



universität
uulm



Vorlesungsskript
PHYS9120.0 Physik für Ingenieure 1
Bachelor Elektrotechnik und
Informationstechnik
Bachelor Chemieingenieurwesen
Bachelor Biomedizinische Technik

Othmar Marti
Institut für Experimentelle Physik, Universität Ulm
veröffentlicht unter



[Lizenzinformationen](#)

28. Februar 2024

Zweifel ist der Weisheit Anfang.

René Descartes, 1596-1650, französischer Mathematiker und Philosoph

Mit leerem Kopf nickt es sich leichter!

Zarko Petane, 1929-2014, slowenischer Schriftsteller

*Mehr Erklärung bitte und weniger Verstehen! Mehr
Neugier und weniger Einverständnis. Nicken bildet
nicht.*

Alexander Kissler, am 22. 9. 2014 in Deutschlandradio Kultur

Inhaltsverzeichnis

I. Vorbemerkungen	11
1. Einleitung	13
1.1. Allgemeines zur Physik	13
1.2. Einheitensysteme	15
1.3. Messfehler	17
1.4. Dimensionsanalyse	19
1.5. Literatur	19
II. Mechanik starrer Körper	21
2. Kinematik	23
2.1. Bewegung in einer Dimension	23
2.1.1. Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung	24
2.2. Bewegung in zwei und drei Dimensionen	27
2.2.1. Vektoren und Vektorrechnung	27
2.2.2. Bsp: Wurfbewegung	31
2.2.3. Gleichförmige Kreisbewegung (mit vektorieller Darstellung)	32
2.2.4. Nichtkommutativität endlicher Drehungen	34
3. Dynamik, die Newtonschen Axiome	39
3.1. Trägheitsgesetz: Erstes Newtonsches Axiom	39
3.2. KRAFT, Masse, Impuls: Zweites Newtonsches Axiom	40
3.2.1. Masse (m)	40
3.2.2. KRAFT (\mathbf{F})	41
3.2.2.1. Drittes Newtonsches Axiom	41
3.2.2.2. KRAFT durch Gewicht und schwere Masse	42
3.2.3. Arten von Kräften	42
3.2.4. Beispiele zur Lösung von Bewegungsproblemen	42
3.3. Anwendungen der Newtonschen Axiome	46
3.3.1. Reibung	46
3.3.1.1. Haftreibung	47
3.3.1.2. Gleitreibung	47
3.3.1.3. Rollreibung	49
3.3.2. d'Alembert'sches Prinzip	50
3.3.3. Bewegung mehrerer miteinander verbundener Körper	51
3.3.4. Kräfte in bewegten Bezugssystemen	54
3.3.4.1. Zentrifugalkraft	56
3.3.4.2. Die Erde als rotierendes System: Corioliskraft	56
3.3.5. Numerische Methoden	57

3.4. Arbeit, Energie, Leistung	58
3.4.1. Arbeit und Energie bei konstanter KRAFT, KINETISCHE ENERGIE	59
3.4.1.1. Beschleunigungsarbeit	59
3.4.2. Arbeit und Energie bei veränderlicher KRAFT	60
3.4.2.1. Spannarbeit, Arbeit bei veränderlicher KRAFT	61
3.4.2.2. Nicht-lineares Kraftgesetz ($F = -Dr^2$)	62
3.4.3. Allgemeine Formulierung der Arbeit bei 3 Dimensionen	63
3.4.3.1. Skalarprodukt	63
3.4.4. POTENTIELLE ENERGIE	64
3.4.4.1. Gleichgewicht	66
3.4.5. Energieerhaltungssatz	70
3.4.5.1. Harmonischer Oszillator	71
3.4.5.2. Mathematisches Schwerependel	72
3.4.5.3. Ebenes 2-dim. Pendel mit lin. Kraftgesetz	73
3.4.6. Verallgemeinerter Energiesatz	74
3.4.7. Leistung	74
3.5. Teilchensysteme und Impulserhaltung	76
3.5.1. Massenmittelpunkt	76
3.5.1.1. Bewegung des Massenmittelpunktes	77
3.5.2. Impulserhaltung	78
3.5.3. Massenmittelpunkt als Bezugssystem	79
3.5.4. Kinetische Energie eines Teilchensystems	81
3.5.5. Stöße in einer Dimension	82
3.5.5.1. Elastische Stöße	82
3.5.5.2. Inelastische Stöße	83
3.5.6. Stöße in drei Dimensionen	84
3.5.7. Kraftstoss	86
3.5.8. Rückstossantriebe	86
3.6. Drehbewegungen	88
3.6.1. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	88
3.6.2. Drehmoment und Trägheitsmoment	89
3.6.3. Kinetische Energie der Drehbewegung	91
3.6.4. Berechnung der Trägheitsmomente	92
3.6.5. Drehimpuls und Drehimpulserhaltung	94
3.6.6. Rollende Körper	96
3.6.7. Vektorcharakter von Drehgrößen	100
3.6.7.1. Beispiel: Auswuchten von Reifen	102
3.6.8. Drehungen um beliebige Achsen: Trägheitstensor	102
3.6.9. Kreiselbewegung	104
3.6.9.1. Präzession (Momentenbehaftet)	104
3.6.9.2. Nutation (momentenfrei)	105
3.7. Statische Gleichgewichte von starren Körpern	105
3.7.1. Massenmittelpunkt	105
3.7.1.1. Beispiele für statisches Gleichgewicht	106
3.7.2. Kräftepaare	107
3.7.2.1. Dynamik	108
3.7.3. Stabilität des Gleichgewichts	110

3.8. Schwerkraft oder Gravitation	110
3.8.1. Keplersche Gesetze	110
3.8.2. Newtonsches Gravitationsgesetz	111
3.8.2.1. 1. Möglichkeit	112
3.8.2.2. 2. Möglichkeit	112
3.8.2.3. Selbstenergie der Erde	115
3.8.2.4. Messung der Gravitationskonstante	116
3.8.3. Schwere und träge Masse	116
3.8.4. Raumfahrt	117
3.8.5. Potentielle Energie, Gesamtenergie und Umlaufbahnen	117
III. Mechanik deformierbarer fester Körper	119
4. Skalare Elastomechanik	123
4.1. Dehnung und Kompression	123
4.2. Scherung	124
4.3. Verdrillung eines Drahtes	126
4.4. Biegung	127
4.5. Beziehung zwischen den elastischen Konstanten	129
4.6. Anelastisches Verhalten	131
4.7. Elastomechanik anisotroper Körper	132
IV. Flüssigkeiten und Gase	133
5. Flüssigkeiten und Gase	135
5.1. Aggregatzustände	135
5.2. Gestalt von Flüssigkeitsoberflächen	136
5.3. Druck	137
5.3.1. Wirkung auf Körper	137
5.3.2. Hydraulische Presse	138
5.3.3. Druckarbeit	139
5.4. Schweredruck	139
5.4.1. Auftrieb	140
5.4.2. Schwimmen	141
5.4.2.1. Wann schwimmt ein Körper stabil?	141
5.4.3. Aräometer	142
5.5. Gasdruck	143
5.6. Atmosphärendruck	144
5.6.1. Höhe der Atmosphäre bei konstanter Dichte *	144
5.7. Druck als Potential *	146
6. Oberflächenspannung	149
6.1. Anwendung: Kraft eines Flüssigkeitsfilms	151
6.2. Freie Oberflächen	152
6.3. Benetzende Flüssigkeiten, Kapillarität	154
6.3.1. Adhäsions- und Kohäsionskräfte	155

7. Strömungen	159
7.1. Beschreibung von Strömungen	159
7.1.1. Fluss	160
7.2. Lokale und totale Ableitungen *	163
7.2.1. Kontinuitätsgleichung	164
7.2.1.1. Stationäre STRÖMUNG *	165
7.3. Innere Reibung	166
7.4. Laminare STRÖMUNG	167
7.4.1. STRÖMUNG durch einen SPALT *	168
7.4.2. Rohrströmung	169
7.4.3. Druck und Volumenstrom	170
7.4.4. STRÖMUNG um Kugeln	170
7.4.5. PRANDTL-GRENZSCHICHT	171
7.5. Bewegungsgleichung einer FLÜSSIGKEIT *	172
7.6. STRÖMUNG idealer Flüssigkeiten	173
7.6.1. Anwendung	173
7.7. Strömungswiderstand *	175
7.7.1. Druck und Druckgradient *	177
7.8. Helmholtzsche Wirbelsätze *	177
V. Schwingungen und Wellen	179
8. Schwingungen	181
8.1. Harmonische Schwingungen	181
8.1.1. Harmonische Schwingungen und Kreisbewegung	183
8.1.2. Energiebilanz bei harmonischen Schwingungen	183
8.1.3. Feder-Masse-System im Schwerfeld	185
8.1.4. Pendel im Schwerfeld	187
8.1.4.1. Mathematisches Pendel	187
8.1.4.2. Physikalisches Pendel	188
8.1.4.3. Torsionspendel	189
8.1.5. Bewegung in der Nähe von Gleichgewichtspunkten	189
8.2. Gedämpfte Schwingung	190
8.2.1. Güte des schwingungsfähigen Systems	191
8.3. Erzwungene (gedämpfte) Schwingung und Resonanz	192
8.4. Überlagerung von Schwingungen	196
8.4.1. Schwingungen in unterschiedliche Richtungen	196
8.4.2. Schwingungen gleicher Richtung und Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude	196
8.4.3. Schwingungen gleicher Richtung, aber leicht unterschiedlicher Frequenz	197
8.4.4. Fouriertransformation	198
8.5. Gekoppelte Schwingungen	202
8.6. Verallgemeinerung: Fundamental- oder Eigenschwingungen	205

9. Wellen	207
9.1. Wellen in einer Dimension	207
9.1.1. Wellenberge	207
9.1.1.1. Transversal- und Longitudinalwellen	208
9.1.1.2. Reflexion und Überlagerung oder Superposition	209
9.1.2. Ausbreitungsgeschwindigkeit	211
9.1.3. Harmonische Wellen	212
9.1.4. Energieübertrag bei Wellen	213
9.1.5. Superposition und Interferenz harmonischer Wellen	214
9.1.5.1. Stehende Wellen	215
9.2. Wellen in 2 und mehr Dimensionen	216
9.2.1. Ebene Wellen	217
9.2.2. Kugelwellen	217
9.2.3. Interferenz am Beispiel von Wasserwellen	219
VI. Optik	223
10. Optische Phänomene	225
10.1. Polarisierung	225
10.1.1. Polarisierung durch Absorption	225
10.1.2. Polarisierung durch Streuung	228
10.1.3. Polarisierung durch Reflexion	228
10.2. Beugung	230
10.3. Absorption, Dispersion und Streuung	230
10.3.1. Absorption	230
10.3.2. Dispersion und Kommunikation	231
10.3.3. Streuung	235
11. Das Fresnel-Huygenssche Prinzip	237
11.1. Interferenz von Kugelwellen	241
11.2. Interferenzmuster an einem Doppelspalt	242
12. Reflexion und Brechung	245
12.1. Lichtstrahlen	245
12.2. Reflexion	245
12.3. Brechung	247
12.4. Totalreflexion und optische Kommunikation	248
12.5. Prismen	249
13. Optische Instrumente	251
13.1. Spiegel	251
13.2. Linsen	253
13.2.1. Brechung an Kugelflächen	253
13.2.2. Abbildungsmaßstab	254
13.2.3. Dünne Linsen	254
13.2.3.1. Arten von Linsen	256
13.2.3.2. Dünne Linsen und Medien	257
13.2.4. Dicke Linsen	258

13.3. Das Auge	259
13.4. Lupe	260
13.5. Mikroskop	261
13.6. Die Kamera	262
13.7. Kollimationsoptik für Laserdioden	264
13.8. Beamer	264
VII.Anhang	267
A. Differentiation und Integration	269
A.1. Differentiationsregeln	269
A.2. Differentiation einfacher Funktionen	270
A.3. TAYLORREIHE und Reihen	271
A.4. Einige Reihen	272
B. Rotationsmatrizen, Variablenpermutation	273
B.1. Drehung um die z -Richtung	273
B.2. Von der Drehung um z zur Drehung um y	274
B.3. Drehung um die y -Richtung	275
B.4. Von der Drehung um z zur Drehung um y	276
B.5. Drehung um die x -Richtung	277
B.6. Drehmatrizen durch direkte Permutation	278
C. Rechnen mit Integralen	281
C.1. Unbestimmte Integrale	282
D. Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken	285
Liste der Experimente	291
Abbildungsverzeichnis	297
Tabellenverzeichnis	299
Personenregister	301
Abkürzungen	307
Referenzen	310

Teil I.

Vorbemerkungen

1. Einleitung

Eine gute Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#).

1.1. Allgemeines zur Physik

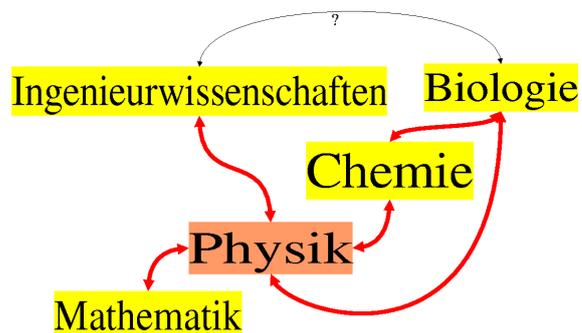


Abb. 1.1.: Beziehungen zwischen den Naturwissenschaften

- Messbare und berechenbare Größen
- Kräfte, Energien
- Quantenphänomene (Laserdiode, Transistor)

Größenordnungen: Siehe auch Film: Größenordnungen

Strecke	m
Protonenradius	10^{-15}
Atomradius	10^{-10}
Virusdurchmesser, Gate-Dimension eines Transistors	10^{-7}
Riesenamöbe, kleinste Si-Release-Strukturen	10^{-4}
Walnuss	10^{-2}
Mensch	10^0
Höchster Berg	10^4
Erddurchmesser	10^7
Sonnendurchmesser	10^9
Abstand Erde-Sonne	10^{11}
Durchmesser Sonnensystem	10^{13}
Abstand von α -Centauri	10^{16}
Durchmesser Milchstrasse	10^{21}
Durchmesser sichtbares Universum	10^{26}

Tab. 1.1.: Längenskalen der Physik

Masse	kg
Elektronneutrino [Ake+22]	10^{-36}
Elektron	10^{-30}
Proton	10^{-27}
Aminosäure	10^{-25}
Hämoglobin	10^{-22}
Grippevirus	10^{-19}
Riesenamöbe	10^{-8}
Regentropfen	10^{-6}
Ameise	10^{-2}
Mensch	10^2
Re 6/6 oder E101	10^5
Pyramide	10^{10}
Erde	10^{24}
Sonne	10^{30}
Milchstrasse	10^{41}
Universum	10^{52}

Tab. 1.2.: Massenskalen (Größenordnungen)

Zeitintervall	s
Licht durchquert einen Atomkern	10^{-23}
Elementarprozesse einer chemischen Reaktion	10^{-16}
Schwingungsperiode des sichtbaren Lichtes, kürzeste Pulse	10^{-15}
Schwingungsperiode von Mikrowellen	10^{-10}
Halbwertszeit Myon	10^{-6}
Schwingungsperiode höchster hörbarer Töne	10^{-4}
Zeit zwischen zwei Herzschlägen	10^0
Halbwertszeit des freien Neutrons, Unterrichtsstunde	10^3
Dauer der Erdumdrehung	10^5
Umlaufzeit der Erde um die Sonne	10^7
Lebensdauer Mensch	10^9
Halbwertszeit 239 -Plutonium	10^{12}
Lebensdauer einer Gebirgskette	10^{15}
Halbwertszeit Uran	10^{16}
Alter der Erde	10^{17}
Alter des Universums	10^{18}

Tab. 1.3.: Zeitskalen in der Physik

1.2. Einheitensysteme

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 1])

Wir rechnen in unserer Vorlesung **ausschliesslich** mit dem gesetzlichen Einheitensystem: **SI**.

s SEKUNDE, ZEITEINHEIT. Definiert mit der Frequenz des Übergangs zwischen zwei Hyperfeinniveaus des $^{133}_{55}\text{Cs}$ Isotops¹. Diese Frequenz beträgt 9 192 631 770 Hz.

m METER, LÄNGENEINHEIT. Abgeleitete Grundeinheit, definiert mit der **Sekunde** und der LICHTGESCHWINDIGKEIT IM VAKUUM $c = 299\,729\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

kg KILOGRAMM, MASSE-Einheit (nicht Gewicht). Die festgelegte PLANCKKONSTANTE (nach Max Planck) ist definiert als $h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$. Daraus kann mit den Definitionen von c und der **Sekunde** das Kilogramm abgeleitet werden.

K KELVIN, TEMPERATUR (nach William Thomson, 1st Baron Kelvin). Diese Einheit ist über die festgelegte BOLTZMANNKONSTANTE $k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ (nach Ludwig Boltzmann) definiert. Alle Einheiten in K sind mit **Meter**, **Sekunde** und **Kilogramm** gegeben.

¹Cs ist das Symbol für CÄSIUM

A AMPERE, STROMSTÄRKE (nach André-Marie Ampère). Definiert über die festgelegte EINHEITSLADUNG $e = 1.602\,176\,734 \cdot 10^{-19} \frac{\text{A}}{\text{s}}$ mit gegebener **Sekunde**.

mol MOL, STOFFMENGE. Definiert über die festgelegte AVOGADROZAHL $N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol (nach Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, Conte di Quaregna e Cerreto), wobei *Teilchen* keine Einheit ist.

cd CANDELA, LICHTSTÄRKE. Definiert über Die Leistung pro RAUMWINKEL (Einheit **Steradian**) bei der Frequenz $\nu = 5.40 \cdot 10^{14}$ Hz mit $1 \text{ cd} \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}} \Big|_{@5.40 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$

Das SI-SYSTEM ist also über die Naturkonstanten

- einen atomarer Frequenzübergang $\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770$ Hz,
- die Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,729\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- die Planckkonstante $h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$,
- die Boltzmannkonstante $k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ (nach Ludwig Boltzmann),
- die Einheitsladung oder ELEMENTARLADUNG $e = 1.602\,176\,734 \cdot 10^{-19} \frac{\text{A}}{\text{s}}$,
- die Avogadrozahl $N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol (nach Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, Conte di Quaregna e Cerreto) und
- die Lichtleistung pro Raumwinkel bei einer Frequenz $1 \text{ cd} \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}} \Big|_{@5.40 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$ definiert.

Faktor	Vorsilbe	Abkürzung	Faktor	Vorsilbe	Abkürzung
10^{30}	Quetta	Q	10^{-30}	Quekto	q
10^{27}	Ronna	R	10^{-27}	Ronto	r
10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	Yokto	y
10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	Zepto	z
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	Atto	a
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	Femto	f
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d

Tab. 1.4.: Vorsätze zu SI-Einheiten um Exponenten zu vermeiden.

Grösse	SI-Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Fläche	Quadratmeter	m ²
Volumen	Kubikmeter	m ³
Frequenz	Hertz	Hz = s ⁻¹ = $\frac{1}{s}$
Geschwindigkeit	Meter/Sekunde	m s ⁻¹ = $\frac{m}{s}$
Beschleunigung	Meter / Quadratsekunde	m s ⁻² = $\frac{m}{s^2}$
KRAFT	NEWTON	N = kg m s ⁻² = $\frac{kg m}{s^2}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J = N m = kg m ² s ⁻² = $\frac{kg m^2}{s^2}$
Druck, Energiedichte oder Joule/Kubikmeter	Pascal	Pa = N m ⁻² = J m ⁻³ = $\frac{kg}{m s^2}$
Leistung	Watt	W = J s ⁻¹ = $\frac{kg m^2}{s^3}$
Dichte	Kilogramm / Kubikmeter	kg m ⁻³ = $\frac{kg}{m^3}$
Temperatur	Kelvin	K
Stromstärke	Ampère	A
Ladung	Coulomb	C = A s
Stromdichte	Ampère / Quadratmeter	A m ⁻² = $\frac{A}{m^2}$
Spannung	Volt	V = J C ⁻¹ = $\frac{kg m^2 s^3}{A}$
Widerstand	Ohm	Ω = V A ⁻¹ = $\frac{kg m^2 s^3}{A^2}$
Kapazität	Farad	F = C V ⁻¹ = $\frac{A^2 s^4}{A^2 m^2}$
elektrische Feldstärke	Volt/Meter	V m ⁻¹ = $\frac{kg m}{A s^3}$
magnetische Feldstärke	Ampère/Meter	A m ⁻¹ = $\frac{A}{m}$
magnetische Induktion	Tesla	T = V s m ⁻² = $\frac{kg}{A s^2}$
Induktivität	Henry	H = V s A ⁻¹ = $\frac{kg m^2}{s^2 A^2}$
Lichtstärke	Candela	cd
Energiedosis	Gray	Gy = J kg ⁻¹ = $\frac{m^2}{s^2}$
Aktivität	Becquerel	Bq = s ⁻¹ = $\frac{1}{s}$
Stoffmenge	Mol	mol

Tab. 1.5.: Namen von Grössen in der Physik und ihre Einheiten

1.3. Messfehler

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 3])


Versuch 1: Versuch zur Vorlesung:

Messfehler am Beispiel der Zeitmessung: Lange Luftkissenbahn mit Smartphoneuhren (Versuchskarte M-059)

Jede Messung ist fehlerbehaftet

Beispiel in Vorlesung: Messung der Geschwindigkeit

Es gibt drei Fehlertypen:

Grobe Fehler Entstehen durch Unachtsamkeit, mangelnde Kenntnis, usw.

Systematische Fehler Können prinzipiell bestimmt und auch nachträglich, bei korrekt geführtem Laborjournal, korrigiert werden. Sie treten immer in gleicher Weise auf.

Beispiel: Voltmeter mit abgelaufener Kalibrierfrist.

Zufällige Fehler Sie sind bei jeder Wiederholung einer Messung anders. Zu den zufälligen Fehlern gehören auch die Rundungsfehler bei digitalen Messgeräten.

Arithmetisches Mittel

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n) \quad (1.3.1)$$

Standardabweichung

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.3.2)$$

Zufällige Fehler löschen sich teilweise aus, also ist

$$s_{\langle x \rangle} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.3.3)$$

Besteht ein Experiment aus mehreren Teilmessungen, muss das **Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauss** angewandt werden. Sei

$$Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (1.3.4)$$

Dann ist der resultierende Fehler

$$s_Y = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y}{\partial X_j} s_{X_j} \right)^2} \quad (1.3.5)$$

Beispielsweise ist der Druck bei einem zylinderförmigen Kolben durch $p = \frac{F}{\pi r^2}$ gegeben. Der Fehler ist also

$$s_p = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi r^2} s_F \right)^2 + \left(\frac{-2F}{\pi r^3} s_r \right)^2} \quad (1.3.6)$$

1.4. Dimensionsanalyse

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 5]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 2])

Die Dimension zeigt, wie eine Grösse von den Basisgrössen, z.B. Länge, Zeit und Masse abhängt. Wie man nicht Äpfel mit Birnen verrechnen kann, müssen bei einer physikalischen Gleichung die Dimensionen auf beiden Seiten übereinstimmen. Die Dimensionsanalyse ist ein mächtiges Werkzeug, um zu testen, ob man richtig gerechnet haben könnte. Man kann damit beweisen, dass man einen Fehler gemacht hat, nicht aber dass man richtig gerechnet hat. Dies ist analog zur Neunerprobe.

Beispiel:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (1.4.1)$$

Gleichung (1.4.1) ist richtig, wenn man wie unten für die Länge L und für die Zeit T einsetzt.

$$L = [X] = L = [x_0] = \frac{L}{T} T = [v_0 t] = \frac{L}{T^2} T^2 = [\frac{1}{2} a_0 t^2] \quad (1.4.2)$$

Beispiel: Schwingungsdauer eines Pendels

Die Schwingungsdauer t hängt von der Länge ℓ , der Masse m und der Erdbeschleunigung g ab. Also ist

$$t \approx m^\alpha \ell^\beta g^\gamma \quad (1.4.3)$$

oder

$$T^1 = M^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T^2} \right)^\gamma = L^{\beta+\gamma} M^\alpha T^{-2\gamma} \quad (1.4.4)$$

Der Exponentenvergleich ergibt $\alpha = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$ und damit $\beta = \frac{1}{2}$. Wir erraten, dass die Schwingungsdauer eines Pendels wie

$$t \approx \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (1.4.5)$$

ist, das korrekte Resultat, wenn man von Vorfaktoren absieht.

1.5. Literatur

Die Vorlesung orientiert sich an den Werken von

- P. A. Tipler und G. Mosca [TM04], *Physik*,
- D. Meschede [Mes06], *Gerthsen Physik*,
- D. Meschede [Mes15], *Gerthsen Physik*,
- D. Halliday; R. Resnick und J. Walker [HRW03], *Physik*,
- D. Halliday u. a. [Hal+17], *Halliday Physik*,

- D. Halliday u. a. [Hal+19], *Halliday Physik Für Natur- und Ingenieurwissenschaftliche Studiengänge*,
- H. J. Paus [Pau02], *Physik in Experimenten und Beispielen*.
- Lindner [Lin14], *Physik für Ingenieure 19.A*.
- E. Hering; R. Martin und M. Stohrer [HMS21], *Physik für Ingenieure*,
- K. Lüders und G. von Oppen [LO08], *Bergmann, Schäfer, Mechanik, Akustik, Wärme*,
- H. Stöcker [Stö04], *Taschenbuch der Physik Formeln, Tabellen, Übersichten*,
- H. Kuchling [Kuc21], *Taschenbuch der Physik*.
- Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch F. Kneubühl [Kne78] «*Repetitorium der Physik*» empfohlen werden.
- Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein [Bro+08] zusammengefasst.

Teil II.

Mechanik starrer Körper

2. Kinematik

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 19]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 9])

Die Kinematik befasst sich mit der Frage nach dem **Wie** einer Bewegung, nicht nach dem **Warum**.

2.1. Bewegung in einer Dimension

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 19]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 3])



Versuch 2: Versuch zur Vorlesung:

Gleichförmige und beschleunigte Bewegung, Messen von Hand und mit Tracker (Versuchskarte M-083, Software Tracker)

Aus dem Alltagsleben:

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Gesamtweg}} \quad (2.1.1)$$

Physik: Mathematische Formulierung

Gesamtweg:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1.2)$$

Gesamtzeit:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (2.1.3)$$

Wir schreiben für die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.1.4)$$

Was ist die Durchschnittsgeschwindigkeit bei drei Strecken $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_2)$, $(x_4 - x_3)$ hintereinander, die in den Zeiten $(t_2 - t_1)$, $(t_3 - t_2)$, $(t_4 - t_3)$ durchfahren werden?

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3)}{(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + (t_4 - t_3)} = \frac{x_4 - x_1}{t_4 - t_1} \quad (2.1.5)$$

Was bedeutet das, wenn wir (18. Jahrhundert) von Ulm über Buchhorn (103 km, 35 h) nach Durlasbach (−36 km (wir wandern **zurück**), 9 h) wandern?

Ulm, Durlasbach und Buchhorn liegen auf einem Kreissegment, also auf einer «Linie». Also ist die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \frac{103 \text{ km} + (-36 \text{ km})}{35 \text{ h} + 9 \text{ h}} = \frac{67 \text{ km}}{44 \text{ h}} \approx 1.5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (2.1.6)$$

Der Sprachgebrauch im Alltag sagt:

$$\widetilde{\langle v \rangle} = \frac{103 \text{ km} + |-36 \text{ km}|}{35 \text{ h} + 9 \text{ h}} = \frac{139 \text{ km}}{44 \text{ h}} \approx 3.2 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (2.1.7)$$

Es wurde mit den **Beträgen** gerechnet, oder es wurde die Geschwindigkeit entlang eines Weges und nicht vom Anfang zum Ende berechnet.

Wir verwenden ausschliesslich die physikalische Definition nach Gleichung (2.1.5) und Gleichung (2.1.6)!

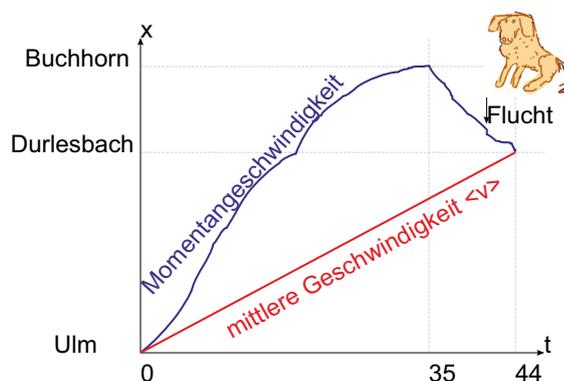


Abb. 2.1.: Graphische Darstellung einer linearen Bewegung

Link zur Vorlesung: ([Simulation zu konstanter Bewegung](#))

2.1.1. Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 19]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 10])

Momentangeschwindigkeit \Leftrightarrow Tangente \Leftrightarrow Ableitung

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (2.1.8)$$

Link zur Vorlesung: ([Simulation Momentangeschwindigkeit \(unten\)](#))

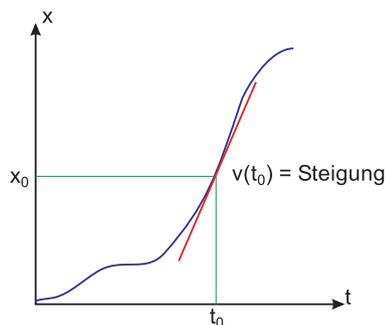


Abb. 2.2.: Graphische Darstellung einer linearen Bewegung

Beispiel:

Sei $x(t) = At^n + Bt^m$. Dann ist

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (At^n + Bt^m) = nAt^{n-1} + mBt^{m-1} \quad (2.1.9)$$

Beschleunigung \iff Änderung der Momentangeschwindigkeit

Mittlere Beschleunigung

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.1.10)$$

Momentanbeschleunigung

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.1.11)$$

Beschleunigung und Ort

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d \frac{dx(t)}{dt}}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x} \quad (2.1.12)$$

Wie kommt man von einer bekannten Beschleunigung zum Ort? \implies Integration

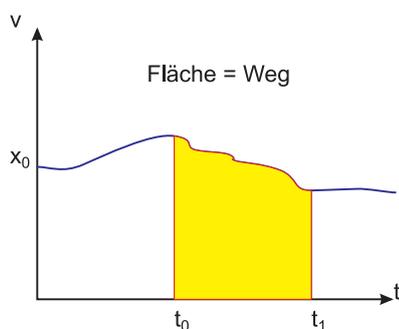


Abb. 2.3.: Graphische Darstellung einer Geschwindigkeit und Integration.

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (2.1.13)$$

Wir multiplizieren die obige Gleichung mit dt

$$dv = a dt \quad (2.1.14)$$

Nun integrieren wir auf beiden Seiten von der Zeit $t = 0^1$ bis t

$$\int_0^t dv = \int_0^t a dt \quad (2.1.15)$$

und erhalten

$$v(t) - v(0) = a \cdot t \Big|_0^t = a \cdot t \quad (2.1.16)$$

oder mit $v(0) = v_0$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \quad (2.1.17)$$

Dabei ist die Anfangsbedingung mit eingerechnet.

Versuch 3:   **Versuch zur Vorlesung:**

Anfangsgeschwindigkeit: Einfluss auf den zurückgelegten Weg (Versuchskarte M-133)

Weg:

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + a \cdot t \quad (2.1.18)$$

Wir integrieren auf beiden Seiten

$$\int_0^t dx = \int_0^t (v_0 + a \cdot t) dt \quad (2.1.19)$$

und erhalten

$$x(t) - x(0) = \left(v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right) \Big|_0^t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (2.1.20)$$

oder mit $x(0) = x_0$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (2.1.21)$$

¹Sollte der Zeitwert für den Anfangswert des Integrationsintervalls nicht null sein, verschieben wir die Zeitskala um den entsprechenden Wert.

Schauen Sie in einem Mathematikbuch oder (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 30]) nach, wie die Integration durchgeführt wird

Materialien

Link zur Vorlesung: ([Bremsweg bei konstanter Beschleunigung](#))

Gleichung (2.1.18) kann verstanden werden, in dem man realisiert, dass die Geschwindigkeit sich von v_0 nach $v_0 + at$ ändert, so dass $\langle v \rangle = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at$ ist.

Gleichungen bei konstanter Beschleunigung

$$v = v_0 + at \quad (2.1.22a)$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.1.22b)$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2) - x_0}{t} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (2.1.23)$$

Wenn die Endgeschwindigkeit $v_e = v_0 + at$ ist, erhält man aus $\Delta x = x(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ mit $t = \frac{v_e - v_0}{a}$

$$\Delta x = v_0 \frac{v_e - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \left(\frac{v_e - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0 v_e}{a} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_e^2}{2a} - \frac{v_e v_0}{a} + \frac{v_0^2}{a} \quad (2.1.24a)$$

$$v_e^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \quad (2.1.24b)$$

2.2. Bewegung in zwei und drei Dimensionen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 43]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 9])

2.2.1. Vektoren und Vektorrechnung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 47])



Versuch 4: Versuch zur Vorlesung:

Vektoraddition von drei Kräften ([Versuchskarte M-012](#))

Link zur Vorlesung: ([Graphische Vektoraddition](#))

Grafische Addition

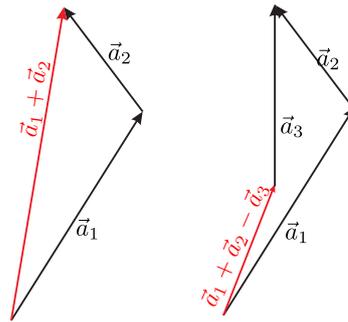


Abb. 2.4.: Grafische Vektoraddition. Der Resultatvektor reicht vom Anfang des ersten Vektors zum Ende des letzten Vektors. Subtrahierte Vektoren werden in umgekehrter Richtung gezeichnet.

Komponentenschreibweise

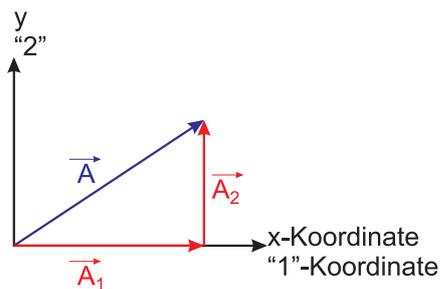


Abb. 2.5.: Komponentenschreibweise von Vektoren

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Länge

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (2.2.2)$$

Winkel mit der x-Achse

$$\cos(\Theta) = \frac{A_x}{A} \quad (2.2.3)$$

Einheitsvektoren e_x in x-Richtung, e_y in y-Richtung, e_z in z-Richtung.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (2.2.4)$$

Addition in Komponentenschreibweise

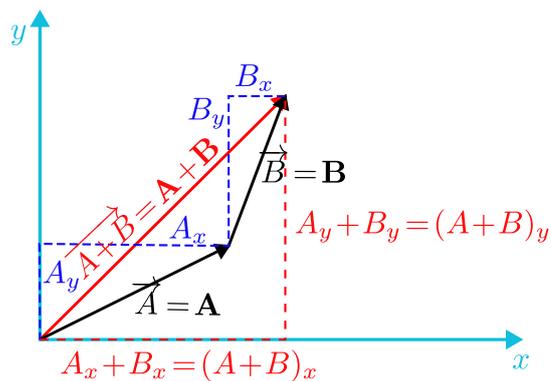


Abb. 2.6.: Vektoraddition in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) + (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_x + B_x) \mathbf{e}_x + (A_y + B_y) \mathbf{e}_y + (A_z + B_z) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2.2.6)$$

Mittlere Geschwindigkeit

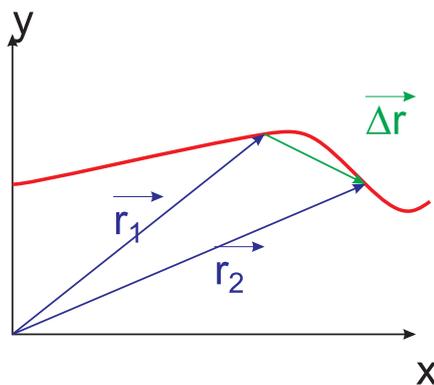


Abb. 2.7.: Mittlere Geschwindigkeit

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (2.2.7)$$

Momentangeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.2.8)$$

Ableitung in Komponenten

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x \mathbf{e}_x + \Delta y \mathbf{e}_y + \Delta z \mathbf{e}_z}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

also

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \quad (2.2.10)$$

Analog zur obigen Rechnung erhält man die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit.

Mittlere Beschleunigung

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (2.2.11)$$

Momentanbeschleunigung

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.2.12)$$

oder auch

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (2.2.13)$$

Relativgeschwindigkeit

 **Versuch 5:**  **Versuch zur Vorlesung:**
Relativgeschwindigkeit Fahrzeug auf Lehmann-Bahn

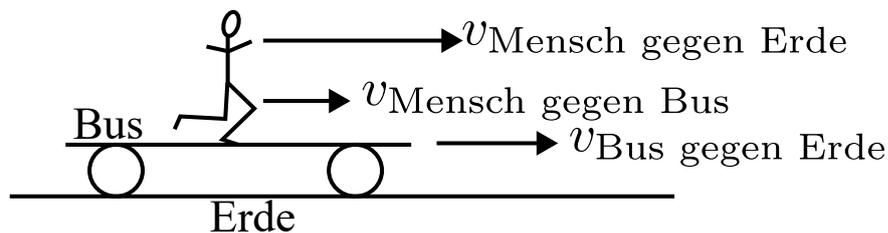


Abb. 2.8.: Relativgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines Menschen gegen die Erde berechnet sich aus seiner Relativgeschwindigkeit gegen den Bus und dessen Geschwindigkeit gegen die Erde zu

$$\mathbf{v}_{\text{Mensch gegen Erde}} = \mathbf{v}_{\text{Bus gegen Erde}} + \mathbf{v}_{\text{Mensch gegen Bus}} \quad (2.2.14)$$

2.2.2. Bsp: Wurfbewegung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 53])

Wurfbewegungen sind zusammengesetzte Bewegungen (Beispiel aus (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 53])).



Versuch 6: Versuch zur Vorlesung:

Freier Fall und waagrechter Wurf - Überlagerung von zwei Bewegungen (Versuchskarte M-053, Video (VPN oder intern))

Link zur Vorlesung: ([Simulation von Walter Fendt](#))

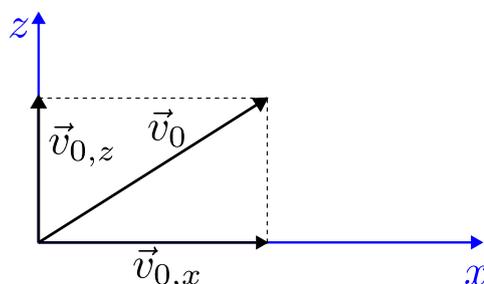


Abb. 2.9.: Wurfbewegung als zusammengesetzte Bewegung.

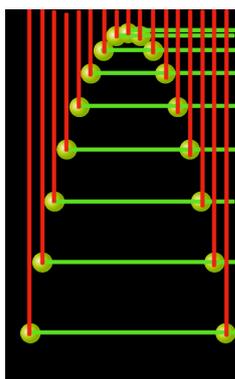


Abb. 2.10.: Bild gezeichnet nach (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 55]) . Rot ist die horizontale, grün die vertikale Position markiert. Die horizontalen Abstände sind, innerhalb meiner Zeichengenauigkeit, gleich, deuten also auf eine konstante Geschwindigkeit hin.


Versuch 7:
Wurfparabel ([Versuchskarte M-050](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

Beschleunigungen

 Sei $x(t=0) = 0$, $y(t=0) = 0$, $v_x(t=0) = v_{x,0}$ und $v_y(t=0) = v_{y,0}$

$$a_y(t) = -g \quad (2.2.15a)$$

$$a_x(t) = 0 \quad (2.2.15b)$$

Geschwindigkeiten

$$v_y(t) = -g \cdot t + v_{y,0} \quad (2.2.16a)$$

$$v_x(t) = v_{x,0} \quad (2.2.16b)$$

Ort

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_{y,0} \cdot t \quad (2.2.17a)$$

$$x(t) = v_{x,0} \cdot t \quad (2.2.17b)$$

 Diese Bewegung ist parabelförmig, wie man leicht sieht, wenn man $x(t)$ nach t auflöst und einsetzt.

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_{x,0}} \right)^2 + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x \quad (2.2.18)$$

2.2.3. Gleichförmige Kreisbewegung (mit vektorieller Darstellung)

 (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 61]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 16])

Link zur Vorlesung: ([Simulation Karussell von Walter Fendt](#))

Kreisförmige Bewegungen gibt es

- Fahrt durch eine Kurve mit Fahrrad, Auto, Schlittschuhen ...
- Zentrifuge
- Satelliten

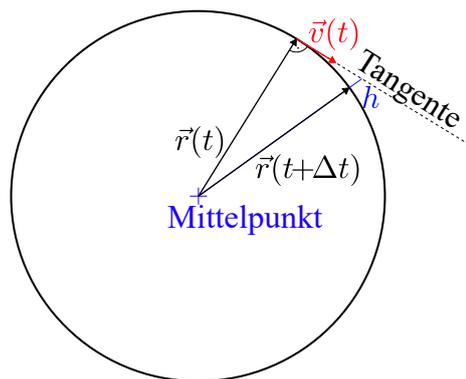


Abb. 2.11.: Schematische Darstellung eines Satelliten.

Der Satellit $|v| = v$ bewegt sich im Kreis mit dem Radius r . In kleinen Zeiten t bewegt er sich um vt in der ursprünglichen Richtung weiter. Er fällt um h . Der Satz des Pythagoras angewandt auf das rechtwinklige Dreieck ergibt

$$r^2 + (vt)^2 = (r + h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 \quad (2.2.19)$$

Kleine Zeiten bedeutet, dass $h \ll r$ ist. Also kann

$$(vt)^2 \approx 2rh \implies h = \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} t^2 = \overbrace{\frac{1}{2} at^2}^{\text{Fallgesetz, Weg und Beschleunigung}} \quad (2.2.20)$$

geschrieben werden.

Vergleich

$$a_z = \frac{v^2}{r} \quad (2.2.21)$$

Wenn $\mathbf{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0)$ ist (ω heisst Kreisfrequenz und wird benötigt, um aus der Zeit eine als Argument der Winkelfunktion benötigte dimensionslose Grösse zu erzeugen), dann ist

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t), 0) \quad (2.2.22)$$

und

$$\mathbf{a}_z(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = (-r\omega^2 \cos(\omega t), -r\omega^2 \sin(\omega t), 0) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (2.2.23)$$

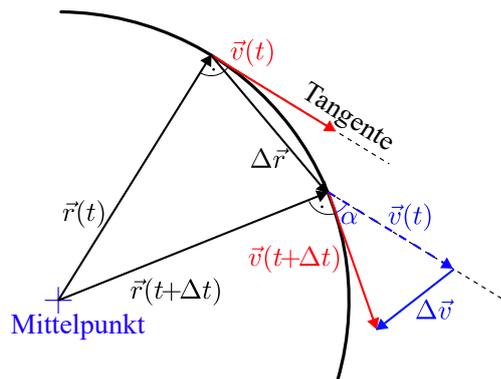


Abb. 2.12.: Zentripetalbewegung. Die durch $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und durch $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ aufgespannten Dreiecke sind ähnlich

Link zur Vorlesung: ([Masse auf Kreisbahn mit Gegengewicht](#))

2.2.4. Nichtkommutativität endlicher Drehungen



Versuch 8: Versuch zur Vorlesung:

Nichtkommutativität von Drehungen (Versuchskarte M-108)

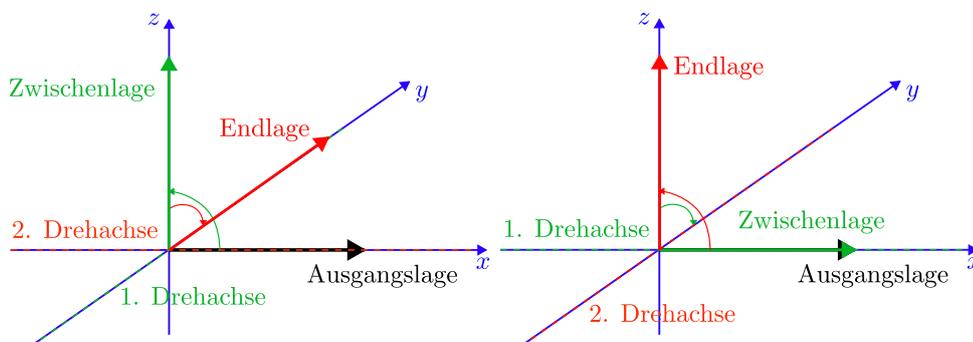


Abb. 2.13.: Beispiel für die Nichtvertauschbarkeit endlicher Drehungen.

