert, je nach Annäherungsrichtung. Fliegt die Sonde ursprünglich entgegengesetzt zum Planeten, wird sie beschleunigt, sonst gebremst. Die Energie stammt aus der Gesamtenergie des Planeten. 395

Teilchenphysik Die Physik der Elementarteilchen. Sie behandelt Wechselwirkungen bei hohen Energien (> 1 MeV), mit einigen Ausnahmen und bei kleinen Strukturen (< 1 pm). Die Beobachtungen werden mit fortgeschrittenen mathematischen Methoden beschrieben (Gruppentheorie, Quantenelektrodynamik).. 18, 19

Treibhauseffekt Erhöhung der Oberflächentemperatur durch unterschiedliche spektrale Absorption und Streuung des einfallenden Lichtes der Sonne und des emittierten Lichtes des Himmelskörpers, üblicherweise bei einer längeren Wellenlänge. Der Name kommt vom analogen Effekt in Gewächshäusern. 396

Triangulation Die Bestimmung einer Distanz mit Hilfe der Winkel-Seiten-Sätze für Dreiecke. 372

Winkelvergrösserung Die Vergrösserung des Winkels eines Lichtstrahls zur optischen Achse eines Teleskopes durch optische Elemente. Je grösser der Winkel zur optischen Achse ist, desto grösser ist das Bild auf der Netzhaut des Auges oder auf dem Sensor einer Kamera. 325

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Akronyme

AGN Active Galactic Nucleus. 562

BJD Barycentric Julian Date, gemessen am Schwerpunkt des Sonnensystems von 12:00 UT am Montag den 1. Januar 4713 BC nach dem in die Vergangenheit fortgesetzten Julianischen Kalender oder um 12:00 UT am 24. November 4714 BC im in die Vergangenheit fortgesetzten Gregorianischen Kalender an. Das BJD muss auf der Erde um die Laufzeit des Lichtes ($-500\,\mathrm{s} \leq \Delta t \leq 500\,\mathrm{s}$ korrigiert werden. 503

CERN Centre européenne pour la recherche nucléaire, siehe https://home.cern/. 43, 313

DNA Desoxyribonukleinsäure. 285

ESA European Space Agency, siehe https://www.esa.int. 371, 408, 415, 417–419, 424, 425, 443, 446, 475, 487, 490, 499, 501, 502, 535, 555, 561

ESO European Southern Observatory, siehe https://www.eso.org. 371, 420, 467, 537, 539

FAAS Flame Atomic Absorption Spectroscopy. 186

GUT Grand Unified Theory. 307, 308

IAU International Astronomical Union. 480

ICPAES Inductively coupled plasma atomic emission spectrometry. 186

ICPMS engl. Inductively coupled plasma mass spectrometry. 186

ICPOES Inductively coupled plasma optical emission spectrometry. 186

JAXA Japan Aerospace Exploration Agency, siehe https://global.jaxa.jp/. 438, 439

JD Julian Date, gemessen von 12:00 UT am Montag den 1. Januar 4713 BC nach dem in die Vergangenheit fortgesetzten Julianischen Kalender oder um 12:00 UT am 24. November 4714 BC im in die Vergangenheit fortgesetzten Gregorianischen Kalender. 503

JDN Die aus dem Julianischen Datum JD abgeleitete Tageszahl. 503

LA-ICPMS Laser ablation inductively coupled plasma mass spectrometry. 186

NASA National Aeronautics and Space Administration, siehe https://www.nasa.gov. 326, 332–334, 347, 378, 394–398, 408, 411–428, 430, 434, 436, 438–446, 475, 476, 487, 490, 499, 501, 502, 505, 512, 523, 525, 534, 535, 537, 540, 544, 555, 556, 561, 563, 564

NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration, siehe https://www.noaa.gov. 398, 431

OGLE Optical Gravitational Lensing Experiment. 475, 476, 523

PPARC Particle Physics and Astronomy Research Council, archivierte Webseiten https://web.archive.org/web/20070205222806/http://www.pparc.ac.uk/. 438

QSO Quasi-Stellar Object. 562

QUASAR Quasi-Stellar Radio Source. 560

RAW Roh-Format von Kamera-Sensoren. 485

RMS Root-Mean-Square. 482

SDO Solar Dynamics Observatory, siehe https://www.nasa.gov/mission_pages/sdo/main/index 430, 435, 445

SMD Surface Mass Density, Flächenmassendichte. 543

TXRF Total Reflection X-ray Fluorescence. 186

VLT Very Large Telescope des European Southern Observatory. 467

WIMP Weakly Interacting Massive Particle. 567

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Referenzen

[Abb+16] B. P. Abbott u. a. „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger“. In: *Physical Review Letters* 116.6 (6 Feb. 2016), S. 061102. DOI: 10.1103/physrevlett.116.061102 (siehe S. 476, 477).

[Abb84] E. A. Abbott. *Flatland: A romance of many dimensions*. Seeley, London, 1884. EPUB: https://www.gutenberg.org/ebooks/201.epub.images?session_id=f5ce300da203295ecc6ecb57a70cfba4aa41dd2a. URL: http://www.geom.uiuc.edu/~banchoff/Flatland/ (besucht am 12. 03. 2022) (siehe S. 557).

[Abb12] E. A. Abbott. *Flatland - Eine phantastische Geschichte über viele Dimensionen*. Bautz, Traugott, 31. Dez. 2012. 162 S. ISBN: 3883097675. URL: https://www.ebook.de/de/product/20031322/edwin_a_abbott_flatland_eine_phantastische_geschichte_ueber_viele_dimensionen.html (siehe S. 557).

[Abb21] T. G. Abbott. *Feynman Diagrams in Quantum Mechanics*. 27. März 2021. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.357.7678&rep=rep1&type=pdf (besucht am 27. 03. 2021) (siehe S. 244, 245).

[Abe+17] K. Abe u. a. „Search for proton decay via p→e+π0 and p→μ+π0 in 0.31 megaton·years exposure of the Super-Kamiokande water Cherenkov detector“. In: *Physical Review D* 95.1 (Jan. 2017), S. 012004. DOI: 10.1103/physrevd.95.012004 (siehe S. 251).

[Abi+21] B. Abi u. a. „Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm“. In: *Physical Review Letters* 126.14 (Apr. 2021), S. 141801. DOI: 10.1103/physrevlett.126.141801 (siehe S. 246).

[Abu+18] R. Abuter u. a. „Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole“. In: *Astronomy & Astrophysics* 615 (Juli 2018), S. L15. DOI: 10.1051/0004-6361/201833718 (siehe S. 467).

[ACK10] C. Aerts, J. Christensen-Dalsgaard und D. W. Kurtz. „Asteroseismology“. In: *Nature* (19. Jan. 2010). DOI: 10.1007/978-1-4020-5803-5 (siehe S. 495).

[Aer+03] C. Aerts u. a. „Asteroseismology of HD 129929: Core Overshooting and Nonrigid Rotation“. In: *Science* 300.5627 (2003), S. 1926–1928. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1084993 (siehe S. 495).

[Alb+21a] T. Albahri u. a. „Magnetic-field measurement and analysis for the Muon g-2 Experiment at Fermilab“. In: *Physical Review A* 103.4 (Apr. 2021), S. 042208. DOI: 10.1103/physreva.103.042208 (siehe S. 246).

[Alb+21b] T. Albahri u. a. „Measurement of the anomalous precession frequency of the muon in the Fermilab Muon g-2 Experiment“. In: *Physical Review D* 103.7 (Apr. 2021), S. 072002. DOI: 10.1103/physrevd.103.072002 (siehe S. 246).

[Alv+55] L. W. Alvarez u. a. „Berkeley Proton Linear Accelerator“. In: *Review of Scientific Instruments* 26.2 (1955), S. 111–133. DOI: 10.1063/1.1771253 (siehe S. 33).

[And33] C. D. Anderson. „The Positive Electron“. In: *Physical Review* 43 (6 März 1933), S. 491–494. DOI: 10.1103/PhysRev.43.491 (siehe S. 246).

[Arn+83] G. Arnison u. a. „Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around 95 GeV/c^2 at the CERN SPS collider“. In: *Physics Letters B* 126.5 (Juli 1983), S. 398–410. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90188-0 (siehe S. 302).

[Aus19] Australia Telescope National Facility. *ATNF Pulsar Catalogue*. 2019. URL: http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat (besucht am 16. 11. 2019) (siehe S. 512).

[AEE08] F. T. Avignone, S. R. Elliott und J. Engel. „Double beta decay, Majorana neutrinos, and neutrino mass“. In: *Reviews of Modern Physics* 80.2 (2 Apr. 2008), S. 481–516. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.481 (siehe S. 93).

[BZ34] W. Baade und F. Zwicky. „Cosmic Rays from Super-Novae“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 20.5 (1934), S. 259–263. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.20.5.259. eprint: https://www.pnas.org/content/20/5/259.full.pdf. URL: https://www.pnas.org/content/20/5/259 (siehe S. 509).

[BPB01] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault und S. Basu. „Solar Models: Current Epoch and Time Dependences, Neutrinos, and Helioseismological Properties“. In: *The Astrophysical Journal* 555.2 (Juli 2001), S. 990–1012. DOI: 10.1086/321493 (siehe S. 452, 453).

[BB03] N. A. Bahcall und P. Bode. „The Amplitude of Mass Fluctuations“. In: *The Astrophysical Journal* 588.1 (März 2003), S. L1–L4. DOI: 10.1086/375503 (siehe S. 567).

[Bah16] N. A. Bahcall. „The mass density of the Universe“. In: *Dark Universe: Matter, Energy and Gravity*. Cambridge University Press, 3. März 2016. ISBN: 0521822270. URL: https://www.ebook.de/de/product/3852397/the_dark_universe.html (siehe S. 567).

[Bar18] B. C. Barish. „Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves II“. In: *Review of Modern Physics* 90 (4 Okt. 2018), S. 040502. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.040502. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040502 (siehe S. 477).

[Bar+99] J. Barnstedt u. a. „The ORFEUS II Echelle Spectrometer: Instrument description, performance and data reduction“. In: *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* 134.3 (Feb. 1999), S. 561–567. DOI: 10.1051/aas:1999156 (siehe S. 346).

[Bar21] A. J. Barr. *Feynman-Diagrams*. Oxford University. 15. Juni 2021. URL: http://www-pnp.physics.ox.ac.uk/~barra/teaching/feynman.pdf (siehe S. 245).

[BS51] R. E. Batzel und G. T. Seaborg. „Fission of Medium Weight Elements“. In: *Physical Review* 82 (5 1951). https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.607, S. 607–615. DOI: 10.1142/9789812795953_0089. URL: https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.82.607 (siehe S. 194).

[Bed+11] T. R. Bedding u. a. „Gravity modes as a way to distinguish between hydrogen- and helium-burning red giant stars“. In: *Nature* 471.7340 (März 2011), S. 608–611. DOI: 10.1038/nature09935 (siehe S. 495).

[BG70] G. I. Bell und S. Glasstone. *Nuclear Reactor Theory*. US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States). US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), Okt. 1970. URL: https://www.osti.gov/biblio/4074688 (siehe S. 209, 212, 214).

[BF75] B. L. Berman und S. C. Fultz. „Measurements of the giant dipole resonance with monoenergetic photons“. In: *Reviews of Modern Physics* 47.3 (3 Juli 1975), S. 713–761. DOI: 10.1103/revmodphys.47.713. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.47.713 (siehe S. 138).

[Bet30] H. Bethe. „Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie“. In: *Annalen der Physik* 397.3 (1930), S. 325–400. ISSN: 1521-3889. DOI: 10.1002/andp.19303970303 (siehe S. 155).

[BWW07] K. Bethge, G. Walter und B. Wiedemann. *Kernphysik*. Springer-Verlag GmbH, 13. Nov. 2007. 404 S. ISBN: 9783540745679. URL: https://www.ebook.de/de/product/19292359/klaus_bethge_gertrud_walter_bernhard_wiedemann_kernphysik.html (siehe S. 77).

[Bew+10] D. Bewsher u. a. „Determination of the Photometric Calibration and Large-Scale Flatfield of the STEREO Heliospheric Imagers: I. HI-1“. In: *Solar Physics* 264.2 (Juni 2010), S. 433–460. DOI: 10.1007/s11207-010-9582-8 (siehe S. 504).

[BDD85] M. Bhat, S. Dhurandhar und N. Dadhich. „Energetics of the Kerr-Newman black hole by the penrose process“. In: *Journal of Astrophysics and Astronomy* 6.2 (Juni 1985), S. 85–100. ISSN: 0973-7758. DOI: 10.1007/BF02715080. URL: https://doi.org/10.1007/BF02715080 (siehe S. 471).

[Bid+12] C. M. Bidin u. a. „Kinematical and Chemical Vertical Structure of the Galactic Thick disk. II. A Lack of Dark Matter in the Solar Neighborhood“. In: *The Astrophysical Journal* 751.1 (Mai 2012), S. 30. DOI: 10.1088/0004-637x/751/1/30 (siehe S. 544).

[Ble13] J. Bleck-Neuhaus. *Elementare Teilchen*. 2. Aufl. sowie 978-3-642-32578-6 und 978-3-642-32579-3 (ebook). Berlin: Springer, 2013. ISBN: 3-642-32578-5. DOI: 10.1007/978-3-642-32579-3 (siehe S. 18, 55, 58–64, 73–77, 79, 90, 100, 101, 135–138, 146, 148, 150, 151, 231–233, 244, 251–255, 286, 291, 292, 294, 298, 308, 313, 581).

[BP83] E. D. Bloom und C. W. Peck. „Physics with the crystal ball detector“. In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 33.1 (1983), S. 143–198. DOI: 10.1146/annurev.ns.33.120183.001043 (siehe S. 277).

[Böh11] M. Böhm. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik: eine Einführung in die mathematischen Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Heidelberg, Berlin: Springer, 2011. ISBN: 9783642203794. DOI: 10.1007/978-3-642-20379-4. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=34625891X (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 256, 582).

[Böh58] E. Böhm-Vitense. „Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen“. In: *Zeitschrift für Astrophysik* 46 (Jan. 1958), S. 108. URL: http://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1958ZA.....46..108B (siehe S. 451).

[Bov17] J. Bovy. „Galactic rotation in Gaia DR1“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 468.1 (Feb. 2017), S. L63–L67. ISSN: 1745-3925. DOI: 10.1093/mnrasl/slx027. eprint: http://oup.prod.sis.lan/mnrasl/article-pdf/468/1/L63/10896236/slx027.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/mnrasl/slx027 (siehe S. 532).

[BT12] J. Bovy und S. Tremaine. „Ont the local dark matter density“. In: *The Astrophysical Journal* 756.1 (Aug. 2012), S. 89. DOI: 10.1088/0004-637x/756/1/89 (siehe S. 544).

[Bra28] J. Bradley. „IV. A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and F. R. S. to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 35.406 (Dez. 1728), S. 637–661. DOI: 10.1098/rstl.1727.0064. eprint: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1727.0064 (siehe S. 338).

[BC10] J. Brandes und J. Czerniawski. *Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für Physiker und Philosophen: Einstein- und Lorentz-Interpretation, Paradoxien, Raum und Zeit, Experimente*. 4. Aufl. Karlsbad: Verl. Relativistischer Interpretationen, VRI, 2010. ISBN: 978-3-930879-08-3. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=334001927 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 463, 521, 582).

[Bro+08] I. N. Bronštein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Aufl. QA 40/2008 B. Verlag Harri Deutsch, 2008 (siehe S. 589, 596).

[Bro+49] R. Brown u. a. „Observations with Electron-Sensitive Plates Exposed to Cosmic Radiation“. In: *Nature* 163.4132 (Jan. 1949), S. 47–51. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/163047a0 (siehe S. 246).

[Bru+13] A. S. Brun u. a. „On gravity waves in the Sun“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 440.1 (2013). https://doi.org/10.1088/1742-6596/440/1/012043, S. 012043. DOI: 10.1088/1742-6596/440/1/012043 (siehe S. 447).

[BR17] E. Bulska und A. Ruszczyńska. „Analytical Techniques for Trace Element Determination“. In: *Physical Sciences Reviews* 2.5 (Mai 2017). DOI: 10.1515/psr-2017-8002 (siehe S. 186).

[Bun18] Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz. *Verordnung zum Schutz vor der schädlichen Wirkung ionisierender Strahlung (Strahlenschutzverordnung - StrlSchV)*. Diese Verordnung dient der Umsetzung der Richtlinie 2013/59/Euratom des Rates vom 5. Dezember 2013 zurFestlegung grundlegender Sicherheitsnormen für den Schutz vor den Gefahren einer Exposition gegenüberionisierender Strahlung und zur Aufhebung der Richtlinien 89/618/Euratom, 90/641/Euratom, 96/29/Euratom,97/43/Euratom und 2003/122/Euratom (ABl. L 13 vom 17.1.2014, S. 1) sowie der Umsetzung des Artikels8d der Richtlinie 2009/71/Euratom des Rates vom 25. Juni 2009 über einen Gemeinschaftsrahmen für die nukleare Sicherheit kerntechnischer Anlagen (ABl. L 172 vom 2.7.2009, S. 18), in der durch die Richtliniedes Rates 2014/87/Euratom vom 8. Juli 2014 zur Änderung der Richtlinie 2009/71/Euratom über einenGemeinschaftsrahmen für die nukleare Sicherheit kerntechnischer Anlagen (ABl. L 219 vom 25.7.2014, S. 42) geänderten Fassung. 29. Nov. 2018. URL: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/ethkom/StrlSchV_gesamt__ab_01.01.2019_.pdf (besucht am 27. 01. 2020) (siehe S. 185).

[Cam+18] T. Camarillo u. a. „Median Statistics Estimate of the Distance to the Galactic Center“. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 130.984 (Jan. 2018), S. 024101. DOI: 10.1088/1538-3873/aa9b26 (siehe S. 532).

[Car61] B. C. Carlson. „Ellipsoidal Distributions of Charge or Mass“. In: *Journal of Mathematical Physics* 2.3 (1961), S. 441–450. DOI: 10.1063/1.1703729. eprint: https://doi.org/10.1063/1.1703729. URL: https://doi.org/10.1063/1.1703729 (siehe S. 200, 201).

[CO07] B. W. Carroll und D. A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. englisch. Second. San Franciso, Calif., Munich: Addison-Wesley, San Francisco: Pearson, 2007. ISBN: 0-321-44284-9. DOI: 10.1017/9781108380980. URL: https://ulm.ibs-bw.de/aDISWeb/app?service=direct/0/Home/$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1655295977 (besucht am 13. 10. 2019) (siehe S. 18, 368, 375, 376, 388, 389, 395, 397, 407, 409, 411, 412, 415, 417–420, 422, 423, 426–429, 452–461, 463, 464, 470–473, 481–484, 493–495, 502, 503, 505–514, 517, 518, 520, 539, 561, 562, 566, 575, 576, 578, 581).

[Car68] B. Carter. „Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields“. In: *Physical Review* 174 (5 Okt. 1968), S. 1559–1571. DOI: 10.1103/PhysRev.174.1559 (siehe S. 471).

[CER17a] CERN. *LHC Large Hadron Collider*. http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=allgemeines. 2017. URL: http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=allgemeines (besucht am 14. 11. 2017) (siehe S. 43).

[CER17b] CERN. *Terms of Copyright*. http://copyright.web.cern.ch/. 2017. URL: http://copyright.web.cern.ch/ (besucht am 14. 11. 2017) (siehe S. 43).

[Cha+50] O. Chamberlain u. a. „A Measurement of the Positive π-μ-Decay Lifetime“. In: *Physical Review* 79 (2 1950), S. 394–395. DOI: 10.1103/PhysRev.79.394 (siehe S. 53).

[Cha31] S. Chandrasekhar. „XLVIII. The density of white dwarf stars“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 11.70 (1931), S. 592–596. DOI: 10.1080/14786443109461710. eprint: https://doi.org/10.1080/14786443109461710. URL: https://doi.org/10.1080/14786443109461710 (siehe S. 508).

[Cha+13] S. Chase u. a. 2013. URL: https://www.desy.de/user/projects/Physics/index.html (besucht am 16. 02. 2021) (siehe S. 18).

[Che13] Y. Chen. „A review of recent studies on coronal dynamics: Streamers, coronal mass ejections, and their interactions“. In: *Chinese Science Bulletin* 58.14 (Apr. 2013), S. 1599–1624. DOI: 10.1007/s11434-013-5669-6 (siehe S. 444).

[Che60] P. A. Cherenkov. „Radiation from High-Speed Particles“. In: *Science* 131.3394 (1960), S. 136–142. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.131.3394.136 (siehe S. 48).

[Chr+96] J. Christensen-Dalsgaard u. a. „The Current State of Solar Modeling“. In: *Science* 272.5266 (Mai 1996), S. 1286–1292. DOI: 10.1126/science.272.5266.1286 (siehe S. 445).

[CM14] C. F. Chyba und C. R. Milne. „Simple calculation of the critical mass for highly enriched uranium and plutonium-239“. In: *American Journal of Physics* 82.10 (Okt. 2014), S. 977–979. DOI: 10.1119/1.4885379 (siehe S. 212, 213).

[Coh77] B. L. Cohen. „The Disposal of Radioactive Wastes from Fission Reactors“. In: *Scientific American* 236.6 (1977), S. 21–31. DOI: 10.1038/scientificamerican0677-21. URL: http://www.jstor.org/stable/24954067 (siehe S. 225, 227).

[CR03] T. S. Coleman und M. Roos. „Effective degrees of freedom during the radiation era“. In: *Physical Review D* 68 (2 Juli 2003), S. 027702. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.027702. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.027702 (siehe S. 577).

[Com+16] J.-P. Combe u. a. „Detection of local H2O exposed at the surface of Ceres“. In: *Science* 353.6303 (2016). ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.aaf3010 (siehe S. 394, 421).

[Con+10] A. Conley u. a. „Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First Three Years of the Supernova Legacy Survey“. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.1 (Dez. 2010), S. 1. DOI: 10.1088/0067-0049/192/1/1 (siehe S. 568, 569).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[Con+16] C. J. Conselice u. a. „The Evolution of Galaxy Number Density at $z < 8$ and Its Implications“. In: *The Astrophysical Journal* 830.2 (Okt. 2016), S. 83. DOI: 10.3847/0004-637x/830/2/83. eprint: https://arxiv.org/pdf/1607.03909 (siehe S. 554, 555).

[Cou+19] J. M. C. Court u. a. „The Eclipsing Accreting White Dwarf Z Chameleontis as Seen with TESS“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 488.3 (19. Juli 2019), S. 4149–4160. DOI: 10.1093/mnras/stz2015. arXiv: 1907.08458 [astro-ph.HE] (siehe S. 503).

[Dan+62] G. Danby u. a. „Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos“. In: *Physical Review Letters* 9.1 (Juli 1962), S. 36–44. DOI: 10.1103/physrevlett.9.36 (siehe S. 249, 250).

[DF09] A. Das und T. Ferbel. *Introduction To Nuclear And Particle Physics*. 2. Aufl. sowie 981-238-744-7. New Jersey: World Scientific, 2009. ISBN: 978-981-238-744-8. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=311263771 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 18, 109, 113, 117–120, 190, 191, 292, 293, 581).

[DL93] D. Degenhardt und B. W. Lites. „The magnetohydrodynamics of umbral flux tubes. I - Theoretical model“. In: *The Astrophysical Journal* 404 (Feb. 1993), S. 383. DOI: 10.1086/172287 (siehe S. 440).

[Dem10] W. Demtröder. *Experimentalphysik IV, Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 3. Aufl. Band: 4. Kern-, Teilchen- und Astrophysik : mit ... 68 Tabellen, zahlreichen durchgerechneten Beispielen und 104 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Springer Verlag, 2010. ISBN: 978-3-642-01597-7. URL: https://ulm.ibs-bw.de/aDISWeb/app?service=direct/0/Home/$DirectLink&sp=SOPAC00&sp=SAKSWB-IdNr1381220053 (besucht am 13. 10. 2019) (siehe S. 18, 30–32, 43–48, 53, 67–69, 81–83, 86, 87, 89, 95, 97, 99, 102, 103, 105, 109, 115–117, 122, 123, 125, 126, 132–136, 145, 148, 157, 160, 161, 163, 164, 167, 169, 170, 172, 174, 176, 177, 180–182, 184–188, 190, 191, 195, 197, 200, 202, 209, 246, 249, 269, 271, 276–278, 296, 297, 310, 362, 435, 436, 438, 440, 458–460, 490, 495–498, 500, 527–529, 542, 550, 562, 571–575, 581, 583, 585).

[DSB84] C. R. DeVore, N. R. Sheeley und J. P. Boris. „The concentration of the large-scale solar magnetic field by a meridional surface flow“. In: *Solar physics* 92.1 (1984), S. 1–14. DOI: 10.1007/bf00157230 (siehe S. 440).

[Dic+65] R. H. Dicke u. a. „Cosmic Black-Body Radiation.“ In: *The Astrophysical Journal* 142 (Juli 1965), S. 414. DOI: 10.1086/148306 (siehe S. 570).

[DF28] P. A. M. Dirac und R. H. Fowler. „The quantum theory of the electron“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 117.778 (1928), S. 610–624. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023 (siehe S. 246).

[DB85] J. B. Doggett und D. Branch. „A comparative study of supernova light curves“. In: *The Astronomical Journal* 90 (Nov. 1985), S. 2303. DOI: 10.1086/113934 (siehe S. 501, 506).

[Eck+95] A. Eckart u. a. „High Angular Resolution Spectroscopic AND Polarimetric Imaging of the Galactic-center in the Near-infrared“. English. In: *Astrophysical Journal* 445.1, 2 (1995). http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/187880, S. 23–26. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/187880. URL: http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/187880 (siehe S. 539).

[Edd30] A. S. Eddington. „On the Instability of Einstein's Spherical World“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 90.7 (Mai 1930), S. 668–678. DOI: 10.1093/mnras/90.7.668 (siehe S. 549).

[ES07] J. Eichler und T. Stöhlker. „Radiative electron capture in relativistic ion–atom collisions and the photoelectric effect in hydrogen-like high-Z systems“. In: *Physics Reports* 439.1 (2007), S. 1–99. ISSN: 0370-1573. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.003. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730600442X (siehe S. 85).

[Ein15a] A. Einstein. „Die Feldgleichungen der Gravitation“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin* (Jan. 1915), S. 844–847. DOI: 10.1002/3527608958.ch5 (siehe S. 463, 549).

[Ein15b] A. Einstein. „Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin* (Jan. 1915), S. 831–839. DOI: 10.1002/3527608958.ch4 (siehe S. 463).

[Ein15c] A. Einstein. „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin* (Jan. 1915), S. 778–786. DOI: 10.1002/3527608958.ch23 (siehe S. 463, 549).

[Ein15d] A. Einstein. „Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin* (Jan. 1915), S. 799–801 (siehe S. 463, 549).

[Ein17] A. Einstein. „Zur Quantentheorie der Strahlung“. In: *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917), S. 121–128 (siehe S. 232).

[Eis+05] F. Eisenhauer u. a. „SINFONI in the Galactic Center: Young Stars and Infrared Flares in the Central Light-Month“. In: *The Astrophysical Journal* 628.1 (2005). http://stacks.iop.org/0004-637X/628/i=1/a=246 or https://arxiv.org/abs/astro-ph/0502129, S. 246. DOI: 10.1086/430667. URL: http://stacks.iop.org/0004-637X/628/i=1/a=246 (siehe S. 540).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[Eke+15] Z. Eker u. a. „MAIN–SEQUENCE EFFECTIVE TEMPERATURES FROM A REVISED MASS–LUMINOSITY RELATION BASED ON ACCURATE PROPERTIES“. In: *The Astronomical Journal* 149.4 (März 2015), S. 131. DOI: 10.1088/0004-6256/149/4/131 (siehe S. 378, 379).

[Ell12] U. Ellwanger. *From the universe to the elementary particles : a first introduction to cosmology and the fundamental interactions*. englisch. sowie 3-642-24374-6. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-24374-5. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=35235657X (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 18, 581).

[Ell15] U. Ellwanger. *Vom Universum zum Elementarteilchen*. 3. Aufl. sowie 3-662-46645-7 und 978-3-662-46646-9 (ebook). Heidelberg: Springer, 2015. ISBN: 978-3-662-46645-2. DOI: 10.1007/978-3-662-46646-9 (siehe S. 18, 71, 72, 237, 244, 302, 310–312, 572, 581).

[ESA22] ESA. *Variable Stars*. 15. März 2022. URL: https://www.cosmos.esa.int/web/hipparcos/variable-stars (siehe S. 499).

[Esp21] F. Espenak. *Planetary Ephemeris Data*. 27. Feb. 2021. URL: http://astropixels.com/ephemeris/ephemeris.html (siehe S. 582).

[EUR18] EUROfusion consortium+. *Eurofusion*. https://www.euro-fusion.org/. 2018. URL: https://www.euro-fusion.org/ (siehe S. 220).

[EM62] J. W. Evans und R. Michard. „Observational Study of Macroscopic Inhomogeneities in the Solar Atmosphere. III. Vertical Oscillatory Motions in the Solar Photosphere.“ In: *The Astrophysical Journal* 136 (Sep. 1962), S. 493. DOI: 10.1086/147403 (siehe S. 444).

[Fer33] E. Fermi. „Versuch einer Theorie der β-Strahlen.“ In: *La Ricerca Scientifica* 2.12 (1933). DOI: 10.1007/bf01351864 (siehe S. 172).

[Fer34] E. Fermi. „Versuch einer Theorie der β-Strahlen.“ In: *Zeitschrift für Physik* 88 (1934), S. 161. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01351864 (siehe S. 172).

[Fli12] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Bd. 7. Springer, 2012. ISBN: 978-3-8274-3031-1. DOI: 10.1007/978-3-8274-3032-8 (siehe S. 18, 463, 468, 469, 471, 521).

[For21] L. H. Ford. „Cosmological particle production: a review“. In: *Reports on Progress in Physics* 84.11 (Okt. 2021), S. 116901. DOI: 10.1088/1361-6633/ac1b23. URL: https://doi.org/10.1088/1361-6633/ac1b23 (siehe S. 573).

[FT37] I. Frank und I. Tamm. In: *Comptes Rendus Acad. Sciences U.R.S.S.* 14 (1937), S. 109 (siehe S. 49).

[Fre21] F. Freistetter. *Epsilon-Tensor*. Spektrum. 18. Juni 2021. URL: https://www.spektrum.de/kolumne/epsilon-tensor-warum-kompliziert-manchmal-einfacher-ist/1855837 (besucht am 18. 06. 2021) (siehe S. 263).

[Fre04] J. Freund. *Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2004. DOI: 10.3218/3694-7 (siehe S. 23).

[Fro21] F. Frommberger. *Particle Accelerators Around the World*. 23. Apr. 2021. URL: http://www-elsa.physik.uni-bonn.de/accelerator_list.html (siehe S. 44).

[GCM11] P. T. Gallagher, E. Carley und A. McCloskey. *Solar Images of Today*. School of Physics, Trinity College Dublin. 2011. URL: https://solarmonitor.org/ (besucht am 22. 04. 2022) (siehe S. 430).

[Gam28] G. Gamow. „Zur Quantentheorie des Atomkernes“. In: *Zeitschrift für Physik* 51.3 (1928), S. 204–212. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01343196. URL: https://doi.org/10.1007/BF01343196 (siehe S. 157, 158).

[Gar94] R. F. Garrison. „A Hierarchy of Standards for the MK Process“. In: *The MK Process at 50 Years: A Powerful Tool for Astrophysical Insight*. Hrsg. von C. J. Corbally, R. O. Gray und R. F. Garrison. Bd. 60. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. Jan. 1994, S. 3. (Besucht am 07. 11. 2019) (siehe S. 429).

[GN11] H. Geiger und J. M. Nuttall. „The ranges of the α particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation“. In: *Philosophical Magazine*. Series 6 130 (vol. 22 1911), S. 613–621 (siehe S. 156, 157, 160).

[Gel64] M. Gell-Mann. „A schematic model of baryons and mesons“. In: *Physics Letters* 8.3 (1964), S. 214–215. DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3 (siehe S. 266).

[GMB54] W. Gentner, H. Maier-Leibnitz und W. Bothe. *An atlas of typical expansion chamber photographs (Atlas typischer Nebelkammerbilder)*. Pergamon, London, 1954. 199 pages (siehe S. 154).

[Gen+18] R. Genzel u. a. *First Successful Test of Einstein's General Relativity Near Supermassive Black Hole. Culmination of 26 years of ESO observations of the heart of the Milky Way*. 26. Juli 2018. URL: https://www.eso.org/public/news/eso1825/ (besucht am 11. 03. 2022) (siehe S. 467).

[Gla75] S. L. Glashow. „Quarks with color and flavor“. In: *Scientific American* 233 (1975), S. 38–50. DOI: 10.1038/scientificamerican1075-38 (siehe S. 278).

[GJ55] M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen. *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*. Structure of matter series. John Wiley & Sons, 1955. URL: http://books.google.de/books?id=9g9RAAAAMAAJ (siehe S. 120, 124).

[GJ61] M. Goeppert Mayer und J. H. D. Jensen. „Nuclear shell structure“. In: *Modern Physics for the Engineer* (1961) (siehe S. 124).

[Goe50a] M. Goeppert Mayer. „Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. i. empirical evidence“. In: *Physical Review* 78.1 (1950), S. 16. DOI: 10.1103/physrev.78.16 (siehe S. 124).

[Goe50b] M. Goeppert Mayer. „Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. II. Theoretical considerations“. In: *Physical Review* 78.1 (1950), S. 22. DOI: 10.1103/physrev.78.22 (siehe S. 124).

[Goe64] M. Goeppert Mayer. „The shell model“. In: *Science* 145.3636 (1964), S. 999–1006. DOI: 10.1126/science.145.3636.999 (siehe S. 124).

[GJ60] M. Goeppert Mayer und H. D. Jensen. *Elementary theory of nuclear shell structure*. Wiley, 1960 (siehe S. 124).

[GSZ80] F. Gondolatsch, S. Steinacker und O. Zimmermann. *Astronomie*. Klett, Stuttgart, 1980 (siehe S. 491, 492, 507).

[GJ17] J. Grotzinger und T. Jordan. *Press/Siever Allgemeine Geologie*. Springer, Jan. 2017. ISBN: 978-3-662-48341-1. DOI: 10.1007/978-3-662-48342-8. URL: http://link.springer.com/openurl/pdf?id=doi%5C:10.1007/978-3-662-48342-8_1:PDF (siehe S. 18, 188, 399–407, 409, 411).

[GSI21] GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH. *Erzeugung neuer Elemente*. 30. Mai 2021. URL: https://www.gsi.de/forschungbeschleuniger/forschung_ein_ueberblick/neue_elemente/erzeugung (siehe S. 225).

[Had+05] B. Hadinia u. a. „First identification of excited states inTe106and evidence for isoscalar-enhanced vibrational collectivity“. In: *Physical Review C* 72.4 (Okt. 2005), S. 041303. DOI: 10.1103/physrevc.72.041303 (siehe S. 138).

[HS39] O. Hahn und F. Strassmann. „Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle“. German. In: *Naturwissenschaften* 27.1 (1939). https://doi.org/10.1007/BF01488241, S. 11–15. ISSN: 0028-1042. DOI: 10.1007/BF01488241. URL: %5Curl%7Bhttps://link.springer.com/article/10.1007/BF01488241%7D (siehe S. 192, 207).

[Hal+19] G. E. Hale u. a. „The Magnetic Polarity of Sun-Spots“. In: *The Astrophysical Journal* 49 (Apr. 1919), S. 153. DOI: 10.1086/142452 (siehe S. 437, 440).

[HDA67] R. Hanbury Brown, J. Davis und L. R. Allen. „The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory-I: A Description of The Instrument and the Observational Procedure“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 137.4 (1967), S. 375–392. DOI: 10.1093/mnras/137.4.375. eprint: http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/375.full.pdf+html. URL: http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/375.abstract (siehe S. 362, 363).

[HT57] R. Hanbury Brown und R. Q. Twiss. „Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light. I. Basic Theory: The Correlation between Photons in Coherent Beams of Radiation“. English. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 242.1230 (1957). http://www.jstor.org/stable/100432, S. 300–324. URL: http://www.jstor.org/stable/100432 (siehe S. 362, 363).

[Han+67] R. Hanbury Brown u. a. „The Stellar Interferometer at Narrabri Observatory-II: The Angular Diameters of 15 Stars“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 137.4 (1967), S. 393–417. DOI: 10.1093/mnras/137.4.393. eprint: http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/393.full.pdf+html. URL: http://mnras.oxfordjournals.org/content/137/4/393.abstract (siehe S. 362, 363).