Die mathematische Darstellung einer Drehung um die z-Achse kann wie folgt hergeleitet werden:

Jeder Vektor $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ kann als $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$ geschrieben werden.

Dabei ist $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Funktion $R_z(\mathbf{A}, \alpha)$ soll den Vektor \mathbf{A} um die z -Achse drehen. Dann ist die neue x -Komponente eine Funktion $f(A_x, A_y, \alpha)$ und die neue y -Komponente eine andere Funktion $g(A_x, A_y, \alpha)$.

Wenn der Vektor \mathbf{A} um die z -Achse gedreht wird, dann ist der gedrehte Vektor

$$R_z(\mathbf{A}, \alpha_z) = \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} f(A_x, A_y, \alpha_z) \\ g(A_x, A_y, \alpha_z) \\ A_z \end{pmatrix}.$$

Die z -Komponente wird dabei nicht verändert, die x - und die y -Komponenten sind Funktionen der ursprünglichen x - und y -Komponenten sowie des Winkels.

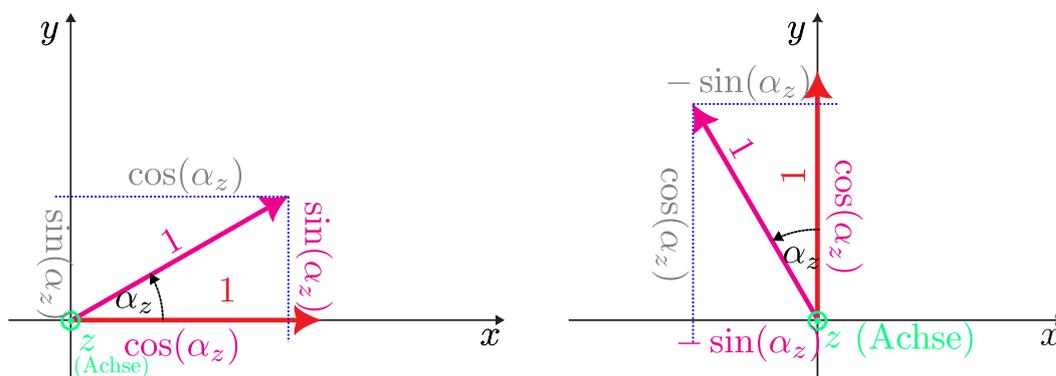


Abb. 2.14.: Links wird gezeigt, wie e_x rotiert wird. Rechts wird e_y rotiert.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} R_z(\mathbf{e}_x, \alpha_z) &= R_z\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_z\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) \\ \sin(\alpha_z) \\ 0 \end{pmatrix} \\ R_z(\mathbf{e}_y, \alpha_z) &= R_z\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_z\right) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_z) \\ \cos(\alpha_z) \\ 0 \end{pmatrix} \\ R_z(\mathbf{e}_z, \alpha_z) &= R_z\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_z\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} R_z(\mathbf{A}, \alpha_z) &= R_z(A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z, \alpha_z) \\ &= A_x R_z(\mathbf{e}_x, \alpha_z) + A_y R_z(\mathbf{e}_y, \alpha_z) + A_z R_z(\mathbf{e}_z, \alpha_z) = \begin{pmatrix} A_x \cos(\alpha_z) - A_y \sin(\alpha_z) \\ A_x \sin(\alpha_z) + A_y \cos(\alpha_z) \\ A_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese letztere Gleichung kann als

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z(\mathbf{A}, \alpha_z) = \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} A_x \cos(\alpha_z) - A_y \sin(\alpha_z) \\ A_x \sin(\alpha_z) + A_y \cos(\alpha_z) \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Damit kann eine Drehung um die z -Achse als Matrix \mathbf{R}_z

$$\mathbf{R}_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.25)$$

geschrieben werden. Durch formales «Rotieren» der Koordinaten $z \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ und $x \rightarrow z$ bekommt man die Drehmatrix für eine Drehung um die y -Achse

$$\mathbf{R}_y(\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) \end{pmatrix} \quad (2.2.26)$$

Weiteres formales «Rotieren» der Koordinaten $z \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ und $x \rightarrow z$ liefert die Drehmatrix für eine Drehung um die x -Achse

$$\mathbf{R}_x(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) \end{pmatrix} \quad (2.2.27)$$

Die Drehung um die y -Achse um $-\pi/2$ ($= 90^\circ$) und dann um die x -Achse um $-\pi/2$ wird mit Matrizen wie

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{R}_x(-\pi/2)\mathbf{R}_y(-\pi/2)\mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

gerechnet. Werden die Drehungen in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt, so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{R}_y(-\pi/2)\mathbf{R}_x(-\pi/2)\mathbf{r} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Grosse Drehungen können nicht vertauscht werden. Es gibt viele Eigenschaften in der Physik, die nicht kommutativ sind.

3. Dynamik, die Newtonschen Axiome

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 71]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 12])

3.1. Trägheitsgesetz: Erstes Newtonsches Axiom

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 72])

Alltägliche Beobachtung: alle Bewegung stoppt \Rightarrow Aristoteles nimmt dies als Naturgesetz an.

Isaac Newton argumentiert: Reibungskräfte stoppen die Bewegung. Wenn es keine Reibungskräfte gäbe würde sich der Bewegungszustand nicht ändern.



Versuch 9: Versuch zur Vorlesung:

Newton'sches Grundgesetz mit LKB und CASSY (Versuchskarte M-201, Video (VPN oder intern))

Erstes Newtonsches Axiom:

Wenn $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0$ ist, ändert ein Körper seinen Bewegungszustand nicht, d.h. er bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

1. NEWTONSCHES AXIOM \triangleq TRÄGHEITSGESETZ

Bsp: Galileis Gesetz (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 72])

Bezugssystem Wir wählen einen Koordinatenursprung 0 und ein Koordinatensystem und schreiben alle Gleichungen in Bezug auf dieses Koordinatensystem auf.

Bezugssysteme können

- fix in Bezug zur Erde sein
- fix in Bezug zu einem Gefährt sein (Bus, Zug, Flugzeug, ...)
- fix in Bezug zur Milchstrasse sein
- ...

Ein Bezugssystem, in dem das erste Newtonsche Axiom gilt, heisst **Inertialsystem**.

Gibt es Inertialsysteme?

3.2. Kraft, Masse, Impuls: Zweites Newtonsches Axiom

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 74]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 12])

das zweite Newtonsche Axiom beantwortet die Frage: **Was ist die Ursache der Bewegung?**

Newton's Formulierung:

Die Änderung des Impulses ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) eines Körpers ist gleich der auf den Körper wirkenden **KRAFT**

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (3.2.1)$$

Bernoullis Formulierung (Achtung: Ein Spezialfall!)

*Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse und proportional zur resultierenden **KRAFT** $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$*

Das zweite Newtonsche Axiom wird auch **AKTIONSGESETZ** genannt.

Bernoulli m muss konstant sein (analog zur Durchschnittsgeschwindigkeit)

Newton analog zur Momentangeschwindigkeit mit

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad m = \text{const} \quad = \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$



Versuch 10: **Versuch zur Vorlesung:**
Kraftstoss (Versuchskarte M-104)

Einheit der KRAFT: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{m kg}}{\text{s}^2}$

3.2.1. Masse (m)

Die Masse im zweiten Newtonschen Axiom ist die **träge Masse**.

Massenbestimmung mit dem 2. Newtonschen Axiom

- gleiche **KRAFT** auf zwei Massen m_1 und m_2
- $F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$

Masse: Einheit **Kilogramm**, **MASSE**-Einheit (nicht Gewicht). Die festgelegte **PLANCKKONSTANTE** ist definiert als $h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$. Daraus kann mit den Definitionen von c und der **Sekunde** das Kilogramm abgeleitet werden. (Ursprünglich definiert mit Urkilogramm in Sèvres \Rightarrow Sekundärnormale, Eichung!)

3.2.2. Kraft (F)

Einheit der KRAFT: $N = \frac{\text{m kg}}{\text{s}^2}$ Name: NEWTON

KRAFT und Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ bei konstanter Masse

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (3.2.2)$$

d.h. die KRAFT hängt auch von der **Krümmung** der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ ab.

Impuls: Definition: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, Einheit $[\mathbf{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = \text{N s}$

Die Weiterentwicklung der Physik nach NEWTON (u.a. Quantenmechanik) hat gezeigt, dass der Begriff des Impulses \mathbf{p} universell verwendbar ist, nicht aber m und \mathbf{v} .

3.2.2.1. Drittes Newtonsches Axiom

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 80])



Versuch 11: Versuch zur Vorlesung:

Actio = Reactio: Fischerstechen (Versuchskarte M-141)

Drittes Newtonsches Axiom:

Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn vom Körper A aus auf den Körper B die KRAFT \mathbf{F} ausgeübt wird, so wird vom Körper B die KRAFT $-\mathbf{F}$ auf den Körper A ausgeübt.

Diese Reaktionskraft ist also gleich gross wie die ursprüngliche KRAFT, aber entgegengesetzt gerichtet.

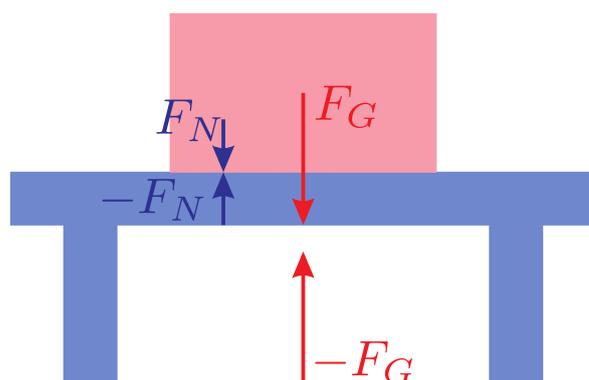


Abb. 3.1.: Gewicht auf Tisch.

Während das erste wie auch das zweite Newtonsche Axiom auch in der Quantenmechanik und in der Relativitätstheorie gelten, versagt in diesen moderneren physikalischen Theorien das dritte Newtonsche Axiom.



Abb. 3.2.: Kraft zwischen Sonne und Erde bei einem Abstand von $\approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Frage: Wirkt die KRAFT instantan?

3.2.2.2. Kraft durch Gewicht und schwere Masse

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 78]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 46])

Jede Masse wird von jeder anderen Masse angezogen (Gravitation).

Die Erdanziehung auf eine Masse m ist

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} \quad (3.2.3)$$

$|\mathbf{g}| = g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist die Fallbeschleunigung auf Meereshöhe. m_s ist die **SCHWERE** Masse.

Anwendung: Massenbestimmung durch Kraftvergleich.

Wenn an **einem** Ort $F_{g,1} = F_{g,2}$ ist, so ist auch $m_1 = m_2$. Wenn an **einem** Ort $F_{g,1} = \alpha F_{g,2}$ ist, so ist auch $m_1 = \alpha m_2$.

3.2.3. Arten von Kräften

Fundamentale Kräfte

1. Gravitationswechselwirkung
2. elektromagnetische Wechselwirkung
3. starke Wechselwirkung (Kräfte zwischen Kernbausteinen wie Protonen oder Neutronen)
4. Schwache Wechselwirkung (Verantwortlich z.B. für den Zerfall der freien Neutronen).

Kontaktkräfte

Die KRAFT ist proportional zur Auslenkung $F = -kx$, analog zur Feder. Anwendung: Federwaage.

3.2.4. Beispiele zur Lösung von Bewegungsproblemen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 86])

Beispiel: Klotz an Faden ziehen

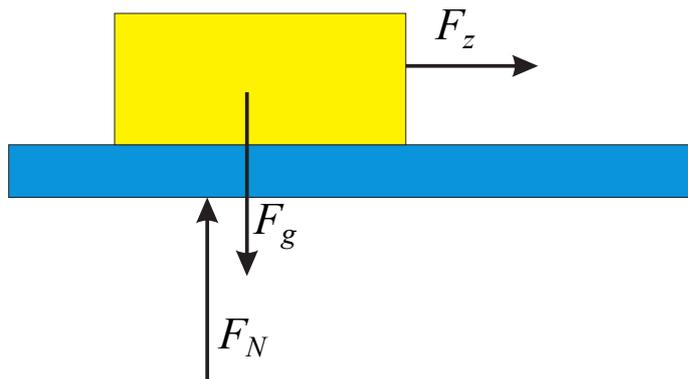


Abb. 3.3.: Kräfte auf einen Körper

F_Z , F_G und F_N sind Kräfte auf den Körper

$$F_Z = ma_x$$

Reaktionskraft auf F_Z : $F'_Z = -F_Z$

3. NEWTONSCHES AXIOM: KRAFT durch ziehende Hand = - KRAFT auf Körper

Wenn die Masse mit einem Faden gezogen wird und dessen Masse m_F ist, ist

$$F - F'_Z = m_f a_x$$

Ist die Masse des Fadens vernachlässigbar: $F - F'_Z \approx 0$



Abb. 3.4.: Fadenspannung

Bei vernachlässigbarer Masse ist $|F_Z|$ überall im Faden gleich. F_Z heisst die Zugkraft.

Beispiel: schiefe Ebene

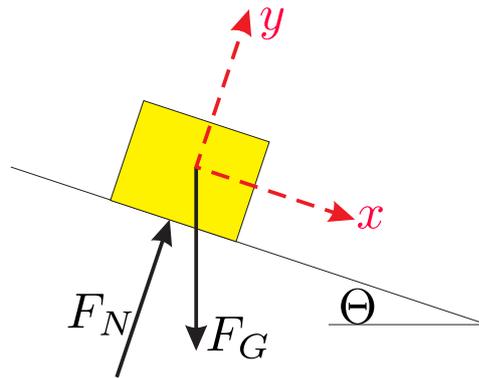


Abb. 3.5.: Schiefe Ebene.

$$F_{G,x} = F_G \sin(\Theta) = mg \sin(\Theta)$$

$$F_{G,y} = -F_G \cos(\Theta) = -mg \cos(\Theta)$$

In unserem Koordinatensystem ist a_y null.

$$\sum F_y = F_N - mg \cos(\Theta) = 0$$

Also ist

$$F_N = mg \cos(\Theta)$$

Die x -Komponente ist

$$\sum F_x = mg \sin(\Theta) = ma_x$$

oder

$$a_x = g \sin(\Theta)$$

Versuch 12:   **Versuch zur Vorlesung:**
Kräfteparallelogramm (Versuchskarte M-12)

Beispiel: Gewicht an einer Schnur

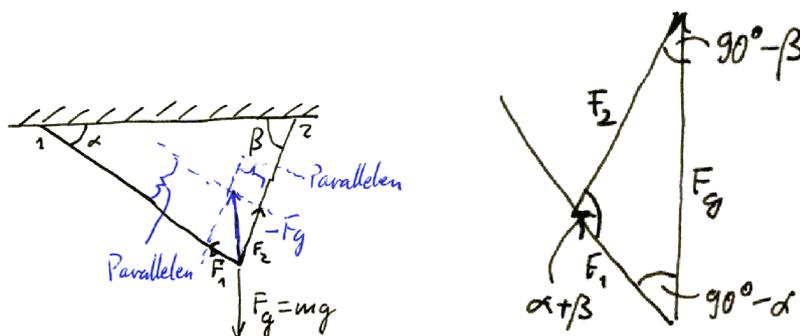


Abb. 3.6.: Links: Konstruktion mit Kräfteparallelogramm, rechts vergrößerte Ansicht.

Gegeben ist: F_g , α und β

Mit dem Sinussatz für beliebige Dreiecke (Seitenlänge dividiert durch den Sinus des Gegenwinkels ist konstant)

$$\frac{F_g}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F_1}{\sin(\pi/2 - \beta)} = \frac{F_2}{\sin(\pi/2 - \alpha)} \quad (3.2.4)$$

umgeformt

$$F_1 = F_g \frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3.2.5)$$

$$F_2 = F_g \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3.2.6)$$

Schlussfolgerung: Wenn α **und** β gegen null gehen, dann werden die Kräfte F_1 und F_2 sehr gross. Sie können leicht die maximal zulässige Seilspannung übersteigen.

Beispiel: Zentrifugalregulator (Erfindung von James Watt)

Versuch 13:  Versuch zur Vorlesung:
Watt'scher Zentrifugalregulator

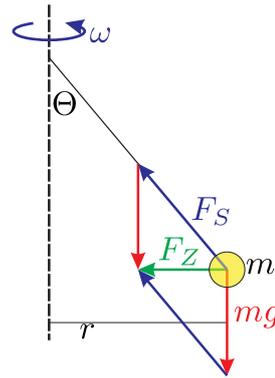


Abb. 3.7.: Schematische Darstellung des Watt'schen Zentrifugalregulators.

Die Masse m wird durch die Gravitation und die Seilspannung beschleunigt. Die resultierende KRAFT ist die Zentripetalkraft F_Z .

Grösse der Zentripetalkraft

$$F_Z = m\omega^2 r = F_S \sin(\Theta) \quad (3.2.7)$$

und

$$F_S \cos(\Theta) = mg = F_G \quad (3.2.8)$$

Zusammen

$$\frac{F_S \sin(\Theta)}{F_S \cos(\Theta)} = \tan(\Theta) = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{r}{g} \omega^2 \quad (3.2.9)$$

also ist für kleine Θ

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \tan(\Theta)} \approx \sqrt{\frac{g\Theta}{r}} \quad (3.2.10)$$

Der Watt'sche Regulator ist also ein Drehzahlmesser.

3.3. Anwendungen der Newtonschen Axiome

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 80])

Wir setzen voraus, dass wir alle Kräfte kennen: dann können wir die Beschleunigung und damit auch die Bewegung eines Teilchens bestimmen.

3.3.1. Reibung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 99]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 40])

Erfahrung: wenn man versucht, ein Möbelstück zu verschieben, muss man eine KRAFT ausüben.

Reibungskräfte versuchen, Bewegungen zu verhindern oder zu dämpfen



Versuch 14: Versuch zur Vorlesung:

Haft- und Gleitreibung (Versuchskarte M-22, Video (VPN oder intern))

3.3.1.1. Haftreibung

Beobachtung: Wenn ein Körper mit der KRAFT F_N , der Normalkraft, auf einen anderen Körper gedrückt wird, wird mindestens eine KRAFT

$$F \geq F_H = \mu_H F_N \quad (3.3.1)$$

benötigt, um den Körper in Bewegung zu setzen. F_H heisst **Haftreibungskraft**. μ_H ist der **Haftreibungskoeffizient**.

Umgekehrt gilt die Aussage, dass wenn die zur Auflagefläche parallele KRAFT $F < F_H$ ist, bewegt sich der Körper nicht. Die Haftreibungskraft, englisch: stiction, ist eines der grössten Probleme in der Mikrosystemtechnik (englisch Micro-Electro-Mechanical-Systems, MEMS) und in der Festplattenindustrie.

3.3.1.2. Gleitreibung

Wenn ein Körper gleitet, dann gilt die Beziehung

$$F_G = \mu_G F_N \quad (3.3.2)$$

wobei F_G die **Gleitreibungskraft** und μ_G der **Gleitreibungskoeffizient** ist.

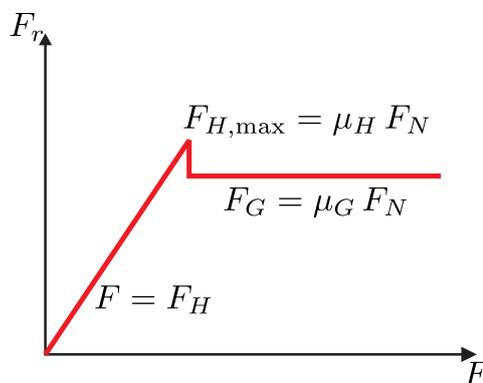


Abb. 3.8.: Schematische Darstellung der Haft- und Gleitreibungskraft als Funktion der angelegten, parallel zur Auflage wirkenden KRAFT.

Schematisch verhalten sich Haftreibungskraft und Gleitreibungskraft wie in der Abbildung 3.8 gezeigt.

3.3.1.2.1. Eigenschaften

- $\mu_G \leq \mu_H$
- μ_G hängt von der Relativgeschwindigkeit der Oberflächen ab. F_G ist im Geschwindigkeitsbereich von $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ bis einigen $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ näherungsweise konstant. Ausserhalb dieses Geschwindigkeitsbereiches nimmt die Gleitreibungskraft zu.
- μ_G und μ_H hängen von der Struktur der Oberflächen und ihrer Zusammensetzung ab, nicht aber von der scheinbaren makroskopischen Kontaktfläche A_M ab.
- μ_G und μ_H hängen von der wahren Kontaktfläche $A_W \ll A_M$ ab sowie vom Kontaktdruck in dieser Fläche. (Deshalb ist die Reibung zwischen ultraflachen Endmassen aus der Mechanikwerkstatt oder zwischen Objektträgern extrem gross.)

3.3.1.2.2. Schlussfolgerung Die Reibung wird von temporären Bindungen zwischen den Atomen der Oberflächen der einzelnen Reibpartnern gebildet. Zusätzlich und meistens auch dominierend ist jedoch die zur Abscherung mikroskopischer Erhöhungen (Asperities in englisch) benötigten Kräfte.

Versuch 15:  **Versuch zur Vorlesung:**
Schiefe Ebene (Versuchskarte M-49, Video (VPN oder intern))

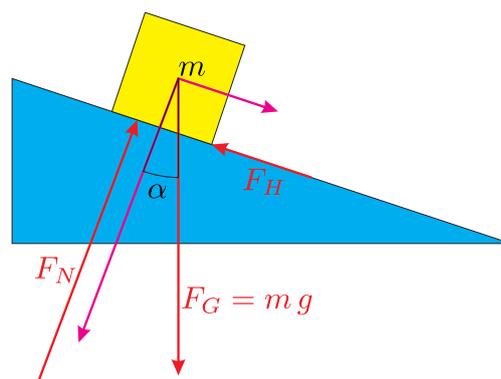


Abb. 3.9.: Kräfte auf einen Körper auf einer schiefen Ebene.

Die x-Achse sei parallel zur Auflage, die y-Achse senkrecht dazu.

$$\sum F_y = F_N - mg \cos(\alpha) = 0 \quad (3.3.3)$$

$$\sum F_x = mg \sin(\alpha) - F_H = 0 \quad (3.3.4)$$

Oder

$$F_H = mg \sin(\alpha) = \frac{F_N}{\cos(\alpha)} \sin(\alpha) = F_N \tan(\alpha) \quad (3.3.5)$$

Der Haftreibungskoeffizient ist gleich dem Tangens des Winkels, bei dem der Körper zu gleiten beginnt.

$$\mu_H = \tan(\alpha_{max}) \quad (3.3.6)$$

Gleitreibung wird durch Messung der Beschleunigung bestimmt.

$$F_x = mg \sin(\alpha) - \mu_G F_G = ma_x \quad (3.3.7)$$

$$a_x = g (\sin(\alpha) - \mu_g \cos(\alpha)) \quad (3.3.8)$$

oder

$$\mu_g = \tan(\alpha) - \frac{a_x}{g \cos(\alpha)} \quad (3.3.9)$$

3.3.1.3. Rollreibung

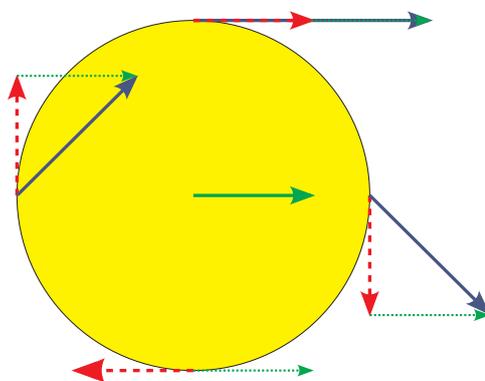


Abb. 3.10.: Geschwindigkeitsvektoren bei einem rollenden Rad rot gestrichelt: Geschwindigkeitsvektoren von der Achse aus gesehen (mitbewegt); grün: Geschwindigkeitsvektor der Achse; blau: Summe.

Ein Rad, das am Boden abrollt, wird durch die Haftreibung zum drehen gebracht. Der **momentane** Drehpunkt eines Rades ist die Auflagefläche. Dies ist einfach ersichtlich, wenn die Geschwindigkeitsvektoren des Rades von der Achse aus gesehen (rot gestrichelt) zum Geschwindigkeitsvektor der Achse (grün) dazugezählt werden. Die resultierenden Geschwindigkeitsvektoren sind so, dass am Auflagepunkt die Geschwindigkeit gleich null ist. Da der Ort mit der Geschwindigkeit 0 immer

die momentane Drehachse ist, dreht sich jedes abrollende Rad und jeder abrollende Körper um seinen Auflagepunkt.

Rollreibung meint die Reibung, die bei einem rollenden Körper auftritt. Ist der Körper nicht deformierbar, dann ist die Rollreibung null, wenn die beiden Oberflächen sich nicht anziehen (Adhäsion, Klebrigkeit!)

3.3.1.3.1. Beispiel: innen oder aussen um die Kurve fahren? Die Zentripetalbeschleunigung ist $a_Z = v^2 r^{-1}$. Die Masse des Autos sei m , der Haftreibungskoeffizient μ_H . Dann muss $F_Z = a_Z m = v^2 r^{-1} m \leq \mu_H m g$ sein. Die Geschwindigkeit muss der Bedingung

$$v \leq \sqrt{\mu_H r g} \quad (3.3.10)$$

genügen. Die Zeit zum Durchfahren eines Bogens der Länge $l = \alpha r$ mit dem Winkel α im Bogenmass und dem Radius r ist

$$T(r, \alpha, v) = l v^{-1} = \frac{r \alpha}{v} \geq \frac{r \alpha}{\sqrt{\mu_H r g}} = \alpha \sqrt{\frac{r}{\mu_H g}} \quad (3.3.11)$$

3.3.2. d'Alembert'sches Prinzip

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 162])

Um die Bewegung eines Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten zu berechnen, müssen die Bewegungsgleichungen gelöst werden. Das Prinzip von d'Alembert (nach Jean Baptiste le Rond d'Alembert) sagt:

Ersetzt man bei einem bewegten System von Massenpunkten m_i die entsprechenden Beschleunigungen \mathbf{a}_i durch die Trägheitskräfte

$$\mathbf{F}_{Ti} = -m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

so hat man das dynamische Problem formal auf ein statisches Problem zurückgeführt.

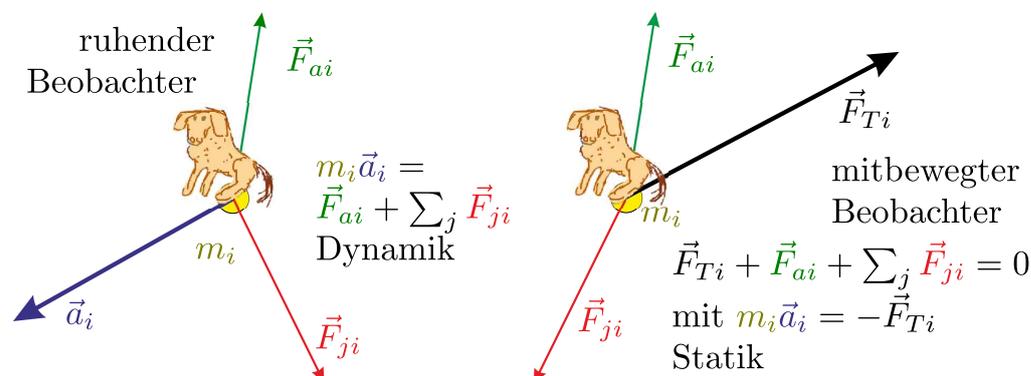


Abb. 3.11.: Prinzip von Jean Baptiste le Rond d'Alembert. Links der Standpunkt eines ruhenden Beobachters, rechts derjenige des mitbewegten Beobachters. Die \mathbf{F}_{ji} sind Kräfte innerhalb des Systems von Massen, \mathbf{F}_{ai} sind äussere Kräfte. \mathbf{a}_i ist die Beschleunigung der Masse m_i .

Beschreibung durch den ruhenden Beobachter mit dem 2. Newtonschen Axiom (Dynamik)

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{ai} + \sum_j \mathbf{F}_{ji} \quad (3.3.12)$$

Und nun die Beschreibung des mitbewegten Beobachters (Für ihn ist der Massenzentrum des Massensystems in Ruhe!).
Nach Jean Baptiste le Rond d'Alembert gilt

$$m_i \mathbf{a}_i = -\mathbf{F}_{Ti} = \mathbf{F}_{ai} + \sum_j \mathbf{F}_{ji} \quad (3.3.13)$$

und damit die Beschreibung im mitbewegten Bezugssystem (Statik) über das formale Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{F}_{Ti} + \mathbf{F}_{ai} + \sum_j \mathbf{F}_{ji} = 0 \quad (3.3.14)$$

Anwendung des Prinzips von Jean Baptiste le Rond d'Alembert: Maxwellsches Rad auf einer Waage (nach James Clerk Maxwell)

Versuch 16:   **Versuch zur Vorlesung:**

d'Alembertsches Prinzip: Maxwellsches Rad auf Waage (Versuchskarte M-70, Video (VPN oder intern))

3.3.3. Bewegung mehrerer miteinander verbundener Körper

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 110])

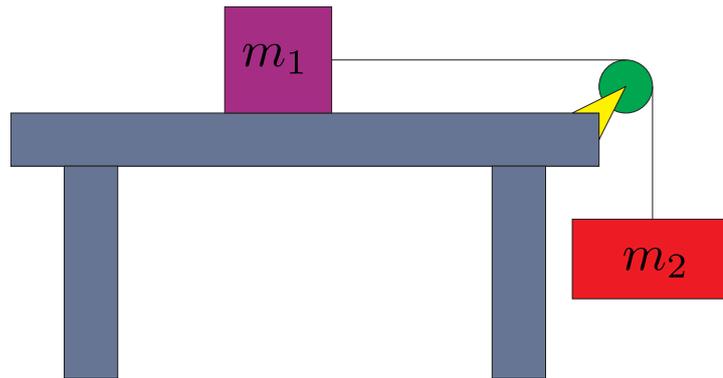


Abb. 3.12.: Zwei verbundene Körper an einem Tisch.

Masse 1 wird beschleunigt. Trägheitskraft $F_a = m_1 a = F_s$ (Seilspannung)
 Masse 2 wird beschleunigt. Kräfte an Masse 2: Trägheitskraft $F_a = m_2 a$ sowie
 Erdbeschleunigung $F_g = m_2 g$. Die RESULTIERENDE KRAFT ist die Seilspannung
 $F_s = m_2 g - m_2 a$.
 Nun muss a für beide Massen gleich sein (dehnungsfreies Seil). Ebenso ist die
 Seilspannung überall gleich.

$$F_s = m_1 a = m_2 g - m_2 a \quad (3.3.15)$$

oder

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3.16)$$

und die Seilspannung

$$F_s = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3.17)$$

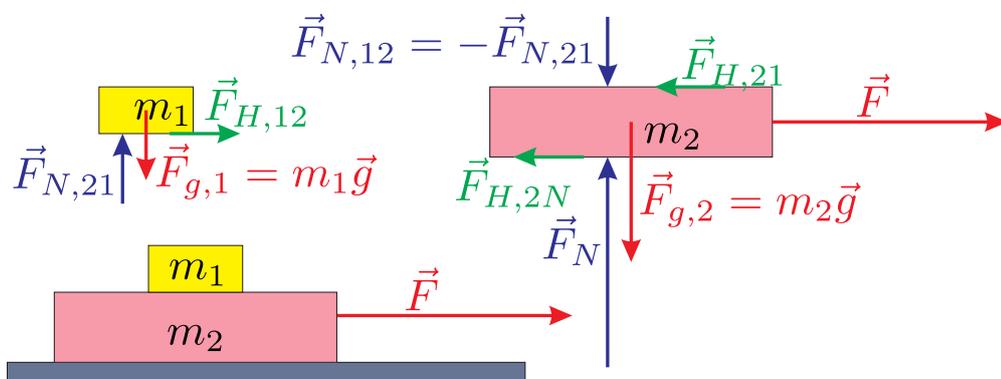


Abb. 3.13.: Beschleunigung zweier auseinander liegender Massen.

- 3. NEWTONSCHES AXIOM: Normalkräfte zwischen den beiden Massen $F_{N,21} = F_{N,12}$
- 3. NEWTONSCHES AXIOM: Reibungskräfte zwischen den beiden Massen $F_{H,12} = F_{H,21}$
- 1. NEWTONSCHES AXIOM für die Masse m_1 (keine Beschleunigung in senkrechte Richtung): $F_{g,1} = m_1g = F_{N,21}$
- 2. NEWTONSCHES AXIOM für die Masse m_2 (keine Beschleunigung in senkrechte Richtung): $F_{g,2} + F_{N,12} = m_2g + F_{N,12} = m_2g + m_1g = F_N$
- 2. NEWTONSCHES AXIOM für Masse m_1 : $\sum F_x = F_{H,12} = m_1a_1$
- 2. NEWTONSCHES AXIOM für Masse m_2 : $\sum F_x = F - F_{H,21} - F_{H,2N}$

Die Masse 2 bewegt sich nicht, wenn $F \leq \mu_{H,2N}F_N = \mu_{H,2N}(m_1 + m_2)g$ gilt. Überschreitet die angelegte KRAFT diesen Wert, dann muss die Gleitreibungskraft $F_{G,2N} = \mu_{G,2N}F_N$ eingesetzt werden.

Wir betrachten nun die untere Masse als bewegt.

Wenn die Grenzkraft der Haftreibungskraft nicht überschritten wird, wenn also $F_{H,1} \leq \mu_{H,12}F_{N,21}$ ist, bewegen sich die beiden Körper zusammen. Die Haftreibungskraft $F_{H,12} = F_{H,21}$ kann eliminiert werden.

$$\begin{aligned} F &= (m_1 + m_2)a + F_{G,2N} \\ &= (m_1 + m_2)a + \mu_{G,2N}(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)[a + \mu_{G,2N}g] \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Hier ist $\mu_{H,12} = \mu_{H,21}$ der Haftreibungskoeffizient zwischen den Massen 1 und 2 und $\mu_{H,2N}$ der Haftreibungskoeffizient zwischen der Masse 2 und der Unterlage. Wenn die durch die Trägheit der Masse 1 generierte KRAFT grösser als die maximale Haftreibungskraft ist, dann gleitet Masse 1 auf Masse 2. Dies tritt nicht auf, wenn

$$a_1 = \frac{F_{H,12}}{m_1} \leq \frac{\mu_{H,12}F_{N,21}}{m_1} \quad (3.3.19)$$

ist. Dies ist äquivalent zu

$$a \leq \mu_{H,12}g \quad (3.3.20)$$

Damit ist die maximale KRAFT

$$F \leq F_{max} = (m_1 + m_2)g[\mu_{H,12} + \mu_{G,2N}] \quad (3.3.21)$$

Gleitet Masse 1 über Masse 2, dann ist die übertragene KRAFT $F_G = \mu_{G,12}m_1g$ die Gleitreibungskraft mit $\mu_{G,12}$ dem Gleitreibungskoeffizienten zwischen den beiden Massen. Das horizontale Kräftegleichgewicht für die Masse 2 muss nun für beide Grenzflächen mit den Gleitreibungskoeffizienten geschrieben werden.

Die Masse 1 wird mit

$$a_1 = \mu_{G,12}g \quad (3.3.22)$$

beschleunigt; die Masse 2 mit

$$F - F_{G,12} - F_{G,2N} = m_2 a_2 \quad (3.3.23)$$

Also ist

$$a_2 = \frac{F - F_{G,12} - F_{G,2N}}{m_2} \quad (3.3.24)$$

Bemerkung:

Wenn $F_{H,2N} = \mu_{H,2N}(m_1 + m_2)g > F_{max} = (m_1 + m_2)g [\mu_{H,12} + \mu_{G2,N}]$ ist, ist es nicht möglich die Masse 2 in Bewegung zu setzen ohne dass Masse 1 gleitet!

3.3.4. Kräfte in bewegten Bezugssystemen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 115])

Fallbewegung in einem bewegten Wagen. Der Wagen wird genau ab dem Moment beschleunigt, ab dem auch der Ball zu fallen beginnt.

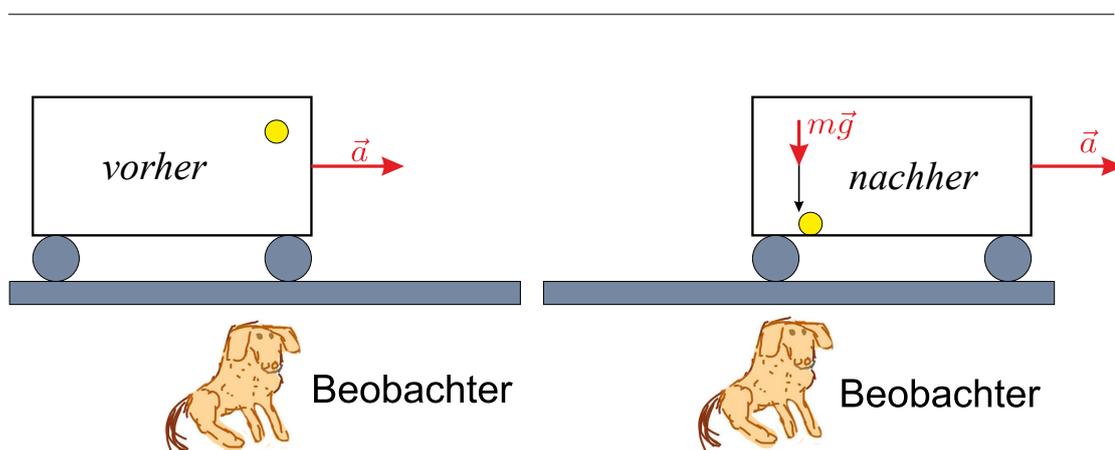


Abb. 3.14.: Standpunkt eines **ruhenden** Beobachters: Fall in einem beschleunigten Wagen.

Für den ruhenden Fällt der Ball ganz gewöhnlich. Für ihn ist $F_G = mg$ die Ursache der Bewegung.



Abb. 3.15.: Standpunkt eines **mitbewegten** Beobachters: Fall in einem beschleunigten Wagen.

Für den mitbewegten Beobachter sieht das ganze anders aus. Auf den Ball scheint für ihn die KRAFT $\mathbf{F} = \mathbf{F}_G - m\mathbf{a}$ zu wirken. Auf den Ball wirkt vom beschleunigten Beobachter aus gesehen eine zusätzliche KRAFT $m\mathbf{a}$, die in einem **Inertialsystem** nicht wirkt. Diese von einem ruhenden Beobachter aus nicht vorhandene KRAFT ist eine Trägheitskraft (manchmal irreführenderweise Scheinkraft genannt). Der Begriff Scheinkraft ist schlecht, da für den mitbewegten Beobachter die KRAFT $m\mathbf{a}$ sehr real sein kann und Schmerzen verursachen. Der mitbewegte (beschleunigte) Beobachter muss die Trägheitskraft $\mathbf{F}_S = -m\mathbf{a}$ einführen, um die Newtonschen Axiome zu retten (diese gelten nach der Definition eigentlich nicht in einem beschleunigten Bezugssystem).

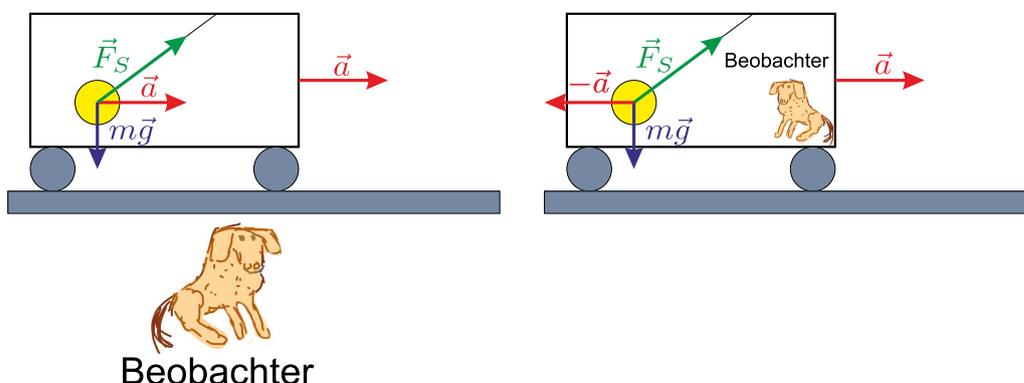


Abb. 3.16.: In einem beschleunigten Wagen hängende Lampe. Links der Standpunkt eines beschleunigten Beobachters, rechts der Standpunkt des mitbeschleunigten Beobachters.

Für beide, den ruhenden und den mitbeschleunigten Beobachter ist die Seilspannung im Seil, das die Lampe hält, sowie das Gewicht der Lampe das gleiche. Die Interpretation ist aber verschieden.

- Der ruhende Beobachter sagt: Die Lampe wird beschleunigt. Auf sie wirken zwei Kräfte: die Seilspannung \mathbf{F}_S und die Schwerkraft $m\mathbf{g}$. **Die resultierende Kraft ist die Beschleunigung der Lampe a mal deren Masse,**

also $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_S$. Dabei ist die Beschleunigung der Lampe die gleiche wie die des Wagens.

- Für den mitbewegten Beobachter ist die Lampe in Ruhe. **Die resultierende Kraft ist die Gegenkraft zur Seilspannung.** Der mitbewegte Beobachter muss, um den Newtonschen Axiomen zur Geltung zu verhelfen, die KRAFT $\mathbf{F}_S = -m\mathbf{a}$ einführen.

3.3.4.1. Zentrifugalkraft

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 116])

Wir betrachten ein rotierendes Bezugssystem. Eine Masse m ist an einer Schnur an der Achse verbunden.

- Der ruhende Beobachter beschreibt die Situation so: die Masse wird durch die Schnurspannung auf eine Kreisbahn gezwungen. Die Geometrie der Bahn und die Geschwindigkeit legen die Zentripetalkraft $F_{ZP} = -m\frac{v^2}{r^2}\mathbf{r} = -m\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r = -mr\omega^2 = -mr\omega^2\mathbf{e}_r$ fest.
- Der mitbewegte Beobachter beschreibt die Situation so: Der Körper ist gegenüber dem rotierenden Bezugssystem in Ruhe. Da eine Seilspannung beobachtet wird, muss um den Newtonschen Axiomen genüge zu tun, eine Zentrifugalkraft $F_{ZF} = -m\frac{v^2}{r^2}\mathbf{r} = m\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r = mr\omega^2 = mr\omega^2\mathbf{e}_r$ eingeführt werden.

 **Versuch 17:**  **Versuch zur Vorlesung:**
Zentrifugalkraft (Versuchskarte M-60)

3.3.4.2. Die Erde als rotierendes System: Corioliskraft

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 117]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 56])

 **Versuch 18:**  **Versuch zur Vorlesung:**
Mechanik Corioliskraft: Kugel auf Drehtisch (Versuchskarte M-7, Video (VPN oder intern))

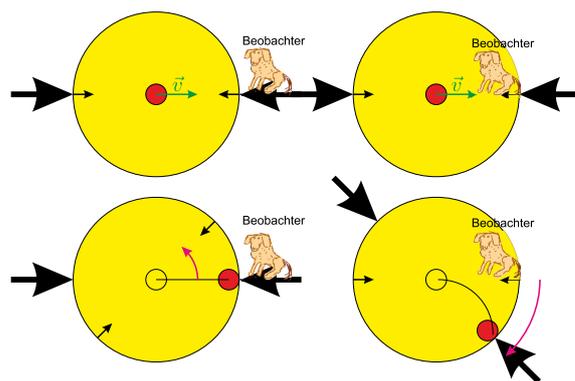


Abb. 3.17.: Coriolisbeschleunigung: Bewegung eines von einer rotierenden Scheibe geworfenen Balls. Links der Standpunkt des ruhenden Beobachters. Rechts derjenige des mitbewegten Beobachters. (Für diesen rotiert die Welt, analog dazu dass für uns die sonne sich bewegt!)