[HE22] J. de Haro und E. Elizalde. „Topics in Cosmology—Clearly Explained by Means of Simple Examples“. In: *Universe* 8.3 (März 2022), S. 166. DOI: 10.3390/universe8030166 (siehe S. 570).

[Har76] E. R. Harrison. „Electrified black holes“. In: *Nature* 264.5586 (Dez. 1976), S. 525–528. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/264525a0. URL: https://doi.org/10.1038/264525a0 (siehe S. 471).

[Hat15] D. H. Hathaway. „The Solar Cycle“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 12.1 (2015). https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4, S. 4. ISSN: 1614-4961. DOI: 10.1007/lrsp-2015-4. URL: https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4 (siehe S. 434).

[Haw74] S. W. Hawking. „Black hole explosions?“ In: *Nature* 248.5443 (März 1974), S. 30–31. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/248030a0. URL: https://doi.org/10.1038/248030a0 (siehe S. 473).

[Hec05] E. Hecht. *Optik*. 4. Aufl. Übersetzt von Dr. Anna Schleitzer. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005. ISBN: 3-486-27359-0. DOI: 10.1515/9783110526653 (siehe S. 321, 323, 347, 348, 351, 353–355, 361).

[Hei54] W. Heitler. *The quantum Theory of Radiation*. Oxford University Press, Oxford, 1954 (siehe S. 85).

[Hes06] J. W. T. Hessels. „A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz“. In: *Science* 311.5769 (März 2006), S. 1901–1904. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1123430 (siehe S. 512).

[Heu17] A. Heusler. „Identification of rotating and vibrating tetrahedrons in the heavy nucleus 208Pb“. In: *The European Physical Journal A* 53.11 (Nov. 2017). DOI: 10.1140/epja/i2017-12416-1 (siehe S. 138).

[Hey17] C. Heymans. *The Dark Universe*. IOP Publishing, 2017. ISBN: 978-0-7503-1373-5. DOI: 10.1088/978-0-7503-1373-5 (siehe S. 18).

[Hin96] Hinsch. *Elektronik*. Springer, 1996. DOI: 10.1007/978-3-642-61469-9 (siehe S. 48).

[Hof97] B. Hoffmann. *Einsteins Ideen: das Relativitätsprinzip und seine historischen Wurzeln*. Spektrum, Akad. Verlag, 1997. ISBN: 9783827402523. URL: https://books.google.de/books?id=tqGVAAAACAAJ (siehe S. 23, 463).

[Hof57] R. Hofstadter. „Nuclear and Nucleon Scattering of High-Energy Electrons“. In: *Annual Review of Nuclear Science* 7.1 (1957), S. 231–316. DOI: 10.1146/annurev.ns.07.120157.001311 (siehe S. 94, 96, 114).

[Hof61] R. Hofstadter. *The electron-scattering method and its application to the structure of nuclei and nucleons*. Internet. The Nobel Prize in Physics 1961, https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/hofstadter-lecture.pdf. Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014, 1961. URL: %5Curl%7Bhttps://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/hofstadter-lecture.pdf%7D (siehe S. 96).

[Hol74] A. Holmes-Siedle. „The space-charge dosimeter“. In: *Nuclear Instruments and Methods* 121.1 (Okt. 1974), S. 169–179. DOI: 10.1016/0029-554x(74)90153-0 (siehe S. 183).

[HH89] Horowitz und Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 1989. DOI: 10.1119/1.16385 (siehe S. 32).

[Hub29] E. Hubble. „A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 15.3 (1929), S. 168–173. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.15.3.168. eprint: https://www.pnas.org/content/15/3/168.full.pdf. URL: https://www.pnas.org/content/15/3/168 (siehe S. 551).

[IAU12] IAU Commission 25. *Redefinition of the Astronomic Unit. Resolution B2*. International Astronomical Union. 2012. URL: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2012_English.pdf (siehe S. 368).

[Ili+21] S. D. Ilić u. a. „Recharging process of commercial floating-gate MOS transistor in dosimetry application“. In: *Microelectronics Reliability* (Okt. 2021), S. 114322. DOI: 10.1016/j.microrel.2021.114322 (siehe S. 183).

[Int21] International Astronomic Union. *Measuring the Universe. The IAU and astronomical units*. 1. Apr. 2021. URL: https://www.iau.org/public/themes/measuring/ (siehe S. 368).

[Int17] International Atomic Energy Agency. *Nuclear Data Services - LiveChart of Nuclides*. https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html (2017-11-07). 2017. URL: %5Curl%7Bhttps://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html%7D (besucht am 07. 11. 2017) (siehe S. 160, 166, 169).

[Ipc13] Ipcc - Intergovernmental Panel on Climate Change. *CLIMATE CHANGE 2013: The Physical Science Basis*. 2013. URL: https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/2018/02/WG1AR5_all_final.pdf (besucht am 02. 11. 2019) (siehe S. 401).

[Jac+89] M. K. Jackson u. a. „Electron tunneling time measured by photoluminescence excitation correlation spectroscopy“. In: *Applied Physics Letters* 54.6 (1989), S. 552–554. ISSN: 0003-6951. DOI: 10.1063/1.100928 (siehe S. 161).

[JL78] M. Jacob und P. V. Landshoff. „Large transverse momentum and jet studies“. In: *Physics Reports* 48.4 (1978). https://doi.org/10.1016/0370-1573(78)90177-1, S. 285–350. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90177-1. URL: %5Curl%7Bhttp://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157378901771%7D (siehe S. 268).

[Jea02] J. H. Jeans. „I. The stability of a spherical nebula“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 199.312-320 (Jan. 1902), S. 1–53. DOI: 10.1098/rsta.1902.0012 (siehe S. 487).

[Jep+07] H. B. Jeppesen u. a. „Alpha-decay half-life of 221Fr in different environments“. In: *The European Physical Journal A* 32.1 (2007), S. 31–34. ISSN: 1434-601X. DOI: 10.1140/epja/i2007-10011-9 (siehe S. 155).

[Jia+14] J. Jiang u. a. „Magnetic flux transport at the solar surface“. In: *Space Science Reviews* 186.1-4 (2014), S. 491–523. DOI: 10.1007/978-1-4939-2584-1_17 (siehe S. 440).

[JFT20] J. A. Johnson, B. D. Fields und T. A. Thompson. „The origin of the elements: a century of progress“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 378.2180 (Aug. 2020), S. 20190301. DOI: 10.1098/rsta.2019.0301 (siehe S. 461).

[Joh21] M. Johnson-Groh. *NASA Enters the Solar Atmosphere for the First Time, Bringing New Discoveries*. NASA's Goddard Space Flight Center in Greenbelt, Md. 16. Dez. 2021. URL: https://www.nasa.gov/feature/goddard/2021/nasa-enters-the-solar-atmosphere-for-the-first-time-bringing-new-discoveries (besucht am 16. 12. 2021) (siehe S. 444).

[Kan+15] M. Kanao u. a. „Hinode SOT Plate Scale Reinvestigated by G-Band Images on the 2012 Transit of Venus“. In: *Solar Physics* 290.5 (Mai 2015), S. 1491–1506. DOI: 10.1007/s11207-015-0675-2 (siehe S. 439).

[Kar03] H. Karttunen. *Fundamental Astronomy*. Physics and Astronomy Online Library. Springer, 2003. ISBN: 9783540001799. URL: http://books.google.de/books?id=OEhHqwW-kgQC (siehe S. 498).

[KNS91] J. Kassabov, N. Nedev und N. Smirnov. „Radiation dosimeter based on floating gate MOS transistor“. In: *Radiation Effects and Defects in Solids* 116.1-2 (März 1991), S. 155–158. DOI: 10.1080/10420159108221354 (siehe S. 183).

[KK92] H. Kiefer und W. Koelzer. *Strahlen und Strahlenschutz. Vom verantwortungsbewußten Umgang mit dem Unsichtbaren*. Springer, 1992. ISBN: 978-3-642-77548-2. DOI: 10.1007/978-3-642-77548-2 (siehe S. 182).

[Kik+16] N. Kikuchi u. a. „Atomic scattering factor of the ASTRO-H (Hitomi) SXT reflector around the gold's L edges“. In: *Optics Express* 24.22 (Okt. 2016), S. 25548. DOI: 10.1364/oe.24.025548. URL: http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-22-25548 (siehe S. 331).

[KN29] O. Klein und Y. Nishina. „Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac“. In: 52 (1929), S. 853–868. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/bf01366453 (siehe S. 80).

[Kli13] C. Klinkicht. „CCD-Astrophotografie“. Zulassungsarbeit Lehramt Physik. Universität Ulm, 2013 (siehe S. 487).

[Köl01] M. Kölbl-Ebert. „Inge Lehmann's paper: "P'" (1936)“. In: *Episodes* 24.4 (Dez. 2001), S. 262–267. DOI: 10.18814/epiiugs/2001/v24i4/007 (siehe S. 407, 446).

[Lee73] C.-K. Lee. „Critical Mass Minimization of a Cylindrical Geometry Reactor by Two Group Diffusion Equation“. In: *Nuclear Engineering and Technology* 5 (2 1973), S. 115–131. ISSN: 2234-358X. eprint: https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO197311921645669.pdf (siehe S. 212).

[Lee+06] W. P. Leemans u. a. „GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator“. In: 2 (2006), S. 696–699. ISSN: 1745-2473. DOI: 10.1038/nphys418 (siehe S. 30).

[Leh61] I. Lehmann. „S and the Structure of the Upper Mantle“. In: *Geophysical Journal International* 4.s0 (Dez. 1961), S. 124–138. DOI: 10.1111/j.1365-246x.1961.tb06808.x (siehe S. 407, 446).

[Leh64] I. Lehmann. „On the travel times of P as determined from nuclear explosions“. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.1 (Feb. 1964), S. 123–139. DOI: 10.1785/bssa0540010123. URL: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.1018.5984&rep=rep1&type=pdf (siehe S. 407, 446).

[Leh36] I. Lehmann. „P'“. In: *Publications du Bureau Central International de la Séismologique, Toulouse, France* A14 (1936), S. 87–115 (siehe S. 407, 446).

[Leh87] I. Lehmann. „Seismology in the days of old“. In: *Eos, Transactions American Geophysical Union* 68.3 (1987), S. 33. DOI: 10.1029/eo068i003p00033-02. URL: https://courses.seas.harvard.edu/climate/eli/Courses/EPS281r/Sources/Inner-Core/Lehmann-1988-EOS.pdf (siehe S. 407).

[Leh10] I. Lehmann. „On amplitudes of P near the shadow zone“. In: *Annals of Geophysics* 53.1 (Feb. 2010). DOI: 10.4401/ag-4589 (siehe S. 407).

[Lei64] R. B. Leighton. „Transport of magnetic fields on the sun.“ In: *The Astrophysical Journal* 140 (1964), S. 1547. DOI: 10.1086/148058 (siehe S. 440).

[LNS62] R. B. Leighton, R. W. Noyes und G. W. Simon. „Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.“ In: *The Astrophysical Journal* 135 (März 1962), S. 474. DOI: 10.1086/147285 (siehe S. 444).

[LZY19] C. Li, G. Zhao und C. Yang. „Galactic Rotation and the Oort Constants in the Solar Vicinity“. In: *The Astrophysical Journal* 872.2 (Feb. 2019), S. 205. DOI: 10.3847/1538-4357/ab0104. URL: https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab0104 (siehe S. 532).

[LSS63] J. Lindhardt, M. Scharff und E. Schiøtt. „Range concepts and heavy ion ranges“. In: *Mat. Fys. Medd . Dan. Vid. Selsk* . 33.14 (1963) (siehe S. 155).

[LR05] L. E. Lisiecki und M. E. Raymo. „A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic ?18O records“. In: *Paleoceanography* 20.1 (2005). DOI: 10.1029/2004PA001071 (siehe S. 402).

[Lis99] J. J. Lissauer. „How common are habitable planets?“ In: *Nature* 402 (Dez. 1999), S. C11. DOI: 10.1038/35011503. URL: https://doi.org/10.1038/35011503 (siehe S. 410).

[Loc13] M. Lockwood. „Reconstruction and Prediction of Variations in the Open Solar Magnetic Flux and Interplanetary Conditions“. In: *Living Reviews in Solar Physics* 10.1 (2013). https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-4, S. 4. ISSN: 1614-4961. DOI: 10.12942/lrsp-2013-4. URL: https://doi.org/10.12942/lrsp-2013-4 (siehe S. 431, 432, 435).

[Loh92] E. Lohrmann. *Hochenergiephysik*. deutsch. 4. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1992. ISBN: 3-519-33043-1. DOI: 10.1007/978-3-322-80175-3. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=027687368 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 581).

[Lym37] E. M. Lyman. „The Beta-Ray Spectra of Radium E and Radioactive Phosphorus“. In: *Physical Review* 51 (1 1937), S. 1–7. DOI: 10.1103/PhysRev.51.1. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.1 (siehe S. 169).

[Mac12] D. H. Mackay. „The Sun's global magnetic field“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 370.1970 (Juli 2012), S. 3151–3168. DOI: 10.1098/rsta.2011.0536 (siehe S. 440).

[Man+05] R. N. Manchester u. a. „The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue“. In: *The Astronomical Journal* 129.4 (Apr. 2005), S. 1993–2006. DOI: 10.1086/428488. URL: https://doi.org/10.1086/428488 (siehe S. 512).

[Mar21] Marshall Space Flight Center. *Solar Physics*. 31. Mai 2021. URL: https://solarscience.msfc.nasa.gov/the_key.shtml (siehe S. 429).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[Mar09] O. Marti. *Physikalische Elektronik und Messtechnik*. http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf. Universität Ulm, 2009. URL: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physikalischeelektronik/phys_elektr/phys_elektr.pdf (siehe S. 344).

[Mar14] O. Marti. *Mechanik - Vorlesungsskript*. Vorlesungsskripte Othmar Marti. Universität Ulm, 2014, S. 389. URL: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2014/krm-2014.pdf (siehe S. 23–28, 138, 151, 257, 518, 520).

[Mar16] O. Marti. *Elektrizitätslehre*. http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/el-2016/el-2016.pdf. Universität Ulm, 2016. URL: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/el-2016/el-2016-OthmarMarti.epub (siehe S. 31, 39, 40, 65, 161).

[Mar17] O. Marti. *Optik - Vorlesungsskript*. Vorlesungsskripte Othmar Marti. Universität Ulm, 2017, S. 176. URL: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/op-2016-2017/op-2016-2017.pdf (siehe S. 321, 323, 339, 344, 347, 348, 353, 371, 407).

[Mar18] O. Marti. *eigenes Bild*. 2018 (siehe S. 370).

[MG18] O. Marti und M. Gonçalves. *Atomphysik. Vorlesungsskript*. German. gehalten im Sommersemester 2018. Universität Ulm Institut für Experimentelle Physik, 2018. URL: %5Curl%7Bhttp://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/ap-2018/ap-2018.pdf%7D (besucht am 10. 08. 2017). Published, cc-by-sa-4.0 (siehe S. 158, 162).

[MG19] O. Marti und M. Gonçalves. *Atomphysik. Vorlesungsskript*. German. http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/ap-2018/ap-2018.pdf. Universität Ulm Institut für Experimentelle Physik, 2019. URL: %5Curl%7Bhttp://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/ap-2019/ap-2019.pdf%7D (besucht am 11. 10. 2019). Published, cc-by-sa-4.0 (siehe S. 47, 77, 116, 118, 232, 263, 437, 514).

[Mat51] R. L. Mather. „Čerenkov Radiation from Protons and the Measurement of Proton Velocity and Kinetic Energy“. In: *Physical Review* 84 (2 Okt. 1951), S. 181–190. DOI: 10.1103/PhysRev.84.181. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.181 (siehe S. 48–50).

[Max19] G. Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik 85740 Garching. *Aufbau des Röntgensatelliten ROSAT*. 2019. URL: https://projects.mpe.mpg.de/heg/rosat/mission/rosat/payload.html (besucht am 09. 09. 2019) (siehe S. 332).

[May02] T. Mayer-Kuckuk. *Kernphysik : eine Einführung*. 7. Aufl. sowie 978-3-519-13223-3. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner, 2002. ISBN: 3-519-13223-0. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=09839374X (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 581).

[MQ95] M. Mayor und D. Queloz. „A Jupiter-mass companion to a solar-type star“. In: 378 (1995), S. 355–359. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/378355a0 (siehe S. 518, 521).

[McD+21] I. McDonald u. a. „Kepler K2 Campaign 9 – I. Candidate short-duration events from the first space-based survey for planetary microlensing“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 505.4 (Juli 2021), S. 5584–5602. DOI: 10.1093/mnras/stab1377 (siehe S. 475).

[McI94] M. McIrvin. 1994. URL: https://www.desy.de/user/projects/Physics/Quantum/virtual_particles.html (siehe S. 241–243).

[McN65] D. McNally. „The distribution of angular momentum among main sequence stars“. In: *The Observatory* 85 (Aug. 1965), S. 166–169. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1965Obs....85..166M/abstract (siehe S. 513).

[MF39] L. Meitner und O. R. Frisch. „Disintegration of Uranium by Neutrons: a New Type of Nuclear Reaction“. In: *Nature* 143 (1939), S. 239–240. DOI: 10.1038/143239a0 (siehe S. 192, 207).

[Mis11] R. Miskimen. „Neutral Pion Decay“. In: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 61.1 (Nov. 2011), S. 1–21. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102010-130426 (siehe S. 252).

[Mit21] D. P. Mitchell. *Venera 13 Mission zur Venus*. 16. Apr. 2021. URL: http://mentallandscape.com/V_Venera11.htm (siehe S. 397).

[MP99] O. Montenbruck und T. Pfleger. *Astronomie mit dem Personal Computer*. 3. Aufl. Springer Berlin / Heidelberg, 1999. ISBN: 3-540-66218-9. DOI: 10.1007/3-540-35040-3 (siehe S. 581).

[MAG21] M. Z. Mughal, I. Ahmad und J. L. G. Guirao. „Relativistic Cosmology with an Introduction to Inflation“. In: *Universe* 7.8 (Juli 2021), S. 276. DOI: 10.3390/universe7080276 (siehe S. 569).

[Mur01] P. Murdin. *Encyclopedia of astronomy and astrophysics*. Bristol Philadelphia London New York: Institute of Physics Pub. Nature Pub. Group, 2001. ISBN: 0333750888. DOI: 10.1888/033750888. URL: http://www.ency-astro.com/ (siehe S. 454).

[NAS19a] NASA. *Astrometry. Animation*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/5 (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 524).

[NAS19b] NASA. *Direct Imaging. Animation*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/3 (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 524).

[NAS19c] NASA. *Exoplanet Exploration*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/ (besucht am 10. 10. 2019) (siehe S. 512, 513).

[NAS19d] NASA. *How to find habitable planets*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/what-is-an-exoplanet/how-do-we-find-life/ (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 525).

[NAS19e] NASA. *Micro-Lensing. Animation*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/4 (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 522).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[NAS19f] NASA. *Planets*. Internet. https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/. 2019. URL: https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/ (besucht am 04. 10. 2019) (siehe S. 394–397, 409, 411, 414, 415, 417, 419–421, 424, 425, 427, 515).

[NAS19g] NASA. *The radial velocity method. Animation*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/1 (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 519).

[NAS19h] NASA. *Transit Method. Animation*. 2019. URL: https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/2 (besucht am 12. 10. 2019) (siehe S. 521).

[NAS21] NASA. *Solar Dynamics Observatory Website*. 2. Juni 2021. URL: https://sdo.gsfc.nasa.gov/ (siehe S. 429).

[NG16] NASA und Goddard Space Flight Center. *Active Galaxies*. Dez. 2016. URL: https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/active_galaxies1.html (besucht am 22. 07. 2021) (siehe S. 562).

[NG21] NASA und Goddard Space Flight Center. *Clusters of Galaxies*. 22. Juli 2021. URL: https://imagine.gsfc.nasa.gov/science/objects/clusters.html (besucht am 22. 07. 2021) (siehe S. 566).

[NJ22] NASA und Jet Propulsion Laboratory. *Perseverance's Mastcam-Z Captures a Phobos Solar Eclipse*. 20. Apr. 2022. URL: https://www.jpl.nasa.gov/images/pia25179-perseverances-mastcam-z-captures-a-phobos-solar-eclipse (besucht am 22. 04. 2022) (siehe S. 413).

[NJ19] NASA und JPL. *JPL Solar System Dynamics*. Internet. https://ssd.jpl.nasa.gov/. 2019. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/ (besucht am 04. 10. 2019) (siehe S. 394, 421).

[NP22] NASA und D. Pesnell. *The Sun Now*. NASA. 22. Apr. 2022. URL: https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/ (besucht am 22. 04. 2022) (siehe S. 430, 435).

[Nas22] Nasa and ESA. *James Webb Space Telescope*. 14. März 2022. URL: https://www.jwst.nasa.gov/ (besucht am 14. 03. 2022) (siehe S. 570).

[Nas00] M. S. el Naschie. „Heisenberg's critical mass calculations for an explosive nuclear reaction". In: *Chaos, Solitons & Fractals* 11.6 (Mai 2000), S. 987–997. DOI: 10.1016/s0960-0779(99)00110-1 (siehe S. 209).

[Nat17] National Nuclear Data Center. http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/. 2017. URL: http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/ (besucht am 09. 08. 2017) (siehe S. 127, 157, 159, 176, 177, 289).

[Ng+14] C. Ng u. a. „The High Time Resolution Universe pulsar survey - X. Discovery of four millisecond pulsars and updated timing solutions of a further 12". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 439.2 (Feb. 2014), S. 1865–1883. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/stu067 (siehe S. 512).

[NIS21] NIST. *The NIST Reference of Constants, Units and Uncertainty. CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants*. Englisch. Version 2018. NIST. 11. Mai 2021. URL: https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html (besucht am 11. 05. 2021) (siehe S. 135).

[NOA22] NOAA. *Space Weather Prediction Center, National Oceanic and Atmospheric Administration*. 22. Apr. 2022. URL: https://www.swpc.noaa.gov/products/solar-cycle-progression (besucht am 22. 04. 2022) (siehe S. 431).

[ODe+10] S. L. O'Dell u. a. „High-resolution x-ray telescopes". In: *SPIE Proceedings*. Hrsg. von A. M. Khounsary, S. L. O'Dell und S. R. Restaino. SPIE, Aug. 2010. DOI: 10.1117/12.862315 (siehe S. 335).

[Obs19] N. S. Observatory. *Global Oscillation Network Group. Gong-Network*. The National Solar Observatory is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, under a cooperative agreement with the National Science Foundation. 2019. URL: https://gong.nso.edu/ (besucht am 16. 10. 2019) (siehe S. 447).

[Oke74] J. B. Oke. „Absolute Spectral Energy Distributions for White Dwarfs". In: *Astrophysical Journal Supplement,* 27 (Feb. 1974), S. 21. DOI: 10.1086/190287. URL: http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1974ApJS...27...21O/0000021.000.html (besucht am 07. 11. 2019) (siehe S. 375, 429).

[OD03] R. P. Olling und W. Dehnen. „The Oort Constants Measured from Proper Motions". In: *The Astrophysical Journal* 599.1 (Dez. 2003), S. 275–296. DOI: 10.1086/379278. URL: https://doi.org/10.1086/379278 (siehe S. 533).

[Özg+17] Y. Özgüven u. a. „Search for the anomalous electromagnetic moments of tau lepton through electron–photon scattering at CLIC". In: *Nuclear Physics B* 923 (Okt. 2017), S. 475–490. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2017.08.008 (siehe S. 247).

[Pag13] Pages 2k Consortium. „Continental-scale temperature variability during the past two millennia". In: *Nature Geoscience* 6.5 (Apr. 2013), S. 339–346. DOI: 10.1038/ngeo1797 (siehe S. 433).

[Par58] E. N. Parker. „Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields." In: *The Astrophysical Journal* 128 (Nov. 1958), S. 664. DOI: 10.1086/146579 (siehe S. 454).

[Par60] E. N. Parker. „The Hydrodynamic Theory of Solar Corpuscular Radiation and Stellar Winds." In: *The Astrophysical Journal* 132 (Nov. 1960), S. 821. DOI: 10.1086/146985 (siehe S. 454).

[Par79] E. N. Parker. „Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. I-The general nature of the sunspot. II-Aerodynamic drag". In: *The Astrophysical Journal* 230 (1979), S. 905–923. DOI: 10.1086/157150 (siehe S. 440).

[Par20a] Particle Data Group. *Particle Data Groupe Live Viewer*. Hrsg. von e. a. Tabanashi M. 25. Feb. 2020. URL: http://pdglive.lbl.gov/Viewer.action (siehe S. 170, 298).

[Par20b] Particle Data Group. *The Review of Particle Physics*. Hrsg. von e. a. Tabanashi M. 25. Feb. 2020. URL: http://pdg.lbl.gov/ (besucht am 25. 02. 2020) (siehe S. 269, 270, 298).

[Par21] Particle Data Group. *Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and D Functions*. 2021. URL: https://pdg.lbl.gov/2016/reviews/rpp2016-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf (siehe S. 274).

[PZG18] O. Passon, T. Zügge und J. Grebe-Ellis. „Pitfalls in the teaching of elementary particle physics“. In: *Physics Education* (15. Nov. 2018). DOI: 10.1088/1361-6552/aadbc7. arXiv: 1811.06230 [physics.ed-ph] (siehe S. 243).

[PW65] A. A. Penzias und R. W. Wilson. „A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.“ In: *The Astrophysical Journal* 142 (Juli 1965), S. 419. DOI: 10.1086/148307 (siehe S. 570).

[Per17] M. Perez. *Working Toward 'Seamless' Infrared Maps of Titan. NASA Website*. English. NASA. 27. Juli 2017. URL: https://www.nasa.gov/image-feature/jpl/working-toward-seamless-infrared-maps-of-titan (siehe S. 418).

[Pér96] J.-P. Pérez. *Optik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. ISBN: 3-86025-389-1 (siehe S. 321, 347, 348, 353, 355).

[Pet+99] J. R. Petit u. a. „Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica“. In: *Nature* 399.6735 (Juni 1999), S. 429–436. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/20859. URL: https://escholarship.org/content/qt7rx4413n/qt7rx4413n.pdf (besucht am 02. 11. 2019) (siehe S. 403).

[PSW89] K. Pinkau, U. Schumacher und H. G. Wolf. „Fortschritte der Fusionsforschung mit magnetischem Plasmaeinschluß“. In: *Physikalische Blätter* 45 (1989). https://doi.org/10.1002/phbl.19890450202, S. 41–47. DOI: 10.1002/phbl.19890450202. URL: %5Curl%7Bhttps://doi.org/10.1002/phbl.19890450202%7D (siehe S. 224).

[PS81] G. R. Plattner und I. Sick. „Coherence, interference and the Pauli principle: Coulomb scattering of carbon from carbon“. In: *European Journal of Physics* 2.2 (Apr. 1981), S. 109–113. DOI: 10.1088/0143-0807/2/2/008 (siehe S. 79).

[PH70] W. J. Poch und A. G. Holmes-Siedle. „The Long-Term Effects of Radiation on Complementary MOS Logic Networks“. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 17.6 (1970), S. 33–40. DOI: 10.1109/tns.1970.4325764 (siehe S. 183).

[Pot21] T. Potter. *Part II Particle and Nuclear Physics*. 27. März 2021. URL: https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~chpotter/particleandnuclearphysics/mainpage.html (siehe S. 18, 19, 245).

[Pre21] J. Pretz. „Anomale Abweichung“. In: *Physik Journal* 20 (6 Juni 2021), S. 17–18 (siehe S. 246).

[Pyo03] T.-S. Pyo. „IRCS Echelle Spectrograph and Data handling“. In: *Subaru Telescope* (2003). http://spektroskopie.vdsastro.de/files/pdfs/pyo2003.pdf. URL: %5Curl%7Bhttp://spektroskopie.vdsastro.de/files/pdfs/pyo2003.pdf%7D (besucht am 06. 06. 2018) (siehe S. 346).

[Rav+19] A. Ravi u. a. „Probing Dark Matter Using Precision Measurements of Stellar Accelerations“. In: *Physical Review Letters* 123 (9 Aug. 2019), S. 091101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.091101. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.091101 (siehe S. 533, 546).

[Ree15] B. C. Reed. „Note on the minimum critical mass for a tamped fission bomb core“. In: *American Journal of Physics* 83.11 (Nov. 2015), S. 969–971. DOI: 10.1119/1.4931721 (siehe S. 213).

[Ree18] B. C. Reed. „A toy model for the yield of a tamped fission bomb“. In: *American Journal of Physics* 86.2 (Feb. 2018), S. 105–109. DOI: 10.1119/1.5009102 (siehe S. 213).

[Ree84] M. J. Rees. „Black Hole Models for Active Galactic Nuclei“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 22.1 (1984), S. 471–506. DOI: 10.1146/annurev.aa.22.090184.002351. eprint: https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351. URL: https://doi.org/10.1146/annurev.aa.22.090184.002351 (siehe S. 471).

[Ric14] K. Rice. „The Detection and Characterization of Extrasolar Planets“. In: *Challenges* 5.2 (2014), S. 296–323. ISSN: 2078-1547. DOI: 10.3390/challe5020296 (siehe S. 519, 521, 522, 524, 525).

[Rix22] H.-W. Rix. *A Quick Review of Cosmology:The Geometry of Space, Dark Matter, and theFormation of Structure*. Max-Planck-Institute for Astronomy, Munich. 14. März 2022. URL: https://www2.mpia-hd.mpg.de/homes/rix/cosmo.pdf (siehe S. 569).

[Roe18] B. Roeck. *Der Morgen der Welt*. Beck C. H., 2018. 1306 S. ISBN: 978-3-406-74119-7. DOI: 10.17104/9783406741203. URL: https://www.ebook.de/de/product/36295846/bernd_roeck_der_morgen_der_welt.html (besucht am 01. 09. 2019) (siehe S. 3).

[RTF78] V. C. Rubin, N. Thonnard und J. Ford W. K. „Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC“. In: *Astrophysical Journal, Part 2 - Letters to the Editor* 225 (1978). http://articles.adsabs.harvard.edu/full/1978ApJ...225L.107R/L000111.000.html, S. L107–L111. DOI: 10.1086/182804. (Besucht am 06. 02. 2018) (siehe S. 541, 542).

[Sak64] B. Sakita. „Supermultiplets of Elementary Particles“. In: *Physical Review* 136 (6B 1964), B1756–B1760. DOI: 10.1103/PhysRev.136.B1756 (siehe S. 256).

[SE90] H. Scheffler und H. Elsässer. *Physik der Sterne und der Sonne*. BI-Wiss.-Verlag, 1990. ISBN: 9783411141722. URL: http://books.google.de/books?id=xuR-AAAAIAAJ (siehe S. 489).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[Sch19] K. Schilcher. *Quantenelektrodynamik kompakt*. De Gruyter Studium, 2019. 246 S. ISBN: 978-3-11-048858-6. DOI: http://dx.doi.org/10.1515/9783110488593 (siehe S. 18, 582).

[Sch+02] R. Schödel u. a. „A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way“. In: *Nature* 419.6908 (2002). http://dx.doi.org/10.1038/nature01121, S. 694–696. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/nature01121. URL: http://dx.doi.org/10.1038/nature01121 (siehe S. 541).

[Sch16] K. Schwarzschild. „Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie“. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. März 1916, S. 424–434. DOI: 10.1007/978-3-642-58084-0_22 (siehe S. 469).

[Sch15] J. Schwichtenberg. *Physics from Symmetry (Undergraduate Lecture Notes in Physics)*. Springer, 2015. ISBN: 978-3319192000. URL: https://www.amazon.com/Physics-Symmetry-Undergraduate-Lecture-Notes/dp/3319192000?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=3319192000 (besucht am 30. 10. 2017) (siehe S. 18, 23, 582).

[Sch13] J.-M. Schwindt. *Tutorium Quantenphysik*. deutsch. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-642-37791-4. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=393504891 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 55, 256, 272, 581).

[Sei92] P. K. Seidelmann. *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac*. Hrsg. von P. K. Seidelmann. Bd. 30. 07. American Library Association, 1992, S. 30–3807–30–3807. ISBN: 978-1891389450 (siehe S. 19, 368, 369).

[Sei09] A. Seiden. *Particle Physics: A Comprehensive Introduction*. Pearson Education, 2009. ISBN: 9788131728567. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=118641662 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 18, 256, 581).

[SDB85] N. R. Sheeley, C. R. DeVore und J. P. Boris. „Simulations of the mean solar magnetic field during sunspot cycle 21“. In: *Solar Physics* 98.2 (Aug. 1985), S. 219–239. DOI: 10.1007/bf00152457 (siehe S. 440).

[Sim+94] J. I. Simon u. a. „Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 282 (Feb. 1994), S. 663. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994A%5C&A...282..663S/abstract (besucht am 02. 11. 2019) (siehe S. 399, 400).

[Sim90] K. Simonyi. *Kulturgeschichte der Physik*. Akadémiai Kiadó, Budapest und Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin, 1990 (siehe S. 89, 381–384).

[Soa12] D. Soares. „Einstein's static universe“. In: *Revista Brasileira de Ensino de Fisica* 34.1 (17. März 2012), S. 1302. arXiv: 1203.4513 [physics.gen-ph] (siehe S. 549).

[Sof13] Y. Sofue. „Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From Black Hole to Entire Galaxy —“. In: *arXiv.org, e-Print Archive Astrophysics* (2013). DOI: 10.1093/pasj/65.6.118. arXiv: 1307.8241 [astro-ph.GA] (siehe S. 543, 544).

[Sol+04] S. K. Solanki u. a. „Unusual activity of the Sun during recent decades compared to the previous 11,000 years“. In: *Nature* 431.7012 (Okt. 2004). Original data: https://www.ncei.noaa.gov/pub/data/paleo/climate_forcing/solar_variability/solanki2004-ssn.txt, S. 1084–1087. DOI: 10.1038/nature02995 (siehe S. 433).

[Sol21] Solar Observatories Group at Stanford University. *Stanford Solar Center*. 31. Mai 2021. URL: http://solar-center.stanford.edu/about/ (siehe S. 429).

[Spa03] K.-H. Spatschek. *Astrophysik : eine Einführung in Theorie und Grundlagen*. Stuttgart: Teubner, 2003. ISBN: 3-519-00452-6. DOI: 10.1007/978-3-662-63626-8. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=105864617 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 451, 552, 572, 581).

[Spi58] L. Spitzer. „The Stellarator Concept“. In: *Physics of Fluids* 1.4 (1958), S. 253. DOI: 10.1063/1.1705883 (siehe S. 224).

[Sta13] J. Stachel. *Dunkle Materie in der Milchstraße*. German. Deutsche Physikalische Gesellschaft. 2013. URL: https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/physikkonkret/pix/physik_konkret_16.pdf (besucht am 18. 07. 2021) (siehe S. 544, 546).

[Sta14] J. Stachel. *Dunkle Energie – eines der größten Rätsel der Kosmologie*. 2014. URL: https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/physikkonkret/pix/physik_konkret_20.pdf (besucht am 18. 07. 2021) (siehe S. 546, 568, 569).

[Sta+95] P. Staples u. a. „Prompt fission neutron energy spectra induced by fast neutrons“. In: *Nuclear Physics A* 591.1 (1995), S. 41–60. ISSN: 0375-9474. DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00119-L (siehe S. 193).

[SB10] M. Steinmetz und M. Bartelmann. „Dem Dunklen Universum auf der Spur“. In: *Spektrum* (Aug. 2010). URL: https://www.spektrum.de/pdf/suw-2010-08-s032-pdf/1038777?file&_wis=1 (siehe S. 544, 545).

[Sti10a] K. Stierstadt. *Atommüll - wohin damit?* Unter Mitw. von Günther Fischer. Frankfurt M.: Deutsch Harri GmbH, 2010. ISBN: 978-3-8171-1868-7. URL: https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=333126351 (besucht am 16. 10. 2017) (siehe S. 18, 179, 181, 225, 227, 582).

[Sti10b] J. Stillwell. *Naive Lïe Theory*. New York: Springer, 2010. 232 S. ISBN: 9781441926814. URL: http://www.ebook.de/de/product/13974288/john_stillwell_naive_lie_theory.html (besucht am 30. 10. 2017) (siehe S. 18, 256, 257, 582).