Rotierende Bezugssysteme können mit der Zentrifugalkraft alleine nicht beschrieben werden. Da bei gleicher Winkelgeschwindigkeit die lineare Geschwindigkeit vom Abstand zur Drehachse abhängt, muss eine den Abstand zur Drehachse ändernde Bewegung notwendigerweise eine beschleunigte Bewegung sein. Diese im rotierenden Bezugssystem auftretende Beschleunigung, die immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht und verschwindet, wenn die Geschwindigkeit null ist, heisst die Coriolis-Beschleunigung.

Die Coriolis-Beschleunigung und Coriolis-Kraft sind für die lange Lebensdauer der Hochdruckgebiete und Tiefdruckgebiete verantwortlich.



Versuch 19: Versuch zur Vorlesung:

Corioliskraft: Moskauer Gerät (Versuchskarte M-152)

3.3.5. Numerische Methoden

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 118])

Wie berechnet man eine Bahnkurve, wenn man die KRAFT (Beschleunigung) gegeben ist? Diese Frage ist die gleich wie die Frage nach der Methode zum Lösen von Differenzialgleichungen.

Mit

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

können wir die Geschwindigkeit zur Zeit Δt folgendermassen berechnen:

$$v(\Delta t)v_1 = v_0 + a_0\Delta t \qquad (3.3.25)$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit $2\Delta t$ ist

$$v(2\Delta t) = v_2 = v_1 + a_1\Delta t = v_0 + a_1\Delta t + a_0\Delta t \quad (3.3.26)$$

Analoge Gleichungen gelten für den Ort.
Zusammen erhalten wir das Euler-Verfahren.

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t \quad (3.3.27a)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i\Delta t \quad (3.3.27b)$$

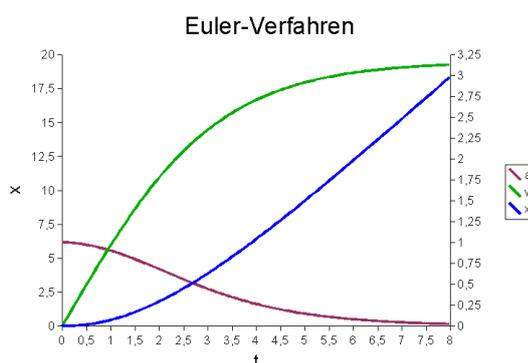


Abb. 3.18.: Beispiel des Euler-Verfahrens mit $a = a_0(1 - \beta v^2)$. Diese Gleichung simuliert den freien Fall mit Luftwiderstand.

3.4. Arbeit, Energie, Leistung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 129]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 20])

Die Definitionen von **Arbeit**, **Energie** und **Leistung** weichen von den im alltäglichen Leben üblichen Begriffen ab!

- **Arbeit:** Eine **KRAFT** verrichtet nur dann Arbeit, wenn ihr Angriffspunkt sich unter der Einwirkung der **KRAFT** eine gewisse Strecke bewegt. Nur die Kraftkomponente entlang der Bewegung entlang der Bewegungsrichtung trägt zur Arbeit bei. Wenn Sie unter grosser Kraftanstrengung einen Gegenstand in Position halten, dann leisten Sie im Sinne der Physik keine mechanische Arbeit.
- **Energie** bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, Arbeit zu leisten. Leistet ein physikalisches System an einem zweiten Arbeit, dann wird Energie ausgetauscht. Energieformen sind die Bewegungsenergie, auch **KINETISCHE ENERGIE** genannt, die Lageenergie, **POTENTIELLE ENERGIE** genannt, Energie der elektrostatischen und magnetischen Felder sowie Wärmeenergie.

- Leistung bezeichnet die Rate des Energietransfers oder der Arbeit, also Arbeit pro Zeit.



Versuch 20: Versuch zur Vorlesung:

Mechanik Schiefe Ebene: Arbeit (Versuchskarte M-94)

3.4.1. Arbeit und Energie bei konstanter Kraft, kinetische Energie

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 130])

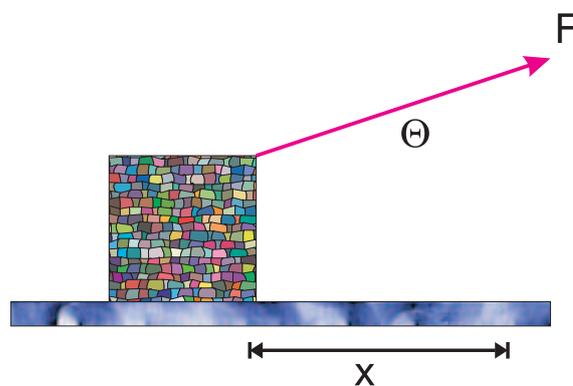


Abb. 3.19.: Mechanische Arbeit.

Die Arbeit W im obigen Bild ist

$$W = F \cos(\Theta) x = F_x x \quad (3.4.1)$$

Einheit der Arbeit oder Energie $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \frac{\text{m}^2 \text{ kg}}{\text{s}^2}$

3.4.1.1. Beschleunigungsarbeit

Bei konstanter Beschleunigung und konstanter Masse ist

$$F_x = m a_x$$

Der zurückgelegte Weg ist nach Gleichung (2.1.24b)

$$v_e^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \quad (3.4.2)$$

Arbeit:

$$W = F_x \Delta x = m a_x \Delta x = m \left[\frac{v_e^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right] = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3.4.3)$$

Die Beschleunigungsarbeit ändert offensichtlich eine Grösse, die nur von der Masse und von der Geschwindigkeit abhängt.

Die KINETISCHE ENERGIE $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ ist die in der Bewegung innewohnende Energie, die zur Arbeitsleistung herangezogen werden kann



Versuch 21: Versuch zur Vorlesung:

Autorennen auf drei Bahnen: Potentielle und kinetische Energie
(Versuchskarte M-55)

3.4.2. Arbeit und Energie bei veränderlicher Kraft

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 134])

Wenn die KRAFT nicht konstant ist, so kann die Strecke s in n Teilstrecken s/n aufgeteilt werden.

Die Fläche unter der Kurve ist dann

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F_j \frac{s}{n} = \int_{x_1}^{x_1+s} F_x(x) dx \quad (3.4.4)$$

Der Grenzwert ist das Integral.

Das Integral

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.4.5)$$

ist die Definition der **Arbeit**

Beispiel: Fläche unter $g(\alpha) = \sin(\alpha)$

Das Resultat ist $\int_0^{\pi} \sin(\alpha) d\alpha = \cos(\alpha)|_0^{\pi} = 2$.

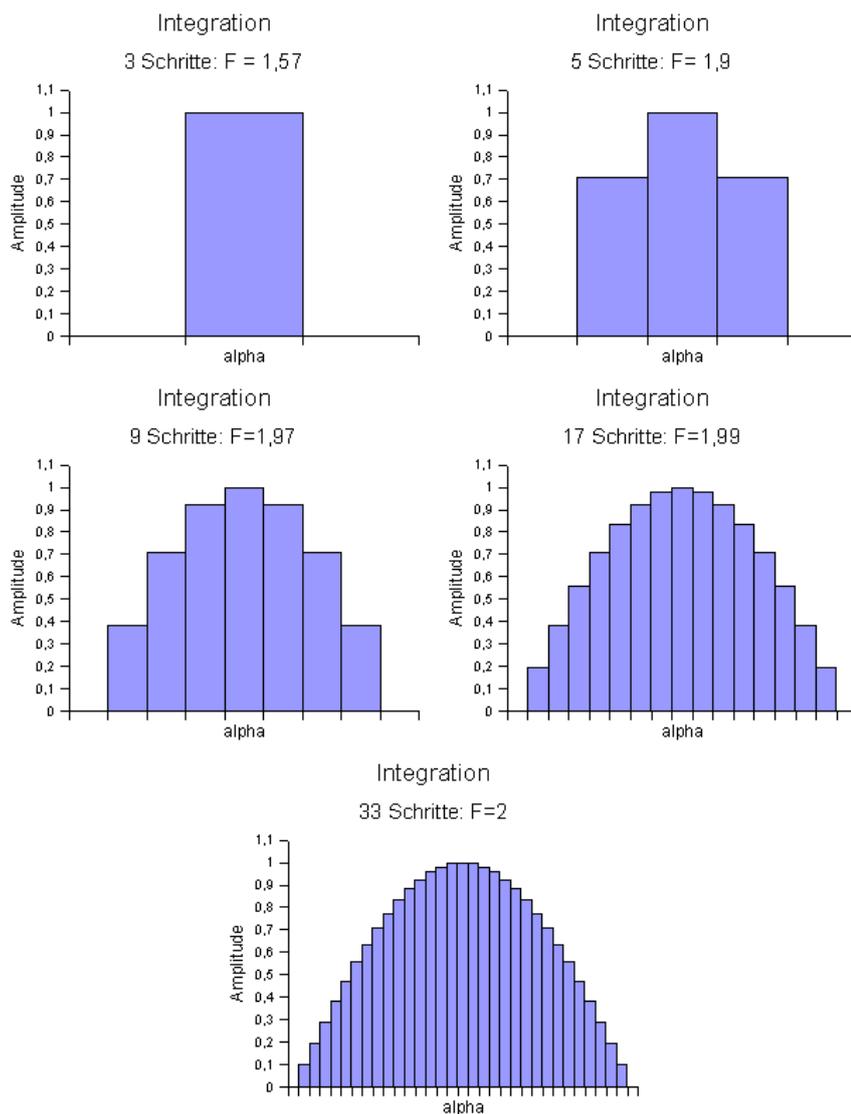


Abb. 3.20.: Fläche unter der Kurve $\sin(\alpha)$ zwischen 0 und π . Der Untertitel gibt die Anzahl Schritte sowie das numerische Resultat.

3.4.2.1. Spannarbeit, Arbeit bei veränderlicher Kraft

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 134]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 134])

Beispiel: wir spannen eine Feder.



Versuch 22: Versuch zur Vorlesung:

Elastische Dehnung einer Schraubenfeder (Versuchskarte M-100, Video (VPN oder intern))

Das Kraftgesetz einer Feder ist

$$F(x) = -kx \quad (3.4.6)$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die KRAFT entgegengesetzt zur Auslenkung gerichtet ist. k mit der Einheit N/m ist die Federkonstante.

Wenn ich als Experimentator die Feder spanne, dann muss ich die KRAFT $F_{exp}(x) = -F(x)$ ausüben. Die Arbeit, die ich leiste, ist

$$W = \int_0^x F_{exp}(\xi) d\xi = - \int_0^x F(\xi) d\xi = \int_0^x (-k\xi) d\xi \quad (3.4.7)$$

Die Spannarbeit beim Spannen von 0 nach x ist also

$$W(x) = \int_0^x F(\xi) d\xi = \int_0^x -(-k\xi) d\xi \quad (3.4.8)$$

Wir müssen die von uns aufgebrauchte KRAFT, also die Reaktionskraft zur Federkraft, einsetzen und erhalten richtigerweise positive Kräfte. Die Arbeit, die die Feder verrichtet, ist gegeben aus der durch die Feder erzeugten KRAFT und dem Weg: deshalb muss ein Minuszeichen weniger stehen.

Die Arbeit, die ich an einem System verrichte, wird in dem System als **potentielle Energie** gespeichert.

Eine äquivalente Aussage ist: Die **POTENTIELLE ENERGIE** ist die Arbeit gegen die Feldkraft.

3.4.2.2. Nicht-lineares Kraftgesetz ($F = -Dr^2$)

Versuch 23:   **Versuch zur Vorlesung:**

Kraft-Dehnungskurve von Gummi (Versuchskarte M-29)

Wir setzten das Kraftgesetz $F = -Dr^2$ in die Gleichung (3.4.4) ein, berücksichtigen, dass wir gegen diese KRAFT arbeiten müssen und erhalten

$$W = \int_{r_1}^{r_2} -(-Dr^2) dr = \frac{D}{3} r^3 \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{D}{3} [r_2^3 - r_1^3] \quad (3.4.9)$$

Alle physikalischen Gesetze und Phänomene sind **nichtlinear**. Dies tritt in der klassischen Physik bei grossen Auslenkungen, Anregungen, Spannungen usw. auf. Die **QUANTENMECHANIK** ist inhärent nichtlinear.

Denken Sie bei allen Experimenten daran, dass lineare Gesetze nur Näherungen für kleine Abweichungen sind.

3.4.3. Allgemeine Formulierung der Arbeit bei 3 Dimensionen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 137])

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich auf einer beliebigen Bahn im 3-dimensionalen Raum bewegt. Bei der Kreisbewegung sahen wir, dass eine senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit gerichtete Beschleunigung den Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert. Wir betrachten nun zur Berechnung der Arbeit W die entlang des Weges wirkende KRAFT F_s .

$$\Delta W = F_s \Delta s \quad (3.4.10)$$

wobei Δs die Länge einer an die Bahnkurve angelegten Sehne ist.

Grenzwert

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds \quad (3.4.11)$$

wobei die Länge der Strecke entlang der Bahnkurve mit s gemeint ist.

2. NEWTONSCHES AXIOM

$$F_s = m \frac{dv}{dt} \quad (3.4.12)$$

Es gilt, wenn wir die Geschwindigkeit entlang der Bahnkurve $\mathbf{s}(t)$ mit der Kettenregel ausrechnen. ds ist ein Weglängenelement entlang der Bahnkurve.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (3.4.13)$$

Arbeit

$$W_{ges} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} ds = \int_{s_1}^{s_2} mv \frac{dv}{ds} ds = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3.4.14)$$

In 3 Dimensionen ist die KINETISCHE ENERGIE wie in einer Dimension durch

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \quad (3.4.15)$$

gegeben.

3.4.3.1. Skalarprodukt

(Siehe I. N. Bronštein u. a., *Taschenbuch der Mathematik* [Bro+08, pp. 189])

Ist \mathbf{F} nicht entlang der Bahnkurve $d\mathbf{s}$ gerichtet, dann muss die Komponente von \mathbf{f} entlang $d\mathbf{s}$ berechnet werden. Wenn der Winkel zwischen der Bahnkurve und der KRAFT ϕ ist, gilt

$$F_s = (F \cos(\phi)) \quad (3.4.16)$$

Die Funktion, deren Resultat von einem Winkel zwischen zwei Vektoren abhängt, ist das Skalarprodukt.

Definition

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\phi) \quad (3.4.17)$$

Rechenregeln

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber. Die Länge eines Vektors ist also $|\mathbf{A}| = \sqrt{|\mathbf{A}|^2} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ Kommutativität
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ Distributivgesetz
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \cdot (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. Komponentenschreibweise. Bei der Rechnung muss berücksichtigt werden, dass die Einheitsvektoren \mathbf{e}_i jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. Deshalb sind alle Skalarprodukte $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$. Die Funktion $\delta_{i,j}$ hat zwei Werte

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Nun ist die Arbeit entlang eines infinitesimalen Vektors $d\mathbf{s}$ entlang der Bahnkurve durch

$$dW = F \cos(\phi) ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.18)$$

oder in Integralform

Allgemeine Definition der Arbeit

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.19)$$

3.4.4. Potentielle Energie

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 129]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 22])

Die an einem System verrichtete Arbeit führt zu einer Änderung des Energieinhaltes eines Systems. Diese gespeicherte Energie kann bei Bedarf abgegeben werden. Sie heisst deshalb **potentielle Energie**.

Potentielle Energien existieren nur, wenn die Kräfte **KONSERVATIV** sind.

- Eine **KRAFT** heisst **KONSERVATIV**, wenn die gesamte Arbeit entlang einer geschlossenen Bahn null ist.
- Die Arbeit, die eine konservative **KRAFT** an einem Massenpunkt verrichtet ist unabhängig vom Weg.



Versuch 24: Versuch zur Vorlesung:
Galileis Pendel (Versuchskarte M-150)

Wenn ein System mit Hilfe seiner potentiellen Energie Arbeit verrichtet, dann nimmt seine **POTENTIELLE ENERGIE** ab.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta E_{pot} \quad (3.4.20)$$

Anders gesagt,

$$dE_{pot} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.21)$$

$$\Delta E_{pot} = E_{pot,2} - E_{pot,1} = -W = -\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4.22)$$

Die Lageenergie eines Körpers in Nähe der Erdoberfläche ist (**KRAFT** $\mathbf{F}_z = -mg\mathbf{e}_z$

$$dE_{pot} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -(-mg\mathbf{e}_z) \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) = mg dz \quad (3.4.23)$$

oder

$$E_{pot} = E_{pot,0} + mgz \quad (3.4.24)$$

Auf die Frage nach der **Definition der potentiellen Energie** mit $E_{pot} = mgh$ zu antworten ist falsch. Diese Formel ist ein Spezialfall, eine Anwendung der Gleichung

$$\Delta E_{pot} = E_{pot,2} - E_{pot,1} = - \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

ist die richtige Antwort.

Beispiel: Feder

Die Federkraft ist $F = -kx$. Deshalb ist die POTENTIELLE ENERGIE der Feder

$$E_{pot} = - \int_0^x F(\xi) d\xi = - \int_0^x -k\xi d\xi = k \int_0^x \xi d\xi = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.4.25)$$

Beispiel: Feder mit progressiver Kennlinie

Sei $F(x) = -k(x + x^3)$. Dann ist

$$E_{pot} = - \int_0^x -k(\xi + \xi^3) d\xi = k \int_0^x \xi + \xi^3 d\xi = \frac{k}{2} x^2 \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \quad (3.4.26)$$

Federn mit progressiver Kennlinie sind in der Technik weit verbreitet. Schon Kut-schen hatten Federn, die bei kleinen Auslenkungen weich und bei grossen hart waren. Fahrzeuge heute haben oft auch solche Federn.

3.4.4.1. Gleichgewicht

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 147])

Die POTENTIELLE ENERGIE $E_{pot}(\mathbf{r})$, die Bahnkurve $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ und die KRAFT $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, die über die Gleichung (3.4.21) miteinander verbunden sind, hängen alle vom Ort ab. In einer Dimension ist klar, dass wenn

$$E_{pot}(s_2) = - \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds \quad (3.4.27)$$

ist, dass dann auch

$$F(s) = - \frac{dE_{pot}}{ds} \quad (3.4.28)$$

sein muss. In drei Dimensionen kann man sich überlegen, dass die drei Kraftkomponenten entlang der x -, der y - und der z -Achse die Bewegung in Richtung der jeweiligen anderen Achsen nicht beeinflussen (orthogonale Vektoren). Wir hatten bei der Behandlung des schiefen Wurfes gesehen, dass dies so war. Also scheint es angebracht, dass die x -Komponente der KRAFT nur von der Ableitung der potentiellen Energie nach x abhängt.

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \quad (3.4.29a)$$

$$F_y(x, y, z) = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \quad (3.4.29b)$$

$$F_z(x, y, z) = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \quad (3.4.29c)$$

Die Schreibweise $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ meint, dass man bei der Berechnung der Ableitung die Variablen y und z konstant setzt. Dies ist die partielle Ableitung nach x

Die drei Operationen aus Gleichung (3.4.29) schreibt man kompakt als Gradientenbildung

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_{pot} = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\right) = -\nabla E_{pot} \quad (3.4.30)$$

$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ heisst **Nabla-Operator** und ist eine Kurzschreibweise für die Bildung der drei partiellen Ableitungen.

Bei einer Feder ist die POTENTIELLE ENERGIE $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$. Die KRAFT auf das Federende ist gegeben durch $F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx$. Für die Lage $x = 0$ ist die KRAFT auf das Federende null: dies ist eine Ruhelage. Bei einer Auslenkung aus der Ruhelage wirkt die KRAFT so, dass das Federende gegen die Ruhelage beschleunigt wird (Minuszeichen in der KRAFT).



Versuch 25: Versuch zur Vorlesung:

Gleichgewichtsarten: Stabil, labil und indifferent (Versuchskarte M-21)

Man unterscheidet die folgenden Gleichgewichte:

- Ein Teilchen befindet sich in einer Ruhelage, wenn die KRAFT auf das Teilchen null ist, wenn also die POTENTIELLE ENERGIE ein Extremum hat $F = -\frac{dE_{pot}}{dx}$.
- Die Gleichgewichtslage heisst **stabile Gleichgewichtslage**, wenn die POTENTIELLE ENERGIE ein Minimum hat (wie bei der Feder). Ein Minimum liegt vor, wenn die zweite Ableitung $\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} > 0$ ist. Allgemeiner: Ein Minimum liegt vor, wenn die erste nicht verschwindende Ordnung der Ableitungen gerade ist und ihr Wert grösser null ist.
- Eine Gleichgewichtslage heisst **labiles oder instabiles Gleichgewicht**, wenn die POTENTIELLE ENERGIE in der Gleichgewichtslage ein Maximum hat. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die zweite Ableitung $\frac{d^2 E_{pot}}{dx^2} < 0$ ist. Allgemeiner: Ein Maximum liegt vor, wenn die erste nicht verschwindende Ordnung der Ableitungen gerade ist und ihr Wert kleiner null ist.

- Ein **indifferentes Gleichgewicht** liegt vor, wenn die erste Ableitung der potentiellen Energie in der Umgebung der Gleichgewichtslage konstant gleich null ist.

Beispiel: Kraft auf zwei Kondensatorplatten (Elektrostatische MEMS)
Ohne Beweis: Zwei Kondensatorplatten der Fläche A im Abstand x geladen auf die Spannung U ziehen sich mit

$$F = -\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x^2} U^2 \quad (3.4.31)$$

Die POTENTIELLE ENERGIE ist dann

$$\begin{aligned} E_{pot}(x) &= - \int_x^\infty -\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x^2} U^2 dx \\ &= \epsilon\epsilon_0 A U^2 \int_x^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x} U^2 \Big|_x^\infty \\ &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x} U^2 \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

Wenn wir nun eine Blattfeder mit der Aufhängung im Abstand x_0 montieren, so hat diese die POTENTIELLE ENERGIE

$$E_{pot,Feder} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 \quad (3.4.33)$$

Zusammen ist die POTENTIELLE ENERGIE

$$E_{pot,gesamt} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 - \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x} U^2 \quad (3.4.34)$$

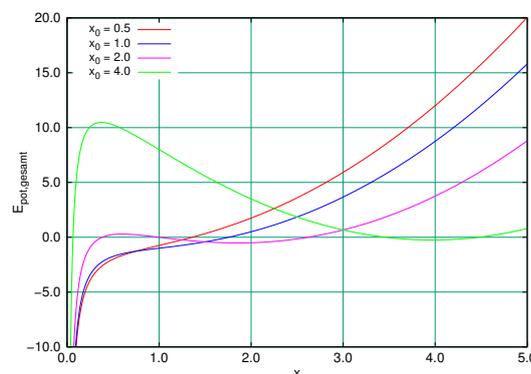


Abb. 3.21.: Elektrostatisch angezogene Blattfeder. Diese Funktion zeigt die gespeicherte Energie für verschiedene $x_0 = [0.5, 1, 2, 3, 4]$ gezeichnet (von rot bis grün).

Die KRAFT ist dann (Ableitung)

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -k(x - x_0) - \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{x^2} U^2 \quad (3.4.35)$$

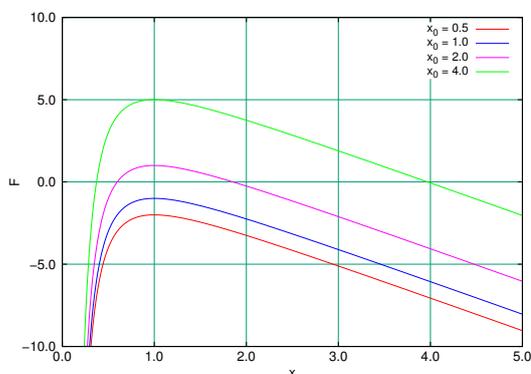


Abb. 3.22.: Kräfte berechnet für $x_0 = [0.5, 1, 2, 3, 4]$ (von rot bis grün) und konstante angelegte Spannung. Für die beiden kleinsten Werte existiert keine Ruhelage.

Die Gleichgewichtslage wird mit $F(x_R) = 0$ berechnet. Uns interessiert die Ruhelage als Funktion der angelegten Spannung U . Die Bestimmungsgleichung ist von dritter Ordnung. Wenn x_L ein Schätzwert ist, dann setzen wir $x_R = x_L + \Delta x$ ein und vernachlässigen alle Terme, in denen Δx mit einer höheren als der ersten Potenz vorkommt.

$$\begin{aligned} 0 &= x_R^2(x_R - x_0) + \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2 \\ &= x_R^3 - x_0 x_R^2 + \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2 \\ &= (x_L + \Delta x)^3 - x_0 (x_L + \Delta x)^2 + \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2 \\ &= x_L^3 + 3x_L^2 \Delta x + \dots - x_0 x_L^2 - 2x_0 x_L \Delta x - \dots + \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2 \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

Aufgelöst ergibt sich die Rekursionsformel

$$\Delta x = -\frac{x_L^3 - x_0 x_L^2 + \epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2}{3x_L^2 - 2x_0 x_L} \quad (3.4.37)$$

Die erste Näherung erhalten wir, indem wir $x_L = x_0$ setzen.

$$\Delta x = -\frac{\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{k} U^2}{x_0^2} \quad (3.4.38)$$

also

$$x_R = x_0 - \frac{\epsilon \epsilon_0 \frac{A}{k} U^2}{x_0^2} \quad (3.4.39)$$

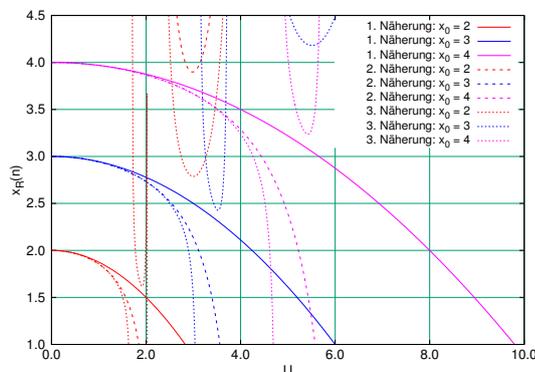


Abb. 3.23.: 1. Näherungslösung (durchgezogene Linie), 2. Näherungslösung (gestrichelte Linie) und 3. Näherungslösung (punktirierte Linie) für die Gleichgewichtslage als Funktion der angelegten Spannung. Man beachte, dass die beiden Näherungslösungen nur für kleine Spannungswerte übereinstimmen. Die Diskrepanz rührt daher, dass dieses System eine eingebaute Instabilität besitzt und eine analytische Näherungslösung in deren Nähe versagt.

3.4.5. Energieerhaltungssatz

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 158]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 25])

Bei einem rein mechanischen konservativen System muss die vom System geleistete in die Änderung der kinetischen Energie gesteckt werden.

$$W_{ges} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta E_{pot} = +\Delta E_{kin} \quad (3.4.40)$$

Anders geschrieben

$$\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = \Delta(E_{pot} + E_{kin}) = 0 \quad (3.4.41)$$

Das bedeutet, dass die mechanische Gesamtenergie

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \text{const} \quad (3.4.42)$$

für **konservative Systeme** konstant ist. Dies ist der **Energieerhaltungssatz der Mechanik**.

3.4.5.1. Harmonischer Oszillator

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 394])

Versuch 26:   **Versuch zur Vorlesung:**
 Harmonischer Oszillator : Schwingende Masse zwischen zwei Federn
 auf LKB (Versuchskarte M-102)

Bei einem harmonischen Oszillator wird Energie zwischen zwei Reservoirs hin und her verschoben, zwischen der kinetischen Energie und der potentiellen Energie.

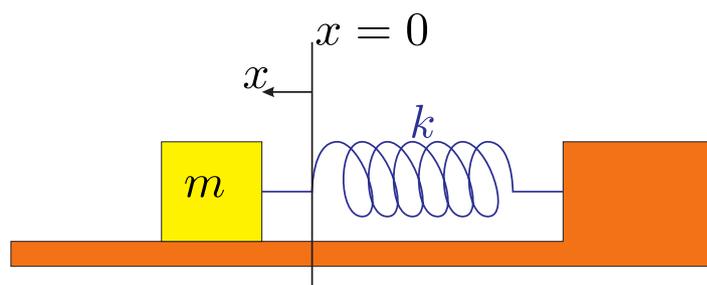


Abb. 3.24.: Harmonischer Oszillator mit Feder-Masse-System, Federkonstante k , Masse m .

POTENTIELLE ENERGIE

$$E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.4.43)$$

Kinetische Energie mit $v(x)$

$$E_{kin}(x) = \frac{1}{2}mv^2(x) \quad (3.4.44)$$

Gesamtenergie

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}(kx^2 + mv^2(x)) = \text{const} \quad (3.4.45)$$

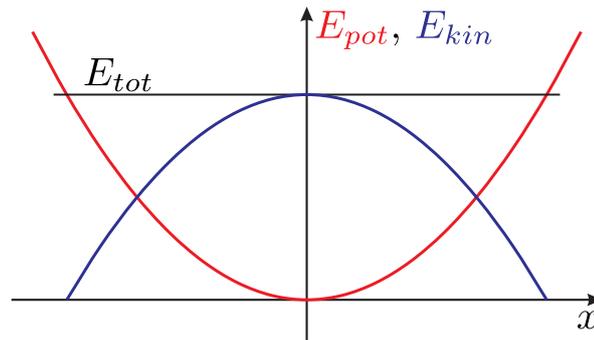


Abb. 3.25.: POTENTIELLE ENERGIE (rot) und KINETISCHE ENERGIE (Blau) beim harmonischen Oszillator.

3.4.5.2. Mathematisches Schwebependel

Versuch 27:  **Versuch zur Vorlesung:**
 Fadenpendel: Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer ([Versuchskarte M-77](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

In einem Potential $E_{pot}(z)$ gilt

$$E_{pot}(z) + \frac{1}{2}mv^2(z) = E = \text{const} \quad (3.4.46)$$

Die Geschwindigkeit ist also gegeben durch

$$v(z) = \sqrt{\frac{2[E - E_{pot}(z)]}{m}} \quad (3.4.47)$$

Beispiel:

Im Schwerfeld ist $E_{pot} = mgz$. Wenn h die Referenzhöhe ist, gilt

$$v(z) = \sqrt{2g(h - z)} \quad (3.4.48)$$

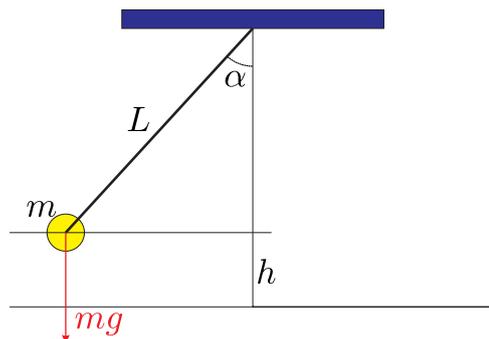


Abb. 3.26.: Hubarbeit beim Fadenpendel. Die Höhe ist $h = L - L \cos(\alpha)$.

Der Energieerhaltungssatz der Mechanik besagt, dass

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2(h) + mgh \quad (3.4.49)$$

Wenn h_{max} die Höhe bei der maximalen Auslenkung ist, dann ist

$$mgh_{max} = \frac{1}{2}mv^2(h) + mgh \quad (3.4.50)$$

Umgerechnet erhält man

$$\begin{aligned} v(h) &= \sqrt{2g(h_{max} - h)} \\ &= \sqrt{2g(L(1 - \cos(\alpha_{max})) - L(1 - \cos(\alpha)))} \\ &= \sqrt{2gL(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_{max}))} \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

3.4.5.3. Ebenes 2-dim. Pendel mit lin. Kraftgesetz

Ein zweidimensionales Pendel liegt vor, wenn die POTENTIELLE ENERGIE durch

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \quad (3.4.52)$$

gegeben ist. Die KRAFT ist

$$\mathbf{F} = -\nabla E_{pot} = -k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.4.53)$$

Dieses Pendel zeigt Bewegungen, die in der x -Richtung und in der y -Richtung harmonische Funktionen sind, aber eine Phase beinhalten können.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega t) \\ y_0 \cos(\omega t + \phi) \end{pmatrix} \quad (3.4.54)$$

Dies sind Lissajous-Figuren.

Das Potential muss nicht rotationssymmetrisch sein. Wenn wir annehmen, dass die x - und die y -Achse Hauptachsen sind, dann kann das Potential als

$$E_{pot} = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2) \quad (3.4.55)$$

geschrieben werden. Die KRAFT ist

$$\mathbf{F} = -\nabla E_{pot} = - \begin{pmatrix} k_x x \\ k_y y \end{pmatrix} \quad (3.4.56)$$

Dieses Pendel zeigt Bewegungen, die in der x -Richtung und in der y -Richtung harmonische Funktionen sind, aber wie vorher auch eine Phase beinhalten können.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega_x t) \\ y_0 \cos(\omega_y t + \phi) \end{pmatrix} \quad (3.4.57)$$

Diese Lissajous-Figuren beschreiben nur dann geschlossene Bahnen, wenn ω_x/ω_y eine rationale Zahl ist.

3.4.6. Verallgemeinerter Energiesatz

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 158])

Wenn nichtkonservative Kräfte, also Reibungskräfte, vorhanden sind, dann gilt für die Arbeit, die in diese nichtkonservativen Kräfte geht:

$$-W_{nk} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = \Delta E \leq 0 \quad (3.4.58)$$

Die nichtkonservativen Kräfte verringern also die mechanische Energie eines Systems.

3.4.7. Leistung

Die Leistung gibt an, wie schnell Energie (Arbeit) von einem System auf ein zweites übertragen wird.

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (3.4.59)$$

oder

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.4.60)$$

Die Einheit der Leistung ist: $1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beispiel:

Ein Lastwagen der Masse m fährt einen Berg der Steigung α mit der Geschwindigkeit v hoch. Was ist die minimal benötigte Leistung?

Es gilt:

$$v_z = v \sin(\alpha) \quad (3.4.61)$$

und damit

$$P = mgv_z = mgv \sin(\alpha) \quad (3.4.62)$$

Wenn die Masse des Lastwagens $m = 40\,000$ kg und seine Geschwindigkeit $v = 10$ m/s $\hat{=} 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist, erhalten wir die Ergebnisse nach Tabelle 3.1.

Winkel	Steigung [%]	Leistung [kW]
0	0	0
$\pi/1000$	0.314	12.3
$\pi/100$	3.14	123
$\pi/50$	6.3	246
$\pi/20$	15.8	614

Tab. 3.1.: Geschwindigkeit und Leistung eines Lastwagens bei einer schiefen Ebene.

Umgekehrt, wenn $P = 400$ kW ist, ist die maximale Geschwindigkeit nach Tabelle 3.2.

Winkel	Steigung [%]	Geschwindigkeit [m/s]	Geschwindigkeit [km/h]
$\pi/1000$	0.314	325	1170
$\pi/100$	3.14	32.45	116.82
$\pi/50$	6.3	16.23	58.43
$\pi/20$	15.8	6.52	23.47
$\pi/10$	32.5	3.24	11.66
$\pi/4$	100	1.30	4.68

Tab. 3.2.: Maximalgeschwindigkeit eines Lastwagens bei einer schiefen Ebene

Für einen Personenwagen mit $m = 2000$ kg und $P = 100$ kW sind die Resultate in

Tabelle 3.3 aufgelistet.

Winkel	Steigung [%]	Geschwindigkeit [m/s]	Geschwindigkeit [km/h]
$\pi/1000$	0.314	1625	5850
$\pi/100$	3.14	162.3	584.3
$\pi/50$	6.3	81.2	292.3
$\pi/20$	15.8	32.6	117.4
$\pi/10$	32.5	16.2	58.32
$\pi/4$	100	6.5	23.4

Tab. 3.3.: Maximalgeschwindigkeit eines Personenwagens auf einer schiefen Ebene.

3.5. Teilchensysteme und Impulserhaltung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 177])

3.5.1. Massenmittelpunkt

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 177])

Versuch 28:   **Versuch zur Vorlesung:**
Massenmittelpunktsbestimmung bei einem starren Körper (Versuchskarte M-45, Video (VPN oder intern))

Auf einer Geraden ist der Ort des Massenmittelpunktes x_S ist durch

$$m_{ges}x_S = m_1x_1 + m_2x_2 \quad (3.5.1)$$

Dies ist der mit der Masse gewichtete Mittelwert der Position.
Allgemein für n Massen

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.5.2)$$

In drei Dimensionen bei n Teilchen

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.5.3)$$

Für kontinuierliche Massenverteilungen

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho \mathbf{r} dV} \quad (3.5.4)$$

Methode zur Bestimmung des Massenmittelpunktes:

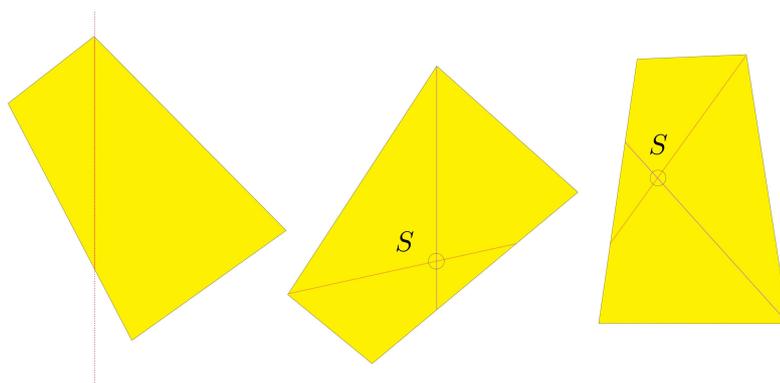


Abb. 3.27.: Ein ebener Testkörper muss mindestens zweimal aufgehängt werden, um den Massenmittelpunkt S zu finden. Bei einem nicht ebenen Körper sind mindestens drei Punkte nötig.

3.5.1.1. Bewegung des Massenmittelpunktes

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 182])

Wiederholung: Definition des Massenmittelpunktes.

$$m_{ges} \mathbf{r}_S = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \mathbf{r}_S = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (3.5.5)$$

Wir leiten ab und erhalten die Geschwindigkeit (die Masse soll konstant sein)

$$m_{ges} \frac{d\mathbf{r}_S}{dt} = m_{ges} \mathbf{v}_S = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (3.5.6)$$

Wir leiten ab und erhalten die Beschleunigung (die Masse soll konstant sein)

$$m_{ges} \frac{d\mathbf{v}_S}{dt} = m_{ges} \mathbf{a}_S = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (3.5.7)$$

Auf das i -te Massenstück wirken interne Kräfte $\mathbf{F}_{i,j}$ und externe Kräfte $\mathbf{F}_{i,a}$. Nach Isaac Newton gilt

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_{i,a} \quad (3.5.8)$$

Die beiden letzten Gleichungen kombinieren

$$m_{ges} \mathbf{a}_S = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_{i,a} \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{i,j} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,a} \quad (3.5.9)$$

Für die internen Kräfte gilt nach dem 3. Newtonschen Axiom

$$\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i} \quad (3.5.10)$$

Also wird die Doppelsumme über die internen Kräfte gleich null.

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,a} = m_{ges} \mathbf{a}_S \quad (3.5.11)$$

Ein System von Massen bewegt sich so, wie wenn die Summe aller äusseren Kräfte am Massenmittelpunkt angreifen würde.



Versuch 29: Versuch zur Vorlesung:

Massenmittelpunktsbewegung: Stoss zweier Kugeln auf Glasfahrbahn (Versuchskarte M-139)

3.5.2. Impulserhaltung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 185])

Wir betrachten zwei Teilchen der Masse m_i , die die Kräfte $\mathbf{F}_{1,2}$ und $\mathbf{F}_{2,1}$ aufeinander ausüben.

2. NEWTONSCHES AXIOM:

$$\mathbf{F}_{2,1} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \quad (3.5.12a)$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \quad (3.5.12b)$$

3. NEWTONSCHES AXIOM $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$

$$0 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} \quad (3.5.13)$$

Daraus folgt:

Wenn **keine äusseren Kräfte** wirken, gilt, dass $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}$ ist, also dass der **Gesamtimpuls erhalten** wird. Die Formel lässt sich zwanglos auf eine beliebige Anzahl Teilchen erweitern.

$$\mathbf{p}_{ges} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m_{ges} \mathbf{v}_S \quad (3.5.14)$$

Nun ist nach dem 2. Newtonschen Axiom

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,a} = \frac{d\mathbf{p}_{ges}}{dt} \quad (3.5.15)$$

Ohne äussere Kräfte

$$\mathbf{p}_{ges} = m_{ges}\mathbf{v}_S = \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{v}_i = \text{const} \quad (3.5.16)$$

Gesetz der Impulserhaltung

3.5.3. Massenmittelpunkt als Bezugssystem

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 190])

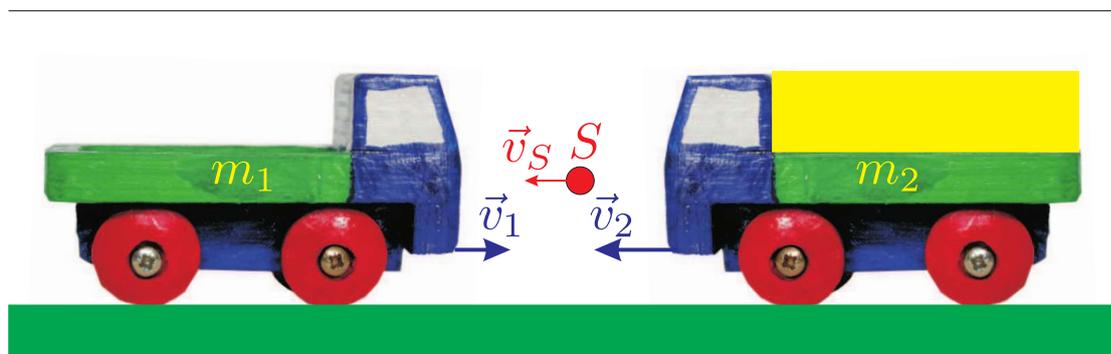


Abb. 3.28.: Kollision zweier Lastwagen mit unterschiedlichen Massen und unterschiedlicher Geschwindigkeit dargestellt im Laborsystem.

Im Laborsystem sollen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sein. Wenn $v_S = \frac{v_1 m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist, ist

$$u_1 = v_1 - v_S \quad (3.5.17a)$$

$$u_2 = v_2 - v_S \quad (3.5.17b)$$

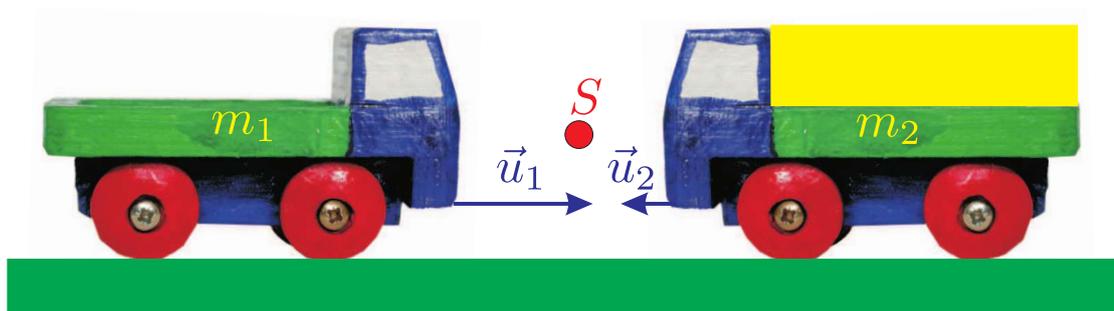


Abb. 3.29.: Kollision zweier Lastwagen mit unterschiedlichen Massen und unterschiedlicher Geschwindigkeit dargestellt im Massenmittelpunktsystem.

Im Massenmittelpunktsystem haben beide Lastwagen den gleichen Impuls (der Gesamtimpuls ist ja null). Also gilt dort

$$p_1 = -p_2 = m_1 u_1 = -m_2 u_2 \quad (3.5.18)$$

Wenn wir einen **elastischen** Stoß annehmen, dann wird $u_1 \rightarrow u'_1 = -u_1$ und $u_2 \rightarrow u'_2 = -u_2$. Die neuen Geschwindigkeiten sind dann:

$$\begin{aligned} v'_1 &= u'_1 + v_S = v_S - u_1 \\ &= 2v_S - v_1 = \frac{2m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 v_1 + m_2 (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.5.19a)$$

$$\begin{aligned} v'_2 &= u'_2 + v_S = v_S - u_2 \\ &= 2v_S - v_2 = \frac{2m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2 v_2 + m_1 (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.5.19b)$$

Setzen wir $m_1 = 1000$ kg (Smart), $m_2 = 3000$ kg (z.B. Mercedes-Benz) und $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_2 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (eine Frontalkollision in der 30-er Zone). Dann erhalten wir $v'_1 = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v'_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die gesamte KINETISCHE ENERGIE beider Autos wird also in das leichtere der beiden übertragen.

Setzen wir $m_1 = 1000$ kg (Smart), $m_2 = 3000$ kg (z.B. Mercedes-Benz) und $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v_2 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 216 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (eine Auffahrkollision auf der Autobahn). Dann erhalten wir $v'_1 = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $v'_2 = 45 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 162 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, eine ziemlich unangenehme Situation für die Insassen des leichteren Autos.


Versuch 30:

Versuch zur Vorlesung:
 Elastischer Stoss mit LKB und CASSY: Unterschiedliche Massen
 (Versuchskarte M-205, modifiziert, Video (VPN oder intern))

3.5.4. Kinetische Energie eines Teilchensystems

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 194])

Wir betrachten ein System von n Teilchen, jedes mit der Masse m_i und der Geschwindigkeit \mathbf{v}_i . Die Massenmittelpunktsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Jede Geschwindigkeit wird im Massenmittelpunktsystem zu $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_s$.

Die KINETISCHE ENERGIE des Teilchensystems ist

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \quad (3.5.20)$$

Die Geschwindigkeiten im Massenmittelpunktsystem eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_s + \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{v}_s + \mathbf{u}_i) \\ &= v_s^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \mathbf{v}_s \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

Die letzte Summe ist der Impuls im Massenmittelpunktsystem, also null. Deshalb ist die gesamte KINETISCHE ENERGIE

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_{ges} v_s^2 + E_{kin,rel} \quad (3.5.22)$$

wobei die KINETISCHE ENERGIE der Relativbewegung durch

$$E_{kin,rel} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 \quad (3.5.23)$$

gegeben ist.

Die KINETISCHE ENERGIE eines Teilchensystems lässt sich als Summe von zwei kinetischen Energien schreiben, der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m_{ges}v_S^2$ der Massenmittelpunktsbewegung, wobei m_{ges} die gesamte Masse ist, und der kinetischen Energie der Relativbewegung $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^n m_i u_i^2$, also der Bewegung \mathbf{u}_i der einzelnen Teilchen relativ zum Massenmittelpunkt.

3.5.5. Stöße in einer Dimension

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 195])

Bei jedem Stoss gilt die Impulserhaltung $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,e} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,a}$, wobei $\mathbf{v}_{i,a}$ die Anfangsgeschwindigkeiten und $\mathbf{v}_{i,e}$ die Endgeschwindigkeiten sind.

3.5.5.1. Elastische Stöße

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 196])

Bei einem elastischen Stoss gilt zusätzlich die Energieerhaltung

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{i,e}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{i,a}^2 \quad (3.5.24)$$

Als Beispiel berechnen wir den elastischen Stoss zweier Massen auf einer Geraden (eine Dimension)

$$m_1 v_{1,a} + m_2 v_{2,a} = m_1 v_{1,e} + m_2 v_{2,e} \quad (3.5.25a)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,a}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,a}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,e}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,e}^2 \quad (3.5.25b)$$

Wir erhalten aus der Energiebedingung

$$m_1(v_{1,a}^2 - v_{1,e}^2) = m_2(v_{2,e}^2 - v_{2,a}^2) \quad (3.5.26)$$

oder

$$m_1(v_{1,a} - v_{1,e})(v_{1,a} + v_{1,e}) = m_2(v_{2,e} - v_{2,a})(v_{2,a} + v_{2,e}) \quad (3.5.27)$$

Die Impulsbedingung kann analog geschrieben werden

$$m_1(v_{1,a} - v_{1,e}) = m_2(v_{2,e} - v_{2,a}) \quad (3.5.28)$$

Indem wir die Gleichung (3.5.27) durch die Gleichung (3.5.28) teilen ergibt sich

$$v_{1,a} + v_{1,e} = v_{2,a} + v_{2,e} \quad (3.5.29)$$

oder

$$-(v_{2,a} - v_{1,a}) = +(v_{2,e} - v_{1,e}) \quad (3.5.30)$$

Dies bedeutet, dass die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper wohl das Vorzeichen, nicht aber den Betrag ändert.

3.5.5.2. Inelastische Stöße

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 201])



Versuch 31: Versuch zur Vorlesung:

Inelastischer Stoß (Versuchskarte M-78)

Bei einem inelastischen Stoß wird ein Teil der kinetischen Energie der Stoßpartner in andere Energieformen umgewandelt. Meistens sind die anderen Energieformen die **Wärmeenergie** oder die **Energie der plastischen Deformation**. Denkbar ist aber auch eine Umwandlung in magnetische oder elektrische Energie.

Wir nehmen nun einen **vollständig inelastischen Stoß** an. Dann vereinen sich die Stoßpartner m_1 und m_2 zu einer Masse $m_1 + m_2$, die sich mit der Schwerpunktgeschwindigkeit v_S fortbewegt.

$$m_1 v_{1,a} + m_2 v_{2,a} = (m_1 + m_2) v_S \quad (3.5.31)$$

Bei jedem Stoß, auch beim inelastischen, gilt die Impulserhaltung

Impulserhaltung

$$p_{1,a} + p_{2,a} = m_1 v_{1,a} + m_2 v_{2,a} = p_e = (m_1 + m_2) v_e \quad (3.5.32)$$

oder

$$v_e = \frac{m_1 v_{1,a} + m_2 v_{2,a}}{m_1 + m_2} = v_S \quad (3.5.33)$$

Energiebetrachtung

Vor dem Stoß ist

$$E_{kin,a} = \frac{1}{2} (m_1 v_{1,a}^2 + m_2 v_{2,a}^2) = \frac{p_{1,a}^2}{2m_1} + \frac{p_{2,a}^2}{2m_2} \quad (3.5.34)$$

Nach dem Stoß

$$E_{kin,e} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_e^2 = \frac{p_e^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (3.5.35)$$

Vergleich

$$\frac{E_{kin,e}}{E_{kin,a}} = \frac{p_e^2}{2(m_1 + m_2) \left(\frac{p_{1,a}^2}{2m_1} + \frac{p_{2,a}^2}{2m_2} \right)} = \frac{p_e^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2) (m_2 p_{1,a}^2 + m_1 p_{2,a}^2)} \quad (3.5.36)$$

Für den Spezialfall, dass $p_{2,a} = 0$ ergibt sich

$$\frac{E_{kin,e}}{E_{kin,a}} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \quad (3.5.37)$$

3.5.6. Stöße in drei Dimensionen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 203])

Bei elastischen Stößen von zwei Körpern der gleichen Masse im 2- oder 3-dimensionalen, bei dem ein Körper zu Beginn in Ruhe war, gilt aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_{1,a}^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{1,e}^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{2,e}^2 \quad (3.5.38)$$

oder

$$v_{1,a}^2 = v_{1,e}^2 + v_{2,e}^2 \quad (3.5.39)$$

Dies ist aber die pythagoräische Gleichung, mit $v_{1,a}$ als Hypotenuse. Damit sind $v_{1,e}$ und $v_{2,e}$ Katheten und stehen damit senkrecht aufeinander.

Immer dann wenn zwei Teilchen der gleichen Masse, von denen eines am Anfang in Ruhe ist, elastisch stossen, ist der Winkel zwischen den beiden Endgeschwindigkeiten $\pi/2$.

Auch bei unterschiedlichen Massen ist jeder Stoss im Ruhesystem (vor dem Stoss) eines der beiden beteiligten Teilchens in einer Ebene.

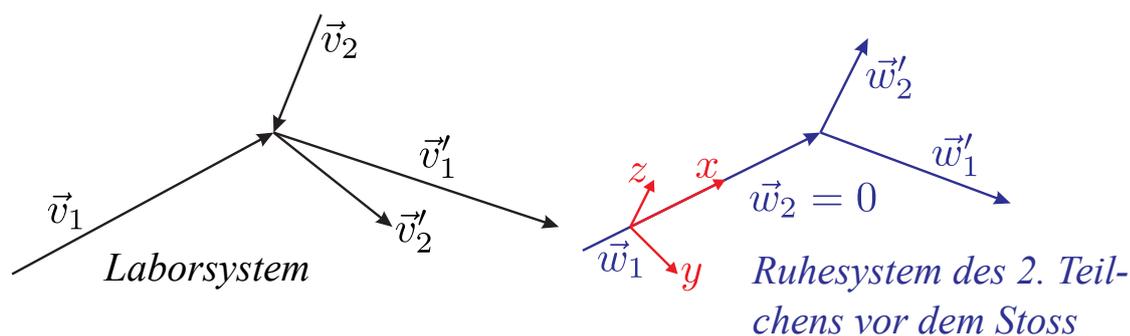


Abb. 3.30.: Stoß mit allgemeinen Geschwindigkeiten.

Im Ruhesystem des 2. Teilchens sind die Geschwindigkeitsvektoren aller Teilchen (\mathbf{w}_1 , \mathbf{w}'_1 und \mathbf{w}'_2) in einer Ebene. Dies ist einsichtig, wenn man ein Koordinatensystem so legt, dass die x-Achse parallel zu \mathbf{w}_1 ist. In diesem Koordinatensystem hat der Gesamtimpuls nur eine x-Komponenten (vor und nach dem Stoß). Das bedeutet, dass die y- und z-Komponenten der impulse nach dem Stoß für die beiden Teilchen gegengleich sein müssen. Dann sind die Projektionen von \mathbf{w}'_1 und \mathbf{w}'_2 kollinear, also liegen \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}'_1 und \mathbf{w}'_2 in einer Ebene. Im ursprünglichen Laborsystem gilt die Aussage nicht mehr!

Im Detail ausgeführt für zwei gleich schwere Teichen geht die Rechnung wie folgt: Zur Betrachtung der Impulserhaltung legen wir das Koordinatensystem so, dass die x-Achse sich entlang von $\mathbf{v}_{1,a}$ befindet. Die y-Achse soll in der durch $\mathbf{v}_{1,e}$ und $\mathbf{v}_{2,e}$ aufgespannten Ebene sich befinden. Dann ist die Impulskomponente in die z-Richtung vorher und nachher null. Die Anfangs-Impulskomponente in die y-Richtung ist null und bleibt nach dem Stoß null: da die Massen gleich sind gilt auch

$$v_{2,e,y} = -v_{1,e,y} = -v_{e,y} \quad (3.5.40)$$

In x-Richtung erhalten wir

$$v_{1,a,x} = v_{1,e,x} + v_{2,e,x} \quad (3.5.41)$$

Zusammen mit der Energieerhaltung gilt

$$v_{1,a,x}^2 = (v_{1,e,x} + v_{2,e,x})^2 = (v_{1,e,x} + v_{e,y})^2 + (v_{2,e,x} - v_{e,y})^2 \quad (3.5.42)$$

oder

$$2v_{1,e,x}v_{2,e,x} = 2(v_{1,e,x} - v_{2,e,x})v_{e,y} + 2v_{e,y}^2 \quad (3.5.43)$$

Wenn wir $v_{e,y}$ als Parameter annehmen und berücksichtigen, dass $v_{2,e,x} = v_{1,a,x} - v_{1,e,x}$ ist, dann ist

$$v_{1,e,x}(v_{1,a,x} - v_{1,e,x}) = (2v_{1,e,x} - v_{1,a,x})v_{e,y} + v_{e,y}^2 \quad (3.5.44)$$

und

$$v_{1,e,x}^2 + v_{1,e,x}(2v_{e,y} - v_{1,a,x}) + v_{e,y}(v_{e,y} - v_{1,a,x}) \quad (3.5.45)$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{1,e,x} &= \frac{v_{1,a,x} - 2v_{e,y} \pm \sqrt{(2v_{e,y} - v_{1,a,x})^2 - 4v_{e,y}(v_{e,y} - v_{1,a,x})}}{2} \\ &= \frac{1}{2}v_{1,a,x} - 2v_{e,y} \pm \frac{1}{2}v_{1,a,x} \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

und analog

$$v_{2,e,x} = \frac{1}{2}v_{1,a,x} + 2v_{e,y} \mp \frac{1}{2}v_{1,a,x} \quad (3.5.47)$$

3.5.7. Kraftstoss

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 206])



Versuch 32: Versuch zur Vorlesung:

Kraftstoss und Impuls : Stoss eines Gleiters gegen einen Kraftaufnehmer (Versuchskarte M-104)

Welche Kräfte wirken bei einem Stoss? Das 2. NEWTONSCHE AXIOM sagt, dass $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ist. Wir integrieren diese Gleichung über ein Zeitintervall von t_1 bis t_2 .

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt \quad (3.5.48)$$

Wenn also eine KRAFT (die nicht konstant sein muss) über eine vorgegebene Zeit wirkt, resultiert eine Impulsänderung.

Mit einem **Kraftstoss** oder einem **Impulsübertrag** kann die Wirkung einer sehr kurzzeitigen KRAFT beschrieben werden, ohne dass genaue Details über den zeitlichen Verlauf der KRAFT bekannt sein müssen.

Wirkung eines Kraftstosses

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt \quad (3.5.49)$$

3.5.8. Rückstossantriebe

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 210])

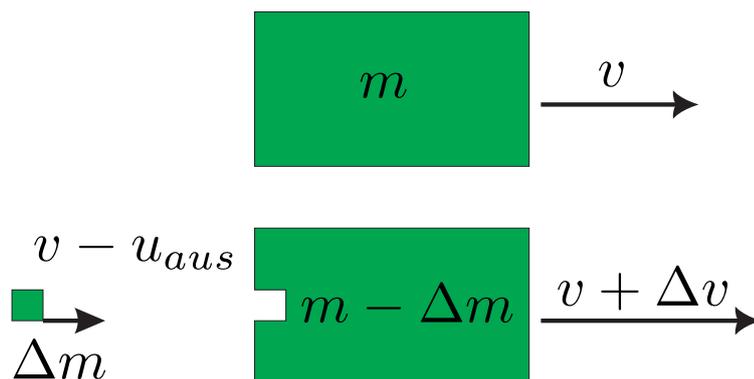


Abb. 3.31.: Geschwindigkeiten und Massen bei einer Rakete.

Versuch 33:  **Versuch zur Vorlesung:**

Rakete (Versuchskarte M-147, Video (VPN oder intern))

Der Gesamtimpuls des Systems bleibt p oder ändert sich um $F_{ext}\Delta t$. Zur Zeit $t + \Delta t$ ist die Masse m um Δm geändert. Die neue Masse ist also $m(t + \Delta t) = m - \Delta m$. Wir wollen zum Schluss unserer Überlegungen auf eine Differentialgleichung kommen, die wir integrieren können. Dabei nimmt die Masse m ab. Wir erhalten eine vorzeichenrichtige Gleichung, wenn wir $dm = -\Delta m$ schreiben. Da die Obergrenze $m_e < m_a$ im späteren Integral kleiner als die Untergrenze m_a ist, erhalten wir wieder die ursprüngliche Überlegung.¹

$$\begin{aligned} p_a = mv = p_e &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u_{aus}) \\ &= mv + dm v + m dv + dm dv - dm v + dm u_{aus} \\ &\approx mv + m dv + dm u_{aus} \end{aligned} \quad (3.5.50)$$

indem die quadratisch kleinen Summanden vernachlässigt werden. Also bekommt man

$$\Delta p = p_e - p_a = m\Delta v + u_{aus}\Delta m = F_{ext}\Delta t \quad (3.5.51)$$

oder

$$m \frac{dv}{dt} = -u_{aus} \frac{dm}{dt} + F_{ext} \quad (3.5.52)$$

Bei konstanter äusserer KRAFT ist mit der Brenndauer t_B

$$v_e = v_a - gt_B + u_{aus} \ln \left(\frac{m_a}{m_e} \right) \quad (3.5.53)$$

¹Achtung: Die Ausgangsgleichung im Tipler, Seite 210, ist falsch. Tipler verwendet $|\Delta m|$ um sich die Vorzeichen nicht zu überlegen, und muss danach die unphysikalische Annahme machen, dass $|dm/dt| = -dm/dt$ ist.

3.6. Drehbewegungen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 225])

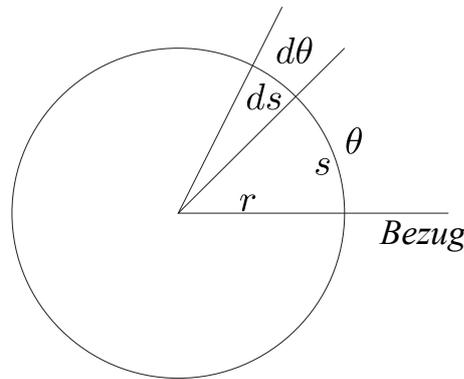


Abb. 3.32.: Definition eines Winkels und einer Winkelgeschwindigkeit.

3.6.1. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 225])

Wir betrachten einen Kreisbogen der Länge s im Abstand r von der Drehachse. Dann ist $ds = vdt$. Die dazugehörige Winkeländerung ist

$$d\Theta = \frac{ds}{r} \quad (3.6.1)$$

ist unabhängig vom Abstand von der Drehachse.

Θ ist der Drehwinkel

Einheiten: $[\Theta] = 1$.

$\omega = \frac{d\Theta}{dt} = \dot{\Theta}$ ist die Winkelgeschwindigkeit

Einheiten: $[\omega] = 1/s$. Die Drehfrequenz hängt mit der Winkelgeschwindigkeit über $\omega = 2\pi f$ zusammen.

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \ddot{\Theta}$ ist die Winkelbeschleunigung.

Einheit: $[\alpha] = 1/s^2$.

Die Tangentialgeschwindigkeit ist eines Teilchens im Abstand r ist

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\Theta}{dt} = r\omega \quad (3.6.2)$$

Die tangentielle Beschleunigung ist

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (3.6.3)$$

Die Zentripetalbeschleunigung ist zum Mittelpunkt hin gerichtet und hat die Grösse

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \quad (3.6.4)$$

Analog zu den Gesetzen der linearen Bewegung haben wir

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (3.6.5a)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (3.6.5b)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Theta - \Theta_0) \quad (3.6.5c)$$

3.6.2. Drehmoment und Trägheitsmoment

Welche Kräfte können eine Scheibe zum Drehen bringen?

- Kräfte parallel zur Drehachse verursachen keine Drehung
- Kräfte in radialer Richtung verursachen keine Drehung
- Kräfte in tangentialer Richtung drehen eine Scheibe

Wir teilen die Scheibe in n Teile. Auf das i -te Teilchen wirkt die KRAFT \mathbf{F}_i mit einem Hebelarm $\ell_i = r_i \sin \phi_i$, wobei ϕ_i der Winkel zwischen der KRAFT \mathbf{F}_i und dem Ortsvektor \mathbf{r}_i ist.

Das Drehmoment durch die KRAFT \mathbf{F}_i ist also

$$T_i = F_i \ell_i = F_i r_i \sin(\phi_i) = F_{i,t} r_i \quad (3.6.6)$$

wenn $F_{i,t}$ die Tangentialkomponente der KRAFT \mathbf{F}_i ist.

2. NEWTONSCHES AXIOM

$$F_{i,t} = m_i a_{i,t} = m_i r_i \alpha \quad (3.6.7)$$

Durch die Multiplikation dieser Gleichung mit r_i erhält man

$$T_i = r_i F_i = m_i r_i^2 \alpha \quad (3.6.8)$$

Über alle Teilchen summiert, bekommt man

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \alpha = \alpha \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \alpha I \quad (3.6.9)$$

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (3.6.10)$$

ist das Trägheitsmoment. Es übernimmt für die Drehbewegungen die Funktion, die die Masse für Translationsbewegungen innehat.

Also

$$T = I\alpha \quad (3.6.11)$$

Die Werte der Trägheitsmomente finden sie im Tipler[[TM04](#), S. 231].

Versuch 34:   **Versuch zur Vorlesung:**

Messung der Trägheitsmomente von verschiedenen Körpern ([Versuchskarte M-38](#), [Video \(VPN oder intern\)](#))

Beispiel:

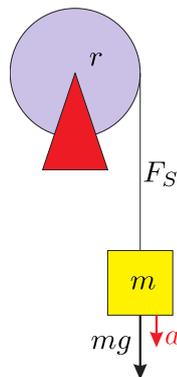


Abb. 3.33.: Ein Körper der Masse m hängt an einer masselosen, nicht dehnbaren Schnur an einer Seilscheibe mit dem Radius r . F_S ist die Seilspannung.

An der Scheibe gilt die Drehmomentgleichung

$$F_S \cdot r = I\alpha \quad (3.6.12)$$

Die Beschleunigung der Masse m ist

$$mg - F_S = ma \quad (3.6.13)$$

Das Seil impliziert die folgende Beziehung

$$a = r\alpha \quad (3.6.14)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} F_S \cdot r &= I \frac{a}{r} \\ a &= \frac{F_S r^2}{I} \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned} mg - F_S &= m \frac{F_S r^2}{I} \\ F_S \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) &= mg \\ F_S &= \frac{I}{I + mr^2} mg \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Damit wird die Beschleunigung

$$a = \frac{mr^2}{I + mr^2} g \quad (3.6.17)$$

Nun ist für eine Vollscheibe $I = \frac{1}{2} m_{\text{Scheibe}} r^2$. Damit wird die Gleichung

$$a = \frac{2m}{m_{\text{Scheibe}} + 2m} g \quad (3.6.18)$$

3.6.3. Kinetische Energie der Drehbewegung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 234])

Wir betrachten ein rotierendes Objekt, das in n Teile geteilt sei. Bei einer infinitesimalen Drehung um $\Delta\Theta_i$ der Masse m_i , die sich im Abstand r_i von der Drehachse befinde, ist die Arbeit

$$\Delta W_i = F_{i,t} ds_i = F_{i,t} r_i \Delta\Theta = M_i \Delta\Theta \quad (3.6.19)$$

Aufsummiert erhält man

$$dW = M d\Theta \quad (3.6.20)$$

Die Leistung dieser Arbeit ist

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\Theta}{dt} = M\omega \quad (3.6.21)$$

Wir berechnen nun die Beschleunigungsarbeit für Drehungen, um zu einem Ausdruck für die KINETISCHE ENERGIE der Rotationsbewegung zu erhalten.

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m (r_i \omega_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 \quad (3.6.22)$$

Die KINETISCHE ENERGIE der Rotationsbewegung ist

$$E_{kin,rot} = E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

3.6.4. Berechnung der Trägheitsmomente

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 237])

In Gleichung (3.6.10) wird die Summe durch ein Integral ersetzt.

$$I = \int r^2 dm \quad (3.6.23)$$

Beispiel:

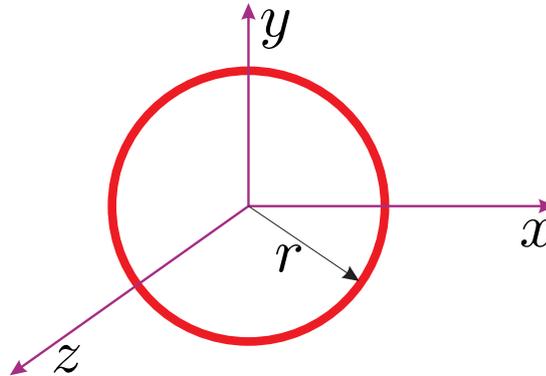


Abb. 3.34.: Trägheitsmoment eines Kreisringes des Radius R der um die z-Achse rotiert.

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = m_{ges} R^2 \quad (3.6.24)$$

Die Einheit des Trägheitsmomentes ist $[I] = \text{kg m}^2$

Beispiel:

Trägheitsmoment I_y eines Stabes entlang der x -Achse, Länge ℓ , der um die y -Achse rotiert und dessen gesamte Masse auf der x -Achse konzentriert ist.

Massenelement $dm = \frac{m}{\ell} dx$

$$I_y = \int_0^{\ell} x^2 dm = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{m\ell^3}{3\ell} = \frac{m\ell^2}{3} \quad (3.6.25)$$

Beispiel:

Trägheitsmoment einer homogenen Scheibe, Radius R .

Die auf einem Kreisring mit dem Radius r befindliche Masse ist $dm = \frac{m_{ges}}{A} 2\pi r dr$ mit $A = \pi R^2$

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{m_{ges}}{A} 2\pi r dr = \frac{2\pi m_{ges}}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2m_{ges}}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m_{ges} R^2 \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Das Resultat für den Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert, ist das gleiche.

Wenn ich einen Körper bilden kann, indem ich eine Grundform, von der I_1 bekannt ist, nehme und eine zweite Form, von der I_2 bekannt ist, subtrahiere (z.B. Hohlzylinder als Differenz zweier Zylinder), dann ist das resultierende Trägheitsmoment

$$I = I_1 - I_2 \quad (3.6.27)$$

Wenn das Trägheitsmoment I_S eines Körpers um eine bestimmte, **durch den Massenmittelpunkt gehende** Drehachse bekannt ist, wenn aber der Körper um eine zu dieser Drehachse parallele Achse rotiert, kann das neue Trägheitsmoment mit dem Satz von Steiner ausgerechnet werden.

$$I = I_S + m_{ges} h^2 \quad (3.6.28)$$

wenn h der Abstand der beiden Drehachsen ist.

Beweis mit der kinetischen Energie.

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} I_S \omega^2 \quad (3.6.29)$$

Wir verschieben die Drehachse um h , dann ist die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes bezüglich der Drehachse $v_s = h\omega$. Die KINETISCHE ENERGIE des Massenmittelpunktes ist

$$\frac{1}{2} m_{ges} v_s^2 = \frac{1}{2} m_{ges} \omega^2 h^2 \quad (3.6.30)$$

Die gesamte KINETISCHE ENERGIE ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_{ges} h^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 = \frac{1}{2} (m_{ges} h^2 + I_S) \omega^2 \quad (3.6.31)$$

Ein Vergleich der Klammer mit I liefert das gewünschte Ergebnis.

Bei **flachen** Körpern, das heisst bei Körpern, bei denen die Dicke oder die z-Ausdehnung verschwindend gegen die Ausdehnung in die x- und die y-Richtung ist, gilt

$$I_z = I_x + I_y \quad (3.6.32)$$

Da der Körper flach ist, ist sein Trägheitsmoment für Drehungen um die x-Achse oder um die y-Achse nur von den Massenelementen und den Abständen in die y- oder die x-Richtung abhängig. Der Term r^2 wird also zu x^2 oder zu y^2 . Damit ist $I_x = \int y^2 dm$ und $I_y = \int x^2 dm$. Bezüglich der z-Achse müssen wir den Abstand quadrieren, um das Trägheitsmoment zu berechnen. Der Abstand hängt von x und y, aber nicht von z ab.

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_y + I_x \quad (3.6.33)$$

Körper	Parameter	Masse	Massenträgheitsmoment
Punktmasse	Abstand von Achse a , Masse m	m	$I_{pm} = ma^2$
Kugel	Radius r , Masse m	m	$I_K = \frac{2}{5}mr^2$
Vollzylinder entlang Zylinderachse	Radius r , Länge a , Masse m	m	$\frac{1}{2}mr^2$
Hohlzylinder entlang Zylinderachse	Radius aussen r_a , innen r_i , Höhe h , Dichte ρ	$m = \pi\rho h (r_a^2 - r_i^2)$	$I_{Hz} = \frac{1}{2}m (r_a^2 + r_i^2)$
Quader, Rotation parallel zu c	Seiten a , b , c , Dichte ρ	$m = \rho abc$	$I_{Q,c} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$
Elektronen im s_1 -Zustand	1/e-Radius r_0 , Dichte $\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$	$m = \pi^{3/2}\rho_0 r_0^3$	$I_G = mr_0^2$

Tab. 3.4.: Massenträgheitsmomente einiger Körper für Achsen durch den Massmittelpunkt (ausser der Punktmasse)

3.6.5. Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 242])

Analog zum linearen Impuls, der durch $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ gegeben ist, hat ein Teilchen, das sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt einen **Drehimpuls**, der mit

seinem lineare Impuls mv wie folgt zusammenhängt:

$$L = mvr = m(r\omega)r = mr^2\omega = I\omega \quad (3.6.34)$$

Für allgemeine Bewegungen ist

$$L = mvr_{\perp} = mv_{\perp}r = mvr \sin(\Theta) \quad (3.6.35)$$

wobei r_{\perp} der senkrechte Abstand zur Drehachse ist. Wenn ein Teilchen parallel zur x -Achse in der xy -Ebene am Nullpunkt entlang fliegt, dann kann man die z -Achse als Drehachse betrachten und das Teilchen hat einen konstanten Drehimpuls!

Sind mehrere Teilchen m_i mit dem jeweiligen Drehimpuls $L_i = m_i r_i^2 \omega$, dann ist der gesamte Drehimpuls

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I\omega \quad (3.6.36)$$

Der Drehimpuls eines rotierenden Körpers ist

$$L = I\omega \quad (3.6.37)$$

Die Einheit des Drehimpulses ist $[L] = \text{kg m}^2/\text{s}$

Analog zum zweiten Newtonschen Axiom kann für die Beziehung zwischen dem Drehimpuls L und dem Drehmoment T geschrieben werden

$$T = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (3.6.38)$$

Bei einem starren Körper (und nur da) ist $I = \text{const}$ und wir können schreiben

$$T = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad (3.6.39)$$

Wenn kein äusseres Drehmoment auf einen Körper wirkt, ist

$$T = 0 = \frac{dL}{dt} \quad (3.6.40)$$

also der Drehimpuls konstant.

Drehimpulserhaltung

Wenn das resultierende äussere Drehmoment null ist, dann bleibt der Gesamtdrehimpuls eines Systems konstant.

Weiter gilt

Das Drehmoment bezüglich des Massenmittelpunktes und die Änderung des Drehimpulses sind über

$$T_S = \frac{dL}{dt} \quad (3.6.41)$$

miteinander verknüpft.

Beispiel:

Bei Tänzern oder Eiskunstläuferinnen ist das Drehmoment durch die Füsse (Kufen) sehr gering. Deshalb ist der Drehimpuls in guter Näherung erhalten. Wenn die Arme an den Körper gezogen werden, verringert sich I , die Winkelgeschwindigkeit muss entsprechend zunehmen. In diesem Falle gilt übrigens $T = I\alpha$ nicht; vielmehr ist $T = \frac{dI}{dt}\omega$.

Die KINETISCHE ENERGIE der Rotation wurde als $E_{kin,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$ geschrieben. Diese Gleichung kann umgeformt werden, so dass die KINETISCHE ENERGIE als Funktion des Drehimpulses gegeben ist.

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \quad (3.6.42)$$

3.6.6. Rollende Körper

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 249])

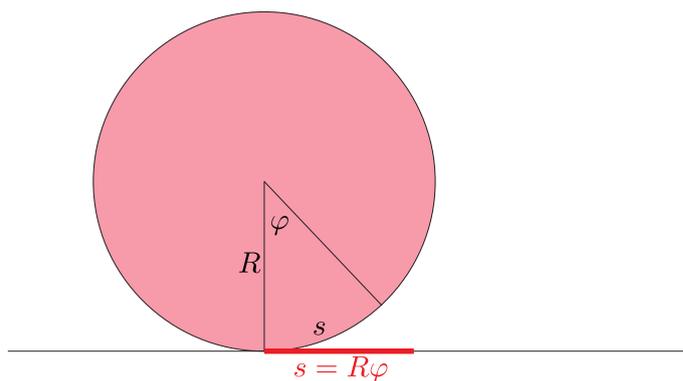


Abb. 3.35.: Rollen eines Rades ohne zu gleiten.

Wenn ein Rad um den Winkel φ abrollt, legt die Drehachse (der Massenmittelpunkt) den Weg

$$s = R\varphi \quad (3.6.43)$$

zurück. Der Massenmittelpunkt hat die Geschwindigkeit

$$v_S = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \quad (3.6.44)$$

Die Bedingung $v_s = R\omega$ heisst Rollbedingung. Durch Ableiten dieser Gleichung erhält man eine äquivalente Bedingung für die Beschleunigungen

$$a_S = R\alpha \quad (3.6.45)$$

Beispiel:

Eine Kugel hat das Trägheitsmoment $I_S = \frac{2}{5}mR^2$. Die KINETISCHE ENERGIE der rollenden Kugel kann auf zwei Arten berechnet werden:

1. Die Kinetische Energie ist die Summe der translatorischen kinetischen Energie und der Rotationsenergie um die Drehachse durch die Mitte des Rades

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}mR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

2. Die momentane Drehachse ist die Auflagelinie die um den Abstand R von der Drehachse durch den Massenmittelpunkt entfernt ist. Das Trägheitsmoment um diese Drehachse ist $I_M = I_S + mR^2$. Die KINETISCHE ENERGIE ist dann

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I_M\omega^2 = \frac{1}{2}(I_S + mR^2) \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2}I_S \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}mR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

Beispiel:

Wie weit muss man in einem Billardspiel die Kugel oberhalb des Mittelpunktes treffen, damit sie rollt. Die Distanz der Drehachse oberhalb des Mittelpunktes sei x . Die Rollbedingung sagt: $F = ma = mR\alpha$. Die Drehmomentbedingung gibt

$T = Fx = I\alpha$. Teilt man die beiden Gleichungen durcheinander, dann bekommt man $x = I/(mR)$. Mit dem Trägheitsmoment einer Kugel $I_S = \frac{2}{5}mR^2$ bekommt man: $x = \frac{2}{5}R$.

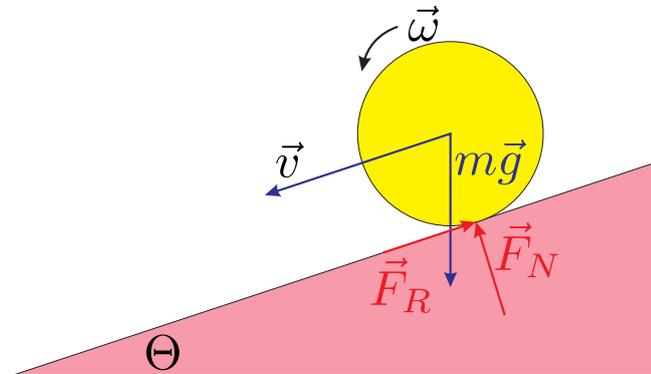


Abb. 3.36.: Kugel mit dem Radius R , die eine schiefe Ebene hinunter rollt.

Versuch 35:  **Versuch zur Vorlesung:**
Trägheitsmoment: Voll- und Hohlzylinder auf schiefer Ebene (Versuchskarte M-52, Video (VPN oder intern))

Drehimpuls

$$L_S = I_S \omega \quad (3.6.46)$$

Drehmoment hervorgerufen durch die Reibungskraft

$$T = F_R R = \frac{dL_S}{dt} = I_S \frac{d\omega}{dt} \quad (3.6.47)$$

F_R ist die Reibungskraft: wir brauchen Sie, um die Aufteilung in Drehmoment und lineare Beschleunigung zu berechnen. Sie muss vorhanden sein, tritt aber im Schlussresultat nicht auf. Die obige Gleichung kann auch als $F_R R = I_S \alpha$ geschrieben werden. Auf den Massenmittelpunkt wirkt die Beschleunigungskraft $mg \sin(\Theta) - F_R = ma_S$. Nun ist $a_s/R = \alpha$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} F_R R &= I_S \frac{a_S}{R} \\ F_R &= \frac{I_S}{R^2} a_S \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

Eingesetzt in die Beschleunigungsgleichung erhalten wir

$$mg \sin(\Theta) - \frac{I_S}{R^2} a_S = m a_S$$

$$a_s = \frac{mg \sin(\Theta)}{m + \frac{I_S}{R^2}} \quad (3.6.49)$$

Ohne Rotation wäre die Beschleunigung $a = g \sin(\Theta)$. Das Abrollen von einer Schiefen Ebene ist langsamer als das abgleiten. Die Bedingung ist, dass

$$F_R = \frac{I_S}{R^2} \frac{mg \sin(\Theta)}{m + \frac{I_S}{R^2}} = \frac{I_S mg \sin(\Theta)}{mR^2 + I_S} \leq \mu_H mg \cos(\Theta) \quad (3.6.50)$$

ist². Tabelle 3.5 gibt eine Übersicht über die Beschleunigungen verschiedener Körper. Man kann so zum Beispiel herausfinden, ob ein Zylinder eine hohle Stahlröhre oder ein Aluminiumvollprofil ist, wenn der Aussendurchmesser und das Gewicht gegeben sind. Weiter kann man mit dem abrollen den Haftreibungskoeffizienten bestimmen. Man erhöht die Steigung so, dass der Zylinder oder sonstige Körper ins Gleiten kommt. Für einen Zylinder wird die Bedingung $F_R \leq \mu_H F_N = \mu_H mg \cos(\Theta)$ zu $F_R = \frac{1}{3} mg \sin(\Theta) \leq \mu_H mg \cos(\Theta)$ oder

$$\tan(\Theta) \leq 3\mu_H \quad (3.6.51)$$

Körper	Trägheitsmoment	Beschleunigung
Gleitende Masse	-	$a_S = g \sin(\Theta)$
Kugel	$I_{K,S} = \frac{2}{5} mR^2$	$a_s = \frac{5}{7} g \sin(\Theta)$
Zylinder	$I_{Z,S} = \frac{1}{2} mR^2$	$a_S = \frac{2}{3} g \sin(\Theta)$
Dünner Hohlzylinder	$I_{HZ,S} = mR^2$	$a_S = \frac{1}{2} g \sin(\Theta)$

Tab. 3.5.: Beschleunigung auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel Θ .

Dieser Grenzwinkel heisst auch der Haftreibungswinkel. Er ist identisch mit dem Böschungswinkel bei Schüttgütern (siehe Tabelle 3.6).

Material	Böschungswinkel	Haftreibungskoeffizient
Getreide	31^0	0.12
trockener Sand	34^0	0.13
Kohle	35^0	0.14
Gips	45^0	0.2

Tab. 3.6.: Böschungswinkel und Haftreibungskoeffizient unter der Annahme, dass die Teilchen kugelförmig sind $\tan(\Theta) \leq 5\mu_h$

Energiebetrachtung für einen rollenden Zylinder:

$$E_{kin} + E_{kin,rot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 = mgh = E_{pot} \quad (3.6.52)$$

²Der Satz von Steiner lässt grüssen.

Mit der Rollbedingung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_S \frac{v^2}{R^2} &= mgh \\ v^2 &= \frac{2mgh}{m + I_S/R^2}\end{aligned}\quad (3.6.53)$$

Bei einem Zylinder $I_S = \frac{1}{2}mR^2$ ist das Resultat

$$v^2 = \frac{2mgh}{m + m/2} = \frac{4}{3}gh \quad (3.6.54)$$

3.6.7. Vektorcharakter von Drehgrößen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 256])

Wenn man einen rotierenden Körper betrachtet, dann soll der Daumen der rechten Hand parallel zur Drehachse sein. Die die Finger der rechten Hand zeigen in die Drehrichtung. Dann legt der Daumen die Richtung des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ fest.

Bei einer Schraube mit Rechtsgewinde zeigt der Daumen in die Vorschubrichtung. Das Drehmoment hängt vom Winkel ϕ zwischen der Verbindungslinie \mathbf{r} zwischen der Drehachse und dem Angriffspunkt der KRAFT \mathbf{F} . Ist der Winkel $\pi/2$, ist das Drehmoment maximal. Bei einem Winkel 0, wenn die KRAFT und die Verbindungslinie parallel sind, ist das Drehmoment null. Die dazugehörige Vektoroperation ist das Vektorprodukt

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.6.55)$$

Das Vektorprodukt oder das Kreuzprodukt ist durch $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin(\phi)) \mathbf{n}$ gegeben, wobei \mathbf{n} der Normalenvektor auf der von \mathbf{A} und \mathbf{B} aufgespannten Ebene ist.

Einige Eigenschaften:

- $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ (Das Kreuzprodukt ist antikommutativ!)
- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$ (Achtung: Die Reihenfolge darf nicht verändert werden).
- $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ für die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems.
- $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = 0$ für $i = x, y, z$

- Das Kreuzprodukt in Komponentenschreibweise ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\
&= A_x B_x \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x + A_x B_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + A_x B_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \\
&\quad A_y B_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + A_y B_y \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y + A_y B_z \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z + \\
&\quad A_z B_x \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + A_z B_y \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y + A_z B_z \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z + \\
&= 0 + A_x B_y \mathbf{e}_z + A_x B_z (-\mathbf{e}_y) + \\
&\quad A_y B_x (-\mathbf{e}_z) + 0 + A_y A_z \mathbf{e}_x + \\
&\quad A_z B_x \mathbf{e}_y + A_z B_y (-\mathbf{e}_x) + 0 \\
&= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + \\
&\quad (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + \\
&\quad (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{3.6.56}$$

Das Ergebnis kann formal mit der Determinante

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & \mathbf{e}_x \\ A_y & B_y & \mathbf{e}_y \\ A_z & B_z & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} \tag{3.6.57}$$

- Wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} in der xy -Ebene liegen, ist das Resultat des Kreuzproduktes parallel zur z -Achse. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z$
- $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_3$

Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{3.6.58}$$

Ausgeschrieben für den Fall dass \mathbf{p} und \mathbf{r} in der xy -Ebene liegen

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = (rmv \sin \pi/2) \mathbf{e}_z = rmv \mathbf{e}_z = mr^2 \omega \mathbf{e}_z \tag{3.6.59}$$

Der Drehimpuls liegt parallel zur Drehachse, so dass wir auch

$$\mathbf{L} = mr^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega} \tag{3.6.60}$$

haben.

Wenn \mathbf{F} die resultierende äussere KRAFT ist, dann ist einerseits nach dem 2. Newtonschen Axiom

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{3.6.61}$$

und andererseits

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \tag{3.6.62}$$

Der erste Term ist null, da $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ ist.

Also ist

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{T} \quad (3.6.63)$$

$\mathbf{T}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ ist das resultierende äussere Drehmoment, das gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses ist.

Die Einheit des Drehmomentes ist $[\mathbf{T}] = \text{m}^2 \text{kg}/\text{s}^2 = \text{N m}$

3.6.7.1. Beispiel: Auswuchten von Reifen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 262])

Es gibt zwei Arten, wie Reifen ausgewuchtet werden können:

1. Statisches Ungleichgewicht oder statische Unwucht liegt vor, wenn die Drehachse des Rades nicht seiner Symmetrieachse entspricht. Dann wird eine Zentripetalkraft benötigt, um das Rad auf seiner Position zu halten. Diese Unwucht kann kompensiert werden, indem man versucht, das Rad in eine indifferente Gleichgewichtslage zu bringen.
2. Dynamisches Ungleichgewicht oder dynamische Unwucht. Der Drehimpulsvektor ist nur bei freien Drehachsen parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Wenn der Drehimpulsvektor parallel zur Drehachse gemacht wird, spricht man von dynamischem Auswuchten. Das dynamische Ungleichgewicht äussert sich in einem Taumeln der Räder.

Ein Rad kann dynamisch im Gleichgewicht sein und statisch nicht, oder umgekehrt.

3.6.8. Drehungen um beliebige Achsen: Trägheitstensor

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 77]) (Siehe F. Kneubühl, *Repetitorium der Physik* [Kne78, pp. 116])

Wir haben bei der Gleichung (3.6.35) gesehen, dass $L = I\omega$ ist. Wenn wir den Vektorcharakter der Drehungen berücksichtigen, dann beobachtet man, dass \mathbf{L} und $\boldsymbol{\omega}$ nicht mehr parallel sind. In einem am rotierenden Körper befestigten Koordinatensystem kann der Zusammenhang mit Hilfe des **Trägheitstensors** geschrieben werden. Wir bemerken, dass

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.6.64)$$

Für jedes Volumenelement dm gilt $d\mathbf{L} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm$. Also ist auch³

³Es gilt: $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3) \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_3$ (Beweis z.B. indem man die Komponenten einsetzt und ausrechnet).

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dm = \int (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm = \boldsymbol{\omega} \int (\mathbf{r})^2 dm - \int \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) dm \quad (3.6.65)$$

So gilt für die x -Komponente

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \int ((\mathbf{r}^2 - r_x^2) dm - \omega_y \int r_x r_y dm - \omega_z \int r_x r_z dm \\ &= \omega_x \int (r_y^2 + r_z^2) dm - \omega_y \int r_x r_y dm - \omega_z \int r_x r_z dm \end{aligned} \quad (3.6.66)$$

und zyklisch permutiert für die anderen Koordinaten $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Die Gleichung (3.6.66) kann wie folgt interpretiert werden:

Würde $\boldsymbol{\omega}$ entlang der x -Achse liegen, also nur die x -Komponente von null verschieden sein, dann ist das erste Integral die schon bekannte Definition des Trägheitsmomentes. Die beiden anderen Momente, auch Deviationsmomente genannt, sind nur dann von Null verschieden, wenn $\boldsymbol{\omega}$ nicht parallel zur x -Achse liegt. Analoges gilt auch für die y - und die z -Achse.