[Sul65] D. C. Sullivan. „Transient Radiation-Induced Response of MOS Field Effect Transistors“. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 12.6 (1965), S. 31–37. DOI: 10.1109/tns.1965.4323920 (siehe S. 183).

[Tam39] I. Tamm. In: *Journal of Physics (U.S.S.R.)* 1 (1939), S. 439 (siehe S. 49).

[Tan+18a] C. M. Tan u. a. „LOFAR Discovery of a 23.5 s Radio Pulsar“. In: *The Astrophysical Journal* 866.1 (Okt. 2018), S. 54. ISSN: 1538-4357. DOI: 10.3847/1538-4357/aade88 (siehe S. 512).

[Tan+18b] M. Tanabashi u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Physical Review D* 98 (3 Aug. 2018), S. 030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001 (siehe S. 298).

[Tay97] J. R. Taylor. *An introduction to error analysis : the study of uncertainties in physical measurements*. 2. Aufl. https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?id=060293519, also available on the internet (check legal issues) sowie ISBN 0-935702-75-X und 978-0-935702-75-0. University Science, Sausalito, Calif., 1997. 327 S. ISBN: 0-935702-42-3. DOI: 10.1063/1.882103 (siehe S. 595).

[Tea95] E. Team. *The ExtrasolarPlanets Encyclopaedia*. 1995. URL: http://exoplanet.eu/ (besucht am 10. 10. 2019) (siehe S. 512, 513, 520–522, 524, 526).

[The18] The ITER Organization. *ITER Fusionsreaktor*. https://www.iter.org/. 2018. URL: https://www.iter.org/ (siehe S. 220).

[Tho11] M. Thomson. *Handout 12 : The CKM Matrix and CP Violation*. Cambridge University High Energy Physics. 2011. URL: https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/partIIIparticles/handouts/Handout_12_2011.pdf (besucht am 30. 06. 2021) (siehe S. 296).

[Tho18] K. S. Thorne. „Nobel Lecture: LIGO and gravitational waves III“. In: *Reviews of Modern Physics* 90 (4 Okt. 2018), S. 040503. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.040503. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040503 (siehe S. 477).

[TC17] P. Thyssen und A. Ceulemans. *Shattered symmetry: group theory from the eightfold way to the periodic table*. Oxford University Press, 2017. ISBN: 9780190611392 (siehe S. 18, 582).

[TM04] P. A. Tipler und G. Mosca. *Physik*. 2. Aufl. ISBN-13: 978-3827411648. Spektrum Verlag, 2004. DOI: 10.1007/978-3-8274-2236-1 (siehe S. 348).

[UB91] A. Unsöld und B. Baschek. *Der neue Kosmos*. Springer, 1991. ISBN: 9783540537571. DOI: 10.1007/978-3-642-86155-0. URL: http://books.google.de/books?id=fOSMPwAACAAJ (siehe S. 379, 479, 480).

[UHG14] I. G. Usoskin, Hulot und Y. G. Gallet. *Solar activity reconstructed for 3 millennia : J/A+A/562/L10*. 2014. URL: http://cdsarc.u-strasbg.fr/viz-bin/qcat?J/A%20A/562/L10#/article (besucht am 25. 10. 2021) (siehe S. 432).

[Uso+14] I. G. Usoskin u. a. „Evidence for distinct modes of solar activity“. In: *Astronomy & Astrophysics* 562 (Feb. 2014), S. L10. DOI: 10.1051/0004-6361/201423391 (siehe S. 432).

[VPM20] J. A. Vazquez, L. E. Padilla und T. Matos. In: *Revista Mexicana de Física E* 17.1 Jan-Jun (2020), S. 73–91. DOI: 10.31349/RevMexFisE.17.73. arXiv: 1810.09934 [astro-ph.CO] (siehe S. 575).

[Vek21] F. van der Veken. *Feynman Diagrams Cheat Sheet. S'Cool LAB Summer Camp 2018 - Standard Model of particle phyics II*. English. CERN, Educational Outreach, S'Cool LAB»Events. 11. Juni 2021. URL: https://indico.cern.ch/event/726779/contributions/2991313/attachments/1642566/2726786/CheatSheet.pdf (besucht am 11. 06. 2021) (siehe S. 237).

[Ver19] Verein Astroinfo. *Astronomie.info*. Hrsg. von A. Barmettler. 2019. URL: https://www.astronomie.info/ (besucht am 13. 10. 2019) (siehe S. 582).

[WFH67] R. V. Wagoner, W. A. Fowler und F. Hoyle. „On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures“. In: *Astrophysical Journal* 148 (Apr. 1967), S. 3. DOI: 10.1086/149126 (siehe S. 461, 574).

[Wal68] M. Waldmeier. *Leitfaden der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung*. Verlag Sauerländer Aarau, 1968, S. 90 (siehe S. 371, 596).

[Wal18] A. Walker-Loud. „Dissecting the Mass of the Proton“. In: *Physics* 11 (Nov. 2018), S. 118. DOI: 10.1103/physics.11.118 (siehe S. 281, 282).

[Wam12] J. Wambsganß. *Universum für alle*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-662-56002-0. DOI: 10.1007/978-3-662-56002-0. URL: https://www.ebook.de/de/product/31002836/joachim_wambsganss_universum_fuer_alle.html (siehe S. 18, 582).

[Wan04] E. P. Wang. *Rutherford Scattering of α-Particles*. MIT. 2004. URL: http://web.mit.edu/wangfire/pub8.13/rutherpaper.pdf (siehe S. 90).

[WNS89] Y. M. Wang, A. G. Nash und N. R. Sheeley. „Magnetic Flux Transport on the Sun“. In: *Science* 245.4919 (Aug. 1989), S. 712–718. DOI: 10.1126/science.245.4919.712 (siehe S. 440).

[Wap12] A. H. Wapstra. *Nucleus-Win*. English. Software. http://amdc.in2p3.fr/ , http://amdc.impcas.ac.cn/web/nubdisp_en.html oder https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html. Atomic Mass Data Center, 2012. URL: http://amdc.in2p3.fr/ (siehe S. 127, 144, 191).

[Wat+19] L. L. Watkins u. a. „Evidence for an Intermediate-mass Milky Way fromGaiaDR2 Halo Globular Cluster Motions“. In: *The Astrophysical Journal* 873.2 (März 2019), S. 118. DOI: 10.3847/1538-4357/ab089f (siehe S. 565).

[WA80] R. C. Weast und M. J. Astle, Hrsg. *Handbook of Chemistry and Physics*. Bd. 61. CRC Press, 1980 (siehe S. 298).

[WEI55] H. E. Wegner, R. M. Eisberg und G. Igo. „Elastic Scattering of 40-Mev Alpha Particles from Heavy Elements“. In: *Physical Review* 99.3 (Aug. 1955), S. 825–833. DOI: 10.1103/physrev.99.825 (siehe S. 93).

[Wei+93] C. Weinheimer u. a. „Improved limit on the electron-antineutrino rest mass from tritium β-decay“. In: *Physics Letters B* 300.3 (1993), S. 210–216. ISSN: 0370-2693. DOI: https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90355-L. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390355L (siehe S. 173, 174).

[Wei94] M. Weiss. „Introduction to rf linear accelerators“. In: (1994). DOI: 10.5170/CERN-1994-001.913. URL: http://cds.cern.ch/record/261732 (besucht am 03. 12. 2019) (siehe S. 33).

[Wei18] R. Weiss. „Nobel Lecture: LIGO and the discovery of gravitational waves I“. In: *Reviews of Modern Physics* 90 (4 Dez. 2018), S. 040501. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.040501. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.040501 (siehe S. 477).

[Wei51] V. F. Weisskopf. „Radiative Transition Probabilities in Nuclei“. In: *Physical Review* 83 (5 1951), S. 1073–1073. DOI: 10.1103/PhysRev.83.1073. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.1073 (siehe S. 163).

[Wey21] H. Weyl. *Raum. Zeit. Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*. J. Springer, 1921. URL: http://books.google.de/books?id=eiVMAAAAMAAJ (siehe S. 463, 521).

[WB50] B. G. Whitmore und W. B. Baker. „The Energy Spectrum of Neutrons from a Po—Be Source“. In: *Physical Review* 78.6 (Juni 1950), S. 799–801. DOI: 10.1103/physrev.78.799 (siehe S. 195).

[WF13] M. W. Whitney und C. E. Furness. „Observations of variable stars made during the years 1901-12“. In: *Publications of the Vassar College Observatory* 3 (Jan. 1913), S. i–219. URL: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1913PVasO...3....1W (siehe S. 499).

[Wig37] E. Wigner. „On the Consequences of the Symmetry of the Nuclear Hamiltonian on the Spectroscopy of Nuclei“. In: *Physical Review* 51 (2 1937). https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.106, S. 106–119. DOI: 10.1103/PhysRev.51.106. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.106 (siehe S. 256).

[Wik17] Wikipedia. *Multipolentwicklung*. https://de.wikipedia.org/wiki/Multipolentwicklung. 2017. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Multipolentwicklung (besucht am 11. 11. 2017) (siehe S. 161).

[Wik19a] Wikipedia. *Ceres*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(1)_Ceres (besucht am 09. 10. 2019) (siehe S. 394, 421, 427).

[Wik19b] Wikipedia. *Erde*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Erde (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 409).

[Wik19c] Wikipedia. *Eris*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136199)_Eris (besucht am 09. 10. 2019) (siehe S. 421).

[Wik19d] Wikipedia. *Eris*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136199)_Eris (besucht am 08. 10. 2019) (siehe S. 424).

[Wik19e] Wikipedia. *Haumea*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136108)_Haumea (besucht am 09. 10. 2019) (siehe S. 421).

[Wik19f] Wikipedia. *Haumea*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136108)_Haumea (besucht am 08. 10. 2019) (siehe S. 425).

[Wik19g] Wikipedia. *Jupiter*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Jupiter_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 415).

[Wik19h] Wikipedia. *Makemake*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136472)_Makemake (besucht am 09. 10. 2019) (siehe S. 421).

[Wik19i] Wikipedia. *Makemake*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/(136472)_Makemake (besucht am 08. 10. 2019) (siehe S. 425).

[Wik19j] Wikipedia. *Merkur*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Merkur_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 395).

[Wik19k] Wikipedia. *Mond*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Mond (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 411).

[Wik19l] Wikipedia. *Neptun*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Neptun_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 420).

[Wik19m] Wikipedia. *Pluto*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Pluto (besucht am 09. 10. 2019) (siehe S. 421).

[Wik19n] Wikipedia. *Saturn*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Saturn_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 417).

[Wik19o] Wikipedia. *Serrurier Truss. A construction to compensate gravity*. 2019. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Serrurier_truss (besucht am 17. 10. 2019) (siehe S. 326).

[Wik19p] Wikipedia. *Uranus*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Uranus_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 419).

[Wik19q] Wikipedia. *Venus*. 2019. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Venus_(Planet) (besucht am 07. 10. 2019) (siehe S. 397).

[Wik20] Wikipedia. *Ellipsoid*. 2020. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid (besucht am 02. 02. 2020) (siehe S. 201).

[Wik21a] Wikipedia. *Bahnelemente einer geneigten Ellipsenbahn*. 1. März 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/L%7B%5C%22a%7Dnge_des_aufsteigenden_Knotens (siehe S. 392).

[Wik21b] Wikipedia. *Control rod*. 29. Mai 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Control_rod (siehe S. 209).

[Wik21c] Wikipedia. *Die Himmelsscheibe von Nebra*. 28. Feb. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Himmelsscheibe_von_Nebra (siehe S. 381).

[Wik21d] Wikipedia. *Fraunhofer-Linien*. 3. Juni 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Fraunhoferlinie (siehe S. 587).

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

[Wik21e] Wikipedia. *Geochronologie*. 21. Okt. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Geochronologie (besucht am 21. 10. 2021) (siehe S. 188).

[Wik21f] Wikipedia. *Geschichte der Astronomie*. 28. Feb. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Astronomie#Mesopotamien (siehe S. 381).

[Wik21g] Wikipedia. *Helioseismology*. 3. Juni 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Helioseismology (siehe S. 444).

[Wik21h] Wikipedia. *Kuipergürtel*. 3. Apr. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Kuiperg%7B%5C%22u%7Drtel (siehe S. 425).

[Wik21i] Wikipedia. *Nicols-Prisma*. 14. Dez. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolsches_Prisma (besucht am 14. 12. 2021) (siehe S. 437).

[Wik21j] Wikipedia. *Positronen-Emissions-Tomographie*. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Positronen-Emissions-Tomographie (siehe S. 185).

[Wik21k] Wikipedia. *Stonehenge*. 28. Feb. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Stonehenge (siehe S. 381).

[Wik21l] Wikipedia. *Tal-Qadi Temple*. 28. Feb. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Tal-Qadi_Temple (siehe S. 381).

[Wik22a] Wikipedia. *Arecibo-Observatorium*. 21. Apr. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Arecibo-Observatorium (besucht am 21. 04. 2022) (siehe S. 330).

[Wik22b] Wikipedia. *Fundamentale Wechselwirkung*. 15. Jan. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentale_Wechselwirkung (besucht am 15. 01. 2022) (siehe S. 284, 308).

[Wik22c] Wikipedia. *James Bond 007 – GoldenEye*. 10. Apr. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/James_Bond_007_%E2%80%93_GoldenEye (besucht am 21. 04. 2022) (siehe S. 330).

[Wik22d] Wikipedia. *Quark (Physik)*. 14. Jan. 2022. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Quark_(Physik) (besucht am 14. 01. 2022) (siehe S. 280).

[WE87] B. J. Wilkes und M. Elvis. „Quasar energy distributions. I - Soft X-ray spectra of quasars“. In: *The Astrophysical Journal* 323 (Dez. 1987), S. 243. DOI: 10.1086/165822. URL: http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:30248672 (siehe S. 561).

[Wil21] D. R. Williams. *Earth Fact Sheet*. Hrsg. von NASA. 26. Feb. 2021. URL: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html (siehe S. 338).

[Wil76] H. Willkomm. *Altersbestimmungen im Quartär*. Thiemig, 1976 (siehe S. 187, 188).

[Wil18] C. N. A. Willmer. „The Absolute Magnitude of the Sun in Several Filters“. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 236.2 (2018), S. 47. DOI: 10.3847/1538-4365/aabfdf. URL: https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4365/aabfdf (siehe S. 375, 429).

[Wu+57] C. S. Wu u. a. „Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay“. In: *Physical Review* 105 (4 1957), S. 1413–1415. DOI: 10.1103/PhysRev.105.1413 (siehe S. 288, 289).

[Yan+18] Y.-B. Yang u. a. „Proton Mass Decomposition from the QCD Energy Momentum Tensor“. In: *Physical Review Letters* 121.21 (Nov. 2018), S. 212001. DOI: 10.1103/physrevlett.121.212001 (siehe S. 281).

[Yar75] A. Yariv. *Quantum Electronics, 2nd Edition*. John Wiley und Sons, New York., 1975 (siehe S. 323).

[Yon+21] D. Yong u. a. „r-Process elements from magnetorotational hypernovae“. In: *Nature* 595.7866 (Juli 2021), S. 223–226. DOI: 10.1038/s41586-021-03611-2 (siehe S. 506).

[YC19] A. Young und R. M. Candey. *Astronomical Calendar*. Hrsg. von NASA Eclipse Website. 2019. URL: https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SKYCAL/SKYCAL.html (siehe S. 582).

[You01] A. S. Young. „On the Density of the Solar Nebula“. In: *The Astrophysical Journal* 13 (Juni 1901), S. 338. DOI: 10.1086/140826 (siehe S. 513).

[You99] J. S. Young. „The efficiency of star formation in galaxies as a function of galaxy size and environment“. English. In: *Astrophysical Journal* 514.2, 2 (Apr. 1999), S. L87–L90. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/311942 (siehe S. 479).

[Zar+09] R. N. Zare u. a. „High-precision optical measurements of 13C/12C isotope ratios in organic compounds at natural abundance“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106.27 (Juni 2009), S. 10928–10932. DOI: 10.1073/pnas.0904230106 (siehe S. 138).

[Zwe64] G. Zweig. *CERN preprint 8182/TH401 (1964)*. 1964 (siehe S. 266).

[Zwi09] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780521880329. DOI: 10.1017/cbo9780511841620. URL: http://books.google.de/books?id=ih9kI9MEzh0C (siehe S. 256).

[Zyl+20] P. A. Zyla u. a. „Review of Particle Physics“. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2020.8 (Aug. 2020). DOI: https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104. eprint: https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2020/8/083C01/34673722/ptaa104.pdf. URL: https://academic.oup.com/ptep/article/2020/8/083C01/5891211 (siehe S. 170, 171, 274, 296).

[Zyl21] P. A. e. Zyla. *The Review of Particle Physics (2021)*. 28. Juni 2021. URL: https://pdg.lbl.gov/ (siehe S. 107, 280, 296, 298).

Stichwortverzeichnis

äussere Arm, 537
1a
    Supernovae Typ, 377–378
3C273, 563

α-Strahler
    Geiger-Nuttall-Geraden, 155–160
α-Strahlung, 153–160
a und z aus δ und s, 603–604
a, z
    Beziehungen zu φ, δ, s, 603
(α,n)-Reaktion, 195–196
(α,p)-Reaktion, 194–195
A426, 535
A426 (Perseus-Haufen), 555
Abbildung
    direkt
        Exoplaneten, 523–524
Abelsche Lie-Algebra, 258
Aberration, 338
Abfallproblem
    Kernspaltung, 225–227
Ablenkung
    Licht im Gravitationsfeld, 463–465
Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld, 463–465
Abschätzung
    n-p-Abstand, 139–140
Abschattung, 520–521
absolute Magnitude, 374
Absorption
    induziert, 232
Abstand
    n-p
        Abschätzung, 139–140
    Periapsis, 392
Abweichung von der Kugelgestalt
    Bethe-Weizsäcker-Modell, 200–201
additive Gruppe, 256, 261
adiabatisch, 487
AE
    Astronomische Einheit, 368
Äquanten, 383, 384
Äquatorsystem, 366–367
Äquivalenzprinzip, 463
äussere Atmosphäre
    Sonne, 453–456
äussere Linie, 236
Airy-Funktion, 359, 364
Akkretionsscheibe, 562
aktive Galaxie, 560
Aktive Galaxien, 562–564
Aktivierung, 196–197
Aktivierungsquerschnitt, 197
Aktivität, 179, 196–197
Albedo, 405
Alfvén-Welle, 456
Algebra
    Lie, 256–261
        Definition, 257–259
Allgemeine Relativitätstheorie, 19, 463–477
    Gravitationslinse, 473–476
    schwarze Löcher, 470–473
    Schwarzschildlösung, 467–473
Alternative Methoden
    beugung an Kernen, 97
Altersbestimmung, 187–188
Analogien
    Neper, 601
Andromeda-Galaxie, 534, 535, 554, 556, 565
Andromedagalaxie, 555
Anfangsgrösse
    Universum, 570–574
Annihilation, 169
anomales magnetisches Moment
    Elektron, 234
Anregungen

kollektiv, 138
antilinearer Operator, 293
Antimaterie, 298
Antiproton, 78
Antisymmetrisierung, 60
Antiteilchen, 59, 231
Anwendung
Strahlung, 186–188
Approximation
Kerne
Kastenpotential, 114–116
Ariel
Uranusmond, 419
Asdex Upgrade 2, 221
Asteroiden, 412, 420, 426–427
Asteroidengürtel, 426–427
Astrometrie, 524
Astrometrische Doppelsterne, 527
Astronomie, 322
Astronomische Beobachtungen, 321–379
Astronomische Einheit, 368
Astronomisches Dreieck, 603
Koordinatentransformationen, 603–604
Astrophysik
Astronomische Beobachtungen, 321–379
Einleitung, 19
Geschichte, 381–388
Himmelsmechanik und unser Sonnensystem, 381–428
Längenmasse, 368–370
Sonne, 429–461
Universum, 547–579
Atmosphäre
äussere
Sonne, 453–456
Brechung, 371–372
Exoplaneten, 525–526
Atome, 89–142
Gesamtmasse im Vergleich zu Kernen, 110
Atomkerne, 89–97
Atommodell
Rutherford, 89–90
Atomphysik
Atome und Kerne, 89–142
Begriffe, 89
AU
Astronomic Unit
Astronomische Einheit, 368
Auflösung
Teleskop
einzeln, 334–336
Teleskope
interferometrisch gekoppelt, 336–338
aufsteigender Knoten, 392
Auschlussprinzip, 62
Ausschlussprinzip
Pauli, 99
Austauschmodell
Mesonen, 140–142
Austauschteilchen, 575
schwachen Wechselwirkung, 299–303
Starke Wechselwirkung, 275–276
axialer Vektor, 287, 594

β-Strahlung, 167–177
Doppelzerfälle, 167–170
β-Zerfall, 301–302
Fermi-Theorie, 172–174
Positronenemission, 170–172
Bahnparameter
Erde
Exzentrizität, 398–400
Balken, 536
Balkengalaxis, 536
Balmer
Linien, 484
Baryonen, 575
Baryonen-Supermultiplett, 271
Baryonendekuplett, 270
Baryonenoktett, 270
Baryonenzahl, 251, 268, 290
β-Zerfall, 171–172
Isospin, 254–255
Basiszustände, 61
Bausteine
Kern, 106–107
Beauty
Bottomness, 268
Begriffe
Atomphysik, 89
Beispiel

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

elektrisches Dipolmoment
Parität, 287–288
Lie-Algebra, 258
Beobachtungen
Universum, 547–551
BepiColombo, 395
Beryllium, 457, 458
Beschleuniger
Beispiele, 43–44
Betatron, 35–36
linear, 31–33
Synchrotron, 36–42
Teilchen, 23–44
Zyklotron, 33–34
Beschleunigung, 24
relativistisch, 24
Bestimmung des Kernradius, 90–93
β-Zerfällen
Leptonenzahl, 171–172
β-Zerfall
Baryonenzahl, 171–172
Betatron, 35–36
Bethe-Weizsäcker-Gleichung, 109–110
Bethe-Weizsäcker-Modell
Kugelgestalt
Abweichung, 200–201
Beugung
an Kernen, 95–97
alternative Methoden, 97
Bewegung
relativistisch , 23–28
Beziehung
vier Stücke, 599
Beziehung zwischen fünf Stücken
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
Beziehung zwischen vier Stücken
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
Beziehungen
φ, δ, s und z, a, 603
φ, δ, s und z, q, 603
trigonometrischen Funktionen
sphärische Trigonometrie, 596–597
Big Bang, 578
Big-Bang-Theorie, 569–570
Bildung
Planetensysteme, 513–518
Binärsysteme, 526–528
Bindungsenergie, 277
Bindungsenergien
Kern, 124–127
Blasenkammern, 51
blau, 271
Bohrsches Magneton, 58
Bolometer, 373
Boltzmann
Gleichung, 482, 483
Boltzmann-Statistik, 232
Bor, 210, 458
Born'sche Näherung, 74
Bose-Einstein-Statistik, 59
Boson, 233, 575
Higgs, 311, 313, 575
W
reell, 302–303
Z
reell, 302–303
Bosonen, 55–64, 306
Bottomness
Beauty, 268
brauner Zwerg, 475
Brechung in der Atmosphäre, 371–372
Bremsstrahlung, 86
Brennzone, 451
Butterfly Diagram, 434
Schmetterlingsdiagramm, 436

C-Symmetrie
Ladungskonjugation, 291
Carina-Sagittarius-Arm, 537
Castor-Behälter, 226
Cepheiden, 375–376, 499
Čerenkov-Detektoren, 48–50
(1) Ceres, 427
Cetonia aurata, 285
CHANDRA, 540
Chandra, 563
Charm, 268, 271
Quarks, 276–278
Charm-Quark, 276
Charon, 423
Chromosphäre, 453, 456
Chronosphäre, 452
Clebsch-Gordan-Koeffizienten, 274
CNO-Prozess, 459–460

CNO-Zyklus, 459, 496
COBE
Satellit, 537
Coma-Cluster, 567
Coma-Galaxienhaufen, 567
Compton-Effekt, 47, 80, 82, 83
Comptoneffekt, 241
Cooper-Paar, 61
Coronal Streamers, 444
Cosinusseitensatz
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
sphärische Trigonometrie, 598
Cosinuswinkelsatz
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
sphärische Trigonometrie, 598–599
Coulomb
Streuung, 583–586
Coulomb-Potential
Streuung, 74–75
Coulomb-Streuung
klassisch, 583–586
Coulombpotential, 238
CP-Symmetrie, 291–292
CPT-Symmetrie, 294–297
Crux-Scutum-Arm, 536

δ und s aus z und a, 604
δ, φ, s
Beziehungen zu z, a, 603
Beziehungen zu z, q, 603
Dank, 18
Darstellung, 258
Lie-Algebra, 259–260
Darstellung einer Gruppe, 256–257
Definition
Lie-Algebra, 257–259
Parität, 286–288
Δ
Hadron, 253–254
Isospin, 254–255
Δ^0, 270
Δ^+, 271
Dendrochronologie, 188
Detailed Balance, 293
Detektoren, 44–53
Gravitationswellen, 476–477
Halbleiter, 48
Ionisationskammer, 44–46
Spuren, 50–53
Funkenkammer,Mehrdraht, 52–53
Nebelkammer, 51
Photoplatte, 51
Streamerkammer, 52
Szintillatoren, 46–48
Čerenkov, 48–50
Deuteron, 138–142
Diagramm
Hertzsprung-Russell, 492–494
Diagramme
Feynamn, 234–237
Feynman
Rechnen, 243–245
Differenzieller Streuquerschnitt, 73–74
Dione
Saturnmond, 418
Dipolmoment
elektrisch
Beispiel Parität, 287–288
Dirac-Theorie, 58–64
Direkte Abbildung, 523–524
Distanzangabe
ferne Objekte, 551
Distanzmessung, 501
spektroskopisch, 375–379
Distanzmessung mit optischen Methoden, 372–375
Doppelsterne, 378–379, 479
astrometrisch, 527
photometrisch, 528
spektroskopisch, 528
visuell, 527
Doppelzerfälle
β-Strahlung, 167–170
Dopplerverschiebung, 541, 570
Dosimeter, 182–183
elektronisch, 183
Füllhalter, 182
MOS, 183
Dosisleistung, 179
down-Quark, 267
down-Quarks, 271
Drehimpuls, 283, 490–491
Kern, 131–138
Sterne

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Geburt, 490–491
Drehimpulse in 3 Dimensionen
nicht Abelsche Lie-Gruppe, 262–265
drei Quarks
warum?, 272–274
Dreieck
astronomisch, 603
sphärisch
rechtwinklig, 601–602
Druckwellen, 407
Dunkle Energie, 567–569
dunkle Energie, 577
Dunkle Materie, 533, 544–546, 567
Geschwindigkeit der Sterne, 544–546
dunkle Materie, 566, 567, 577
Dysnomia
Eris, 424

Échelle-Spektrometer, 346
Échelle-Spektrometer, 346–347
Effekt
Compton, 80
Zeeman, 436
Eichsymmetrie, 307
Eigenabstand, 469
Eigenzeit, 468
Einfang
K, 174–175
Einheit
Astronomische, 368
Einleitung, 17–19
Astrophysik, 19
Einnschläge von Himmelskörpern
Auswirkungen, 409–410
Einordnung
Exoplaneten, 524–525
Einstein-de Sitter-Modell, 568
Einstein-Notation, 467
Einstein-Ring, 475
Einstein-Tensor, 467
Einteilchenmodelle
Kern, 110–123
Ekliptikales System, 367
elastische Streuung, 70
elektrisches Dipolmoment
Beispiel Parität, 287–288
Elektrisches Moment, 137
Elektrodynamik
Repetition und Erweiterung, 71
elektromagnetische Wechselwirkung, 232, 283
elektromagnetischen Wechselwirkung
Teilchen, 231–250
Elektron, 55, 57, 85, 135, 233–234, 251
magnetisches Moment
anomal, 234
Elektron-Elektron-Streuung, 72–73
Elemente
Entstehung, 460–461
Kohlenstoff, 461
Sauerstoff, 461
Häufigkeit, 460
eliptikale Breite, 367
eliptikale Länge, 367
Ellipsenbahn, 390
Emission
spontan, 232
Energie, 283
dunkel, 567–569
Fermi, 112–114
Energie-Impuls-Erhaltungssatz, 468
Energie-Impuls-Tensor, 467, 468
Energieausbeute, 203
Energiebilanz
radioaktiver Zerfall, 175–176
Energiedosis, 179
Energiegewinn
Synchrotron, 41
Energiehaushalt
Modell
naiv, 448–449
realistischer, 450–451
Energiequellen
Sonne, 457–461
Energieumwandlung, 225
Entstehung
Elemente, 460–461
Planetensysteme, 513–518
Entwicklung
Sterne, 479–512
Epizyklen, 382
Epsilon-Tensor, 55
ϵ-Tensor, 263
Epsilon-Tensordichte, 55
Erdähnliche Planeten

Umgebung, 394–413
Erdachse
Nutation, 398–400
Präzession, 398–400
Erdbahn, 497
Erde, 397–411
Energiefluss
Atmosphäre, 400–404
Mond, 411
Temperaturverteilung, 404–406
Treibhauseffekt, 400–404
Erdinneres, 406–407
Erdmagnetfeld, 407–409
Ergospäre, 472
Erhaltungsgrössen, 192, 305
Erhaltungssätze
Kernreaktionen, 203–205
Erhaltungssatz
Energie-Impuls, 468
Eris, 424
Mond
dysnomia, 424
Eros, 426
ESA, 395
ESO
VLT
GRAVITY, 467
NACO, 467
SINFONI, 467
Etalon, 355
Europa
Jupitermond, 415
Exoplaneten, 512–526
Abschattung, 520–521
Astrometrie, 524
Atmosphäre, 525–526
direkte Abbildung, 523–524
Einordnung, 524–525
Micro-Lensing, 521–523
Exoplanethen
radiale Geschwindigkeitsvariation, 518–520
Experimentelle Beobachtungen
Sonne, 429–447
Experimentelle Hinweise
Quarks, 268–269
Exponentieren einer quadratischen Matrix, 258–259
Extrasolare Körper, 421

φ, δ, s
Beziehungen zu z, a, 603
Beziehungen zu z, q, 603
Füllhalter-Dosimeter, 182
Fabry-Perot-Etalon, 355
Fabry-Perot-Interferometer, 353–361, 364
Fabry-Perot-Resonator, 339
Fabry-Perot-Spektrometer, 361
falsches Vakuum, 579
Familien, 247, 279–282
Leptonen
weitere, 246–250
Quarks und Leptonen, 308–310
Farbindices, 485, 486
Farbkraft, 271
Farbladung, 268, 271, 279, 309, 575
Fazit
Teilchenphysik, 313–317
Feinstrukturkonstante, 86
Feld
Gluonisch, 281
Higgs, 310–313
skalar, 311
vektoriell, 311
Fermat'sches Prinzip, 407
Fermi Gamma-Ray Space Telescope, 563, 564
Fermi-Energie, 112–114
Fermi-Theorie
β-Zerfall, 172–174
Fermigas-Modell
Kern, 112–114
Fermion, 59, 233, 575
Fermionen, 55–64, 306
Ferne Objekte
Distanzangabe, 551
Feynman-Diagramm, 281
Feynman-Diagramme, 234–237
Rechnen, 243–245
Feynman-Graphen
Rechnen, 243–245
Finesse, 361
Finessefaktor, 359, 364
Flächenmassendichte, 543, 544
Flachheits-Problem, 578
Flavour, 279, 315

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Flavour-Quantenzahl, 280
Fluchtbewegung
Isotropie, 550–551
Flugreisen, 180
Fokussierung
stark, 38–41
Formalismus
Isospin, 97–100
Formfaktor
Ladungsverteilung, 76
Fouriertransformierte, 76
Frühes Universum, 575–579
Fraunhofer
namen der Spektrallinien, 586–587
freie Teilchen, 62–63
Funkenkammer
Mehrdraht, 52–53
Spurendetektoren, 52–53
Funkenzähler, 46
Funktionenraum
unendlichdimensional
Isomorphismen, 261
Funktionsweise
Teilchenbeschleuniger, 30–31
Fusion, 219–225
Fusionsreaktor
Roadmap, 224
Stellerator, 224
Fusionsreaktoren, 220–224

γ-Strahlung, 160–166
(n,γ)-Reaktionen, 196
G-Symmetrie, 297–298
Gürtel
Asteroiden, 426–427
galaktische Breite, 368
galaktische Länge, 367
galaktischer Äquator, 367
Galaktisches System, 367–368
Galaktozentrisches System, 368
Galaxie, 479
aktiv, 560
NGC 2770, 378
Galaxien, 553–557
aktiv, 562–564
Struktur, 554–556
Galaxiengruppen, 566
Galaxienhaufen, 535, 564–567
Galaxienklassifikation
Hubble, 556–557
Galilei
Teleskop, 322
Galileitransformation, 384
γ-Strahlung, 226
Ganymed
Jupitermond, 415
Gaspra, 426
Gauss, K.F., 592
Gausssche Gleichungen, 600
Gausssches Gesetz der Elektrodynamik, 373
Geburt
Sterne, 487–491
Drehimpuls, 490–491
Geiger-Nuttall-Geraden
α-Strahler, 155–160
Gekrümmter Raum, 557–562
Grenzwerte, 559–560
geozentrisches Weltbild, 382
Geräte, 321–365
Gerade
Geiger-Nuttall
α-Strahler, 155–160
Gesamtmasse
Kerne und Atome, 110
Geschichte, 381–388
Griechen, 381–383
Kepler, 385–386
Kopernikus, 384–385
Newton, 386–388
Geschwindigkeit, 25
relativistisch, 24
Sterne
Milchstrasse, 541–546
Geschwindigkeitsmessung in der Milchstrasse, 530–531
Geschwindigkeitsverteilung
Milchstrasse, 530–531
Gesetz
Gauss, 542
Hubble, 551
Moseley, 97
Gesetze
Kepler, 385
Zentralmasse, 390–393
Gewebe
Wechselwirkung mit Strahlung, 182–

185
Gewichtsfaktoren, 482
Gitterspektrometer, 339–345
Gleichgung
Boltzmann, 483
Gleichung
Bethe-Weizsäcker, 109–110
Boltzmann, 482
Maxwell-Boltzmann, 481
Saha, 483
Gleichungen
Gauss, 600
Oort, 531–533
Gluonen, 275–276, 279, 308, 575
naomaler Beitrag, 281
gluonisches Feld, 281
Goldene Regel, 150, 244
radioaktiver Zerfall, 148–151
goldene Regel
Fermi, 293
grün, 271
Graphen
Feynman
Rechnen, 243–245
Gravitation, 283, 387
Theorie
Newton, 385
Gravitationsfeld, 466
Licht
Ablenkung, 463–465
Linse, 473–476
Rotverschiebung, 465–467
Gravitationslinse, 473–476
Gravitationswellen
Detektoren, 476–477
Graviton, 307, 308
GRAVITY
ESO
Instrument, 467
Green, G., 593
Grenzwerte
gekrümmter Raum, 559–560
Griechen, 381–383
grosse Halbachse, 387
Grundlagen
Kernreaktionen, 189–203
Gruppe, 256
Lie, 256–261
Gruppen
Darstellung, 256–257
Guide Stars, 371
Guide-Stars, 405
GW190521, 477
Gyroskop, 352

Höhenstrahlung, 188
Hadron
Δ, 253–254
ρ, 253–254
Hadronen, 251–255, 575
Quarks, 269–272
Hafnium, 209
Halbachse
gross, 387
Halbleiterdetektoren, 48
Halbwinkelsätze, 597
Hanbury Brown und Twiss-Interferometer, 362–363
Harmonischer Oszillator, 116
harmonischer Oszillator, 58, 62
Haumea, 424–425
Monde
Hi'iaka, 424
Namaka, 424
Hauptreihe, 491–512
Hauptreihenentwicklung
Hertzsprung-Russell-Diagramm, 495–497
Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie, 597–601
heliozentrisches Weltbild, 382
Helium, 457, 458, 507, 515
Helizität, 289
Hertzsprung-Russell-Diagramm, 492–496, 507
Hauptreihenentwicklung, 495–497
Nachhauptreihenentwicklung, 498–499
Hertzsprung-Russell-Diagramms, 495
Higgs, 306, 575
Boson, 311, 313
Feld, 310–313
Ladung, 311
Higgs-Mechanismus, 310, 311
Hi'iaka
Haumea, 424
Hill-Radius, 517