Gleichung (3.6.65) kann in Matrixschreibweise als

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \mathbf{l} \boldsymbol{\omega} \quad (3.6.67)$$

wobei

$$I_{xx} = \int (r_y^2 + r_z^2) dm \quad (3.6.68a)$$

$$I_{xy} = \int (-r_x r_y) dm \quad (3.6.68b)$$

ist. Jeder Tensor, also auch \mathbf{l} , kann durch die Rotation des Koordinatensystems so transformiert werden, dass nur die Komponenten auf der Hauptdiagonalen von null verschieden sind. Wenn wir die drei Komponenten als $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ (Hauptachsen) schreiben, kann die Stabilität von Drehungen betrachtet werden. Wir nehmen an, dass eine Drehachse sich in der Nähe einer der Hauptachsen befindet. Dann sind Drehungen um die 1-Achse und um die 3-Achse stabil und um die 2-Achse labil.

Wir definieren ein Trägheitsellipsoid, ein Ersatzkörper, der sich bezüglich Rotationen gleich wie der entsprechende allgemein geformte Ursprungkörper verhält.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_1}{\sqrt{I_1}} \\ \frac{e_2}{\sqrt{I_2}} \\ \frac{e_3}{\sqrt{I_3}} \end{pmatrix} \quad (3.6.69)$$

Die Länge der einzelnen Halbachsen i ist $1/\sqrt{I_i}$.

Kreisel	Hauptträgheitsmomente	Trägheitsellipsoid
Kugel, Würfel, Tetraeder	$I_1 = I_2 = I_3$	Kugel
axialsymmetrisch, tellerförmig	$I_1 > I_2 = I_3$	Rotationsellipsoid, tellerförmig
axialsymmetrisch, spindelförmig	$I_1 = I_2 > I_3$	Rotationsellipsoid, spindelförmig
niedrigsymmetrisch	$I_1 > I_2 > I_3$	allgemeines Ellipsoid

3.6.9. Kreiselbewegung

Ein Kreisel ist ein an einem Punkt auf der Drehachse unterstützter rotierender Körper. Dadurch, dass die Drehachse an einem Punkt fixiert ist, hat sie in zwei Richtungen, Azimut und Elevation, Bewegungsfreiheit. Die Bewegungen des Kreisels können in zwei Kategorien aufgeteilt werden, kräftefreie Bewegung (Nutation) und Bewegung unter äusseren Kräften (Präzession).

3.6.9.1. Präzession (Momentenbehaftet)

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 89])

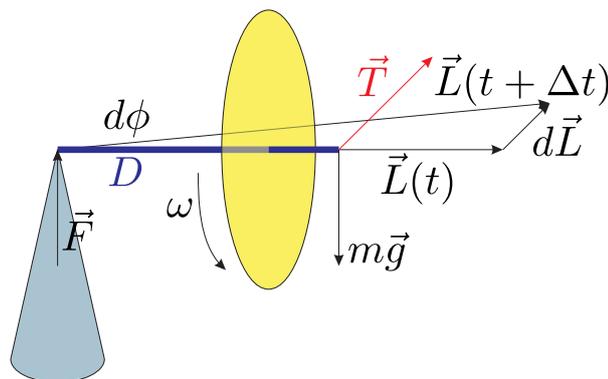


Abb. 3.37.: Kreisel mit Präzession.

Versuch 36:  **Versuch zur Vorlesung:**

Grosser Kreisel: Präzession (Versuchskarte M-30, Video (VPN oder intern))

Auf diesen Kreisel wirkt die Gravitation an der Stelle des Rades. Die KRAFT mg , die im Abstand D vom Drehpunkt wirkt, bewirkt ein Drehmoment $T = mgD$, das nach hinten gerichtet ist. Nun ist $dL = Tdt$, also muss dL parallel zu T liegen. Dies ist nur möglich, wenn der Drehimpuls des Rades $L = I\omega$, der in der horizontalen liegt, sich nach hinten dreht. Der Drehimpuls kann auch differenziell geschrieben werden, indem man die Geometrie in der obigen Zeichnung verwendet: $dL/L = d\phi$

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{mgD}{L} dt \quad (3.6.70)$$

Der Winkel ϕ beschreibt die Winkelpräzession.

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mgD}{L} \quad (3.6.71)$$

3.6.9.2. Nutation (momentenfrei)

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 88])



Versuch 37: Versuch zur Vorlesung:

Grosser Kreisel: Nutation (Versuchskarte M-30, Video (VPN oder intern))

Wenn bei einem momentenfreien Kreisel die momentane Drehachse und die Hauptträgheitsachsen nicht parallel sind, rotiert die Drehachse um die Hauptträgheitsachse. Diese Bewegung sieht bei einem einseitig unterstützten momentenfreien Kreisel wie ein Nicken (Nutation) aus.

3.7. Statische Gleichgewichte von starren Körpern

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 279])

Starre Körper sind im Gleichgewicht, wenn

$$\sum \mathbf{F}_{\text{extern}} = 0 \quad (3.7.1)$$

und wenn

$$\sum \mathbf{T}_{\text{extern}} = 0 \quad (3.7.2)$$

3.7.1. Massenmittelpunkt

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 281])

Das Drehmoment auf einen Körper kann wie folgt behandelt werden:

Auf jedes Massenelement wirkt die KRAFT $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$. Wir vereinfachen das Problem und betrachten eine Massenverteilung entlang der x-Achse. Wenn der Drehpunkt x_0 wäre, dann wäre das resultierende Drehmoment

$$T(x_0) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i - x_0) = \sum_{i=1}^n m_i g(x_i - x_0) \quad (3.7.3)$$

Wir suchen x_0 so, dass $T(x_0) = 0$ ist. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^n m_i g (x_i - x_0) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i g x_i = \sum_{i=1}^n m_i g x_0 = g \sum_{i=1}^n m_i x_i = g x_0 \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.7.4)$$

Damit haben wir die Definition des Massenmittelpunktes aufgeschrieben.

In einem homogenen Kraftfeld ist der Massenmittelpunkt (über das Drehmoment definiert) identisch mit dem Schwerpunkt.

In drei Dimensionen lautet die entsprechende Gleichung:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}_S) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \quad (3.7.5)$$

Daraus folgt mit einer analogen Überlegung, dass

$$\mathbf{r}_S \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (3.7.6)$$

Als Integral geschrieben

$$\mathbf{r}_S m = \int \mathbf{r} dm \Leftrightarrow \mathbf{r}_S = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} \quad (3.7.7)$$

3.7.1.1. Beispiele für statisches Gleichgewicht

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 283])

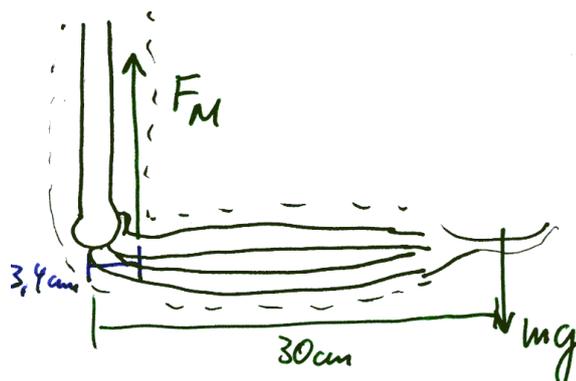


Abb. 3.38.: Kräfte an einem Arm.

Es gilt

$$F_m \cdot (3.4 \text{ cm}) = m g \cdot (30 \text{ cm}) \Leftrightarrow F_m = \frac{300}{34} m g = 88 m g \quad (3.7.8)$$

Für eine Masse von 10 kg ergibt sich also $F_M \approx 8.8 \text{ kN}$.

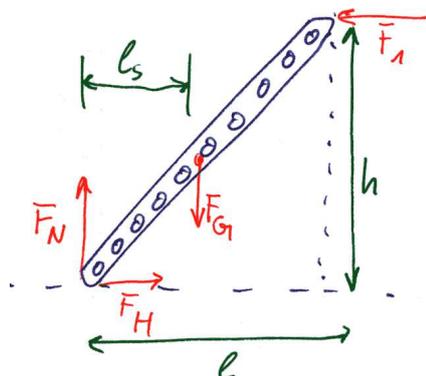


Abb. 3.39.: Kräfte bei einer Leiter.

Da die Leiter sich nicht bewegt, müssen die Kräfte in horizontaler Richtung und die Kräfte in vertikaler Richtung sich aufheben.

$$F_N = F_G \quad (3.7.9a)$$

$$F_H = F_1 \quad (3.7.9b)$$

Die Verknüpfung der horizontalen und vertikalen Kräfte wird durch die Bedingung, dass die Leiter sich nicht dreht, bewirkt. Wir sind frei in der Wahl des Drehpunktes und wählen den Fußpunkt als Drehpunkt. Dann sind die Hebelarme von F_H und F_N null, diese Kräfte müssen also nicht betrachtet werden.

$$F_g \cdot \ell_S = F_1 \cdot h \quad (3.7.10)$$

Die Leiter steht dann fest, wenn $F_H \leq \mu_H F_N$ ist. Diese Gleichung kann auch als

$$F_g \frac{\ell_S}{h} \leq \mu_H F_G \quad (3.7.11)$$

ist. Der Haftreibungskoeffizient muss also mindestens

$$\mu_H \geq \frac{\ell_S}{h} = \frac{\ell}{2h} = \coth \Theta \quad (3.7.12)$$

sein (Θ ist der Neigungswinkel).

3.7.2. Kräftepaare

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 287])

 **Versuch 38:**  **Versuch zur Vorlesung:**

Drehmoment: Kräftepaar an einem starren Körper (Versuchskarte M-11, Video (VPN oder intern))

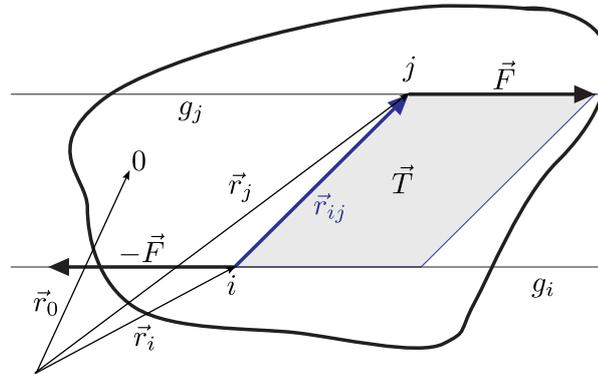


Abb. 3.40.: Definition eines Kräftepaars.

Ein Kräftepaar besteht aus einer KRAFT \mathbf{F} am Punkte j und einer Kraft $-\mathbf{F}$ am Punkte i . Ein Kräftepaar bewirkt ein DREHMOMENT $\mathbf{T} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}$. \mathbf{F} und $-\mathbf{F}$ dürfen beliebig entlang der Geraden g_i und g_j verschoben werden. Dabei ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) + (-\mathbf{F}) \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) \quad (3.7.13a)$$

$$= \mathbf{F} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0)) \quad (3.7.13b)$$

$$= \mathbf{F} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \mathbf{F} \times \mathbf{r} \quad (3.7.13c)$$

Das Kräftepaar entspricht einem reinen Drehmoment! Die Grösse des Drehmomentes ist für jeden Raumpunkt \mathbf{r}_0 gleich.

Zwei Kräftepaare heissen äquivalent wenn sie das gleiche DREHMOMENT bewirken.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}'_{ij} \times \mathbf{F}'$$

Anwendung von Kräftepaaren: Beim Schneiden eines Gewindes sollte man das Werkzeug nur mit zwei Fingern drehen. Man erzeugt so ein Kräftepaar und ein reines DREHMOMENT. Damit verhindert man ein Ausbrechen des Werkzeuges.

3.7.2.1. Dynamie

Definition: DYNAMIE = KRAFT \mathbf{F} am Punkt i + DREHMOMENT \mathbf{T}

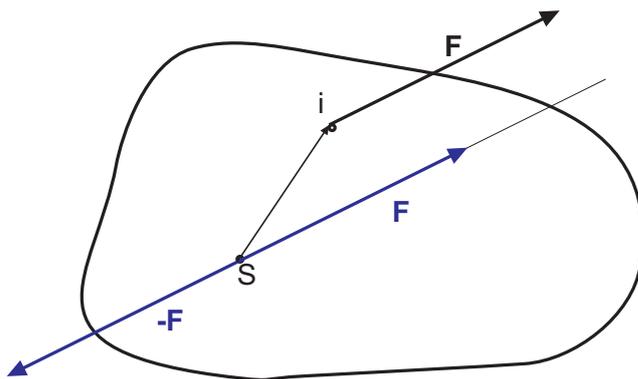


Abb. 3.41.: Eine an einem beliebigen Ort angreifende KRAFT kann durch die Addition der KRAFT «0» am Massenmittelpunkt S in eine dort angreifende KRAFT und ein reines Drehmoment übergeführt werden.

Wie wirkt eine KRAFT \mathbf{F} am Punkte i ? Wir bemerken, dass Kräfte am Schwerpunkt eine reine Translation bewirken. Das Rezept ist:

- Zeichne in S die Kräfte \mathbf{F} und $-\mathbf{F}$ ein. Dies ändert nichts an der Physik, da bei gleichem Angriffspunkt gilt

$$\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = 0$$

- Wir interpretieren nun die Konstruktion mit drei Kräften neu.
 - Es gibt eine KRAFT \mathbf{F} in S , die eine reine Translation bewirkt (KRAFT auf Massenmittelpunkt)
 - Es gibt ein Kräftepaar mit $\mathbf{T} = \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}$, das als reines DREHMOMENT eine Drehung um S mit einer Achse parallel zu \mathbf{T} bewirkt.

Die Wirkung einer beliebigen KRAFT mit beliebigem Angriffspunkt auf einen starren Körper entspricht einer KRAFT im Massenmittelpunkt S sowie einem Kräftepaar, d.h. einer Dyname.

Bemerkung:

Wenn aus anderen Gründen ein Punkt 0 fixiert ist, dann muss man in der obigen Argumentation einfach S durch 0 ersetzen.

Wenn viele Kräfte angreifen, gilt

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (3.7.14a)$$

$$\mathbf{T}_S = \sum_i \mathbf{T}_i = \sum_i \mathbf{r}_{Si} \times \mathbf{F}_i \quad (3.7.14b)$$

Das heisst, wir können den Impuls- und den DREHIMPULSSATZ anwenden.

3.7.3. Stabilität des Gleichgewichts

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 289])

Für die Stabilität des Gleichgewichts gelten die gleichen Regeln wie für die Minima der potentiellen Energie. Wenn die Auslenkung eines Körpers aus seiner Ruhelage eine KRAFT oder ein Drehmoment bewirkt, das diesen in die Ruhelage zurück treibt, spricht man von einem **stabilen** Gleichgewicht. Im entgegengesetzten Fall handelt es sich um ein **labiles** Gleichgewicht. Eine Kugel auf einer horizontalen Unterlage befindet sich in einem **indifferenten** Gleichgewicht.

3.8. Schwerkraft oder Gravitation

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 299])

Die Schwerkraft oder Gravitation ist die einzige langreichweitige KRAFT (soweit wir wissen), die sich nicht kompensiert. In diesem Kapitel sollen Aspekte der Gravitation besprochen werden. Einige der Diskussionspunkte sind auch für die Behandlung der elektrostatischen Felder von Bedeutung.

3.8.1. Keplersche Gesetze

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 299])

Die Keplerschen Gesetze lauten

1. Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse steht.
2. Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz seiner mittleren Entfernung zur Sonne.

Nach Johannes Kepler

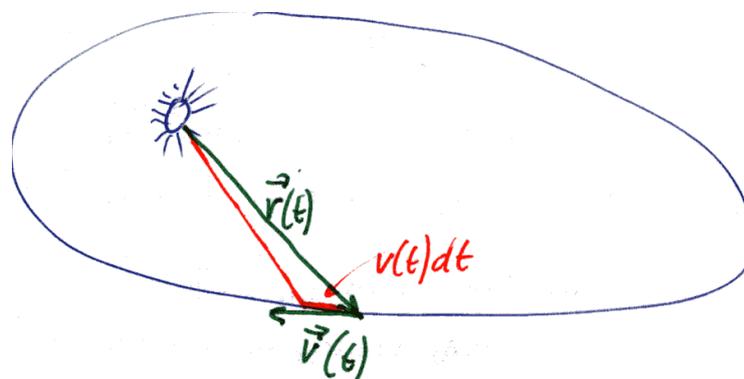


Abb. 3.42.: 2. Keplersches Gesetz.

Das zweite Keplersche Gesetz drückt die Drehimpulserhaltung aus. Diese besagt, dass in einem abgeschlossenen System $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r} = \text{const} = m\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ gilt. In den Zylinderkoordinaten (r, ϕ) lautet der Satz der Drehimpulserhaltung $L = mrv_\phi$. Für eine sehr kurze Zeit dt gilt

$$r \cdot ds = r \cdot v_\phi dt = \frac{L}{m} dt \quad (3.8.1)$$

und damit der Flächensatz.

3.8.2. Newtonsches Gravitationsgesetz

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 303]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 46])

Aus der Umlaufzeit des Mondes von 27.3 Tagen kann mit der Formel für die Zentripetalbeschleunigung

$$a_z = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T_0^2} \quad (3.8.2)$$

die Gravitationskraft auf der Mondbahn $r = 3.84 \cdot 10^8$ m ausgerechnet werden.

$$a_z = \frac{4\pi^2 \cdot 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}}{(27.3 \times 86400)^2} \text{ s}^2 = 0.00272 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.8.3)$$

Auf der Erdoberfläche ($r = 6370$ km) ist $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wenn wir annehmen, dass sich die Gravitationsbeschleunigung wie $a_G = Kr^\alpha$ verhält, dann ist

$$\frac{a_{G,1}}{a_{G,2}} = \frac{r_1^\alpha}{r_2^\alpha} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\ln\left(\frac{a_{G,1}}{a_{G,2}}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} = \frac{\ln a_{G,1} - \ln a_{G,2}}{\ln r_1 - \ln r_2} \quad (3.8.4)$$

Wir setzen ein und erhalten $\alpha = -1.9977$, also ein Gravitationsgesetz der Form $F_G \propto r^{-2}$.

Neben dieser Beobachtung, die unabhängig von den Keplerschen Sätzen ist, kann man auch aus diesen die Form des Gravitationsgesetzes ableiten.

3.8.2.1. 1. Möglichkeit

Da die Gravitation die einzige Möglichkeit für die ursächliche KRAFT der Zentripetalbeschleunigung ist, muss $F_G = ma_z$ sein. Das 3. Keplersche Gesetz sagt nun dass $T_0^2 = Kr^3$ ist. Wir haben also

$$F_g = ma_z = \frac{4\pi^2 mr}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2 m}{Kr^2} \quad (3.8.5)$$

Das heisst, dass nach dem 3. Keplerschen Gesetz die Gravitationskraft $F_G \approx \frac{1}{r^2}$ sein muss.

3.8.2.2. 2. Möglichkeit

Wir verwenden das 1. und das 2. Keplersche Gesetz.

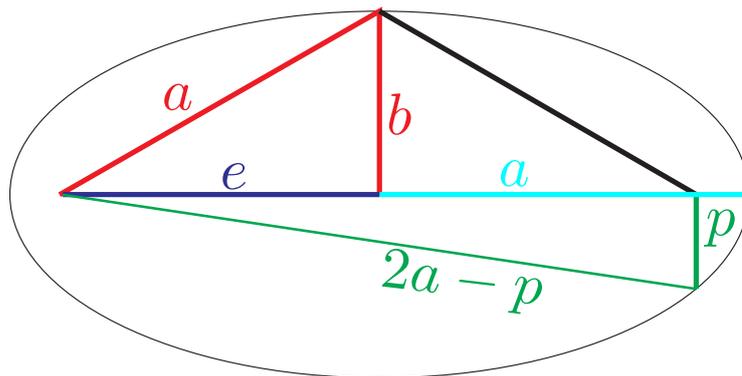


Abb. 3.43.: Parameter bei einer Ellipse. Die Ellipse ist definiert, dass die Summe der Abstände von jedem Punkt ihrer Berandung zu den beiden Brennpunkten konstant und gleich dem grossen Durchmesser $2a$ ist.

Wir nehmen an, dass die Bahn s eines Teilchens ganz allgemein durch $s(r, \phi)$ gegeben ist. Dann schreiben wir die Geschwindigkeit in einem Zylinderkoordinatensystem als $v = (v_r; v_\phi)$. Der Drehimpuls ist in diesem Koordinatensystem durch $L = mrv_\phi = mr^2\dot{\phi} = \text{const}$ gegeben. Damit ist auch $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$ und $\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\frac{L}{mr^2}$. Die KINETISCHE ENERGIE ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.8.6)$$

Die Gesamtenergie bestehend aus der kinetischen Energie und einer unbekanntem potentiellen Energie E_{pot} muss konstant sein.

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const} = \frac{L^2}{2m} \left(\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right) + E_{pot} \quad (3.8.7)$$

Das erste Keplersche Gesetz sagt aus, dass die Bahnen Ellipsen sind. Wir verallgemeinern auf Kegelschnitte und bemerken, dass alle Kegelschnitte (Hyperbel, Parabel und Ellipse) in Zylinderkoordinaten durch die Gleichung

$$r(\phi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\phi)} \quad (3.8.8)$$

gegeben sind, wobei ϕ der Winkel des Ortsvektors zur grossen Halbachse ist. Wir haben dann

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{p}{(1 - \epsilon \cos(\phi))^2} (-\epsilon \sin(\phi)) = p \frac{r^2}{p^2} (-\epsilon \sin(\phi)) = \frac{-r^2 \epsilon \sin(\phi)}{p} \quad (3.8.9)$$

Mit dieser Gleichung kann $\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{r^4}$ berechnet werden

$$\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{r^4} = \frac{r^4 \epsilon^2 \sin^2(\phi)}{p^2 r^4} = \frac{\epsilon^2}{p^2} \sin^2(\phi) = \frac{\epsilon^2}{p^2} (1 - \cos^2(\phi)) \quad (3.8.10)$$

Weiter ist $\frac{p}{r} = 1 - \epsilon \cos(\phi)$ und damit $\cos^2(\phi) = \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2}$. Somit wird

$$\frac{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}{r^4} = \frac{\epsilon^2}{p^2} \left[1 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} \right] = \frac{\epsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr} - \frac{1}{r^2} \quad (3.8.11)$$

Eingesetzt in die KINETISCHE ENERGIE E_{kin} erhalten wir

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr} \right) \quad (3.8.12)$$

Damit die Gesamtenergie konstant ist, muss die POTENTIELLE ENERGIE

$$E_{pot} = -\frac{L^2}{mpr} \quad (3.8.13)$$

sein.

Weiter ist es, bei einer Annahme von linearen Systemen, natürlich, dass die Gravitationskraft proportional zu den beteiligten Massen ist.

Aus all diesen Beobachtungen hat Isaac Newton sein Gravitationsgesetz abgeleitet.

$$\mathbf{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}} \quad (3.8.14)$$

$$G = 6.673(10) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Link zur Vorlesung: ([Wie misst man die Gravitationskonstante](#))

Der Vektor $\frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$ ist ein Einheitsvektor, der von der Masse m_1 zur Masse m_2 zeigt. Dieser Vektor definiert das Vorzeichen der KRAFT!

Aus der Gravitationskraft kann die POTENTIELLE ENERGIE der Gravitation berechnet werden, indem wir von einem Ort r auf dem Strahl vom Koordinatenursprung (Ort der Masse m_1 ins unendliche integrieren).

$$E_{pot} = - \int_{\infty}^r F(\rho) d\rho = \int_{\infty}^r G \frac{m_1 m_2}{\rho^2} d\rho = - G m_1 m_2 \frac{1}{\rho} \Big|_{\infty}^r = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (3.8.15)$$

Was wir bis jetzt berechnet haben, ist die Arbeit, die benötigt wird, um eine Masse m_2 im Feld der Masse m_1 vom Unendlichen nach r zu verschieben. Wir machen dies, da es üblich ist den Nullpunkt der Gravitationsenergie ins unendliche zu verschieben.

Wir müssen zeigen, dass diese Arbeit unabhängig vom Weg ist. Jede allgemeine Verschiebung kann als eine Kombination einer radialen Verschiebung sowie einer zweiten Verschiebung in konstantem Abstand zur Masse m_1 geschrieben werden. Bei der Verschiebung auf einer Kugelschale (konstanter Abstand) ist die KRAFT immer senkrecht auf der Verschiebung, die Arbeit also null. Das heisst, dass nur die Abstandsänderung zur Arbeit beiträgt, und diese ist gleich, unabhängig vom Weg. **Deshalb ist das Gravitationsfeld ein konservatives Kraftfeld.**

Aus der potentiellen Energie können wir die KRAFT nach

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla E_{pot} = -(-G m_1 m_2) \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} \\ \frac{d}{dy} \frac{1}{r} \\ \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \end{pmatrix} = G m_1 m_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dx} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dy} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dz} \end{pmatrix} \quad (3.8.16)$$

Wir beachten, dass $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist. Dann ist

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{r} \quad (3.8.17)$$

Also ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla E_{pot} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.8.18)$$

Oft ist es sinnvoll, die von der Masse m_1 ausgehende Kraftwirkung unabhängig von der Masse m_2 anzugeben. Wir definieren deshalb:

Der Feldvektor des Gravitationsfeldes ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_{1,2}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}_{1,2})}{m_2} = -G \frac{m_1}{r_{1,2}^2} \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}} \quad (3.8.19)$$

An der Erdoberfläche ist der Betrag des Feldvektors der Gravitation $|\mathbf{g}(\text{Erdradius})| = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (stimmt das?).

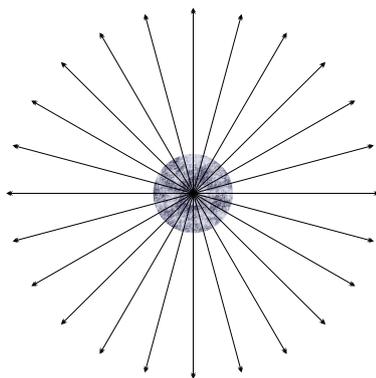


Abb. 3.44.: Das Gravitationsfeld einer Masse.

Wir können für das Gravitationsfeld Feldlinien einzeichnen. Eine Probemasse wird durch das Gravitationsfeld beschleunigt und bewegt sich entlang der Feldlinien. Das Gravitationsfeld verhält sich analog zum elektrostatischen Feld. In der Nähe der Erdoberfläche $r = R$ können wir die POTENTIELLE ENERGIE linearisieren.

$$E_{pot}(R + \Delta r) = E_{pot}(R) + \frac{dE_{pot}}{dr} \Delta r = -Gm_e m \frac{1}{R} + Gm_e m \frac{1}{R^2} \Delta r \quad (3.8.20)$$

Wenn wir den Nullpunkt der potentiellen Energie auf die Erdoberfläche legen, haben wir

$$E_{pot}(R + \Delta r) - E_{pot}(R) = Gm_e m \frac{1}{R^2} \Delta r = m \left[Gm_e \frac{1}{R^2} \right] \Delta r = mg \Delta r \quad (3.8.21)$$

indem wir $g = Gm_e \frac{1}{R^2}$ setzen. g ist eine Beschleunigung.

Die Formel $E_{pot} = mgh$ ist die für die Erdoberfläche linearisierte Form der potentiellen Energie der Gravitationsenergie

$$E_{pot} = -G \frac{m_E m}{r^2}$$

der Erde.

3.8.2.3. Selbstenergie der Erde

Analog zum klassischen Elektronenradius könnte man sich fragen, bei welchem Radius die Gravitationsenergie der Erde gleich der Energie mc^2 ist. Wir setzen

$$m_E c^2 = G \frac{m_E^2}{r}$$

und erhalten

$$r = G \frac{m_E}{c^2} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \approx 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

3.8.2.4. Messung der Gravitationskonstante

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 309])

Durch die Bestimmung der Umlaufzeiten und Umlaufbahnen von Himmelskörpern kann immer nur das Verhältnis zweier Massen, nie aber der Absolutwert bestimmt werden. Deshalb müssen zwei Testmassen in einen kontrollierten Abstand gebracht werden.

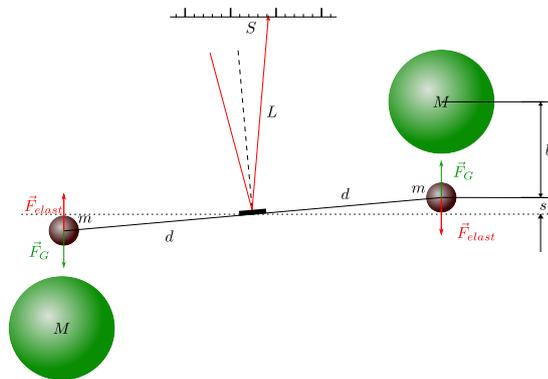


Abb. 3.45.: Abbildung der Gravitationswaage aus der Vorlesungssammlung.

Versuch 39: Versuch zur Vorlesung:

Gravitationswaage: Bestimmung der Gravitationskonstante (Versuchskarte M-5, Video (VPN oder intern))

Die Gravitationswaage ist symmetrisch aufgebaut, um Fehler zu minimieren und um den Effekt zu verdoppeln. Gemessen wird die Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{a}{d} = \frac{1}{d} \left(G \frac{M}{b^2} - F_{elast} \right) \quad (3.8.22)$$

3.8.3. Schwere und träge Masse

Wir haben bis jetzt immer angenommen (und bei der Beschleunigungsmethode (Gleichung (3.8.22)), die wir angewandt hatten, tun wir dies auch), dass die träge Masse m_t (der Proportionalitätsfaktor im 2. Newtonschen Axiom) gleich der

schweren Masse m_s im Gravitationsgesetz sei. Gleichung (3.8.22) müsste eigentlich lauten

$$m_t d\alpha = m_t a = \left(G \frac{M m_s}{b^2} - F_{elast} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{a}{d} = \frac{1}{d} \left(G \frac{M m_s}{m_t b^2} - F_{elast} \right) \quad (3.8.23)$$

3.8.4. Raumfahrt

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 312])

Mit der üblicherweise verwendeten Notation, dass $E_{pot} = mgh$ sei, berechnet man sofort, dass es unmöglich sein sollte, die Erde zu verlassen. Wir starten an der Erdoberfläche und setzen $r = R_E$ und möchten, unter Vernachlässigung der Reibung bis in den Abstand r_f kommen. Die dafür nötige KINETISCHE ENERGIE ist

$$\begin{aligned} E_{kin}(r_f) &= \frac{1}{2} m v_a^2 = E_{pot}(r_f) - E_{pot}(r_E) \\ &= -G \frac{m_E m}{r_f} + G \frac{m_e m}{r_E} \\ &= G m_E m \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_f} \right) \\ &= G m_E m \frac{r_f - r_E}{r_f r_E} \end{aligned} \quad (3.8.24)$$

Daraus ergibt sich

$$v_a = \sqrt{2Gm_E \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_f} \right)} \quad (3.8.25)$$

Wenn wir $r_f = \infty$ setzen, berechnen wir, dass $v_a(\infty) = 11\,200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist. Die Geschwindigkeit auf einer Umlaufbahn in der Höhe r_b können wir mit der Zentripetalbeschleunigung ausrechnen:

$$a_z = \frac{v^2}{r_b} = Gm_E \frac{1}{r_b^2} \quad (3.8.26)$$

Daraus folgt, dass

$$v(r_b) = \sqrt{Gm_E \frac{1}{r_b}} \quad (3.8.27)$$

ist. Setzen wir $r_b = r_E$ folgt für die Bahngeschwindigkeit einer erdnahen Kreisbahn $v(r_E) = \sqrt{Gm_E \frac{1}{r_E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_a(\infty) = 79\,200 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

3.8.5. Potentielle Energie, Gesamtenergie und Umlaufbahnen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 318])

Die Umlaufgeschwindigkeit für $r_b = r_E$ ist $v(r_E) = \frac{v_a}{\sqrt{2}}$.

Die gesamte Energie eines Satelliten ist

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= E_{pot} + E_{kin} \\
 &= -G \frac{m_E m}{r_b} + \frac{1}{2} m v^2(r_b) \\
 &= -G \frac{m_E m}{r_b} + \frac{1}{2} m \frac{G m_E}{r_b} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{G m_E m}{r_b} \\
 &= \frac{1}{2} E_{pot} = -E_{kin}
 \end{aligned} \tag{3.8.28}$$

Wenn wir eine bestimmte Umlauffrequenz vorgeben, also ω , dann Teilchen einen Drehimpuls $L = I\omega = mr_b^2\omega$. Seine KINETISCHE ENERGIE ist dann $E_{kin} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$. Dies entspricht einer potentiellen Energie im mitdrehenden Koordinatensystem

$$E_{zentr}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr_b^2} \tag{3.8.29}$$

Die gesamte Energie ist also

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr_b^2} - G \frac{m_E m}{r_b} \tag{3.8.30}$$

Sie hat ein Minimum bei dem für den Drehimpuls charakteristischen Bahnabstand. Ellipsenbahnen können als ein Oszillieren in dieser Landschaft der potentiellen Energie angesehen werden.

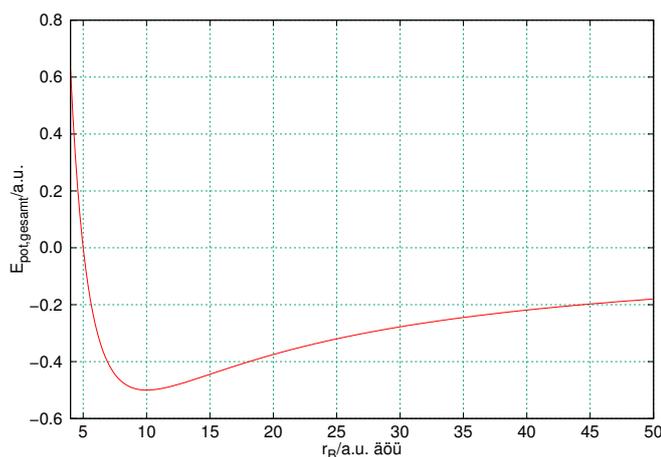


Abb. 3.46.: Kombiniertes Gravitations- und Zentrifugalpotential.

Teil III.

Mechanik deformierbarer fester Körper

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 339]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 93])

Bis jetzt waren die Objekte der Physik starre Körper. Jegliche Materie ist aus Atomen und Molekülen aufgebaut. Die Wechselwirkung zwischen diesen Grundeinheiten ist jedoch nicht unendlich gross. Deshalb gibt es keine starren Körper im eigentlichen Sinne.

Eine wichtige Eigenschaft realer Körper ist die **Dichte**.

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{m}{V}$$

Substanz	Dichte/ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Substanz	Dichte/ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Aluminium	$2.70 \cdot 10^3$	Blei	$11.3 \cdot 10^3$
Eis	$0.92 \cdot 10^3$	Eisen	$7.96 \cdot 10^3$
Erde (gemittelt)	$5.52 \cdot 10^3$	gewöhnliches Glas	$2.4 \cdot 10^3$ bis $2.8 \cdot 10^3$
Gold	$19.3 \cdot 10^3$	Eichenholz	$0.6 \cdot 10^3$ bis $0.9 \cdot 10^3$
Knochen	$1.70 \cdot 10^3$	Muskeln	$1.06 \cdot 10^3$
Fett	$0.92 \cdot 10^3$	Kupfer	$8.93 \cdot 10^3$
Zement	$2.7 \cdot 10^3$ bis $3.0 \cdot 10^3$	Ziegelstein	$1.4 \cdot 10^3$ bis $2.2 \cdot 10^3$
Ethanol	$0.806 \cdot 10^3$	Benzin	$0.68 \cdot 10^3$
Meerwasser	$1.025 \cdot 10^3$	Quecksilber	$13.6 \cdot 10^3$
Wasser (bei 377 K)	$1 \cdot 10^3$	Dampf (bei 373 K)	0.6
Helium	0.1786	Luft	1.293
Wasserstoff	0.08994		

Tab. 3.7.: Dichte bei 273.15 K und Normdruck 1013 hPa.

4. Skalare Elastomechanik

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 342]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 130])

4.1. Dehnung und Kompression

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 342]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 130])

Zieht man an einem Draht (Länge ℓ , Querschnitt d und Querschnittsfläche $A = \frac{\pi}{4}d^2$), dann vergrößert sich die Länge um $\Delta\ell$ und verringert sich (meistens) der Querschnitt um Δd .

$$\Delta\ell = \epsilon\ell \quad (4.1.1a)$$

$$-\Delta d = \mu\epsilon d \quad (4.1.1b)$$

Es sind

- ϵ die relative Dehnung
- μ die Poisson-Zahl

Wir definieren nun die Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.1.2)$$

dabei ist F die an der Querschnittsfläche A wirkende KRAFT.

Das Hooke'sche Gesetz verknüpft Spannung σ und Dehnung ϵ

$$\sigma = E\epsilon \quad (4.1.3)$$

E ist eine Materialkonstante, der Elastizitäts- oder der Dehnungsmodul (im englischen Young's Modulus genannt).

Einheiten

- ϵ : dimensionslos
- σ : $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
- E : $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Wenn wir die obigen Gleichungen umschreiben, erhalten wir

$$\delta\ell = \frac{1}{E} \frac{\ell F}{A} \quad (4.1.4)$$

Aus Änderung des Querschnitts und der Länge können wir die Volumenänderung berechnen. Wir setzen an, dass $V = \ell d^2$ ist

$$\Delta V = d^2 \Delta\ell + 2\ell d \Delta d = V \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2V \frac{\Delta d}{d} \quad (4.1.5)$$

Umgeschrieben erhalten wir

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \epsilon - 2\mu\epsilon = \epsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu) \quad (4.1.6)$$

Wir sehen, dass für positives ΔV die Poisson-Zahl der Ungleichung $\mu \leq 0.5$ genügen muss. In speziellen Fällen kann μ auch grösser als 0.5 sein.

ϵ ist ein Skalar.

Wird der Testkörper hydrostatischem Druck Δp unterworfen, ist also die Spannung auf allen Seiten gleich, ändert sich das Volumen um den dreifachen Wert, der bei einer uniaxialen Spannung auftreten würde.

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\Delta p}{E}(1 - 2\mu) \quad (4.1.7)$$

Die Kompressibilität $\kappa = \frac{\Delta V}{V\Delta p}$ ist

$$\kappa = \frac{3}{E}(1 - 2\mu) \quad (4.1.8)$$

Wird ein Draht gedehnt, kann ihm die Federkonstante $k = \frac{\Delta F}{\Delta\ell} = \frac{AE}{\ell}$ zuschreiben.

Bei der Dehnung wird die Arbeit

$$W = \int_0^{\Delta\ell} kx dx = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}EA\ell \frac{\Delta\ell^2}{\ell^2} = \frac{1}{2}EV\epsilon^2 \quad (4.1.9)$$

verrichtet. Wenn wir die Arbeit, oder Energie, pro Volumeneinheit ausrechnen, ist die elastische Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}E\epsilon^2 \quad (4.1.10)$$

4.2. Scherung

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 131])

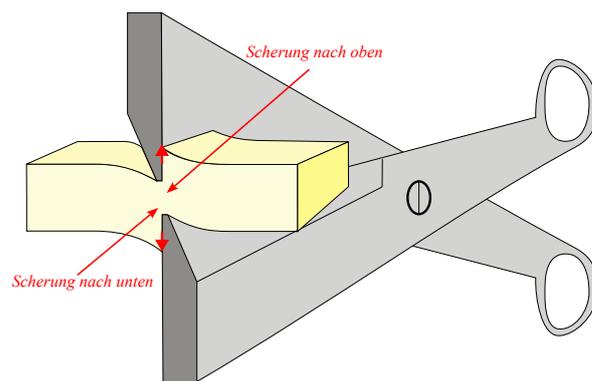


Abb. 4.1.: Begründung des Namens Scherung.

Abbildung 4.1 zeigt eine Skizze des Schneidevorgangs in einer SCHERE. Dabei wird eine Seite des Papiers nach oben gedrückt, die andere nach unten. Dabei wird eine Kraft tangential zur zukünftigen Schnittfläche ausgeübt. Diese Kraft verschiebt das Papier nach oben oder unten. Wir nennen deshalb eine solche Deformation eine SCHERUNG.

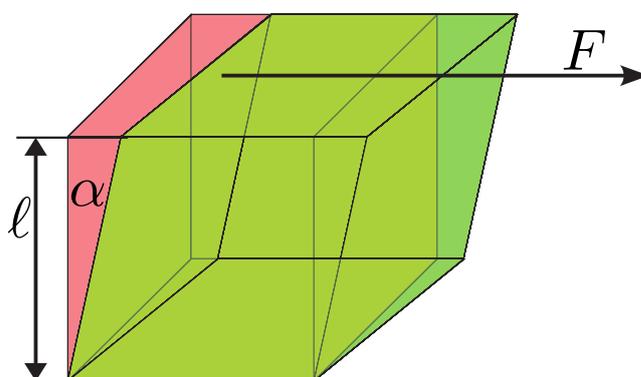


Abb. 4.2.: Scherung eines Würfels.

Wenn die KRAFT F tangential zur Oberfläche steht, dann wird der Testkörper geschert. Wenn die Stirnfläche des Würfels A ist, ist die Schubspannung

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (4.2.1)$$

Als Konsequenz dieser Schubspannung wird der Testkörper um den Winkel α geschert.

$$\tau = G\alpha \quad (4.2.2)$$

Einheiten

- α : dimensionslos
- τ : $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
- G : $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

G ist der Schub- oder Torsionsmodul (englisch: shear modulus)

Analog zur Energiedichte der axialen Deformation kann auch für die Scherenergie-dichte

$$w = \frac{1}{2}G\alpha^2 \quad (4.2.3)$$

geschrieben werden.

4.3. Verdrillung eines Drahtes

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 131])

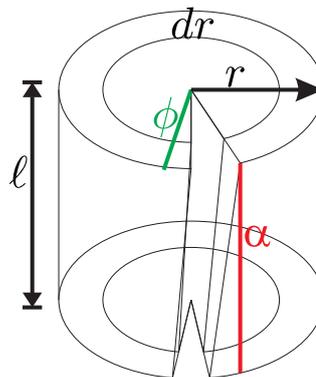


Abb. 4.3.: Verdrillung. Zur Berechnung wird der Draht in koaxiale Zylinder unterteilt.

Hier verdrehen zwei entgegengesetzte Drehmomente T einen Draht um den Winkel ϕ . Ein Hohlzylinder mit dem Radius r und der Dicke dr wird um

$$\alpha = \frac{r\phi}{\ell} \quad (4.3.1)$$

geschert. Wir benötigen die Schubspannung $\tau = G\alpha$ und eine Scherkraft $dF = \tau \cdot 2\pi r dr$. Das Drehmoment ist also

$$dT = dF r = \frac{2\pi G \phi}{\ell} r^3 dr \quad (4.3.2)$$

Das gesamte Drehmoment erhalten wir durch Integration

$$T = \int_0^R \frac{2\pi G \phi}{\ell} r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \phi \quad (4.3.3)$$

Wir können dem Draht die Richtgrösse

$$D_r = \frac{T}{\phi} = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell} \quad (4.3.4)$$

zuschreiben. Beachte, dass die Richtgrösse D_r extrem stark vom Drahtdurchmesser abhängt.

Die Einheit der Richtgrösse ist $[D_r] = \text{N m}$.



Versuch 40: **Versuch zur Vorlesung:** Richtmoment aus einem Drehpendel

Das Trägheitsdrehmoment ist $T_t = I \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}$, das rüctreibende Drehmoment $T_r = -D_r\alpha(t)$. Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung

$$0 = I \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + D_r\alpha(t) \implies \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{D_r}{I}\alpha(t) \quad (4.3.5)$$

Die Lösung ist analog wie bei einem Pendel (siehe Abschnitt 3.4.5.2). Daraus ergibt sich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_r}{I}} \quad (4.3.6)$$

4.4. Biegung

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 134])

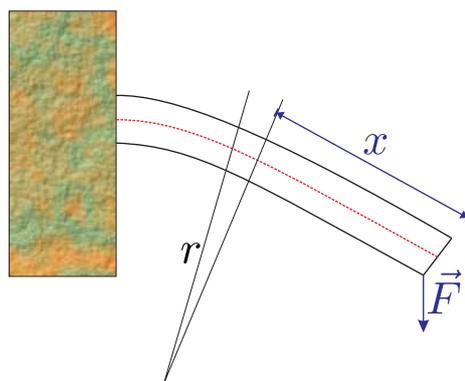


Abb. 4.4.: Biegebalken.

Biegebalken werden heute in vielen die Oberflächen abtastenden Instrumenten eingesetzt. Als Stimmgabeln sind sie die zeitbestimmenden Elemente in einer Uhr.

Der Balken der Länge ℓ , Breite b und Dicke h soll einseitig eingespannt sein. Wir legen am Ende eine KRAFT F an, die senkrecht zur ursprünglichen Lage des Balkens sein soll. An einem Punkt im Abstand x vom Balkenende ist als Wirkung der KRAFT der Balken gebogen, und zwar mit einem Krümmungsradius von r . Die oberen Schichten werden um $\frac{h}{2r}$ gedehnt, die unteren entsprechend gestaucht. In der Mitte befindet sich (rot eingezeichnet) die **neutrale Faser**. Gemittelt über die obere Hälfte des Balkenquerschnitts (über der neutralen Faser) ist die Dehnung $\frac{h}{4r}$. Die untere Hälfte ist entsprechend gestaucht. Sowohl für die Stauchung wie auch für die Dehnung wird eine KRAFT von $\tilde{F} = E \cdot \frac{h}{4r} \frac{hb}{2}$, und analog dazu eine KRAFT für die Stauchung. Die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar (Abstand $\frac{h}{2}$), das das Drehmoment

$$T(x) = \tilde{F} \frac{h}{2} \approx \frac{Eh^3b}{16r} \approx \alpha \frac{Eh^3b}{r} \quad (4.4.1)$$

α ist hier eine Schätzung und müsste mit einer ausführlicheren Rechnung berechnet werden. Für einen rechteckigen Querschnitt zeigt die genauere Rechnung, dass $\alpha = 1/12$ und nicht $1/16$ ist. Die Ursache für das Drehmoment $T(x)$ ist die KRAFT F am Ende des Balkens im Abstand x . Wir erhalten

$$Fx = T(x) = \frac{\alpha Eh^3b}{r} \quad (4.4.2)$$

oder

$$r = \frac{\alpha Eh^3b}{Fx} \quad (4.4.3)$$

Die Krümmung $1/r$ ist an der Einspannungsstelle am grössten. Die Spannung σ ist

$$\sigma = E \frac{h}{2r} = \frac{Eh}{2} \frac{Fx}{\alpha Eh^3b} = \frac{Fx}{2\alpha h^2b} \quad (4.4.4)$$

Wird die Festigkeitsgrenze überschritten, bricht der Balken an der Einspannstelle. Die Belastbarkeit eines einseitig eingespannten Balkens (und auch eines zweiseitig eingespannten oder aufgestützten Balkens) geht mit $\frac{h^2b}{\ell}$.

Typische Anwendungen einseitig eingespannter Balken finden sich in der Mikro-systemtechnik.



Abb. 4.5.: Bild eines Cantilevers.



Abb. 4.6.: Mikrofotografie eines Cantilevers.

4.5. Beziehung zwischen den elastischen Konstanten

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [[Mes15](#), pp. 132])

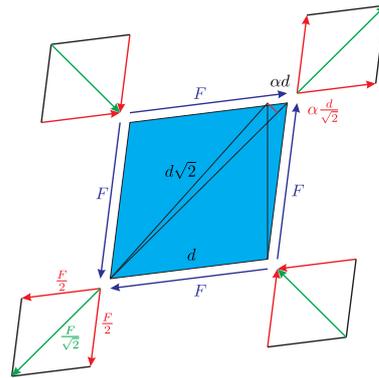


Abb. 4.7.: Zusammenhang zwischen Scherung und Dehnung.

Die blau eingezeichneten Kräfte in der obigen Abbildung bewirken eine Scherung um den Winkel α . Der Schermodul des Materials ist also

$$G = \frac{2F}{\alpha d^2} \quad (4.5.1)$$

Die blauen Kräfte können jeweils in zwei halb so grosse rote Kräfte aufgespalten werden. Nun werden jeweils zwei rote Kräfte von zwei nebeneinander liegenden Flächen zusammengefasst; das Resultat sind die grünen Kräfte. Diese bewirken eine reine Dehnung oder Stauchung. **Jede Scherung kann also als Kombination von einer Stauchung und einer orthogonal dazu liegenden Scherung aufgefasst werden.** Die eine Diagonale wird um $\alpha d/\sqrt{2}$ gedehnt, die andere um den gleichen Wert gestaucht. Die Kräfte wirken auf die mittlere Fläche der Grösse $d \cdot d\sqrt{2}$. Die Kräfte müssen gemittelt werden, so dass sie effektiv nur halb so gross wie ursprünglich angenommen sind. jeder der Kräfte $F/\sqrt{2}$ erzeugt eine relative Dehnung oder Stauchung um $\frac{F}{Ed^2}$ in ihrer Richtung und eine Querkontraktion oder -dilatation von $\mu \frac{F}{Ed^2}$ dazu. Beide Kräfte bewirken eine Kontraktion oder Dilatation von $\frac{2F(1+\mu)}{Ed^2} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\alpha d}{\sqrt{2}d\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{2}$ (**Hinweis:** Die Kräfte an gegenüberliegenden Ecken haben die gleiche Wirkung: die eine ist die Gegenkraft zur anderen, deshalb muss nur eine berücksichtigt werden.). Wir erhalten

$$E = \frac{4F(1+\mu)}{\alpha d^2} \quad (4.5.2)$$

und durch Vergleich

$$E = 2G(1+\mu) \quad (4.5.3)$$

Da die Poissonzahl $0 < \mu < 0.5$ ist, bekommt man auch

$$\frac{E}{2} > G > \frac{E}{3} \quad (4.5.4)$$

4.6. Anelastisches Verhalten

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 132])

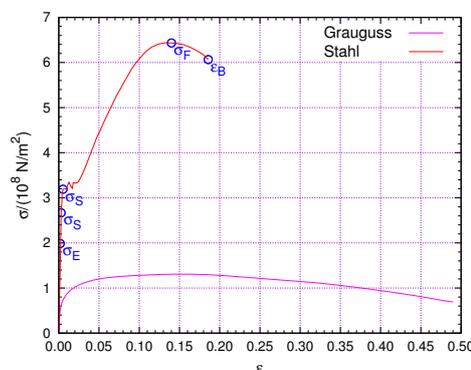


Abb. 4.8.: Anelastisches Verhalten: Spannungs-Dehnungs-Kurven von Stahl und Grauguss.

Bei grossen Deformationen ist die Antwort des deformierten Körpers nicht mehr linear. Wir nennen diesen Bereich auch den «Nicht-Hooke'schen Bereich». Im obigen Bild wird das Verhalten für Grauguss und Stahl dargestellt. Es können die folgenden Bereiche unterschieden werden:

- Für kleine Dehnungen ϵ bis zur Elastizitätsgrenze σ_E wird alle in der Deformation gespeicherte Energie bei der Entlastung wieder zurückgewonnen.
- Bis zur Proportionalitätsgrenze σ_P ist die Dehnung proportional zur Spannung.
- An der Streckgrenze σ_S beginnen, manchmal schubweise, starke plastische Verformungen.
- An der Festigkeitsgrenze σ_f , auch Fließgrenze genannt, beginnt das Material zu fließen.
- Bei der Bruchdehnung ϵ_B bricht das Material.

4.7. Elastomechanik anisotroper Körper

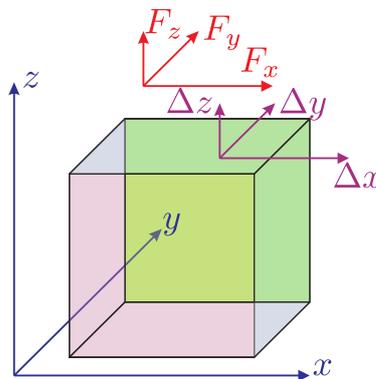


Abb. 4.9.: Allgemeine Kräfte an einem Würfel.

An einem Würfel können im allgemeinen Falle die folgenden Kräfte oder Spannungen sowie Deformationen auftreten:

- An jeder der **6 Flächen** können
 - **3 unabhängige** Kräfte (2 parallel zur Fläche, eine senkrecht dazu) und
 - **3 unabhängige Deformationen**, die aus einer Kompression oder Dilatation sowie zwei Scherungen bestehen.
- Da keine Netto-KRAFT und kein Netto-Drehmoment auf den Würfel wirken soll, müssen die Kräfte in die x -, y -, oder z -Richtung auf gegenüberliegenden Seiten gegengleich sein.
- Wir können also **3 mal 3 Kräfte** spezifizieren.
- Ebenso müssen die Deformationen auf gegenüberliegenden Seiten gegengleich sein.
- Wir haben also als Resultat der 3 mal 3 Kräfte **3 mal 3 Deformationen**.
- Kräfte und Deformationen sind jeweils 3 mal drei Matrizen, die über einen Tensor 4. Stufe (eine 3 mal 3 mal 3 mal 3 Matrix) miteinander verbunden sind.

Formal

$$\sigma_{i,j} = \sum_k \sum_\ell E_{i,j,k,\ell} \epsilon_{k,\ell} \quad \text{mit } i, j, k, \ell = x, y, z \quad (4.7.1)$$

Im allgemeinen Falle heisst das, dass für gleiche Kräfte die Antwort des Systems von der Orientierung der Probe abhängt. Je höher die Symmetrie eines Materials ist, desto weniger unabhängige Konstanten gibt es. Im Grenzfall des isotropen Mediums bleiben zwei, E und G .

Teil IV.

Mechanik der Flüssigkeiten und Gase: Hydro- und Aerostatik, Fluiddynamik

5. Flüssigkeiten und Gase

5.1. Aggregatzustände

Materie besteht aus Atomen oder Molekülen. Sie kommt in 4 verschiedenen Zuständen, Aggregatzustände genannt, vor.

Fest	Flüssig	Gas	Plasma
wohldefinierte Abstände	wohldefinierte Abstände	Abstände variabel	Abstände variabel
geometrisch periodische Anordnung	nur Nahordnung	keine Nahordnung	keine Nahordnung
Form ist stabil	grössere Kräfte zwischen Atomen	sehr kleine Kräfte zwischen Atomen	Kerne und Elektronen sind getrennt, grosse Coulombkräfte
grosse Kräfte zwischen Atomen	im GRAVITATIONSFELD wohldefinierte Oberfläche	Im Gravitationsfeld keine definierte Oberfläche	Im Gravitationsfeld keine definierte Oberfläche
schwingen gegeneinander	verschieben sich gegeneinander	Dichte $\approx 1000 \times$ kleiner als in FLÜSSIGKEIT	Dichte variabel
form- und volumenelastisch	Formänderung kraftlos möglich (ohne GESCHWINDIGKEIT)	raumfüllend	raumfüllend

Tab. 5.1.: Aggregatzustände

5.2. Gestalt von Flüssigkeitsoberflächen

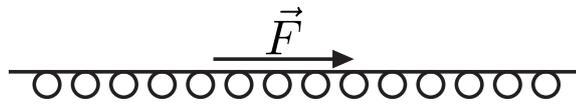


Abb. 5.1.: Flüssigkeitsoberfläche

Eine KRAFT \mathbf{F} tangential zur Flüssigkeitsoberfläche bewirkt eine Verschiebung aber keine Formänderung

An der Flüssigkeitsoberfläche gibt es keine Tangentialkräfte.

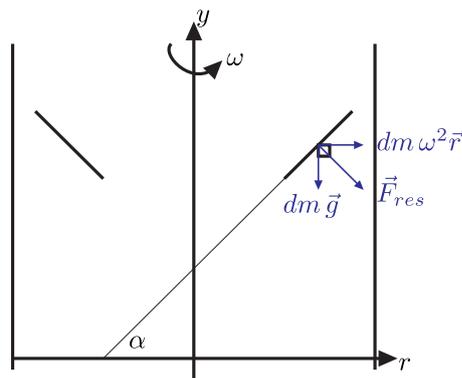


Abb. 5.2.: Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeitsfläche

Beispiel: Kaffee beim Umrühren. Wir wollen die Form der Flüssigkeitsfläche berechnen.

$$\begin{aligned}
 F_{res} &= \sqrt{(dm \omega^2 r)^2 + (dm g)^2} \\
 &= \left(\sqrt{\omega^4 r^2 + g^2} \right) dm \\
 \tan \alpha &= \frac{dm \omega^2 r}{dm g} = \frac{\omega^2 r}{g}
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

und

$$y = \int_0^r \frac{\omega^2 r}{g} dr = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2 \tag{5.2.2}$$

Eine rotierende Flüssigkeitsoberfläche hat also Parabelform.

5.3. Druck

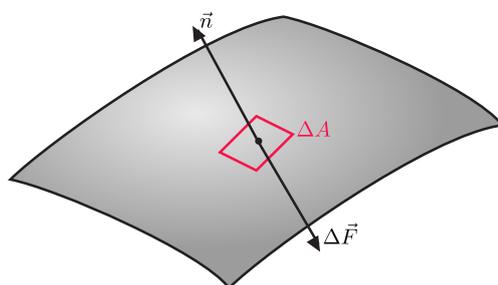


Abb. 5.3.: Definition des Druckes

Druck ist die KRAFT pro Fläche auf die Berandung eines Behälters.

Es sei

$$\Delta \mathbf{F}_n = -p \cdot \Delta A \cdot \mathbf{n}$$

Wir nennen p den isotropen Druck. Die Einheit von p ist Pascal $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right] = [\text{Pa}]$

Bemerkung: die Energiedichte $\frac{E}{V}$ hat die gleiche Einheit wie der Druck. Eingehendere Überlegungen zeigen, dass Druck immer mit einer Energiedichte, und Energiedichte mit Druck verbunden ist.

Merken Sie sich die Identität:

Energiedichte = Druck

5.3.1. Wirkung auf Körper

Eine Druckänderung Δp bewirkt eine Volumenänderung.

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \Delta \ln V \quad (5.3.1)$$

Lokal bewirkt eine Volumenänderung ΔV eine Dichteänderung $\Delta \rho$.

$$\theta = -\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\Delta \ln \rho \quad (5.3.2)$$

(Wenn das VOLUMEN abnimmt, nimmt die Dichte zu.)

Die Dichteänderung ist proportional zur Druckänderung

$$\Delta p = -K\theta = -\frac{1}{\kappa}\theta \quad (5.3.3)$$

K heisst Kompressionsmodul. Seine Einheit ist $1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Wir haben weiter

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (5.3.4)$$

κ heisst Kompressibilität. Ihre Einheit ist $\frac{1}{\text{Pa}} = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$

5.3.2. Hydraulische Presse

Versuch 41:   Versuch zur Vorlesung:
Hydraulische Presse (Versuchskarte MF-008)

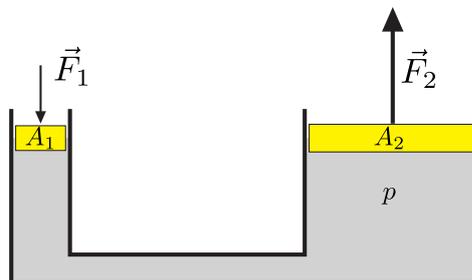


Abb. 5.4.: Hydraulische Presse. Kräfte bezogen auf die Wirkung auf die Aussenwelt.

Wir haben

$$F_1 = pA_1$$

$$F_2 = pA_2$$

und

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (5.3.5)$$

Bemerkung: Die Wirkung von hydraulischen Pressen kann sehr gut mit virtuellen Verrückungen berechnet werden.

5.3.3. Druckerarbeit

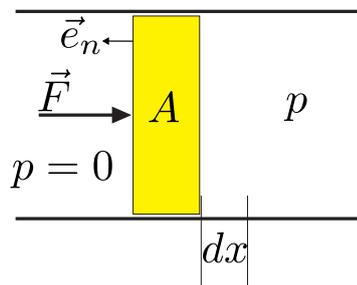


Abb. 5.5.: Druckerarbeit

Das Differential der Druckerarbeit ist

$$dW = Fdx = pAdx = -pdV \quad (5.3.6)$$

da $daAdx = -dV$ ist. Also ist die geleistete ARBEIT:

$$W = - \int pdV = \int \kappa V pdp \quad (5.3.7)$$

Ändert sich V wenig, so ist die Druckerarbeit

$$W = V \int \kappa pdp = \frac{1}{2} \kappa V (p_2^2 - p_1^2) \quad (5.3.8)$$

5.4. Schweredruck

Versuch 42:  Versuch zur Vorlesung:
Hydrostatischer Druck (Versuchskarte MF-009)

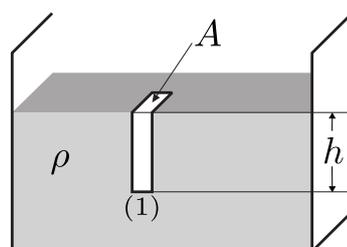


Abb. 5.6.: Berechnung des Schweredruckes

Wir berechnen die KRAFT bei (1). Die MASSE des verdrängten Wassers ist $Ah\rho = m$. Die daraus resultierende Gewichtskraft beträgt $F = mg = Ah\rho g$. Also ist der Schweredruck des Wassers

$$p = \frac{F}{A} = h\rho g \quad (5.4.1)$$

unabhängig von A . In einem Meter Tiefe ist der Schweredruck 10 kPa, das heisst es ist unmöglich mit einer Schnorchel von 1 m Länge zu atmen. Der Schweredruck hängt nur von der Flüssigkeitshöhe ab, nicht jedoch vom Querschnitt der Flüssigkeitssäule. Deshalb steht in kommunizierenden Röhren das Wasser überall gleich hoch.

5.4.1. Auftrieb

Versuch 43:  **Versuch zur Vorlesung:**
Auftrieb (Versuchskarte MF-001)

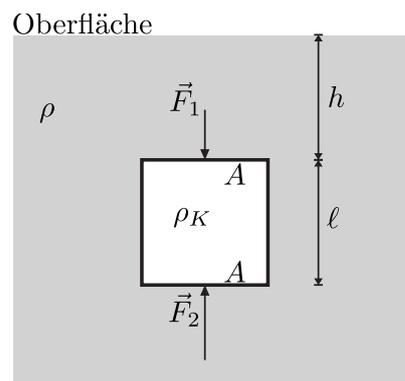


Abb. 5.7.: Auftrieb in Flüssigkeiten

Wir betrachten einen untergetauchten Würfel. Die KRAFT von oben ist

$$F_1 = -\rho g h A$$

Die KRAFT von unten ist

$$F_2 = +\rho g (h + \ell) A$$

Also ist der Auftrieb

$$F_A = F_2 + F_1 = \rho g \ell A = \rho g V \quad (5.4.2)$$

Salopp gesagt, ist der Auftrieb die «Gewichtskraft der verdrängten FLÜSSIGKEIT». Ein Körper schwebt im Wasser, wenn

$$F_A = F_G \quad (5.4.3)$$

ist.

Versuch 44:   **Versuch zur Vorlesung:**
 Auftrieb: Modellversuch zur Zellseparation im Dichtegradient (Versuchskarte MF-54)

5.4.2. Schwimmen

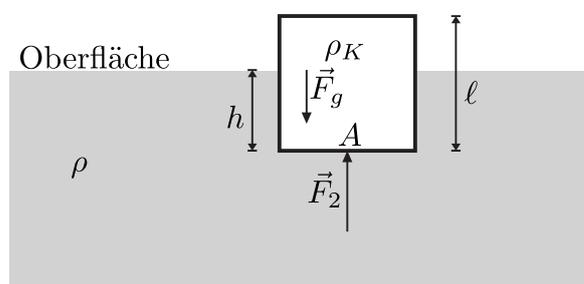


Abb. 5.8.: Schwimmen

Wenn $\rho_K < \rho$ ist die Gewichtskraft $F_g = \rho_K \ell A g$. Die Auftriebskraft ist hingegen $F_A = \rho h A g$. Der Körper schwimmt, wenn die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft ist ($F_A = F_g$). Dann ist

$$\rho_K \ell A g = \rho h A g \quad (5.4.4)$$

und der Körper taucht bis zu

$$h = \ell \cdot \frac{\rho_K}{\rho} \quad (5.4.5)$$

ins Wasser ein.

5.4.2.1. Wann schwimmt ein Körper stabil?

Versuch 45:   **Versuch zur Vorlesung:**
 Schwimmende Prismen: Schwimmlage von homogenen Körpern (Versuchskarte MF-045)

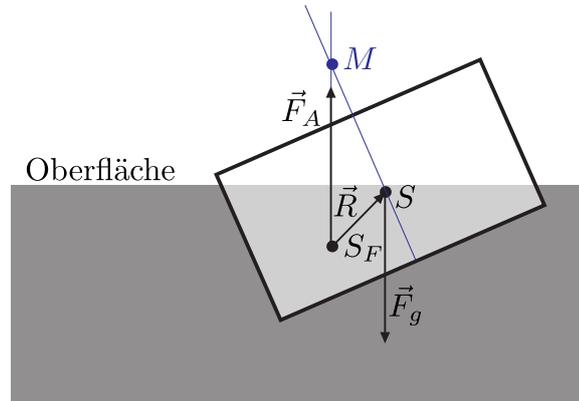


Abb. 5.9.: Stabilität eines schwimmenden Körpers

Sei S der Massenmittelpunkt des Körpers. S_F sei der Massenmittelpunkt der verdrängten FLÜSSIGKEIT. Solange der Körper schwimmt ist $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_G$. Die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar und damit erzeugen sie ein DREHMOMENT

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_A \quad (5.4.6)$$

Dieses DREHMOMENT richtet den Körper auf. Wenn S unter S_F liegt, ist die Schwimmelage stabil. Wenn S über S_F liegt, hängt die Stabilität von der Lage des Metazentrums M ab. Das Metazentrum ist durch die Schnittlinie der Mittellinie des Körpers und der Verlängerung von \mathbf{F}_A gegeben. Die Schwimmelage ist stabil, wenn M über S liegt.

5.4.3. Aräometer

Versuch 46:  Versuch zur Vorlesung:
Auftrieb: Aräometer und Batteriesäuretester (Versuchskarte MF-057)

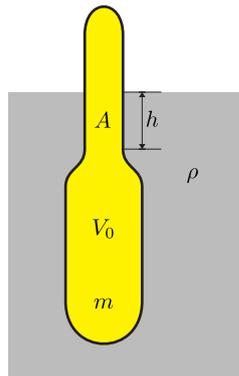


Abb. 5.10.: Aräometer

Mit einem Aräometer misst man die Dichte einer FLÜSSIGKEIT (Schnapswaage). Wir haben

$$m = \rho (V_0 + A \cdot h)$$

$$h = \frac{m}{A\rho} - \frac{V_0}{A}$$

5.5. Gasdruck

Das GESETZ VON BOYLE-MARIOTTE (nach Robert Boyle und Edme Mariotte) lautet

$$V = \frac{c}{p} \quad (5.5.1)$$

Damit es anwendbar ist, brauchen wir

- eine hohe Temperatur
- eine kleine Dichte

c hängt von der Temperatur T und der Anzahl Moleküle ab. Bei $T = 0^\circ\text{C}$ ist das VOLUMEN eines Gases

$$V = 22.4 \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{p} \quad (5.5.2)$$

wobei m die MASSE des Gases, M die Molmasse, V das VOLUMEN in Litern und p der Druck in bar ist. Bei langsamen Zustandsänderungen ist die ISOTHERME KOMPRESSIBILITÄT

$$\kappa_{(isotherm)} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{V} \frac{c}{p^2} = \frac{1}{p} \quad (5.5.3)$$

5.6. Atmosphärendruck

Der Luftdruck kann mit einem Barometer gemessen werden.

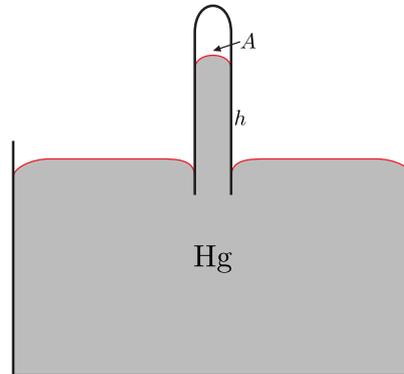


Abb. 5.11.: Quecksilber-Barometer

$$\frac{A \cdot h \cdot \rho_{Hg} g}{A} = p_{Atm} = h \cdot \rho_{Hg} g \quad (5.6.1)$$

Unter dem Normaldruck versteht man einen Druck von 760 mmHg (Quecksilbersäule). Die Einheit mmHg bezeichnet man nach Evangelista Torricelli mit Torr. Der Normaldruck ist also auch 760 Torr. In SI-Einheiten ist der Normaldruck 1013 hPa, was der alten Einheit Atmosphäre 1 atm entspricht.

5.6.1. Höhe der Atmosphäre bei konstanter Dichte *

Die Dichte der Luft bei Umgebungsbedingungen ist

$$\rho_L = 1.29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

mit

$$\rho g h = p_{Atm} \quad (5.6.2)$$

bekommt man

$$h = \frac{p_{Atm}}{\rho g} \approx \frac{10 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 7.7 \cdot 10^3 \text{ m} \quad (5.6.3)$$

Aber: Gesetz von Boyle-Mariotte (nach Robert Boyle und Edme Mariotte)

$$V = \frac{c}{p} \Rightarrow \rho = \tilde{c} \cdot p' \quad (5.6.4)$$

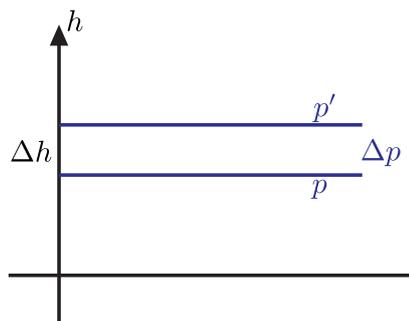


Abb. 5.12.: Druckänderung mit der Höhe

mit $p' < p$ folgt

$$\Delta p = p' - p = -\rho(h) g \Delta h \quad (5.6.5)$$

und

$$\frac{dp}{dh} = -\rho(h) g \quad (5.6.6)$$

Nun ist aber

$$\frac{\rho}{p} = \text{const} = \frac{\rho_0}{p_0} \quad (5.6.7)$$

wobei ρ_0, p_0 auf Meereshöhe gemessen werden.

Also ist

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h) \quad (5.6.8)$$

und

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p \quad (5.6.9)$$

Die Lösung ist

$$p = p_0 e^{-Ah} \quad (5.6.10)$$

Wir setzen ein und erhalten

$$A p_0 e^{-Ah} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p_0 e^{-Ah} \quad (5.6.11)$$

oder

$$A = \frac{\rho_0}{p_0} g \quad (5.6.12)$$

Also

$$p = p_0 e^{-\rho_0 \frac{gh}{p_0}} \quad (5.6.13)$$

Diese Gleichung heisst isotherme Barometerformel. Sie ist eine Näherung, da wir die Temperatur als konstant angenommen haben ebenso wie den Feldvektor des Gravitationspotentials $g(h) = g_0 = \text{const}$.

5.7. Druck als Potential *

Der Druck $p(\mathbf{r})$ sei eine skalare Funktion des Ortes

Behauptung:

$$\mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}(p(\mathbf{r})) \quad (5.7.1)$$

$\mathbf{F}_V(\mathbf{r})$ ist die Volumenkraft. Das ist die resultierende KRAFT auf die Oberfläche des Volumenelements, dividiert durch das VOLUMEN dieses Elements.

Beweis

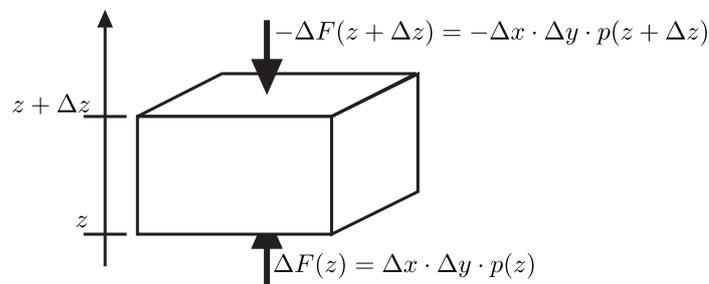


Abb. 5.13.: Druck auf ein Volumenelement

also

$$\begin{aligned} -\Delta F(z + \Delta z) + \Delta F(z) &= -(p(z + \Delta z) - p(z)) \Delta x \cdot \Delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ &= -\frac{dp}{dz} \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Eine andere Möglichkeit des Beweises ist: Wähle ein Volumenelement ΔV mit der Oberflächen Δa

$$\Delta \mathbf{F}_V = \int_{\Delta a} d\mathbf{F} = \int_{\Delta a} -p \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Delta V} \mathbf{grad}(-p) dV \quad (5.7.3)$$

Beispiel: Wasser:

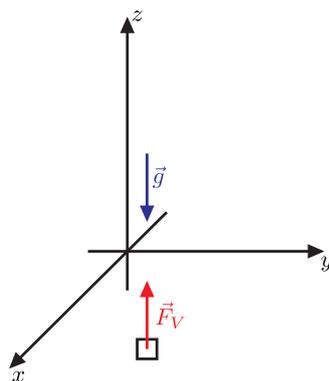


Abb. 5.14.: Kräfte auf ein Volumenelement Wasser

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}) &= -\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot z g \\
 \mathbf{r} &= (x, y, z) \\
 \mathbf{grad} (p(\mathbf{r})) &= -(0, 0, \rho_{\text{H}_2\text{O}} g) \\
 \mathbf{F}_V &= (0, 0, \rho_{\text{H}_2\text{O}} g) \\
 &= \left(0, 0, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 &= \left(0, 0, 1 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right)
 \end{aligned} \tag{5.7.4}$$

Der Druck ist also das Potential zur Volumenkraft

$$p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}_0) - \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_v(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{5.7.5}$$

potentielle Energie	↔	GRAVITATIONSKRAFT
Gravitationspotential	↔	Feldvektor der GRAVITATION
Druck	↔	Volumenkraft

Tab. 5.2.: Analogie zwischen Gravitation und Druck

Daraus folgt:

- Volumenkraft ist wirbelfrei
- Die Flüssigkeitsoberfläche ist eine Äquipotentialfläche, das heisst, $\mathbf{grad} p$ steht senkrecht zur Oberfläche

6. Oberflächenspannung

Versuch 47:   Versuch zur Vorlesung:
Druck in Seifenblasen (Versuchskarte MF-060)

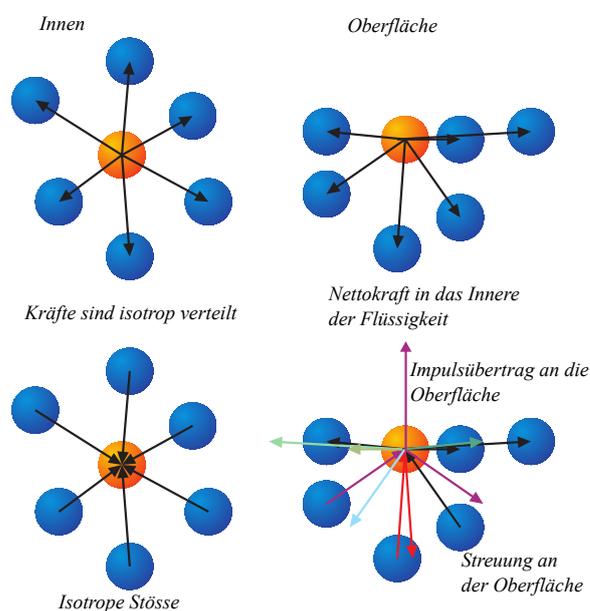


Abb. 6.1.: Molekulares Bild der Flüssigkeit. Links das Innere, rechts die Oberfläche. Obere Zeile: Kohäsionskräfte an der Oberfläche sind nicht gleichverteilt. Untere Zeile: Stöße mit der Oberfläche erzeugen eine nach aussen gerichtete Kraft.

Im Inneren einer Flüssigkeit (oder eines Gases) sind die anziehenden Kräfte (auch **KOHÄSIONSKRÄFTE** genannt) isotrop verteilt. Es gibt auf ein bestimmtes Atom keine Nettokraft. Kohäsionskräfte sind kurzreichweitig. Mehr als über zwei bis vier Atome oder Moleküle reichen sie nicht. Ebenso sind im Inneren der Flüssigkeit oder des Gases die Stöße und die Impulse isotrop verteilt. Die Stöße ergeben also im Mittel keine Kraft. Dabei ist die Standardabweichung nicht null: dies führt zur **BROWNSCHEN BEWEGUNG**.

An der Oberfläche einer Flüssigkeit existieren mindestens zwei, im Gravitationsfeld drei Kräfte.

1. Die Kohäsionskräfte auf Oberflächenatome oder Moleküle sind nicht mehr

isotrop verteilt. Die nach aussen ziehenden Anteile fehlen, so dass Netto eine nach innen zeigende Kraft existiert.

2. Stösse an der Oberfläche sind nicht isotrop verteilt. Wie beim Stoss eines Balls mit der Wand überträgt jeder Stoss eines Atoms oder Moleküls mit der Oberfläche eine Impulsänderung in der Zeit Δt auf die Oberfläche, übt also eine Kraft aus.
3. Wenn äussere Kräfte wie die Gravitation vorhanden sind, müssen sie berücksichtigt werden.

Da die Oberfläche in Ruhe ist, müssen die drei Kräfte im Gleichgewicht sein. Die aus dem Impulsübertrag resultierende Kraft nach aussen muss also gleich der Kohäsionskraft und, eventuell, der Gravitation oder anderer äusserer Kräfte, sein. Da die Oberfläche stabil ist, bedeutet dies auch, dass die potentielle Energie eines Atoms oder Moleküls im Inneren tiefer liegen muss als ausserhalb der Flüssigkeit. Dies kann auch so verstanden werden, dass für jedes Teilchen im Inneren im Mittel N Kohäsionspotentiale (alle $< 0!$) aufsummiert werden müssen, während an der Oberfläche nur $N_S < N$ Potentiale zum Summieren vorhanden sind. Die Summe aller Kohäsionspotentiale an der Oberfläche ist also weniger negativ als im Inneren. Der Energieunterschied pro Fläche ist dann die Oberflächenenergie.

Diese Oberflächenenergie kann berechnet werden, wenn man annimmt, dass die Stösse mit der Oberfläche unveränderlich eine konstante nach aussen gerichtete Kraft erzeugen. Schiebt sich nun ein Molekül M an die Oberfläche, so leistet es die ARBEIT $W_{is}(M)$ gegen \mathbf{F}_S . Damit wird

$$E_S(M) = W_{is}(M) \quad (6.0.1)$$

Der Index S bezeichnet dabei die Oberfläche (surface). Die gesamte Energie der Oberfläche wird berechnet, indem aufsummiert (oder integriert) wird.

Die potentielle Energie der gesamten Oberfläche A (eventuell berandet) ist minimal, wenn die Oberfläche minimal ist. Die Gesamtenergie E_S hängt mit der Oberfläche A und der OBERFLÄCHENSPANNUNG σ_S wie folgt zusammen:

$$E_S(M) = \sigma_S \cdot A \quad (6.0.2)$$

Die Einheit der OBERFLÄCHENSPANNUNG σ_S ist $\left[\frac{N}{m}\right]$.

Wenn $n \cdot A$ Moleküle an der Oberfläche sind, gilt

$$\sigma_S = n E_S(M) = \frac{1}{d_{eff}^2} E_S(M) \quad (6.0.3)$$

Dabei ist $n = \frac{1}{d_{eff}^2}$ die Flächendichte der Moleküle, d_{eff} der effektive Durchmesser eines Moleküls und $E_S(M)$ die ARBEIT, die benötigt wird um ein Molekül gegen die Oberflächenkraft an die Oberfläche zu bringen (siehe Gleichung (6.0.1)).

6.1. Anwendung: Kraft eines Flüssigkeitsfilms

Versuch 48:   Versuch zur Vorlesung:
Oberflächenspannung: Messung mit Ring (Versuchskarte MF-063)

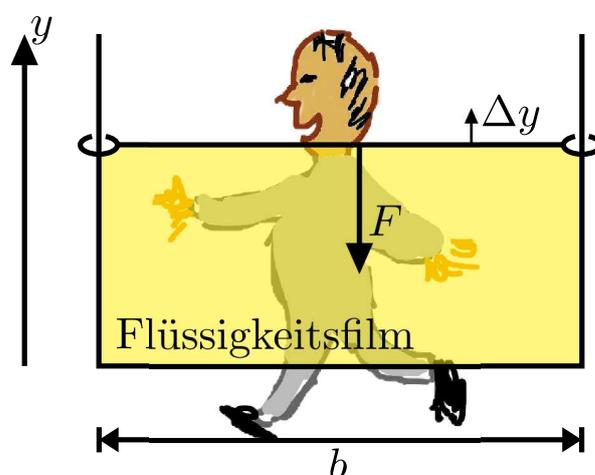


Abb. 6.2.: Berechnung der KRAFT eines Flüssigkeitsfilms

1. Der Flüssigkeitsfilm hat 2 Oberflächen.
2. Die Verschiebung der Grenze um Δy benötigt die ARBEIT

$$\Delta F \cdot \Delta y = 2\Delta E_S = \sigma_S \cdot 2\Delta A = 2\sigma_S b \Delta y \quad (6.1.1)$$

und

$$\Delta F = 2\sigma_S b \quad (6.1.2)$$

Pro Flüssigkeitsoberfläche wirkt auf die Breite Δx die KRAFT.

$$\Delta F_S = \sigma_S \Delta x \quad (6.1.3)$$

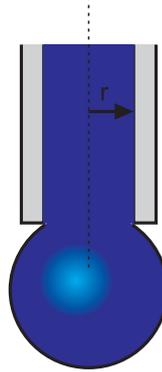


Abb. 6.3.: Tropfenzähler

Der Querschnitt ist $2\pi r$. Das KRÄFTEGLEICHGEWICHT verlangt, dass die aufwärtsgerichtete KRAFT der Oberflächenspannung gerade das Gewicht des Tropfens kompensiert. Ausser an der Berandung kompensieren sich alle Kräfte.

$$2\pi r \sigma_S = V \rho g \quad (6.1.4)$$

Also ist

$$V = \frac{2\pi r \sigma_S}{\rho g} \quad (6.1.5)$$

Also kann man mit der obigen Physik einen Tropfenzähler beschreiben.

6.2. Freie Oberflächen

Versuch 49:   Versuch zur Vorlesung:
Oberflächenspannung: Minimalflächen bei Seifenlamellen (Versuchskarte MF-065)

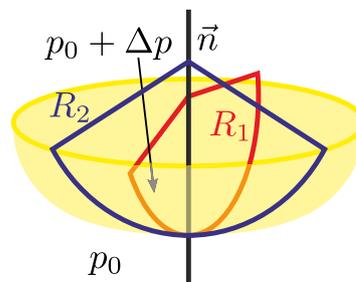


Abb. 6.4.: Krümmungsradien bei einer freien Oberfläche

Die Oberfläche ist charakterisiert durch 2 Krümmungsradien R_1 und R_2

Behauptung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\Delta p}{2\sigma_S} \quad (6.2.1)$$

Beweis für eine Kugel

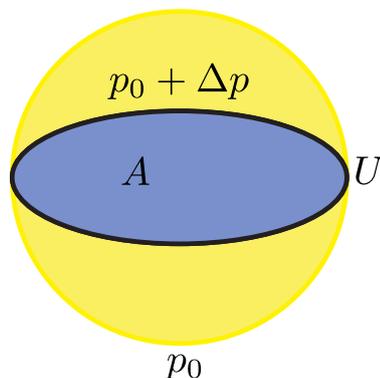


Abb. 6.5.: Oberflächenspannung und Druck in einer Kugel

Wir haben eine Äquatorialfläche A und einen Äquatorialumfang U . Die Druckkraft ist $\Delta p \cdot A$, die Oberflächenspannung am Umfang $2\sigma_S U$ (da wir 2 Oberflächen haben!)

Also

$$\begin{aligned} \Delta p A &= 2\sigma_S U \\ \Delta p \pi R^2 &= 2\sigma_S \cdot 2\pi R \\ \frac{2}{R} &= \frac{\Delta p}{2\sigma_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

da bei der Kugel $R_1 = R_2 = R$ ist.

Beispiel: Seifenblasen.

Die kleinere Seifenblase hat den grösseren Druck (gilt auch für Luftballons, wieso?)
Freie nicht geschlossene Oberflächen sind Minimalflächen mit

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad (6.2.3)$$

Da der Krümmungsradius $R^{-1} \propto \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ist, gilt auch

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (6.2.4)$$

6.3. Benetzende Flüssigkeiten, Kapillarität

Versuch 50:   Versuch zur Vorlesung:
Kapillarwirkung bei Keilküvette (Versuchskarte MF-061)

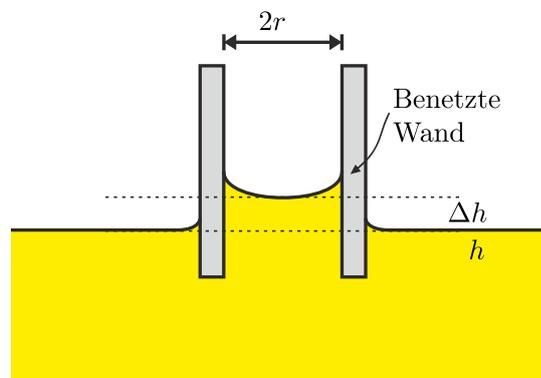


Abb. 6.6.: Benetzende Flüssigkeiten

Steigt die FLÜSSIGKEIT um Δh wird das Volumen $V = \pi r^2 \Delta h$ über den Spiegel der Flüssigkeit ausserhalb der Kapillare gehoben. Die Gewichtskraft dieses Volumens V muss von der Oberflächenspannung entlang des Umfangs $2\pi r$ getragen werden.

$$F_{Gravitation} = F_S \text{ (am Umfang)} \quad (6.3.1)$$

$$\pi r^2 \cdot \Delta h \cdot \rho \cdot g = \sigma_S \cdot 2\pi r \quad (6.3.2)$$

und

$$\Delta h = \frac{2\sigma_S}{r\rho g} \quad (6.3.3)$$

Bei Nichtbenetzung beobachtet man eine Kapillardepresion (Beispiel Glas und Quecksilber).

Wann immer zwei beliebige Substanzen sich berühren, existieren Grenzflächenenergien.

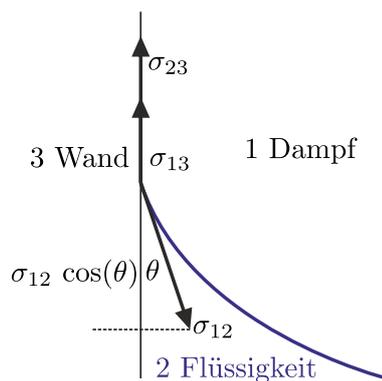


Abb. 6.7.: KRÄFTEGLEICHGEWICHT an der Grenzfläche

Für benetzende Flüssigkeiten ist σ_{23} negativ. Da die Randlinie sich nicht bewegt, muss

$$\sigma_{12} \cos(\theta) + \sigma_{23} = \sigma_{13} \quad (6.3.4)$$

sein. Für die Grenzflächen zwischen Flüssigkeit und Dampf sowie zwischen Flüssigkeit und Wand ist die Begrenzung oben, die Oberflächenspannung zeigt nach unten. Für die Grenzfläche Wand-Dampf zeigt die Grenzfläche nach oben. Umgeschrieben erhalten wir

$$\sigma_{12} \cos(\theta) = \sigma_{13} - \sigma_{23} \quad (6.3.5)$$

Wenn $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$ ist, müsste $|\cos(\theta)| > 1$ sein. Es gibt deshalb einen reellen Winkel θ und kein Kräftegleichgewicht. Die FLÜSSIGKEIT kriecht deshalb die Wand hoch.

Wenn $\sigma_{23} > \sigma_{13}$ ist, das heißt, wenn $\sigma_{13} - \sigma_{23} < 0$ ist, steigt der Flüssigkeitsspiegel am Rande nicht an, sondern wird nach unten gedrückt. Der Randwinkel θ ist dann $\theta > \frac{\pi}{2}$. QUECKSILBER in einem Glasgefäß zeigt dieses Verhalten.