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Himmelsmechanik, 381–428
Hintergrundsstrahlung, 570
Hintergrundstrahlung, 570, 578
Hinweise
  Literatur, 581–582
Hipparchos, 499
Hofstadter-Streuung, 76–77
Horizontproblem, 578
Horizontsystem, 366
Hubble
  Galaxienklassifikation, 556–557
Hubble-Gesetz, 551
Hubble-Space-Teleskop, 567
Hyperfeinstruktur, 131

Iapetus
  Saturnmond, 418
Ida, 426
Impuls, 283
Impulsübertrag, 73
Impulsoperatoren, 262
Indium, 210
induzierte Emission, 232
Induzierte Spaltung, 192–193
Inelastische Streuung, 191–192
Inflation, 575, 579
Inhalt
  Vorschau, 18–19
Inklination, 392
innere, 236
Innere Konversion, 165
Innere Paarbildung, 165
Instrumente
  Kernphysik, 23–53
  Teilchenphysik, 23–53
Intensität, 350
Interferometer, 347–365
  Fabry-Perot, 353–361
  Hanbury Brown und Twiss, 362–363
  Mach-Zehnder, 347–348
  Michelson, 348–351
    Sterne, 361–362
  Sagnac, 351–353
  Spektrometer, 363–365
  Teleskope, 336–338
Io
  Jupitermond, 415
Ionisationskammer, 44–46
Ionisationszustand, 481, 483
Isobare, 144
Isobarenregel
  Mattauch, 145
Isomere, 166
Isomorphismen, 260
  unendlichdimensionaler Funktionenraum, 261
Isospin, 268
  3-Komponente, 268
  Baryonenzahl, 254–255
  Formalismus, 97–100
  Ladung, 254–255
Isotone, 144
Isotope, 144
Isotopeneffekt
  optische Spektroskopie, 138
Isotropie der Fluchtbewegung, 550–551
ITER, 222
ITER:Tokamak, 221
Iterative Methoden
  Ladungsverteilung im Kern, 95

Jod
  Schilddrüse, 184
Jupiter, 415–416
  Monde, 415–416
    Europa, 415
    Ganymed, 415
    Io, 415
    Kallisto, 415
Jupitermonde, 415–416

K-Einfang, 174, 175
K-Einfang, 174–175
K-Schale, 85
K^0-Mesonen, 294–297
Kadmium, 210
Kallisto
  Jupitermond, 415
Kasten
  würfelförmig, 110–112
Kastenpotential
  sphärisch
    Kern, 114–116
Kategorien
  Kernreaktionen, 191–193
Kathodenstrahlen, 89
Kegelschnitt, 385

Kepler, 385–386
2. Gesetz, 386
3. Gesetz, 386, 387
Ellipsenbahn, 390
Teleskop, 321
Keplersche Gesetze, 385
Zentralmasse, 390–393
Kern
Momente, 135–138
Kerndrehimpulse, 131–132
Kerne, 89–142
Bausteine, 106–107
Beugung
alternative Methoden, 97
Beugung an, 95–97
Bindungsenergien, 124–127
Drehimpuls, 131–138
Einteilchenmodelle, 110–123
Fermigas-Modell, 112–114
Gesamtmasse im Vergleich zu Atomen, 110
Kastenpotential
sphärisch, 114–116
Kräfte, 138–142
Ladungsverteilung, 94–95
Iterative Methoden, 95
Lebensdauer, 148–151
magnetische Momente, 136–137
Masse, 105–106
Massendichteverteilung, 105–106
Modelle, 105–142
Vergleich, 124
radioaktive
natürlich vorkommend, 148
Reaktion
Schwelle, 197–199
Reaktionen, 189–205
Grundlagen, 189–203
stossinduziert, 194–196
Rotation und Schwingung, 127–131
Spaltung
induziert, 192–193
leichte Kerne, 194
stossinduziert, 193–197
Spin, 131–138
Stabilitätskriterien, 145
Statistik, 131–138
Tröpfchenmodell, 107–110
Kernenergie, 207–227
Kernfusion, 219–225
Kernkräfte, 138–142
Kernmagneton, 107, 133
Kernmodelle, 105–142
Kernphysik, 18, 23–53
Fermionen und Bosonen, 55–64
Kernenergie, 207–227
Kernreaktionen, 189–205
Klassische Streutheorie, 583–587
Mensch und Strahlung, 179–188
Radioaktive Strahlung, 153–177
radioaktiverZerfall, 143–151
Streuexperimente, 65–83
Wechselwirkung von Teilchen und Materie, 85–87
Kernradius
Bestimmung, 90–93
Kernreaktionen, 189–205
Erhaltungssätze, 203–205
Grundlagen, 189–203
Kategorien, 191–193
Paritätserhaltung, 204–205
Schwelle, 197–199
stossinduziert, 194–196
Kernreaktoren, 214–219
Kernsaltung
Reaktoren, 214–219
Kernspaltung, 207–219
Abfallproblm, 225–227
spontan, 189
stossinduziert, 193–197
Kernspin, 103, 131
kerntechnische Strahlenbelastung, 181
Kerr-Metrik, 471
Klassifikation
Sterne
Spektren, 480–486
Klassische Methoden, 583–587
Klassische Novae, 503–505
klassische Novae, 502, 504, 505
Klein-Gordon-Gleichung, 252
Kleinere Objekte, 420–428
Klimawandel, 460
Knoten, 235
aufsteigend, 392
Kohärente Überlagerung
Streuung, 77–80

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Kohlenstoff, 461
Entstehung, 461
Kollapszeit, 487
Kollektive Anregungen, 138
Kometen, 420, 427–428
Konjunktion, 392
Konvektionszone, 451
Konversion
innere, 165
Koordinatensysteme, 365–370
Äquatorsystem, 366–367
Ekliptikales System, 367
Galaktisches System, 367–368
Galaktozentrisches System, 368
Horizontsystem, 366
Koordinatentransformationen
Astronomisches Dreieck, 603–604
Kopernikus, 384–385
Korona, 453, 454
Koronaschlaufe, 438
Kosmologie, 569–579
kosmologische Konstante, 468
Kräfte
fundamental, 269
Kern, 138–142
Krümmungsskalar, 468
Krümmungstensor, 468
Kraft, 23–27
Kreisbahn, 387
Kritische Masse, 212–213
Kryostat, 288
Kugelgestalt
Abweichung
Bethe-Weizsäcker-Modell, 200–201
Kugelsternhaufen, 538–539
Kuipergürtel, 420, 421, 425
Objekte, 425–426

Längenmasse
Astrophysik, 368–370
Löcher
schwarze, 470–473
Lösung
Schwarzschild, 467–473
Ladung, 55, 107, 268
Higgs, 311
Isospin, 254–255
Ladungsabhängigkeit
Nukleon-Nukleon-Streuung, 104–105
Ladungskonjugation
C-Symmetrie, 291
Ladungsverteilung
Formfaktor, 76
Kern, 94–95
Iterative Methoden, 95
Lattice QCD, 281
ΛCDM-Modell, 568
Lebensdauer
Kern, 148–151
Neutron, 171
Sterne, 494–495
Lensing
Micro, 521–523
Lepton, 575
τ, 247
Leptonen, 233, 308–310
Leptonenfamilien
Symmetrien, 247–250
weitere, 246–250
Leptonenzahl, 234, 290
β-Zerfall, 171–172
Leuchtkraft
Sterne, 479–480
Levi-Civita-Symbol, 263
Levi-Civita-Tensor, 55
Licht
Gravitationsfeld
Ablenkung, 463–465
Lichtjahr, 369
ly, 369
Lie-Algebra, 256–261
Darstellung, 259–260
Definition, 257–259
Lie-Gruppe, 256–261
nicht Abelsch
3 Dimensionen, 262–265
LIGO, 477
Linearbeschleuniger, 31–33
lineare Operatoren, 257
Linie
äussere, 236
innere, 236
Linienelement, 559
Linse
Gravitation, 473–476

Literaturhinweise, 581–582
lokale Gruppe, 564, 565
London Dispersionskräften, 272
Lorentz-Kurve, 151
Lummer-Gehrcke-Platte, 339
ly
    Lichtjahr, 369

μ
    Myonen, 246–247
M 104, 534
M 31, 534, 535
M32, 556
M32:Zwerggalaxie, 556, 557
Mach-Zehnder-Interferometer, 347–350
Magellansche Wolke
    gross, 538
    klein, 538
Magnesium, 461
Magnetfeld
    Erde, 407–409
    poloidal, 222–223
    Tokamak, 222–223
    toroidal, 222–223
Magnetfelder
    Sonne, 436–444
    Steuerung
      Synchrotron, 42
    Synchrotron
      Steuerung, 42
magnetische Momente
    Kerne, 136–137
magnetisches Moment, 55–58, 265
    Neutron, 266
    Nukleonen, 133–135
Magnetohydrodynamik, 456
Magneton
    Bohr, 58
Magnitude
    absolut, 374
    relativ, 374
Magnituden, 373–375
Makemake, 425
    Mond
      S/2015 (136472) 1, 425
Mannigfaltigkeit, 256
Mars, 411–413
Masse, 23, 25, 26, 55, 388
    Kern, 105–106
    kritisch, 212–213
    Sterne, 479–480
Massenbestimmung
    Zentralkörper, 392–393
Massendichteverteilung
    Kern, 105–106
Massenverteilung
    Spaltprodukte, 202
Massive Sterne, 500–512
Mastcam-Z
    Perseverance, 413
Materie
    dunkel, 533, 567
    Verluste in, 85–86
    Wechselwirkung mit Neutronen, 86–87
    Wechselwirkung mit Teilchen, 85–87
Mathematische Sätze, 589–604
Matrixelement, 150
Matrizen
    Pauli, 56
Mattauch'sche Isobarenregeln, 145
Maxwell-Boltzmann-Gleichung, 481
Maxwellgleichungen, 58
Maxwellsche Gesetze
    erstes Gesetz, 373
Mayor,Michel, 513, 518
medizinische Strahlenbelastung, 180
Mehrdraht-Funkenkammer, 52–53
Mehrere Streuzentren, 75–76
Mehrteilchenmodelle, 123–124
Mensch und Strahlung, 179–188
Merkur, 394–395
Mesonen, 251, 266
    K^0, 294–297
    Pion, 251–253
Mesonen-Austauschmodell, 140–142
MESSENGER, 395
Messung
    Parität, 288–290
Meteoriten, 420
Meteoritenhäufigkeit, 409
Methode
    Rabi, 132–133
    radiale Geschwindigkeitsvariation, 518–520
Methode der radialen Geschwindigkeits-

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

variation, 518–520
Methoden
Streuung, 583–587
Michelson-Interferometer, 348–351
Michelson-Sterninterferometer, 361–362
Micro-Lensing, 521–523
Microlensing, 475
Milanković-Zyklen, 399
Milchstrasse, 467, 530, 533, 534, 536, 538, 565
äussere Arm, 537
Carina-Sagittarius-Arm, 537
Crux-Scutum-Arm, 536
Geschwindigkeit
Sterne, 541–546
Geschwindigkeitsverteilung, 530–531
Orion-Cygnus-Arm, 537
Scutum-Centaurus-Arm, 536
Spiralarme, 533–538
Sterne, 479–546
Struktur, 529–546
Zentrum
Schwarzes Loch, 539–541
Milne-Modell, 568
Mira, 499
Modell
Energiehaushalt
naiv, 448–449
realistischer, 450–451
Mesonenaustausch, 140–142
Modelle
Kern, 105–142
Sonne, 448–461
Moderator, 207, 209
Momente
elektrisch, 137
Kerne, 135–138
magnetisch
Kerne, 136–137
Mond, 411
Erde, 411
Jupiter, 415–416
Pluto
Charon, 423
Saturn, 417–418
Monopol-Problem, 579
Montierung
parallaktisch, 327
Montierung von Teleskopen, 327–328
Moseleysches Gesetz, 97
Mott'sche Streuformel, 78
Mott-Streuung, 79
multiplikative Gruppe, 256
Multipol-Übergänge, 161–165
reziproke Übergangswahrscheinlichkeiten, 164–165
Myonen, 246–247

(α,n)-Reaktion, 195–196
(n,γ)-Reaktionen, 196
$n \to p$, 170–171
n-p-Abstand
Abschätzung, 139–140
Näherung
Born, 74
grad Nabla-Operator, 593
Nabla-Operator, 593
Nachhauptreihenentwicklung
Hertzsprung-Russell-Diagramm, 498–499
NACO
ESO
Instrument, 467
Namaka
Hauma, 424
Namen
Spektrum
Fraunhofer, 586–587
Natürlich vorkommende radioaktive Kerne, 148
natürliche Strahlenbelastung, 179
Natrium, 461
Nebelkammer, 51
Spurendetektoren, 51
Nepersche Analogien, 601
Neptun, 419–420
Mond
Triton, 420
Neptunium-Reihe, 177
Neutrino, 575
Neutrinooszillationen, 460
Neutrinos
Streuung, 301–302
Neutron, 97, 98, 106, 135, 251, 267
Lebensdauer, 171
magnetisches Moment, 266

Neutronen, 275
  sofort, 214
  verzögert, 214
  Wechselwirkung mit Materie, 86–87
Neutronenflussdichte, 196
Neutronenstern, 505
Neutronensterne, 509–511
Neutrons, 270, 271
Newton, 386–388
  Gravitationstheorie, 385
  Teleskop, 322
Newton, Isaac, 322
NGC 1275, 535
NGC 2770
  Galaxie, 378
NGC 3079, 333
NGC 3596, 544
NGC 4151, 563
NGC 4261, 563
Noether'sche Theoreme, 262
Novae, 502–506
  klassisch, 502–505
  Zwergnovae, 502–503, 505
nukleare Prozesse
  Sonne, 457–461
Nukleon, 97, 105
Nukleon-Nukleon-Streuung, 101–105
  Ladungsabhängigkeit, 104–105
  Spinabhängigkeit, 103–104
Nukleonen, 106
  magnetische Momente, 133–135
Nutation
  Erdachse, 398–400

Oberon
  Uranusmond, 419
Objekte
  klein, 420–428
  Kuipergürtel, 425–426
  Universum, 552–557
Objektiv, 321
Ockhams Rasiermesser, 384
offene Sternhaufen, 539
OGLE, 475, 476, 523
OGLE-2015-BLG-1319, 475, 476
Okular, 321
Olbers' Paradox, 547–549
Oort'sche Wolke, 421
Oort'sche Gleichungen, 531–533
Oort'sche Konstanten, 532, 533
  Klassen, 533
  verallgemeinert, 533
  wahr, 533
    lokal, 533
Oort'sche Wolke, 426–428
Operator
  antilinear, 293
  Parität, 286, 287
Opposition, 392
Optical Gravitational Lensing Experiment, 475, 476, 523
Optische Methoden
  Distanzmessung, 372–375
optische Spektroskopie
  Isotopeneffekt, 138
optische Teleskope, 321–328
Orion Nebel, 487
Orion-Cygnus-Arm, 537
Oszillator
  harmonisch, 58, 62, 116

(α,p)-Reaktion, 194–195
$p \to n$, 171
p-n-Abstand
  Abschätzung, 139–140
p-p-Zyklus, 496, 497
P-Wellen, 407
Paarbildung, 81–83
  innere, 165
Paarerzeugung, 81–83
Paradox
  Olbers, 547–549
parallaktische Montierung, 327
Parallax Second
  Parsec, 369–370
Parallaxensekunde
  Parsec, 369–370
Parität, 100–101, 286
  Definition, 286–288
  Messung, 288–290
  Schwache Wechselwirkung, 284–290
Paritätserhaltung, 204–205
  Kernreaktionen, 204–205
Paritätsoperation, 593
Paritätsoperator, 100, 286, 287
Paritätstransformation, 594
Parsec, 369–370

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Pauli-Ausschlussprinzp, 99
Pauli-Matrizen, 56
Pauli-Prinzip, 99–100
Pauliprinzip, 62
Periapsis, 392
Periapsisabstand, 392
Perihel, 392
Permutation, 55
Perseus-Arm, 536
Perseushaufen, 555
Perseverance, 413
  Mastcam-Z, 413
PET
  Positronen-Emissions-Tomographie, 185
Phobos, 413
Phosphor, 461
Photoeffekt, 58, 82, 83, 85
Photometrische Doppelsterne, 528
Photomultiplier, 46
Photon, 55, 57, 58, 232–233, 575
Photonen, 308
Photoplatte, 51
  Spurendetektoren, 51
Photosphäre, 430, 452, 453
Photosynthese, 188
Photozelle, 46
Pion, 189, 251–253
Pionen, 53, 275, 297
Planck
  Strahlungsgesetz, 232
Planck-Länge, 577
Planck-Ladung, 578
Planck-Masse, 577, 578
Planck-Temperatur, 577, 578
Planck-Zeit, 573, 577, 578
Planeten
  erdähnlich, 394–413
    Umgebung, 394–413
  Gas, 414–420
  Riesenplaneten, 414–420
Planetensysteme, 512–526
  Bildung, 513–518
Planetoiden, 421–426
  Pluto, 420
Pluto, 421–423
  Charon, 423
  Mond
    Charon, 420, 423
  Planetoid, 420
Poisson-Verteilung, 147
polarer Vektor, 287, 594
Polarisation
  zirkular, 57
poloidale Magnetfelder, 222–223
Population I, 539
Population II, 539
Positron, 85
Positronen-Emissions-Tomographie
  PET, 185
Positronenemission
  β-Zerfall, 170–172
pp-Prozesse, 457–458
$PP\,I$-Kette, 457, 458
$PP\,II$-Kette, 457
$PP\,III$-Kette, 457
pp-Prozess, 460
Präzession
  Erdachse, 398–400
Primordiale schwarze Löcher, 470
Prinzip
  Pauli, 99–100
Projektil, 74
Proton, 97, 98, 106, 135, 251, 267, 290
  Masse, 281
  Radius, 281
Protonen, 275
Protonenmasse, 281
Protuberanzen, 440
Proxima Centauri, 369
Prozess
  CNO, 459–460
  Triple-α, 458
Prozesse
  pp, 457–458
  Sonne
    nuklear, 457–461
  Stoss, 71–80
Pseudoskalar, 594
Pseudoskalare, 275
Pseudovektor, 594
Pseudozahlen, 287
Psi
  Ψ, 276
Pulsar, 505
Pulsare, 500, 511–512

q, z
Beziehungen zu φ, δ, s, 603
QED, 237–241
Quadrupolmoment, 137–138
Quantenchromodynamik, 281
Quantenelektrodynamik, 237–241
Quantenfeldtheorie, 307, 310
Quantenfluktuationen, 579
Quantenmechanische Behandlung
Streuung, 73–80
Quantenzahl
Flavour, 280
Quantisierung
Basiszustände, 61
zweite, 61, 237–241
Quark
down, 267
See, 280
top, 282
up, 267
valenz, 280
Quark-Kondensat, 281
Quarks, 266–279, 308–310, 575
Charm, 276–278
drei
warum?, 272–274
Experimentelle Hinweise, 268–269
Hadronen, 269–272
Spin, 272–274
Quasar, 560
Quasare, 560–562
Quellen
Strahlung, 153–177
Queloz,Didier, 513, 518

r-Process-Elements, 506
Röntgenstrahlung, 65–66
Röntgenteleskope, 331–334
Rabi-Methode, 132–133
Radiale Geschwindigkeitsvariation, 518–520
Radiale Stabilisierung, 38
Radioaktive Kerne
natürlich vorkommend, 148
Radioaktive Strahlung, 153–177
Altersbestimmung, 187–188
Radioaktive Zerfälle, 143–151
Energiebilanz, 175–176
Gesetze, 146–151
goldene Regel, 148–151
Ketten, 176–177
Typen, 175–176
Radioaktivität
stossinduziert, 196–197
Radioteleskope, 329–330
Rasiermesser
Ockham, 384
Raum
gekrümmt, 557–562
Raumspiegelung, 593
Rayleigh-Streuung, 65–66
Reaktion
(α,n), 195–196
(α,p), 194–195
(n,γ), 196
Reaktionsquerschnitt, 202
Reaktive Streuung, 192
reaktive Streuung, 189
Reaktoren
Fusion, 220–224
Kernspaltung, 214–219
Reaktorunfall, 184
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 601–602
Reell
W- und Z-Bosonen, 302–303
Regulierungen
Strahlung, 185
Reihe
Neptunium, 177
Uran-Actinium, 176
Uran-Radium, 176
Uran-Thorium, 177
Rektaszension, 392
Relation
Stokes, 354
relative Magnitude, 374
Relativistische Bewegung, 23–28
Relativitätstheorie
allgemein, 463–477
Gravitationslinse, 473–476
schwarze Löcher, 470–473
Schwarzschildlösung, 467–473
Renormalisierung, 238
Repetition
Elektrodynamik und Vierervektoren, 71