6.3.1. Adhäsions- und Kohäsionskräfte

An der Grenze wo Luft, Flüssigkeit und die feste Wand sich berühren müssen die Adhäsions- und Kohäsionskräfte im Gleichgewicht sein. Die ADHÄSIONSKRÄFTE beschreiben die Kräfte zwischen der Flüssigkeit und der festen Wand. Die Adhäsionskräfte zwischen dem Dampf und der Wand werden vernachlässigt. Die Flüssigkeit selber wird durch KOHÄSIONSKRÄFTE, die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen, zusammengehalten.

Für ein Molekül an der Grenzlinie gibt es die Adhäsionskraft zur Wand. Diese Kraft \mathbf{F}_{adh} steht senkrecht zur Wand. Die Kohäsionskräfte werden durch die anderen Flüssigkeitsmoleküle aufgebracht. Die resultierende Kohäsionskraft \mathbf{F}_{ko} muss entlang der Winkelhalbierenden zwischen der Tangente zur Oberfläche und zur Wand liegen. Da die Oberfläche keine Scherkraft aufnehmen kann, muss die resultierende Kraft senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche liegen. Wir beobachten

- Bei benetzenden Oberflächen ist an der Grenzlinie $|\mathbf{F}_{ko}| < |\mathbf{F}_{adh}|$.
- Bei nicht benetzenden Oberflächen ist an der Grenzlinie $|\mathbf{F}_{ko}| > |\mathbf{F}_{adh}|$.

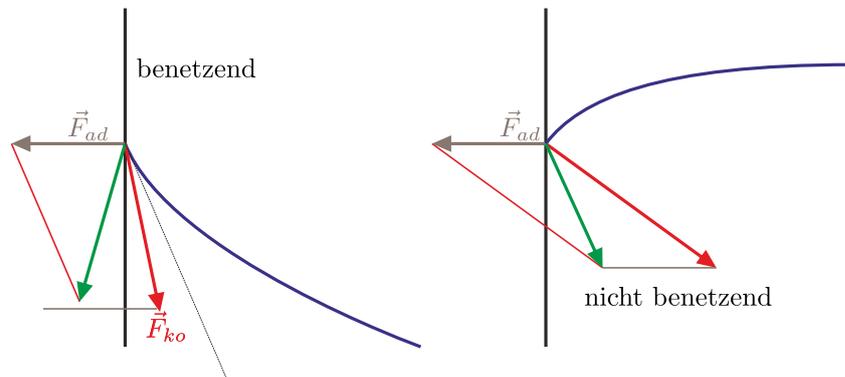


Abb. 6.8.: Kohäsion und Adhäsion bei Benetzung und ohne Benetzung

Der Grenzwinkel θ zwischen der Flüssigkeit und der Wand (in der Flüssigkeit!) kann mit dem folgenden Ansatz ausgerechnet werden. Wir legen die x -Achse horizontal nach rechts, die y -Achse nach oben. Die auf ein Teilchen an der Grenzlinie im Winkel θ wirkende Kohäsionskraft kann mit der Kohäsionskraft im Inneren (in einer Ebene) als

$$F_{koh}(\theta) = F_{ko,innen} \frac{\theta}{2\pi} = F'_{koh} \theta$$

geschrieben werden. Dabei haben wir angenommen, dass die Randlinie nur wenig gekrümmt ist. Abbildung 6.9 illustriert diese Überlegung.

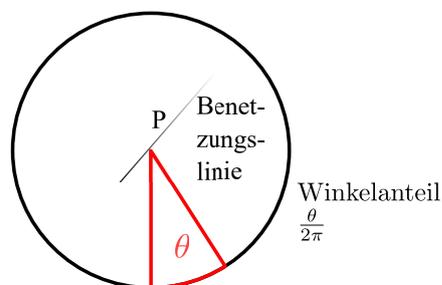


Abb. 6.9.: Illustration des Winkelanteils der wirkenden Kohäsionskraft an der ganzen Kohäsion entlang einer Benetzungslinie.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ko} &= F'_{koh} \theta \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{adh} &= F_{adh} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{res} &= F_{res} \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir können mit dem Kräftegleichgewicht, das heisst der resultierenden Kraft 0, für die x - und y -Richtung zwei Gleichungen aufstellen

$$\begin{aligned}F_{ko,x} + F_{adh,x} &= F_{res,x} \\ F_{ko,y} &= F_{res,y}\end{aligned}\tag{6.3.6}$$

Eingesetzt haben wir

$$\begin{aligned}F'_{koh} \theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_{adh} &= -F_{res} \cos(\theta) \\ -F'_{koh} \theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= -F_{res} \sin(\theta)\end{aligned}\tag{6.3.7}$$

Aus der zweiten Gleichung in Gleichung (6.3.7) bekommen wir mit $\sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$F_{res} = \frac{F'_{koh} \theta}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\tag{6.3.8}$$

Wir multiplizieren das Resultat aus Gleichung (6.3.8) mit $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ in die erste Gleichung aus Gleichung (6.3.7) ein und erhalten

$$\begin{aligned}2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) F_{res} - F_{adh} &= -F_{res} \cos(\theta) \\ 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) F_{res} - F_{adh} &= -F_{res} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ F_{res} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] &= F_{adh} \\ F_{res} &= F_{adh}\end{aligned}\tag{6.3.9}$$

Dies ist ein bemerkenswertes Resultat: Der Betrag der resultierenden Kraft hängt nur von der Adhäsionskraft ab, nicht aber von der Kohäsionskraft.

Wir setzen das Resultat aus Gleichung (6.3.9) zurück in die Gleichung (6.3.8) ein und erhalten die transzendente Gleichung

$$2 \sin \frac{\theta}{2} F_{adh} = F'_{koh} \theta \quad (6.3.10)$$

Diese Beziehung ist in Abbildung 6.10 gezeigt. Die Auflösung der Gleichung nach θ ist analytisch nicht lösbar.

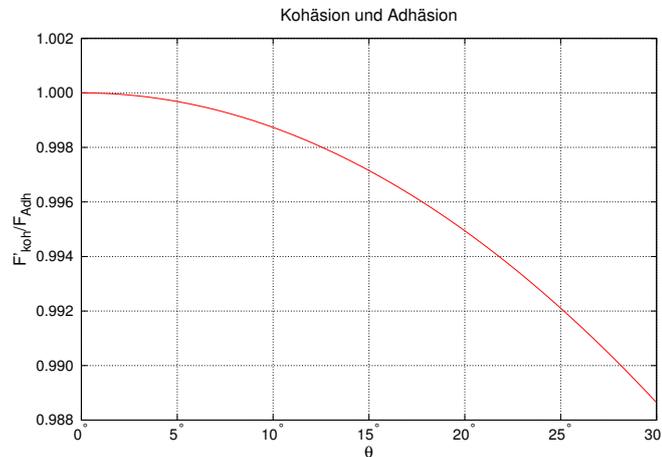


Abb. 6.10.: Abhängigkeit des Verhältnisses von Adhäsion und Kohäsion vom Benetzungswinkel θ .

Wenn wir annehmen, dass $\theta = \frac{\pi}{2} + d\theta$ ist mit $|d\theta| \ll 1$, so erhalten wir

$$d\theta = \frac{\sqrt{2}F_{adh} - \frac{\pi}{2}F'_{koh}}{\frac{\sqrt{2}}{2}F_{adh} - F'_{koh}} \quad (6.3.11)$$

Diese Gleichung gilt nur da wo $F'_{koh} \approx 0.9003 F_{adh}$ ist

7. Strömungen

7.1. Beschreibung von Strömungen

Versuch 51:   Versuch zur Vorlesung:
Laminare Strömung: Kleiner Strömungsapparat (Versuchskarte MF-012)

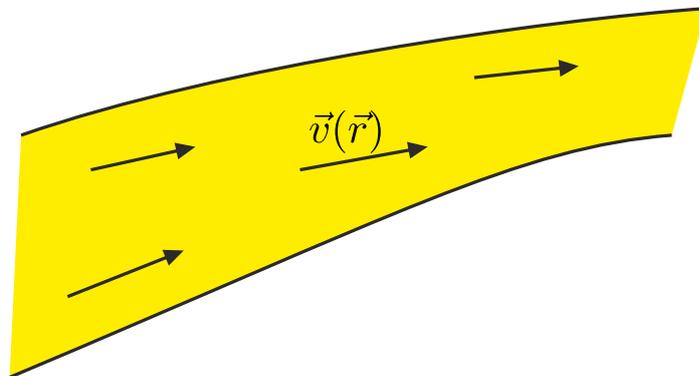


Abb. 7.1.: Vektorfeld der STRÖMUNG

An jedem Punkt hat die GESCHWINDIGKEIT $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ einen Betrag und eine Richtung.
Das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist durch Stromlinien charakterisiert. Wenn $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ nicht von der Zeit abhängt, heisst die STRÖMUNG stationär.

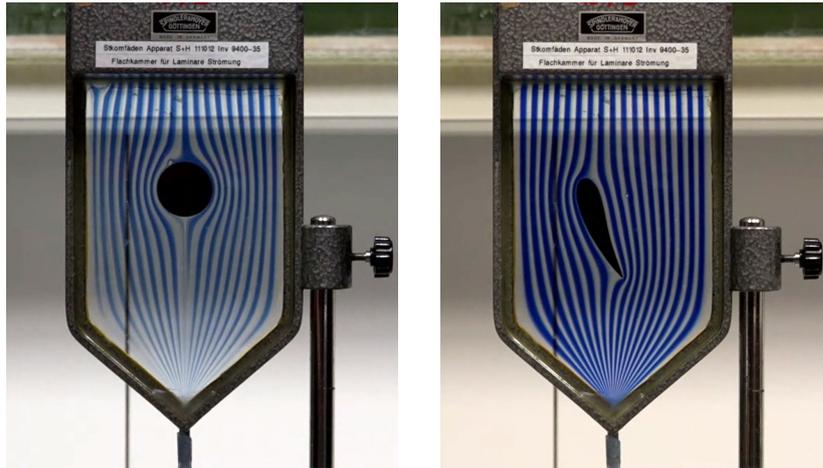


Abb. 7.2.: Stromlinien bei laminarer STRÖMUNG. Links ist die Strömung um eine Kugel gezeigt, rechts die Strömung um ein Flügelprofil.

Abbildung 7.2 zeigt die Bahnlinien oder Stromlinien bei einer laminaren Strömung. Diese Linien zeigen wie die Bahn eines Teilchens verläuft. Sie sind analog zu den Feldlinien des elektrischen Feldes.

Bei stationären Strömungen sind Bahnlinien und Stromlinien identisch. Inkompressible Strömungen sind Strömungen mit konstanter Dichte ρ . Die Dichte der Stromlinien ist bei inkompressiblen Medien (Flüssigkeiten) ein Mass für die Geschwindigkeit.

7.1.1. Fluss

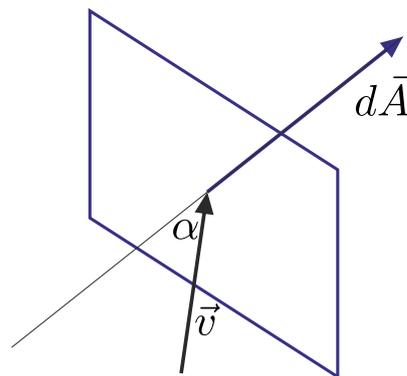


Abb. 7.3.: Fluss

Der Fluss ist definiert als

$$d\phi = \rho v \cos(\alpha) dA \quad (7.1.1)$$

oder

$$d\phi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (7.1.2)$$

Die Integralform lautet

$$\phi = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{j} d\mathbf{A} \quad (7.1.3)$$

wobei A beliebige Fläche (auch gekrümmt) und $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ die Stromdichte ist (analog zum elektrischen Strom). Bei einer geschlossenen Fläche fließt netto ein Medium heraus, wenn eine Quelle im VOLUMEN ist.

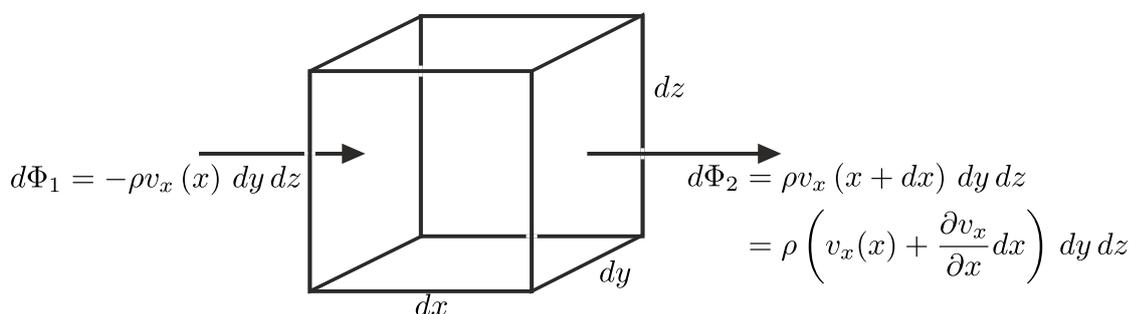


Abb. 7.4.: Berechnung der Divergenz

Wir haben

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= -\rho v_x(x) dy dz \\ d\phi_2 &= \rho v_x(x+dx) dy dz \\ &= \rho \left(v_x(x) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz \end{aligned}$$

Netto:

$$d\phi_1 + d\phi_2 = \rho v_x(x) \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dV = d\phi_x$$

ebenso:

$$\begin{aligned} d\phi_y &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dV \\ d\phi_z &= \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dV \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Der Nettofluss ergibt sich zu

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \quad (7.1.5)$$

Ohne Quelle ist $d\phi = 0$, d.h. die Grösse

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (7.1.6)$$

ist gleich null.

Die DIVERGENZ beschreibt die Quellen und Senken in einem Fluss.

Wenn $\operatorname{div}(\mathbf{v}) \neq 0$ ist, so muss sich die Dichte an dieser Stelle ändern

$$d\phi = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV = -\dot{\rho} dV \quad (7.1.7)$$

oder

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = -\dot{\rho} \quad (7.1.8)$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung.

$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{j}$ heisst Quelldichte.

Eine quellenfreie inkompressible STRÖMUNG hat überall $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Es gilt:

$$\phi = \underbrace{\iint_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}}_{\text{Fluss durch A («Materialmenge»)}} = - \underbrace{\iiint_V \dot{\rho} dV}_{\text{Änderung der Dichte}} = \iiint_V \rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV \quad (7.1.9)$$

Der Satz von Gauss (nach C. F. Gauß) besagt

$$\iint_A \mathbf{v} d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV \quad (7.1.10)$$

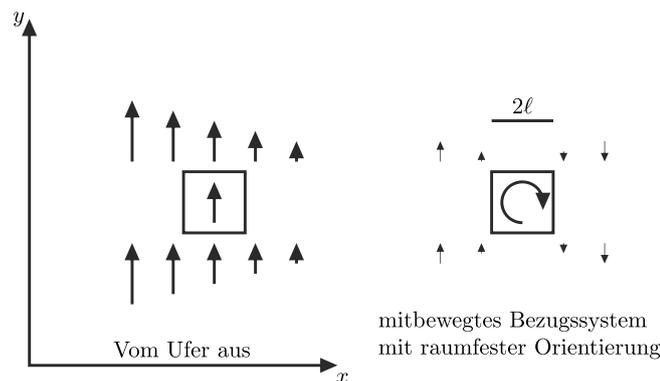


Abb. 7.5.: Geschwindigkeitsgradient und Rotation

Wenn die STRÖMUNG inhomogen ist, werden mitgeführte Teilchen gedreht.

Wasser strömt mit $\pm \ell \frac{dv_y}{dx}$ am Würfel vorbei. Wir haben ein Gleichgewicht, wenn

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7.1.11)$$

ω zeigt in die z Richtung. Im Allgemeinen ist

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (7.1.12)$$

mit $\mathbf{rot} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times$ wird

$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{v}$ die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Es gilt dann

$$\underbrace{\oint \mathbf{v} ds}_{\text{Bahnkurve } s} = \underbrace{\int \mathbf{rot} \mathbf{v} d\mathbf{A}}_{\text{von } s \text{ berandete Fläche}} \quad (7.1.13)$$

Falls $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ ist kann \mathbf{v} aus dem Geschwindigkeitspotential U abgeleitet werden.

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad} U \quad (7.1.14)$$

Dann gilt $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt

$$\text{div} \mathbf{v} = -\text{div} \mathbf{grad} U = -\Delta U = 0 \quad (7.1.15)$$

Wir haben also drei unterschiedliche physikalische Phänomene, die durch die gleiche Mathematik beschrieben werden:

STRÖMUNG \longleftrightarrow GRAVITATION \longleftrightarrow ELEKTROSTATIK

7.2. Lokale und totale Ableitungen *

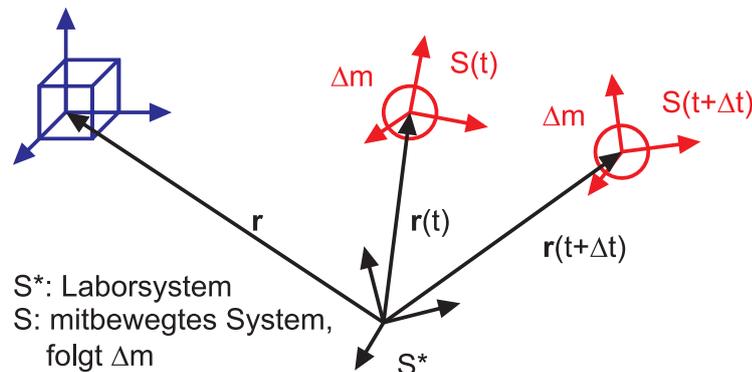


Abb. 7.6.: Mitbewegtes System

Sei S^* das Laborsystem, S das mitbewegte System, das Δm folgt. Seien s^* lokale zeitliche Ableitungen und s totale zeitliche Ableitungen

Das 2. Newtonsche Gesetz beschreibt die Bewegung von Δm , aber nur in $S(t)$ (in S^* betrachtet man Volumina, nicht Massen)

Also ist

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{in } S(t) \quad (7.2.1)$$

Lokale Ableitung:

\mathbf{r} ist in S^* fest

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(x, y, z, t)\end{aligned}\quad (7.2.2)$$

Totale zeitliche Ableitungen

In $S(t)$ beschreiben die physikalischen Größen das gleiche Teilchen.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (7.2.3)$$

wobei $x(t)$ die Koordinaten in S^* sind

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\mathbf{r}(t), t) = \rho(x(t), y(t), z(t), t) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = \mathbf{v}(x(t), y(t), z(t), t)\end{aligned}\quad (7.2.4)$$

Ableitung: totale Ableitung auf der Bahn $\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} \rho(x(t), y(t), z(t), t) \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}\end{aligned}\quad (7.2.5)$$

Zusammenhang:

Dichte

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{grad} \rho) \cdot \mathbf{v} \quad (7.2.6)$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.2.7)$$

qed.

BESCHLEUNIGUNG:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (7.2.8)$$

7.2.1. Kontinuitätsgleichung

Grund Massenerhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7.2.9)$$

Beweis: Ortsfests VOLUMEN

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \\
 \delta(\Delta m) &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(z + \frac{1}{2} \Delta z \right) \delta t \\
 &= -\rho(z + \Delta z) \cdot v_z(z + \Delta z) \delta t \Delta x \Delta y + \rho(z) v_z(z) \cdot \delta t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\
 \frac{\delta(\Delta m)}{\delta t} &= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \rho(z) = -\frac{\partial(\rho(z) v_z(z))}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\
 \frac{\partial \rho(z)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\rho(z) v_z(z)) \quad \text{usw.}
 \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

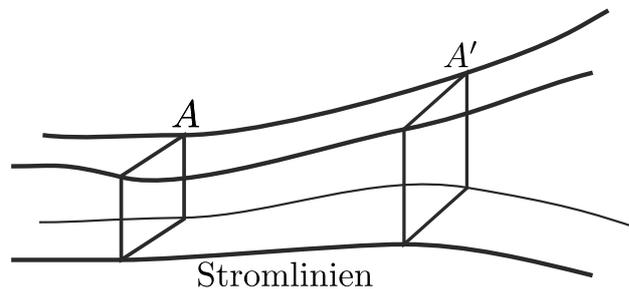


Abb. 7.7.: Stromlinien in einer inkompressiblen FLÜSSIGKEIT

Die Stromlinien durch A definieren einen Schlauch, die Stromröhre, die keinen Austausch mit der Umgebung hat. Also ist in einer inkompressiblen FLÜSSIGKEIT

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{7.2.11}$$

Dies ist die makroskopische Kontinuitätsgleichung.

7.2.1.1. Stationäre Strömung *

Sei $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Dann ist die Dichte $\frac{d\rho}{dt} = (\mathbf{grad} \rho) \cdot \mathbf{v}$ und die Kontinuitätsgleichung $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \tag{7.2.12}$$

Im Stromfaden gilt

$$A_1 \rho_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2 = \text{const} \tag{7.2.13}$$

Inkompressible Flüssigkeiten

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\
 \text{div} \mathbf{v} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.2.14}$$

dann gilt : $A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const}$.

7.4. Laminare Strömung

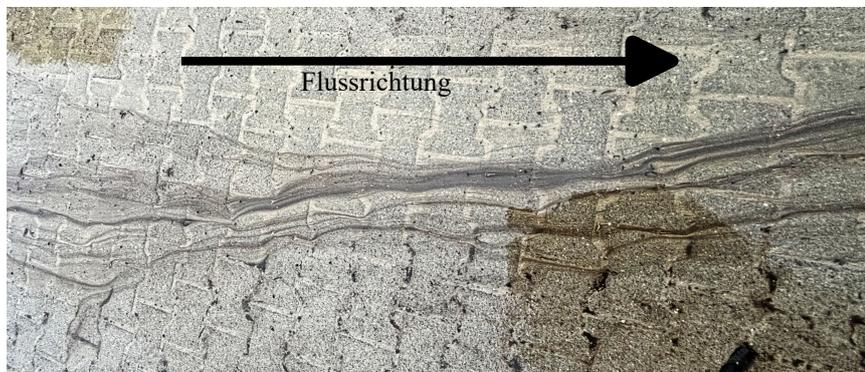


Abb. 7.9.: Fotografie einer laminaren Strömung von Regenwasser auf dem Gelände der Universität Ulm

Abbildung 7.9 zeigt, wie Regenwasser laminar fließt. Das Wasser aus unterschiedlichen Bereichen trägt unterschiedliche Schwebestoffe mit. Deren Farben zeigen die laminare Strömung.

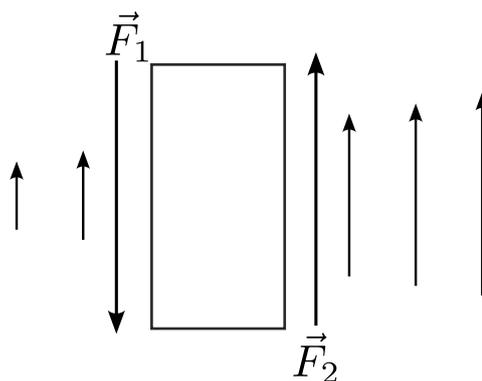


Abb. 7.10.: Viskose Strömung um einen Quader

Laminare Stromlinien sind dadurch charakterisiert, dass benachbarte Stromlinien benachbart bleiben (Beispiel: Blut)

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{F}_1 &= -\eta \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_1 dydz \\
 d\mathbf{F}_2 &= \eta \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_2 dydz = \eta \left(\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right|_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} dx \right) dydz \\
 d\mathbf{F}_R &= d\mathbf{F}_1 + d\mathbf{F}_2 = \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} dx dy dz = \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} dV
 \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Allgemein:

$$d\mathbf{F}_R = \eta \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} \right) dV \tag{7.4.2}$$

oder

$$\mathbf{F}_{V_R} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \eta \Delta \mathbf{v} \tag{7.4.3}$$

die Volumenkraft der Reibung.

Die Druckkraft ist

$$d\mathbf{F}_p = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \tag{7.4.4}$$

also

$$\mathbf{F}_{V_p} = -\mathbf{grad} p \tag{7.4.5}$$

\mathbf{F}_{V_R} und \mathbf{F}_{V_p} beschreiben die Dynamik

7.4.1. Strömung durch einen Spalt *

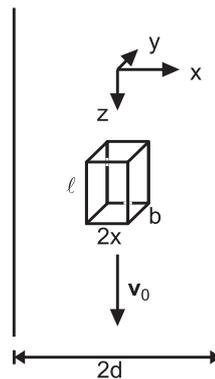


Abb. 7.11.: STRÖMUNG durch einen SPALT

$v = 0$ an der Wand

$v = v_0$ in der Mitte

$\frac{dv}{dx} \Rightarrow$ Reibungskraft $F_R = 2lb\eta \frac{dv}{dx}$

Druck: $F_p = 2xb\ell \frac{dp}{dz}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} x$$

$\Rightarrow v(x)$ ist eine Parabel

$$v = v_0 - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} x^2 = v_0 - \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} x^2$$

Am Rand ist $v = 0$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} d^2$$

7.4.2. Rohrströmung

Versuch 52:   **Versuch zur Vorlesung:**

Hagen-Poiseuille-Gesetz: Kapillaren mit verschiedenen Durchmessern (Versuchskarte MF-033)

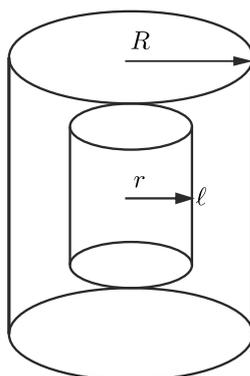


Abb. 7.12.: Rohrströmung

Am Rand ist die Geschwindigkeit null, $v = 0$.

$$F_R = 2\pi r \ell \eta \frac{dv}{dr}$$

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

also

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r$$

$$\Rightarrow v = v_0 - \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} r^2$$

und

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} R^2$$

infinitesimal

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2)$$

Volumenstrom: $d\dot{V} = 2\pi r dr \cdot v(r)$

also:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta \ell} R^4 = \frac{\pi}{8\eta} \frac{dp}{dz} R^4 \quad (7.4.6)$$

Das ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille (nach Gotthilf Hagen und Jean-Léonard-Marie Poiseuille), wobei $\frac{dp}{dz} = -8\eta \frac{\langle v \rangle}{R^2}$ und $\langle v \rangle = \frac{\dot{V}}{\pi R^2}$

Der Strömungswiderstand ist: $\frac{8\eta \ell}{\pi R^4}$

7.4.3. Druck und Volumenstrom

Druckkraft $F_p = \pi R^2 (p_1 - p_2) = \frac{8\eta \ell}{R^2} \dot{V}$

7.4.4. Strömung um Kugeln

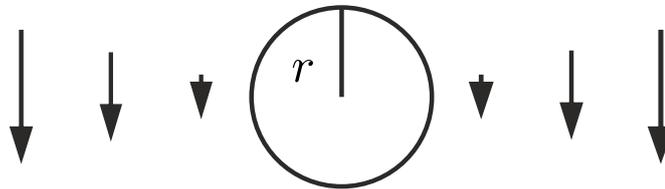


Abb. 7.13.: STRÖMUNG um eine Kugel

Die Kugel hat im Abstand r keinen Einfluss mehr auf die STRÖMUNG

$$\Rightarrow -\frac{dv}{dz} \sim \frac{v}{r}$$

Oberfläche: $4\pi r^2$

$$F \approx \eta \frac{dv}{dz} \cdot A = -\eta \frac{v}{r} 4\pi r^2 \sim -4\pi \eta v r$$

Genauer erhält man

$$F = -6\pi \eta v r \quad (7.4.7)$$

das Stokes-Gesetz (nach George Stokes).

7.4.5. Prandtl-Grenzschicht

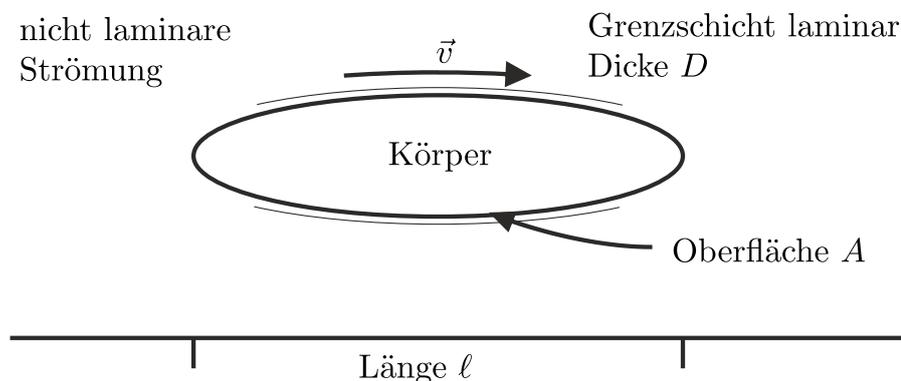


Abb. 7.14.: PRANDTL-GRENZSCHICHT (nach Ludwig Prandtl)

Reibungskraft: $F_R = \eta A \frac{v}{D}$

Verschieben um ℓ :

$$W = F_R \cdot \ell = \eta A \frac{v}{D} \ell \quad (7.4.8)$$

KINETISCHE ENERGIE in der GRENZSCHICHT:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^D A \rho dz \left(v \cdot \frac{z}{D} \right)^2 = \frac{1}{6} A \rho v^2 D \quad (7.4.9)$$

mit $W = E_{kin}$ wird

$$D = \sqrt{\frac{6\eta\ell}{\rho v}}$$

Reynolds-Kriterium (nach Osborne Reynolds)

$$\begin{aligned} D &\ll \ell \\ \Rightarrow \frac{\ell}{D} &\gg 1 \\ \sqrt{\frac{\rho v \ell^2}{6\eta\ell}} &= \sqrt{\frac{\rho v \ell}{6\eta}} \gg 1 \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v \ell}{\eta} \gg 1 \quad (7.4.11)$$

dabei ist ℓ eine typische DIMENSION und v die mittlere GESCHWINDIGKEIT.
wenn

- $\text{Re} \gg 1$: turbulente STRÖMUNG mit laminarer GRENZSCHICHT
- $\text{Re} \ll 1$: laminare STRÖMUNG (GRENZSCHICHT macht keinen Sinn)

Allgemein gilt: Es gibt für jede GEOMETRIE eine kinetische REYNOLDSZAHL Re_{krit} (nach Osborne Reynolds) mit

$$\begin{aligned} Re > Re_{krit} &\Rightarrow \text{turbulent} \\ Re < Re_{krit} &\Rightarrow \text{laminar} \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Bemerkung:

Strömungen mit der gleichen REYNOLDSZAHL sind ähnlich \Rightarrow WINDKANAL

Bei $D \ll \ell$ ist $F_R = \eta A \frac{v}{D} = A \sqrt{\frac{v^3 \eta \rho}{\ell}}$

F_R ist etwa der Mittelwert aus

- Stokessche Reibung (nach George Stokes): $\sim \eta v \ell$ laminare Strömung
- Newtonsche Reibung (nach Isaac Newton): $\sim \ell^2 \rho v^2$ turbulente Strömung

7.5. Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit *

Neben der SCHERVISKOSITÄT existiert noch die VOLUMENVISKOSITÄT ζ

$$\sigma^* \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^*}{A} = -\zeta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{n} = -\zeta \frac{d}{dt} \ln \rho \mathbf{n} \quad (7.5.1)$$

Dabei ist ζ die VOLUMENVISKOSITÄT.

Das Gesetz von NAVIER-STOKES (nach Claude Louis Marie Henri Navier und George Stokes) lautet

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \right) \\ &= \mathbf{F}_V - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{F}_V - \mathbf{grad} p - \eta \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Vereinfachungen:

- Reibungslose Medien: $\eta = 0, \zeta = 0$
 \Rightarrow Euler-Gleichung $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_V - \mathbf{grad} p$
- Inkompressible Medien: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
 $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v - \mathbf{grad} p - \eta \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{F}_v - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}$
- Potentialströmung: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$
 $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_v - \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} \frac{v^2}{2}$

7.6. Strömung idealer Flüssigkeiten

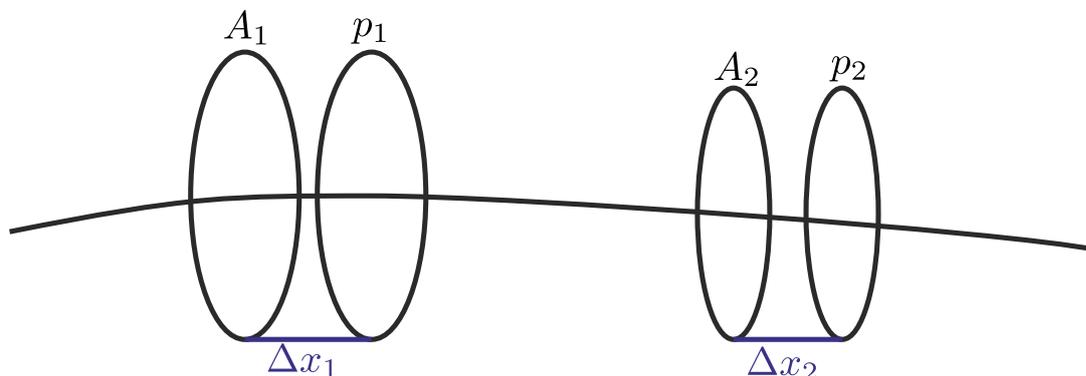


Abb. 7.15.: Ideale STRÖMUNG

Bei einer idealen Strömung gibt es keine Reibung, die Strömung ist laminar. Aus der Volumenerhaltung folgt

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V$$

Die verrichtete ARBEIT ist

$$\Delta W_1 = p_1 A_1 \Delta x_1$$

und

$$\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2$$

Wir erhalten als Energiebilanz

$$\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = \Delta E_{kin}$$

und damit

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

Das ergibt nun

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 = \text{const} \quad (7.6.1)$$

Dies ist die BERNOULLI-GLEICHUNG (nach Daniel Bernoulli und Johann I Bernoulli). Bei der GRAVITATION muss noch $\rho g h$ berücksichtigt werden (allg. E_{pot})

7.6.1. Anwendung

Versuch 53:  Versuch zur Vorlesung:

Bernoulli-Gleichung: Gesamtdruck, Staudruck, statischer Druck
(Versuchskarte MF-016)

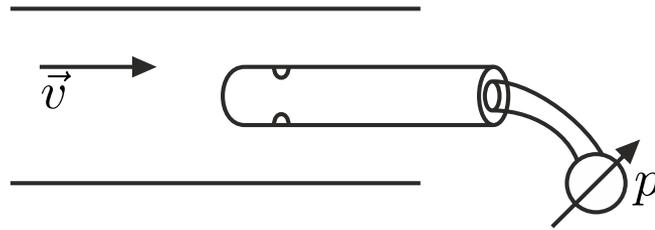


Abb. 7.16.: Manometer

Ein Manometer misst nur den statischen Druck.

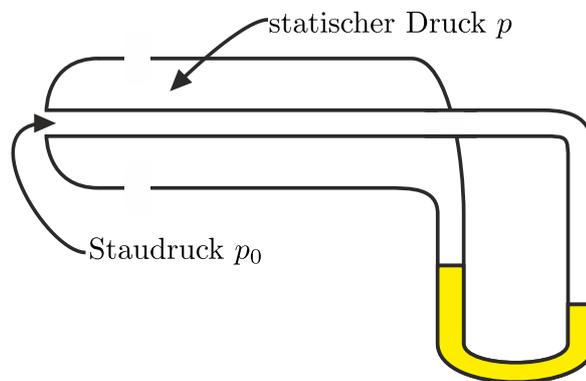


Abb. 7.17.: Prandtl'sches Staurohr (nach Ludwig Prandtl)

Dieser beträgt:

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7.6.2)$$

Versuch 54:   **Versuch zur Vorlesung:**
 Mariotte'sche Flasche: Ausströmgeschwindigkeit nach Torricelli
 (Versuchskarte MF-046)

(nach Edme Mariotte und Evangelista Torricelli)

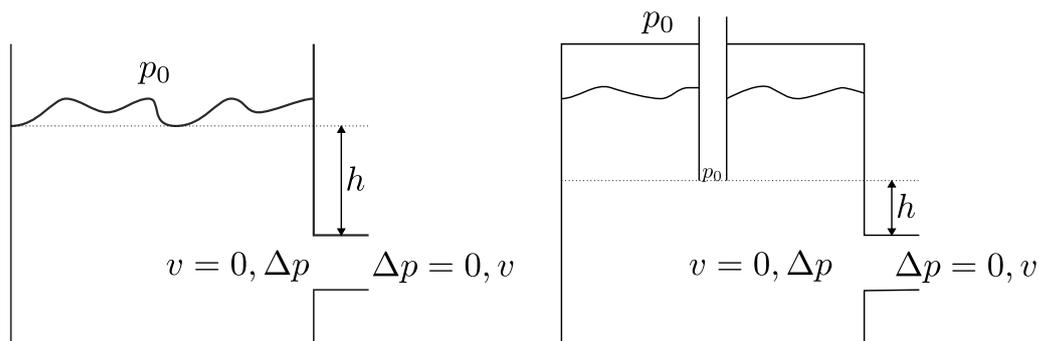


Abb. 7.18.: Ausströmen aus einem Loch. Links die Situation mit offener Oberfläche, rechts die MARIOTTE'SCHE FLASCHE (nach Edme Mariotte).

Der Umgebungsdruck ist p_0 , am Ausfluss ist der Druck $p_0 + \Delta p$. Δp ist der Gewichtsdruk der Flüssigkeit.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho v^2 &= \Delta p \\ v &= \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Bei Schweredruk $\Delta p = \rho gh$ folgt $v = \sqrt{2gh}$

Wenn $v > \sqrt{\frac{2\Delta p_0}{\rho}} = v_k$ wird der statische Druck < 0

Es gibt eine DAMPFBILDUNG (KAVITATION).

7.7. Strömungswiderstand *

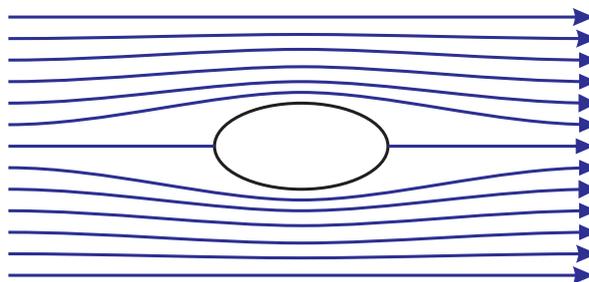


Abb. 7.19.: Stromlinie

Nach Bernoulli ist der Druck vorne und hinten gleich. Also gäbe es keinen Widerstand (Paradoxon von d'Alembert, nach Jean Baptiste le Rond d'Alembert).

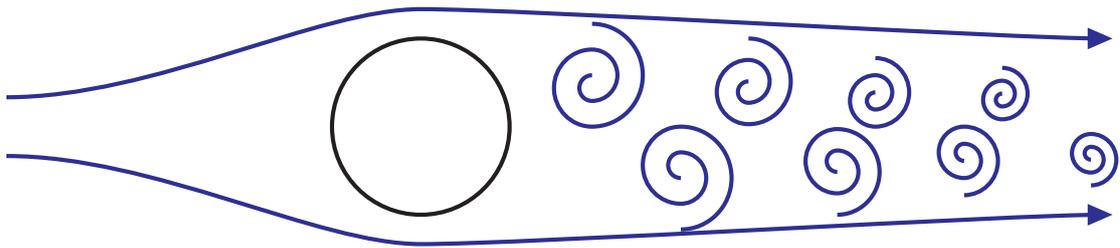


Abb. 7.20.: Reales Bild einer Wirbelstrasse

Def. Wirbel: Wenn ein «Boot» auf einem geschlossenen Weg angetrieben wird

Def. Zirkulation :

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} ds = \int \mathbf{rot} \mathbf{v} da \neq 0 \quad (7.7.1)$$

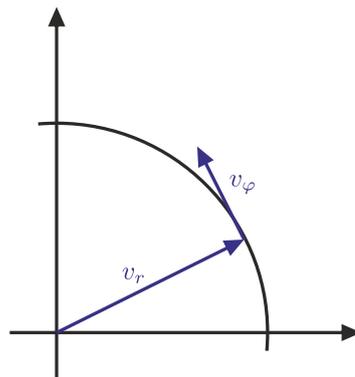


Abb. 7.21.: Potentialwirbel

$$v_r = 0 \quad (7.7.2)$$

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.7.3)$$

Beim Potentialwirbel gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ für } r > 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \text{ für } r < 0 \end{array} \right\} \text{für } r \neq 0 \text{ existiert ein Geschwindigkeitspotential } \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$$

7.7.1. Druck und Druckgradient *

Nach Bernoulli:

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - \rho \frac{\sqrt{2}}{8\pi^2} - \frac{1}{r^2}$$

$$p = 0 \text{ für } r_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\rho}{2p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.7.4)$$

d.h. für $r < r_0$ ist das Konzept des Potentialwirbels nicht sinnvoll.

Volumenkraft

$$\mathbf{F}_V = -\mathbf{grad} p = -\rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \frac{\mathbf{r}}{r^4} \quad (7.7.5)$$

(nach innen gerichtet)

7.8. Helmholtzsche Wirbelsätze *

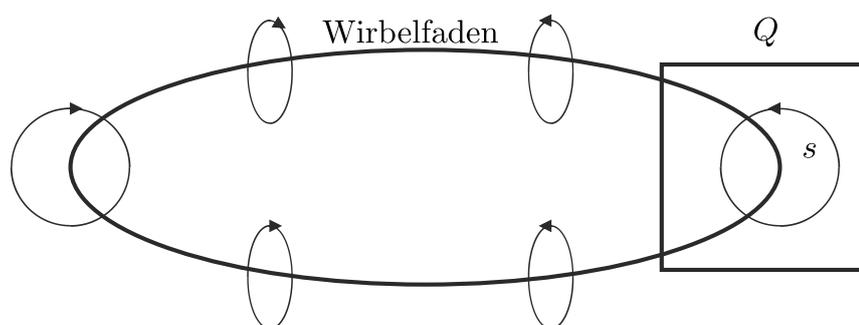


Abb. 7.22.: Helmholtzsche Wirbelsätze. Jeder Wirbel hat eine Linie, um die sich im Inneren des Wirbels die Teilchen bewegen. Dies ist der WIRBELFADEN.

Die Wirbelsätze nach Hermann von Helmholtz für Medien ohne Viskosität lauten nach F. Kneubühl [Kne78]

- 1. Satz** Im Inneren eines Gases oder einer Flüssigkeit können keine Wirbel beginnen.
- 2. Satz** Teilchen sind in einem Wirbel gefangen, sie können weder dazu stossen noch sich aus dem Wirbel entfernen.
- 3. Satz** Die ZIRKULATION

$$\Gamma = \oint_Q \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.8.1)$$

ist für jeden Wirbelquerschnitt Q senkrecht zum Wirbelfaden konstant (siehe Abbildung 7.22).

Teil V.

Schwingungen und Wellen

8. Schwingungen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 379]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 141])

Wenn sich ein System nicht in seiner Gleichgewichtslage befindet, dann schwingt in der Regel seine Position um diese Lage. Diese periodischen oder quasiperiodischen Bewegungen werden Schwingungen genannt. Die Schwingungsform kann sinusförmig sein (harmonische Schwingung) oder eine allgemeine Form haben. Mathematische Sätze sagen, dass jede periodische Bewegung in eine Summe von sinusförmigen Bewegungen aufgeteilt werden kann.

8.1. Harmonische Schwingungen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 379]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 141])

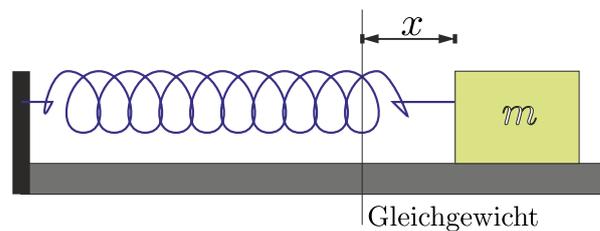


Abb. 8.1.: Masse-Feder-System als Modell eines schwingungsfähigen Systems.

Die KRAFT auf die Masse ist durch

$$F = -kx \quad (8.1.1)$$

gegeben, wobei k die Federkonstante ist. Durch diese KRAFT wird die Masse beschleunigt, so dass

$$F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Umgeschrieben erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = - \left(\frac{k}{m} \right) x \quad (8.1.2)$$

Die Beschleunigung ist also proportional zur Auslenkung. Traditionellerweise wird die obige Gleichung auch als

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad (8.1.3)$$

geschrieben. Die Bewegung ist periodisch mit der Frequenz $\nu = 1/T$, wobei T die Schwingungsdauer ist.