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Resonanz-Spektroskopie, 136–137
Resonanzen, 151
Rhea
  Saturnmond, 418
ρ
  Hadron, 253–254
  Isospin, 254–255
Riemann-Tensor, 467
Riesenplaneten
  Umgebung, 414–420
Ringe
  Saturn, 417
Roche-Grenze, 503, 517
Rosenkäfer, 285
rot, 271
Rotation
  Kern, 127–131
Rotverschiebung, 379
  Gravitationsfeld, 465–467
Rotverschiebungsparameter, 466
Ruhemasse, 55
Rutherford
  Atommodell, 89–90
  Streuformel, 77
Rutherford-Streuung, 72, 75, 78

s und δ aus z und a, 604
s, φ, δ
  Beziehungen zu z, a, 603
  Beziehungen zu z, q, 603
S-Wellen, 407
S2, 467, 540
S/2015 (136472) 1
  Makemake, 425
Sätze
  mathematisch, 589–604
Sagnac-Interferometer, 351–353
Saha
  Gleichung, 483
Saturn, 417–418
  Monde, 417–418
    Dione, 418
    Iapetus, 418
    Rhea, 418
    Thetis, 418
    Titan, 417
  Ringe, 417
Satz von Gauss, 592
Satz von Green, 593
Satz von Stokes, 593
Sauerstoff, 461, 500
  Entstehung, 461
Schalenmodell, 116–124
Scherwellen, 407
Schilddrüse
  Jod, 184
Schmetterlingsdiagramm, 436
  Butterfly Diagramm, 436
Schrödingergleichung, 73
Schwache Wechselwirkung, 283–303
  Austauschteilchen, 299–303
  Parität, 284–290
schwache Wechselwirkung, 99, 276, 283
Schwarze Löcher, 470–473
Schwarzes Loch, 505, 511
  primordial, 470
  Zentrum Milchstrasse, 539–541
schwarzes Loch, 467
Schwarzschild
  Lösung, 467–473
Schwarzschildlösung, 467–473
Schwefel, 461
Schwelle
  Kernreaktionen, 197–199
Schwerkraft, 387
Schwingung
  Energiegewinn, 41
  Kern, 127–131
  Synchrotron, 41
Scutum-Centaurus-Arm, 536
Seeing, 336, 370
Seequarks, 280
Sehwinkel, 321
Seismik
  Sonne, 444–447
Selbstabbildung, 257
Seltsamkeit, 266, 268
  Strangeness, 268
Siderische Umlaufzeit, 392
Signal-Rausch-Verhältnis, 344, 351
Silber, 210
Silizium, 500
SINFONI
  ESO
    Instrument, 467
Sinussatz
  rechtwinkliges sphärisches Dreieck,

602
sphärische Trigonometri8e, 598
Sirius B, 466
de Sitter-Modell, 568
Skalar, 594
Skalenfaktor, 557, 558
Skalenfaktors, 557, 559
SN 2007 uy
Supernova, 378
SN 2008D
Supernova, 378
sofortige Neutronen, 214
Sombrerogalaxie, 534
Sonne, 385, 413, 429–461, 535, 537
Atmosphäre
äussere, 453–456
Energiequellen, 457–461
Experimentelle Beobachtungen, 429–447
Magnetfelder, 436–444
Modelle, 448–461
Prozesse
nuklear, 457–461
Seismik, 444–447
Struktur
radial, 451–453
Sonnenfinsternis, 413
Sonnenflecken, 413, 430–436
Sonnensystem
unser, 381–428
Sonnenwind, 455
Spaltbarkeitsparameter, 190
Spaltprodukte
Massenverteilung, 202
Spaltung
induziert, 192–193
Spektren
Sterne, 480–486
Spektrometer, 339–347
Échelle, 346–347
Gitter, 339–345
Interferometer, 363–365
Spektroskopie
optisch
Isotopeneffekt, 138
Resonanz, 136–137
Spektroskopische Distanzmessung, 375–379
Spektroskopische Doppelsterne, 528
Spektrum
Namen
nach Fraunhofer, 586–587
speziellen Lie-Gruppe SU(3), 268
Sphärische Trigonometrie, 596–604
sphärische Trigonometrie
Hauptsätze, 597–601
Spin, 55–58, 268
Kern, 131–138
Quarks, 272–274
Spinabhängigkeit
Nukleon-Nukleon-Streuung, 103–104
Spinvektoren, 265
Spinzustand, 265
Spiralarme, 533
Milchstrasse, 533–538
Spiralgalaxie, 555
Spitzer-Weltraumteleskop, 475, 476, 523
spontane Kernspaltung, 189
spontane Symmetriebrechung, 307
Spurendetektoren, 50–53
Blasenkammern, 51
Funkenkammer
Mehrdraht, 52–53
Nebelkammer, 51
Photoplatte, 51
Streamerkammer, 52
Spurenelemente
Suche, 186
Störeinflüsse, 370–372
Störoperator, 149
Stücke
fünf, Beziehung
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
sphärische Trigonometrie, 599
vier, Beziehung
rechtwinkliges sphärisches Dreieck, 602
sphärische Trigonometrie, 599
Stabilisierung
radial, 38
vertikal, 37–38
Stabilitätskriterien
Kerne, 145
Standardmodell, 231, 305–317, 575

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

Standardtheorie, 578
Starke Fokussierung, 38–41
Starke Wechselwirkung, 251–282
  Austauschteilchen, 275–276
starke Wechselwirkung, 106, 251, 276, 283, 297
Stars
  Guide, 371
Statisches Universum
  Unmöglichkeit, 549–550
Statistik
  Kern, 131–138
  Zerfälle, 146–147
Stefan-Boltzmann-Konstante, 514
Stellerator, 224
Stephan-Boltzmann-Gesetz, 405
Sternbild Krebs, 501
Sterne
  Binärsysteme, 526–528
  Drehimpuls
    Geburt, 490–491
  Geburt, 487–491
  Hauptreihe, 491–512
  Hauptreihenentwicklung
    Hertzsprung-Russell-Diagramm, 495–497
  Hertzsprung-Russell-Diagramm, 492–494
  Klassifikation
    Sterne, 480–486
  Lebensdauer, 494–495
  Masse und Leuchtkraft, 479–480
  massiv, 500–512
  Milchstrasse, 479–546
  Nachhauptreihenentwicklung
    Hertzsprung-Russell-Diagramm, 498–499
  Neutronensterne, 509–511
  Novae, 502–506
  Pulsare, 511–512
  Spektren
    Klassifikation, 480–486
  Überreste, 506–512
  veränderlich, 499–500
  weisse Zwerge, 506–509
Sternentwicklung, 479–512
Sternhaufen
  offen, 539
Sternklasse, 481
Sternspektren, 480–486
Sterntod, 495
Steuerstab, 209
Steuerung
  Magnetfelder, 42
Stokes, G. G., 593
Stokessche Relation, 354
Stossinduzierte Kernreaktionen, 194–196
Stossinduzierte Kernspaltung, 193–197
  leichte Kerne, 194
Stossinduzierte Radioaktivität, 196–197
Stossprozesse, 71–80
Strahlenquellen, 153–177
Strahlung
  α, 153–160
  Anwendung, 186–188
  Arten, 153–177
  β, 167–177
  γ, 160–166
  Mensch, 179–188
  Quellen, 153–177
  radioaktiv, 153–177
  Regulierungen, 185
  Wechselwirkung mit Gewebe, 182–185
Strahlungsarten, 153–177
Strahlungsfeld, 232
Strahlungstransportzone, 451
Strangeness, 266, 268, 275
  Seltsamkeit, 268
Streamer, 52
Streamerkammer, 52
  Spurendetektoren, 52
Streamers:coronal, 444
Streuexperimente, 65–83
Streumethoden, 66–71
Streuquerschnitt
  differenziell, 73–74
Streuung, 583–586
  Coulomb, 583–586
  Coulomb-Potential, 74–75
  elastisch, 70
  Elektron-Elektron, 72–73
  Hofstadter, 76–77
  inelastisch, 191–192
  Kohärente Überlagerung, 77–80

Nukleon-Nukleon, 101–105
Ladungsabhängigkeit, 104–105
Spinabhängigkeit, 103–104
Quantenmechanische Behandlung, 73–80
Rayleigh, 65–66
reaktiv, 192
Rutherford, 72
Streuung von Neutrinos, 301–302
Streuzentren
mehrere, 75–76
Streuzentrum, 66
Struktur
Galaxien, 554–556
Milchstrasse, 529–546
Sonne
radial, 451–453
Universum, 552–569
SU(3), 268
SU(6), 256
Subzwergsternen, 492
Suche nach Spurenelementen, 186
Superhaufen, 567
Supernova, 501, 569
SN 2007 uy, 378
SN 2008D, 378
Supernovae, 502–506
Typ I, 502
Typ II, 502
Supernovae Typ Ia, 377–378
S-Welle, 104
Swift, 475, 476
Symmetrie
C, 291
CP, 291–292
CPT, 294–297
G, 297–298
P, 288–290
T, 292–293
Symmetriebrechung, 307
spontan, 307
Symmetrien, 256–266
Leptonenfamilien, 247–250
Symmetriezustand
Angabe, 298
Symmetrisierung, 60
Synchrotron, 36–42
Steuerung
Magnetfelder, 42
Synchrotronschwingungen, 41
Synodische Umlaufzeit, 392
Szintillatoren, 46–48

τ
Lepton, 247
T-Symmetrie
Zeitumkehr, 292–293
Target, 66
ruhend, 28–30
Tau, 247
technischen Strahlenbelastung, 181
Teilchen, 231
frei, 62–63
Umwandlung
Universalprinzip, 290
virtuell, 241–243
Wechselwirkung mit Materie, 85–87
Teilchen mit Wechselwirkungen, 63–64
Teilchen-Zoo, 251
Teilchenbeschleuniger, 23–44
Funktionsweise, 30–31
Teilchenflussdichte, 179
Teilchenphysik, 23–53
Einleitung, 19
Fazit, 313–317
Fermionen und Bosonen, 55–64
Klassische Streutheorie, 583–587
Schwache Wechselwirkung, 283–303
Standardmodell, 305–317
Starke Wechselwirkung, 251–282
Streuexperimente, 65–83
Teilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung, 231–250
Wechselwirkung von Teilchen und Materie, 85–87
Teilchenstrom, 66
Teleskop, 321, 322
Galilei, 322
Kepler, 321
Newton, 322
Teleskope, 321–338
Aberration, 338
Auflösung
einzeln, 334–336

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

interferometrisch gekoppelt, 336–338
Montierung, 327–328
optisch, 321–328
parallaktische Montierung, 327
Röntgen, 331–334
Radio, 329–330
Tensodichte
Epsilon, 55
Tensor
Einstein, 467
Energie-Impuls, 467
Epsilon, 55
Levi-Civita, 55
Theoreme
Noether, 262
Theorie
Big-Bang, 569–570
Dirac, 58–64
Fermi
β-Zerfall, 172–174
Thetis
Saturnmond, 418
Titan
Saturnmond, 417
Titania
Uranusmond, 419
Tokamak, 221, 226
ITER, 222
Magnetfelder, 222–223
Topness
Truth, 268
toroidale Magnetfelder, 222–223
totaler Wirkungsquerschnitt, 66
Tröpfchenmodell
Kern, 107–110
Transformationen
Koordinaten, 603–604
Astronomisches Dreieck, 603–604
Translationen, 261–262
Transurane, 225
Treibhauseffekt, 400–404
Triangulation, 372–373
Trigonometrie
sphärisch, 596–604
Triple-α-Prozess, 458, 459
Triple-α-Prozess, 458
Triplettzustand, 103
Triton
Neptunmond, 420, 422
Truth
Topness, 268
Typ II Supernova, 500

Übergänge
Multipol, 161–165
Übergangswahrscheinlichkeiten
reziprok
Multipol-Übergänge, 164–165
Überreste von Sternen, 506–512
Umbriel
Uranusmond, 419
Umgebung
Planeten
erdähnlich, 394–413
Riesenplaneten, 414–420
Umlaufszeit, 390
siderisch, 392
Umlaufszeiten, 392
Umlaufzeit
synodisch, 392
Umwandlung von n in p, 170–171
Umwandlung von p in n, 171
unendlichdimensionaler Funktionenraum
Isomorphismen, 261
Universalprinzip
Umwandlung von Teilchen, 290
Universum, 290, 547–579
Anfangsgrösse, 570–574
Beobachtungen, 547–551
frühes, 575–579
Galaxien, 553–557
Galaxienklassifikation
Hubble, 556–557
Hubble-Gesetz, 551
Objekte, 552–557
statisch
Unmöglichkeit, 549–550
Struktur, 552–569
Unmöglichkeit
statisches Universum, 549–550
Unschärferelation, 113
up-Quark, 267
Uran-Actinium-Reihe, 176
Uran-Radium-Reihe, 176
Uran-Thorium-Reihe, 177
Uranus, 418–419

Monde
Ariel, 419
Oberon, 419
Titania, 419
Umbriel, 419
Urknall, 578

Valenzquarks, 280
van-der-Waals-Kräfte, 272
Vektor
axial, 287, 594
polar, 287, 594
Vektoreichbosonen, 575
Vektorfeld, 311
Venus, 396–397
Veränderliche Sterne, 499–500
Vergleich
Kernmodelle, 124
Vergrösserung, 321
Verluste in Materie, 85–86
Vertex, 235, 238
Vertikale Stabilisierung, 37–38
verzögerte Neutronen, 214
Vierervektoren
Repetition und Erweiterung, 71
Virgo, 477
Virgo-Superclusters, 554
Virialtheorem, 388–390, 566, 567
Virtuelle Teilchen, 241–243
virtuelle Teilchen, 238
Visuelle Doppelsterne, 527
Volumenanteil, 107
Vorschau
Inhalt, 18–19
Vulkane, 416

W-Boson
reell, 302–303
würfelförmiger Kasten, 110–112
Wasserstoff, 458, 460, 507, 515
Wechselwirkung
elektromagnetisch, 232
Teilchen, 231–250
schwach, 99, 247, 276, 283–303
stark, 251–282
Austauschteilchen, 275–276
Strahlung und Gewebe, 182–185
Teilchen, 63–64
Teilchen, Materie, 85–87
Wega, 529
weiss, 271
Weisse Zwerge, 506–509
weisser Zwerg, 495
Weisslichtinterferometer, 361
Welle-Teilchen-Dualismus, 58
Wellen
P, 407
S, 407
Weltbild
geozentrisch, 382
heliozentrisch, 382
Weltformel, 308
Wideröe-Bedingung, 35
Wirkungsgrad
Target
ruhend, 28–30
Wirkungsquerschnitt
total, 66
Woods-Saxon-Potential, 114

z und a aus δ und s, 603–604
z, a
Beziehungen zu φ, δ, s, 603
z, q
Beziehungen zu φ, δ, s, 603
Z-Boson
reell, 302–303
Zeeman-Effekt, 436
Zeemann-Triplett, 437
Zentralkörper
Massenbestimmung, 392–393
Zentralmasse, 390
Zentrifugalpotential, 516
Zentripetalkraft, 387
Zerfälle
radioaktiv, 143–151
radioaktive
Ketten, 176–177
Typen, 175–176
Statistik, 146–147
Zerfallsgesetze, 146–151
Zerfallsketten, 176–177
Zerfallstypen
radioaktiv, 175–176
zirkulare Polarisation, 57
Zodiakallicht, 454
Zustandssumme, 483
Zweite Quantisierung, 237–241

 ©2005-2022 Universität Ulm, Othmar Marti

zweite Quantisierung, 59, 61
Zwerg
    braun, 475
Zwergnovae, 505
Zwerge
    weiss, 506–509
Zwerggalaxie, 538
Zwerggalaxien, 556
Zwergnova, 503
Zwergnovae, 502–503, 505
Zwergsternen, 492
Zwischenbild, 321
Zyklotron, 33–34
Zyklus
    CNO, 496
    p-p, 496, 497

´Milchstrasse
    Perseus-Arm, 536