Frequenzen werden in **Hertz** $\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$ gemessen. Die Kreisfrequenz ω hängt über $\omega = 2\pi\nu$ mit der Frequenz ν zusammen. Die Kreisfrequenz hat die gleiche Einheit, darf aber nicht mit der Frequenz verwechselt werden.

Die Lösung der Gleichung (8.1.3) ist

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad (8.1.4)$$

- A ist die Amplitude der Schwingung
- ω die Kreisfrequenz
- δ die Phase

Link zur Vorlesung: ([Simulation des Feder-Masse-Pendels](#))

Diese Lösung wird durch die angegebene Simulation illustriert. Die Phase ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt (Eigenschaft der Winkelfunktionen). Die Position beim Nulldurchgang ist $x(0) = A \cos(\delta)$.

Ist die Beschleunigung eines Gegenstandes proportional zu seiner Auslenkung und dieser entgegengesetzt, so führt der Gegenstand eine einfache harmonische Schwingung durch.

Die Geschwindigkeit der Masse ist

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (8.1.5)$$

Die Geschwindigkeit bei $t = 0$ ist $v(0) = -A\omega \sin \delta$. Da von den drei die Schwingung bestimmenden Größen zwei, A und ω unbekannt sind, reicht die Kenntnis der Position zur Zeit $t = 0$ und der Geschwindigkeit zu dieser gleichen Zeit aus, um die Schwingungsform zu bestimmen.

Die Beschleunigung ist

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) \quad (8.1.6)$$

Mit Gleichung (8.1.2) kann man schreiben

$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x = -\left(\frac{k}{m}\right)A \cos(\omega t + \delta) - A\omega^2 \cos(\omega t + \delta) \quad (8.1.7)$$

und damit

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (8.1.8)$$

Damit sind die Frequenz und die Schwingungsdauer

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.1.9a)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.1.9b)$$

Die Schwingungsdauer hängt nicht von der Amplitude ab (lineares System).

8.1.1. Harmonische Schwingungen und Kreisbewegung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 387])

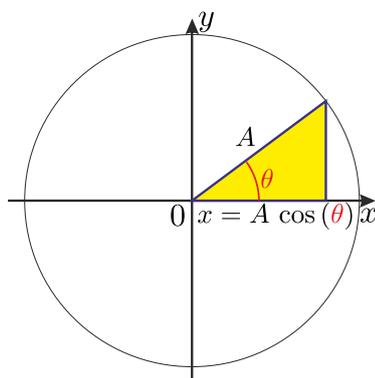


Abb. 8.2.: Zusammenhang zwischen der Kreisbewegung und einer Schwingung.

Da die Funktionen $\sin \omega t$ und $\cos(\omega t)$ beide die Schwingungsgleichung (8.1.3) erfüllen, kann geschlossen werden, dass eine harmonische Schwingung die Projektion einer Kreisbewegung ist. Nach der Definition des Cosinus ist die Projektion des umlaufenden Radius A auf die x -Achse gerade der Cosinus.

Link zur Vorlesung: ([Simulation des Zusammenhangs zwischen einer Schwingung und einer Kreisbewegung](#))

8.1.2. Energiebilanz bei harmonischen Schwingungen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 388])

Die POTENTIELLE ENERGIE einer um die Länge x ausgelenkten Feder ist

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (8.1.10)$$

Die KINETISCHE ENERGIE ist

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) \quad (8.1.11)$$

Beide Energien hängen von der Zeit ab. Die Erhaltung der mechanischen Energie fordert

$$E_{ges}(t) = \text{const} = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (8.1.12)$$

Am Umkehrpunkt, bei der maximalen Auslenkung $|x(t)| = A$ ist die Geschwindigkeit $v(t) = 0$. Also ist bei einem harmonischen Oszillator

$$E_{ges} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (8.1.13)$$

die Gesamtenergie.

Setzen wir die Lösung $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ und damit auch $\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$ jeweils ein, erhalten wir

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad (8.1.14a)$$

$$\begin{aligned} E_{kin}(t) &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (8.1.14b)$$

wobei wir $\omega^2 = k/m$ verwendet haben. Die Gesamtenergie ist

$$\begin{aligned} E_{ges}(t) &= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)] \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

unabhängig von t . Der Energiegehalt eines harmonischen Oszillators pendelt zwischen zwei **Energiereservoirs**, hier der kinetischen und der potentiellen Energie, hin und her.

Immer dann, wenn in einem System zwei Energiereservoirs gekoppelt sind und Energie zwischen ihnen ausgetauscht wird, ist das System ein Oszillator.

Beispiele:

- Kinetische und POTENTIELLE ENERGIE beim Pendel oder beim Feder-Masse-System
- Energie im elektrischen und im magnetischen Feld (Schwingkreis)
- Energie im elektrischen Feld und im Gravitationsfeld

Die kinetische und die POTENTIELLE ENERGIE können mit dem Winkel der momentanen Phase $\Theta = \omega t + \delta$ wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_{pot}(t) &= E_{ges} \cos^2(\Theta) \\ &= E_{ges} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\Theta)) \end{aligned} \quad (8.1.16a)$$

$$\begin{aligned} E_{kin}(t) &= E_{ges} \sin^2(\Theta) \\ &= E_{ges} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\Theta)) \end{aligned} \quad (8.1.16b)$$

Damit ist auch sofort klar, dass die Mittelwerte

$$\langle E_{pot} \rangle = \langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} E_{ges} \quad (8.1.17)$$

sind.

8.1.3. Feder-Masse-System im Schwerfeld

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 392])

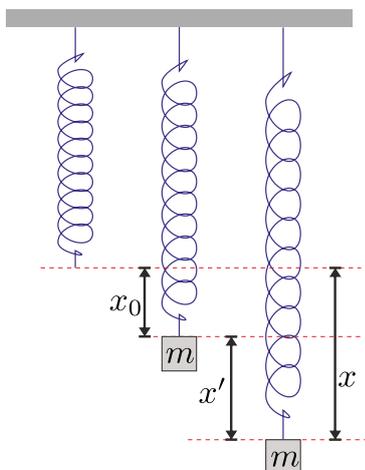


Abb. 8.3.: Schwingendes System im Schwerfeld.

Eine Feder im Schwerfeld mit Masse wird durch die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg \quad (8.1.18)$$

beschrieben.

Link zur Vorlesung: ([2. Simulation](#))

Die Ruhelage ist durch $0 = -kx_0 + mg$ gegeben. Also ist

$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad (8.1.19)$$

Wir wissen, wie wir ein Feder-Masse-System berechnen müssen, wenn wir die Koordinate $x' = x - x_0$ verwenden. Da die beiden Koordinatensysteme x und x' sich nur um eine Konstante unterscheiden, sind die ersten Ableitungen $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}$ und die zweiten Ableitungen $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2}$ gleich. Deshalb wird Gleichung (8.1.18)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x' + x_0) + mg = -kx' - kx_0 + mg = -kx' \quad (8.1.20)$$

da $kx_0 = mg$ ist. Damit erhalten wir die bekannte Lösung

$$x'(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (8.1.21)$$

Die POTENTIELLE ENERGIE bezogen auf die neue Gleichgewichtslage x_0 ist

$$E_{pot,F} = \frac{1}{2}k(x' + x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx'^2 + kx'x_0 = \frac{1}{2}kx'^2 + mgx' \quad (8.1.22)$$

da $kx_0 = mg$ ist. Zusätzlich gibt es die POTENTIELLE ENERGIE der Gravitation $E_{pot,g} = -mgx'$ bezogen auf die Ruhelage. Die gesamte POTENTIELLE ENERGIE ist die Summe aus den potentiellen Energien der Feder und der Gravitation.

$$E_{pot} = E_{pot,F} + E_{pot,g} = \frac{1}{2}kx'^2 + mgx' - mgx' = \frac{1}{2}kx'^2 \quad (8.1.23)$$

Diese POTENTIELLE ENERGIE ist unabhängig von g , wenn wir von der jeweiligen Ruhelage aus rechnen.

8.1.4. Pendel im Schwerfeld

8.1.4.1. Mathematisches Pendel

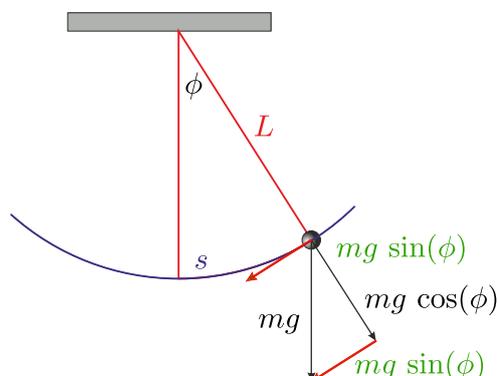


Abb. 8.4.: Mathematisches Pendel im Schwerfeld.

Ein mathematisches Pendel ist eine Punktmasse m aufgehängt an einem masselosen Faden der Länge L .

Der vom Pendel zurückgelegte Weg ist die Bogenlänge

$$s = L\phi \quad (8.1.24)$$

Die KRAFT tangential an den Bogen $-mg \sin(\phi)$ beschleunigt die Masse m . Die Bewegungsgleichung ist

$$-mg \sin \phi = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (8.1.25)$$

Umgeschrieben erhalten wir

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \phi = -g \sin \frac{s}{L} \quad (8.1.26)$$

Für sehr kleine Winkel $\phi \ll 1$ ist $\sin \phi \approx \phi$. Damit wird die obige Gleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \frac{s}{L} = \frac{g}{L} s \quad (8.1.27)$$

Mit $g/L = \omega^2$ erhalten wir die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s \quad (8.1.28)$$

deren Lösung $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \delta)$ bekannt ist. Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8.1.29)$$

Link zur Vorlesung: ([Simulation eines Fadenpendels von Walter Fendt](#))

Für grosse Amplituden ist die Schwingungsdauer durch die Reihenentwicklung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{2^2} \sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{s_0}{L}\right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{1}{2} \frac{s_0}{L}\right) + \dots \right] \quad (8.1.30)$$

gegeben.

8.1.4.2. Physikalisches Pendel

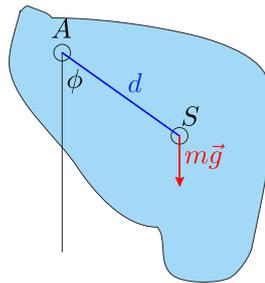


Abb. 8.5.: Physikalisches Pendel. A ist der Aufhängungspunkt, S der Massenzentrum.

Wir müssen nun mit dem MASSENTRÄGHEITSMOMENT (Siehe Abschnitt 3.6.4) des Pendels bezüglich des Drehpunktes A rechnen. Das Drehmoment ist

$$T = I\alpha = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (8.1.31)$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$-mgd \sin\phi = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (8.1.32)$$

In der traditionellen Schreibweise lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin\phi = 0 \quad (8.1.33)$$

Mit $\frac{mgd}{I} = \omega^2$ und unter der Annahme einer kleinen Amplitude ist das physikalische Pendel ein harmonischer Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0 \quad (8.1.34)$$

Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (8.1.35)$$

Eine Anwendungsmöglichkeit dieser Gleichung ist die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Körpers

$$I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} \quad (8.1.36)$$

Zum Beispiel ist für einen einseitig eingespannten Stab das Trägheitsmoment nach Gleichung (3.6.25) $I = \frac{1}{3}m\ell^2$. Der Massenmittelpunkt liegt in der Mitte, also $d = \frac{1}{2}\ell$. Damit wird die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}m\ell^2}{mg\frac{1}{2}\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

Vergleiche dies mit dem Resultat für ein mathematisches Pendel $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.



Versuch 55: Versuch zur Vorlesung:

Physikalisches Pendel und Reversionspendel: Bestimmung der Fallbeschleunigung g (Versuchskarte SW-61)

8.1.4.3. Torsionspendel

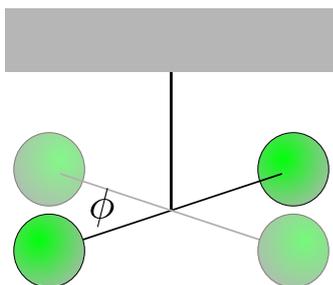


Abb. 8.6.: Torsionspendel (analog zur Gravitationswaage).

Das rückstellende Drehmoment ist proportional zum Verdrillungswinkel und dient zur Winkelbeschleunigung des Drehkörpers mit dem Trägheitsmoment I

$$T = -D\phi = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (8.1.37)$$

Wieder setzen wir $\omega^2 = \frac{D}{I}$. Die Periodendauer T_0 ist

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (8.1.38)$$

8.1.5. Bewegung in der Nähe von Gleichgewichtspunkten

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 400])

Wir nehmen eine allgemeine Potentialfunktion

$$E_{pot}(x) = E_{pot}(x_0) + \left. \frac{dE_{pot}(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (8.1.39)$$

an und entwickeln sie in eine TAYLORREIHE (nach Brook Taylor) um den Punkt x_0 . Dieser Punkt soll ein Gleichgewichtspunkt sein ($\left. \frac{dE_{pot}(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$). Dann ist die KRAFT $F(x) = -\frac{dE_{pot}(x)}{dx}$ als Funktion durch die erste Ableitung der potentiellen Energie gegeben. Die Steigung der KRAFT-DISTANZ-KURVE, die Federkonstante k ist durch die zweite Ableitung gegeben.

Also kann an jedem Gleichgewichtspunkt bei genügend kleinen Auslenkungen die Schwingungsgleichung

$$0 = m \frac{d^2 x}{dt^2} + \left. \frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0) \quad (8.1.40a)$$

$$0 = \left. \frac{dE_{pot}(x)}{dx} \right|_{x_0} y \quad (8.1.40b)$$

geschrieben werden. Die Schwingungsdauer für kleine Bewegungen ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left. \frac{d^2 E_{pot}(x)}{dx^2} \right|_{x_0}}} \quad (8.1.41)$$

8.2. Gedämpfte Schwingung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 401]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 150])

Eine genaue Beobachtung zeigt, dass die Amplitude jeder freie Schwingung sich nach einer gewissen, charakteristischen Zeit um einen bestimmten Betrag erniedrigt. Die Dämpfung ist in vielen Fällen proportional zur Geschwindigkeit

$$\mathbf{F}_D = -b\mathbf{v} \quad (8.2.1)$$

Das Kräftegleichgewicht ergibt

$$-kx - bv = m \frac{dv}{dt} \quad (8.2.2)$$

Für kleine Dämpfungen ist die neue Resonanzfrequenz ω' in der Nähe von ω_0 . Mit jeder Schwingung nimmt die Energie $E_{tot} = E_{pot}(x_{max}) = E_{kin}(v_{max}) = 2 \langle E_{kin} \rangle = \langle mv^2 \rangle = m \langle v^2 \rangle$ in einer definierten Zeiteinheit um einen bestimmten Betrag ab. Diese Leistung ist

$$P = \frac{dE_{tot}}{dt} = \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{v} = -bv^2 \quad (8.2.3)$$

Wenn wir v^2 durch $\langle v^2 \rangle = \frac{E_{tot}}{m}$ ersetzt, bekommt man

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{b}{m}E_{tot} \quad (8.2.4)$$

Der Energiegehalt eines gedämpften Oszillators nimmt also exponentiell ab. Die relative Energieabnahme ist für alle Zeiten gleich. Wir lösen die Gleichung durch

$$\frac{dE_{tot}}{E_{tot}} = -\frac{b}{m}dt \quad (8.2.5)$$

und erhalten nach der Integration

$$\ln E_{tot}(t) = -\frac{b}{m}t + C \quad (8.2.6)$$

oder, nach einer Exponentiation

$$E_{tot}(t) = e^{-(b/m)t+C} = e^C \cdot e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-(b/m)t} \quad (8.2.7)$$

Wir haben $E_0 = e^C$ gesetzt. Mit der **ZEITKONSTANTE** $\tau = m/b$ bekommen wir

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau} \quad (8.2.8)$$

8.2.1. Güte des schwingungsfähigen Systems

Der Energieverlust pro Periode T ist

$$\frac{\Delta E_{tot}}{E_{tot}} = -\frac{b}{m}T \quad (8.2.9)$$

Man charakterisiert die Dämpfung eines schwingungsfähigen Systems oft durch die **Güte** Q . Wenn der Energieverlust pro Periode ΔE_{tot} ist, gilt

$$Q = 2\pi \frac{E_{tot}}{-\Delta E_{tot}} \quad (8.2.10)$$

Der Q-Faktor ist umgekehrt zum relativen Energieverlust pro Periode

$$\frac{-\Delta E_{tot}}{E_{tot}} = \frac{2\pi}{Q}$$

Es gilt auch

$$Q = 2\pi \frac{E_{tot}}{-\Delta E_{tot}} = 2\pi \frac{m}{bT} = 2\pi \frac{\tau}{T} \quad (8.2.11)$$

Da die Energie des Oszillators proportional zum Amplitudenquadrat ist ($E_{tot} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$) gilt für die Amplitudenabnahme

$$\frac{E_{tot}}{E_0} = \frac{A^2}{A_0^2} = e^{-t/\tau} \quad (8.2.12)$$

Also ist

$$A = A_0 e^{-t/(2\tau)} \quad (8.2.13)$$

Die Lösung der Schwingungsgleichung für den gedämpften Oszillator ist

$$x(t) = A_0 e^{-(b/(2m))t} \cos(\omega' t + \delta) \quad (8.2.14a)$$

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (8.2.14b)$$

Wenn die Dämpfung den kritischen Wert $b_k = 2m\omega_0$ übertrifft, schwingt das System nicht mehr. Für $b = b_k$ nennt man das System **kritisch gedämpft**. Für $b > b_k$ ist es **überkritisch gedämpft** und für $b < b_k$ **unterkritisch gedämpft**.

Zum Beispiel verwendet man in Autos geschwindigkeitsproportionale Stossdämpfer um eine kritische Dämpfung zu erreichen. Sind die Stossdämpfer alt, wird die Dämpfung der Fahrzeugschwingungen, z.B. durch Bodenwellen angeregt, unterkritisch und man fliegt von der Strasse.

8.3. Erzwungene (gedämpfte) Schwingung und Resonanz

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 406]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 154])

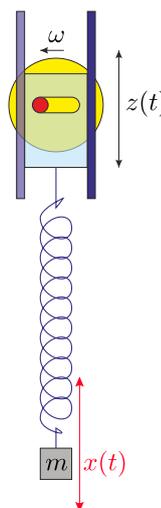


Abb. 8.7.: Mit einem Exzenter angetriebenes Pendel


Versuch 56:

Versuch zur Vorlesung:
Erzwungene Schwingung: Federpendel (Aufbau mit PC) (Versuchskarte SW-90)

Das vorliegende System wird durch zwei Größen charakterisiert: die Anregungsschwingung $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ sowie durch das Federpendel mit der Masse m , der Dämpfung b und die Federkonstante k . Die rücktreibende KRAFT an der Feder ist

$$F_F(t) = -k(x(t) - z(t)) \quad (8.3.1)$$

Die Beschleunigung ist wieder durch $m\ddot{x}(t) = F(t)$ gegeben; die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung durch $-b\dot{x}(t)$

Die Bewegungsgleichung ist also

$$F(t) = -k(x(t) - z(t)) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t) \quad (8.3.2)$$

Wenn wir $z(t)$ einsetzen und umstellen, erhalten wir

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = z_0 k \cos(\omega t) \quad (8.3.3)$$

Wir teilen durch m und kürzen $k/m = \omega_0^2$ ab und erhalten

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = z_0 \omega_0^2 \cos(\omega t) \quad (8.3.4)$$

Link zur Vorlesung: ([Simulation des Einschwingvorganges von Walter Fendt](#))

Hinweis: Schauen Sie sich das Diagramm Elongation an, und setzen Sie die Federkonstante auf $7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, die Masse auf 1 kg, die Dämpfung auf $0.1 \frac{1}{\text{s}}$ sowie die Kreisfrequenz auf $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dann können Sie das Einschwingverhalten sehr gut beobachten.

Die Lösung dieser Gleichung besteht aus zwei Teilen: dem Einschwingvorgang als Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

(analog zur freien gedämpften Schwingung, dieser Teil klingt ab gegen 0) sowie der stationären Lösung. Dieser Lösungsteil hat die Form

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta(\omega)) \quad (8.3.5)$$

wobei wir hier ein Minuszeichen vor der Phase setzen, damit diese die Phasendifferenz zur Anregung darstellt. Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$A(\omega) \left[-\omega^2 \cos(\omega t - \delta(\omega)) - \frac{b}{m} \omega \sin(\omega t - \delta(\omega)) + \omega_0^2 \cos(\omega t - \delta(\omega)) \right] = z_0 \omega_0^2 \cos(\omega t) \quad (8.3.6)$$

Um die Gleichung zu lösen müssen wir die Winkelfunktionen sin und cos mit

Phasen in reine Winkelfunktionen auflösen. Also setzen wie $\cos(\omega t - \delta(\omega)) = \cos(\omega t) \cos(\delta(\omega)) + \sin(\omega t) \sin(\delta(\omega))$ und $\sin(\omega t - \delta(\omega)) = \sin(\omega t) \cos(\delta(\omega)) - \cos(\omega t) \sin(\delta(\omega))$. Wir bekommen dann

$$\begin{aligned} z_0 \omega_0^2 \cos(\omega t) = & A(\omega) \left[-\omega^2 \cos(\omega t) \cos(\delta(\omega)) \right. \\ & + \frac{b}{m} \omega \cos(\omega t) \sin(\delta(\omega)) \\ & \left. + \omega_0^2 \cos(\omega t) \cos(\delta(\omega)) \right] \end{aligned} \quad (8.3.7a)$$

$$\begin{aligned} 0 = & A(\omega) \left[-\omega^2 \sin(\omega t) \sin(\delta(\omega)) \right. \\ & - \frac{b}{m} \omega \sin(\omega t) \cos(\delta(\omega)) \\ & \left. + \omega_0^2 \sin(\omega t) \sin(\delta(\omega)) \right] \end{aligned} \quad (8.3.7b)$$

Diese Gleichungen können vereinfacht werden

$$\begin{aligned} z_0 \omega_0^2 = & A(\omega) \left[-\omega^2 \cos(\delta(\omega)) + \frac{b}{m} \omega \sin(\delta(\omega)) + \omega_0^2 \cos(\delta(\omega)) \right] \\ 0 = & -\omega^2 \sin(\delta(\omega)) - \frac{b}{m} \omega \cos(\delta(\omega)) + \omega_0^2 \sin(\delta(\omega)) \end{aligned} \quad (8.3.8a)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\delta(\omega)) = \frac{b}{m} \omega \cos(\delta(\omega)) \quad (8.3.9)$$

und daraus

$$\tan(\delta(t)) = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (8.3.10)$$

Wir verwenden $\cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\phi)}}$ und $\sin(\phi) = \cos(\phi) \cdot \tan(\phi) = \frac{\tan(\phi)}{\sqrt{1+\tan^2(\phi)}}$ und bekommen aus der ersten Gleichung Nach Teilen durch $A(\omega)$

$$\begin{aligned} \frac{z_0 \omega^2}{A(\omega)} = & \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{1 + \tan^2(\delta(t))}} + \frac{b\omega}{m} \frac{\tan(\delta(t))}{\sqrt{1 + \tan^2(\delta(t))}} \\ = & \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}}{\sqrt{1 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} \\ = & \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2}}} \\ = & \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2}} \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Zusammengefasst ist die stationäre Lösung durch die Amplitude und Phase

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \quad (8.3.12a)$$

$$A(\omega) = \frac{z_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{b^2\omega^2}{m^2}}} \quad (8.3.12b)$$

gegeben.

Mit der Definition der Güte aus Gleichung (8.2.11) sowie mit $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ schreiben wir zuerst

$$Q = 2\pi\frac{m}{bT} = \omega_0\frac{m}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (8.3.13)$$

und erhalten

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \quad (8.3.14a)$$

$$A(\omega) = \frac{z_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}} \quad (8.3.14b)$$

Noch kompakter ist die folgende Schreibweise für die Amplitude

$$A(\omega) = \frac{z_0\omega^2/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} \quad (8.3.15)$$

Die Frequenz, bei der die Amplitude maximal wird, also die Resonanzfrequenz, ist

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (8.3.16)$$

Diese Frequenz, die durch die Gleichung $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$ definiert ist, ist kleiner als die Eigenfrequenz eines gedämpften Systems (Siehe Gleichung (8.2.14)).

Bei der Resonanzfrequenz des ungedämpften Systems gegeben durch $\omega = \omega_0$ ist die Phase

$$\delta(\omega_0) = \pi/2 \quad (8.3.17)$$

Die Steigung der Phase $d\delta(\omega)/d\omega$ hat an der Stelle ω_0 den Wert

$$\left. \frac{d\delta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} = 2 \frac{Q}{\omega_0} \quad (8.3.18)$$

Es ist sehr viel einfacher, ω_0 und Q aus der Phase wie aus der Amplitude zu bestimmen.

8.4. Überlagerung von Schwingungen

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 142])

8.4.1. Schwingungen in unterschiedliche Richtungen

Wenn in der x -Richtung eine Schwingung $x(t) = x_0 \cos(\omega_x t)$ und in der y -Richtung eine Schwingung $y(t) = y_0 \cos(\omega_y t + \delta)$ überlagert werden, entstehen Lissajous-Figuren. Solche Schwingungen können entstehen, wenn zum Beispiel eine Kugel in einer elliptischen Potentialmulde hin- und herschwingt.

8.4.2. Schwingungen gleicher Richtung und Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude

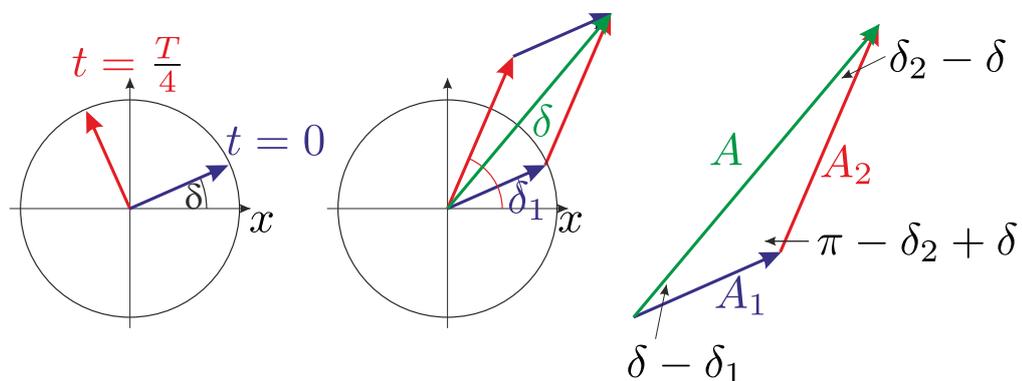


Abb. 8.8.: Zeigerdiagramm. Links für zwei Zeiten, in der Mitte das Zeigerdiagramm für zwei Schwingungen (rot) und (blau) mit der Summe (grün) und rechts die Winkel.

Eine Schwingung $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta)$ kann durch einen Zeiger dargestellt werden. Die Projektion dieses Zeigers auf die x-Achse ergibt das Schwingungsbild.

Wenn zwei Schwingungen unterschiedlicher Amplitude und Phase, aber gleicher Frequenz addiert werden, kann man die trigonometrischen Sätze für schiefwinklige Dreiecke anwenden. So ist nach dem Cosinussatz

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \delta_2 + \delta_1) \quad (8.4.1)$$

oder

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 + \delta_1)} \quad (8.4.2)$$

Der Sinussatz liefert

$$\frac{A}{\sin(\pi - \delta_2 + \delta_1)} = \frac{A}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{A_2}{\sin(\delta - \delta_1)} \quad (8.4.3)$$

Wenn wir die Zeit zur Berechnung so wählen, dass $\delta_1 = 0$ ist, so ergibt sich

$$\sin(\delta) = \frac{A_2}{A} \sin(\delta_2) \quad (8.4.4a)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2)} \quad (8.4.4b)$$

8.4.3. Schwingungen gleicher Richtung, aber leicht unterschiedlicher Frequenz

Die Frequenzen der beiden Schwingungen sollen um $\Delta\omega$ verschieden sein. Wir setzen an

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad (8.4.5a)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos((\omega + \Delta\omega)t + \delta_2) \quad (8.4.5b)$$

Die resultierende Schwingung ist

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos((\omega + \Delta\omega)t + \delta_2) \quad (8.4.6)$$

Wir rechnen nun wie folgt um

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos((\omega t + \delta_1) + \Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1) \\ &= A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_1) \cos(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1) \\ &\quad - A_2 \sin(\omega t + \delta_1) \sin(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1) \\ &= \cos(\omega t + \delta_1) [A_1 + A_2 \cos(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1)] \\ &\quad - A_2 \sin(\omega t + \delta_1) \sin(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Dies entspricht einer Schwingung der Frequenz ω mit einer aufmodulierten Frequenz $\Delta\omega$. Wir nennen dieses Verhalten auch SCHWEBUNG. Transparenter wird

die Rechnung, wenn komplexe Zahlen verwendet werden. Anstelle von $\cos(\omega t + \delta)$ schreiben wir $e^{i(\omega t + \delta)}$, wobei wieder $i = \sqrt{-1}$ ist. Wir schreiben

$$x_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \quad (8.4.8a)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i((\omega + \Delta\omega)t + \delta_2)} \quad (8.4.8b)$$

und weiter

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{i((\omega + \Delta\omega)t + \delta_2 - \delta_1)} \\ &= A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \delta_1)} e^{i(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1)} \\ &= e^{i(\omega t + \delta_1)} \left[A_1 + A_2 e^{i(\Delta\omega t + \delta_2 - \delta_1)} \right] \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

8.4.4. Fouriertransformation

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 146])

Die obige Schwingung ist nicht nur durch den zeitlichen Verlauf, sondern auch durch das FREQUENZSPEKTRUM sowie das PHASENSPEKTRUM charakterisiert. Grundlage für diese Aussage ist der Mathematische Satz, dass sich jede periodische Funktion $f(t) = f(t + T)$ (Frequenz $\omega = 2\pi/T$ als Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \delta_k) \quad (8.4.10)$$

schreiben lässt. Alternativ kann man auch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad (8.4.11)$$

Für gerade Funktionen $f(t) = f(-t)$ sind alle $b_k = 0$, für ungerade Funktionen sind alle $a_k = 0$.

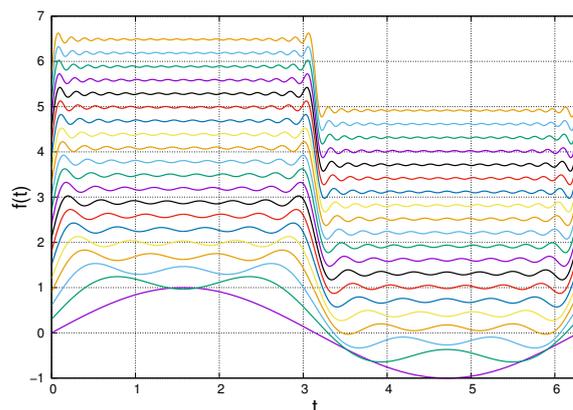


Abb. 8.9.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1).$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.9 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer RECHTECKSCHWINGUNG (oder die FOURIERANALYSE einer RECHTECKSCHWINGUNG).

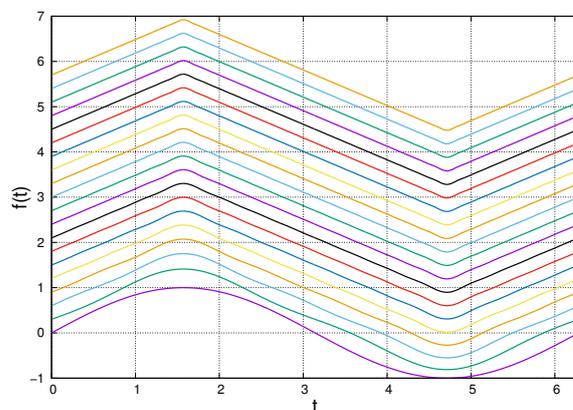


Abb. 8.10.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1)^2.$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.10 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer DREIECKSCHWINGUNG (oder die FOURIERANALYSE einer DREIECKSCHWINGUNG).

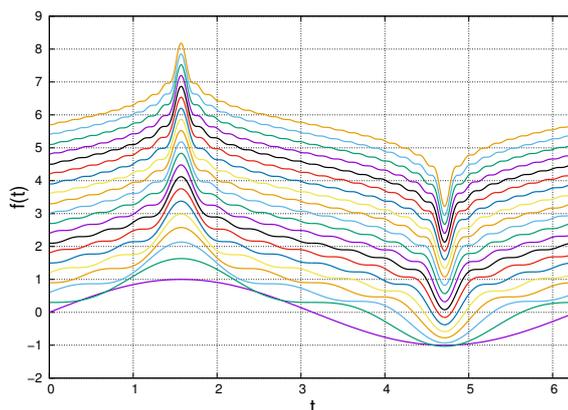


Abb. 8.11.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1).$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.11 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer PULSFOLGE (oder die FOURIERANALYSE einer PULSFOLGE). Hier ist der Gewichtungsfaktor $(2k-1)^{-1}$.

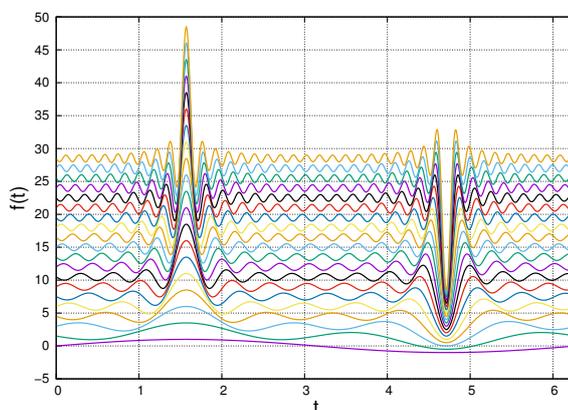


Abb. 8.12.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1)^{2/3}.$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.12 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer PULSFOLGE (oder die FOURIERANALYSE einer PULSFOLGE). Hier ist der Gewichtungsfaktor $(2k-1)^{-2/3} = (2k-1)^{-0.666}$.

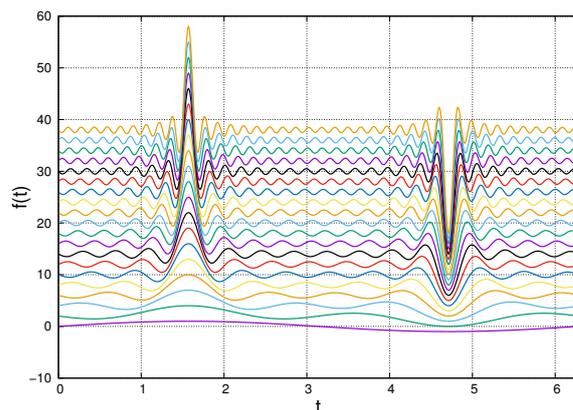


Abb. 8.13.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1)^{1/2}.$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.13 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer PULSFOLGE (oder die FOURIERANALYSE einer PULSFOLGE). Hier ist der Gewichtungsfaktor $(2k-1)^{-1/2} = (2k-1)^{-0.5}$.

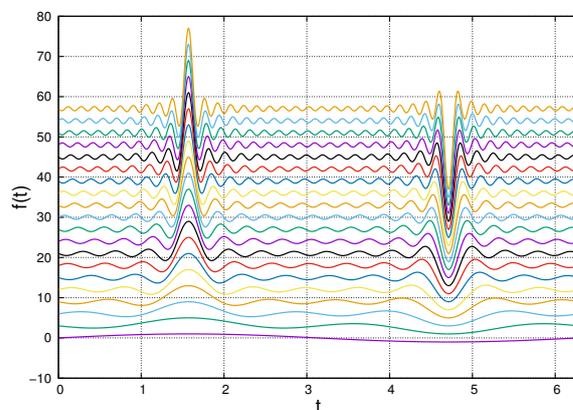


Abb. 8.14.: Synthese einer Schwingung mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos((2k-1)\omega t) / (2k-1)^{1/6}.$$

Die verschiedenen Stufen der Synthese sind durch eine der Stufennummer proportionale Verschiebung nach oben auseinander gezogen.

Abbildung 8.14 zeigt die FOURIERSYNTHESE einer PULSFOLGE (oder die FOURIERANALYSE einer PULSFOLGE). Hier ist der Gewichtungsfaktor $(2k-1)^{-1/6} = (2k-1)^{-0.166}$.

Die folgenden Applets illustrieren die Fourieranalyse und -synthese:

Link zur Vorlesung: ([Musik und Fouriersynthese, Duke University](#))

Link zur Vorlesung: ([Fouriersynthese zum Hören von Jürgen Berkemeier](#))

8.5. Gekoppelte Schwingungen

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 181])



Versuch 57: **Versuch zur Vorlesung:**
Gekoppelte Stangenpendel (Versuchskarte SW-50)

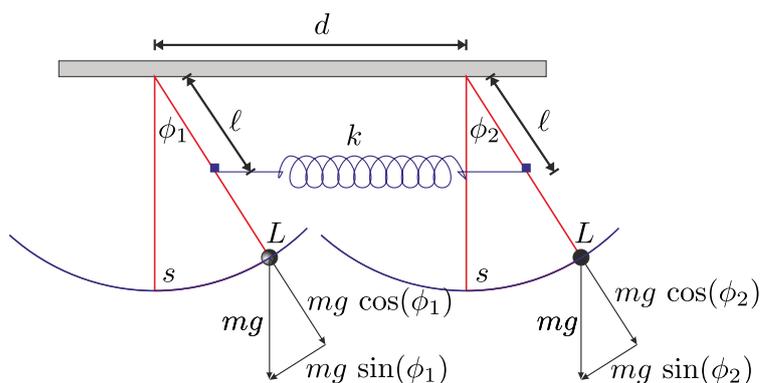


Abb. 8.15.: Gekoppelte Pendel. Zwei mathematische Pendel im Abstand d mit jeweils der Länge L sind mit einer masselosen Feder der Ruhelänge d und der Federkonstante k gekoppelt.

Wenn das linke Pendel um ϕ_1 und das rechte Pendel um ϕ_2 ausgelenkt wird (in beiden Fällen wird nach rechts positiv gezählt), dann verändert sich die Länge der Feder um

$$\Delta d = \ell (\sin(\phi_1) - \sin(\phi_2)) \approx \ell (\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.1)$$

für kleine Auslenkungen. Deshalb ist die KRAFT, die auf das linke Pendel ausgeübt wird

$$F_{F,1} = -k\Delta d \approx -k\ell (\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.2)$$

Entsprechend ist die KRAFT auf das rechte Pendel

$$F_{F,2} = -k(-\Delta d) \approx k\ell (\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.3)$$

Diese Kräfte entsprechen den Drehmomenten

$$T_{F,1} = \ell F_{F,1} = -k\ell^2 (\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.4a)$$

$$T_{F,2} = \ell F_{F,2} = k\ell^2 (\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.4b)$$

Die durch die Gravitation hervorgerufenen Momente an den Pendeln sind

$$T_{G,1} = -Lmg \sin \phi_1 \approx -Lmg\phi_1 \quad (8.5.5a)$$

$$T_{G,2} = -Lmg \sin \phi_2 \approx -Lmg\phi_2 \quad (8.5.5b)$$

Wir beachten, dass für eine Punktmasse m an einem masselosen Faden der Länge L das Trägheitsmoment $I = mL^2$ ist und erhalten die linearisierte Momentengleichung

$$I\ddot{\phi}_1 = mL^2\ddot{\phi}_1 = -Lmg\phi_1 - k\ell^2(\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.6a)$$

$$I\ddot{\phi}_2 = mL^2\ddot{\phi}_2 = -Lmg\phi_2 + k\ell^2(\phi_1 - \phi_2) \quad (8.5.6b)$$

Wir teilen durch mL^2 und schreiben in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{g}{L} - \frac{k\ell^2}{mL^2} & +\frac{k\ell^2}{mL^2} \\ +\frac{k\ell^2}{mL^2} & -\frac{g}{L} - \frac{k\ell^2}{mL^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (8.5.7)$$

Wir nehmen an, dass beide Pendel mit der gleichen Frequenz ω schwingen. Wir setzen also an

$$\phi_1(t) = \phi_{1,0}e^{i\omega t} \quad (8.5.8a)$$

$$\phi_2(t) = \phi_{2,0}e^{i(\omega t + \delta)} \quad (8.5.8b)$$

Eingesetzt in Gleichung (8.5.6) bekommen wir

$$-\omega^2\phi_{1,0}e^{i\omega t} = -\frac{g}{m}\phi_{1,0}e^{i\omega t} - \frac{k\ell^2}{mL^2}(\phi_{1,0}e^{i\omega t} - \phi_{2,0}e^{i\omega t}e^{i\delta}) \quad (8.5.9a)$$

$$-\omega^2\phi_{2,0}e^{i\omega t}e^{i\delta} = -\frac{g}{L}\phi_{2,0}e^{i\omega t}e^{i\delta} + \frac{k\ell^2}{mL^2}(\phi_{1,0}e^{i\omega t} - \phi_{2,0}e^{i\omega t}e^{i\delta}) \quad (8.5.9b)$$

Wir teilen durch $e^{i\omega t} \neq 0$

$$-\omega^2\phi_{1,0} = -\frac{g}{L}\phi_{1,0} - \frac{k\ell^2}{mL^2}(\phi_{1,0} - \phi_{2,0}e^{i\delta}) \quad (8.5.10a)$$

$$-\omega^2\phi_{2,0}e^{i\delta} = -\frac{g}{L}\phi_{2,0}e^{i\delta} + \frac{k\ell^2}{mL^2}(\phi_{1,0} - \phi_{2,0}e^{i\delta}) \quad (8.5.10b)$$

Wir stellen die Gleichung um und sortieren nach den beiden unbekanntem $\phi_{1,0}$ und $\phi_{2,0}e^{i\delta}$.

$$0 = \left[-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2} \right] \phi_{1,0} - \frac{k\ell^2}{mL^2} \phi_{2,0}e^{i\delta} \quad (8.5.11a)$$

$$0 = -\frac{k\ell^2}{mL^2} \phi_{1,0} + \left[-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2} \right] \phi_{2,0}e^{i\delta} \quad (8.5.11b)$$

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen

$$A = -\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2} \quad (8.5.12a)$$

$$B = \frac{k\ell^2}{mL^2} \quad (8.5.12b)$$

$$x = \phi_{1,0} \quad (8.5.12c)$$

$$y = \phi_{2,0}e^{i\delta} \quad (8.5.12d)$$

und müssen damit die Gleichung

$$0 = Ax - By \quad (8.5.13a)$$

$$0 = -Bx + Ay \quad (8.5.13b)$$

lösen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit B und die zweite mit A und bekommen

$$0 = ABx - B^2y \quad (8.5.14a)$$

$$0 = -ABx + A^2y \quad (8.5.14b)$$

und addieren die Gleichungen. Damit wird

$$0 = y(A^2 - B^2) \quad (8.5.15)$$

Damit diese Gleichung für alle y eine Lösung ist, muss $A^2 = B^2$ sein. Diese Bestimmungsgleichung für ω hat zwei Lösungen

$$A_1 = B \quad (8.5.16a)$$

$$A_2 = -B \quad (8.5.16b)$$

oder

$$-\omega_1^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2} = \frac{k\ell^2}{mL^2} \quad (8.5.17a)$$

$$-\omega_2^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2} = -\frac{k\ell^2}{mL^2} \quad (8.5.17b)$$

Wir vereinfachen diese beiden Gleichungen und lösen nach ω_i auf

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L} \quad (8.5.18a)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{L} + 2\frac{k\ell^2}{mL^2} = \omega_1^2 + 2\frac{k\ell^2}{mL^2} \quad (8.5.18b)$$

Wenn wir $x = \phi_1$ als Vorgabe nehmen und die Gleichung $y = \frac{A_i}{B}x$ lösen, bekommen wir die Amplitude des zweiten Pendels.

$$\begin{aligned}\phi_{2,0,1}e^{i\delta_1} &= \frac{-\omega_1^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2}}{\frac{k\ell^2}{mL^2}}\phi_{1,0} &= \frac{-\frac{g}{L} + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2}}{\frac{k\ell^2}{mL^2}}\phi_{1,0} \\ &= \phi_{1,0}\end{aligned}\tag{8.5.19a}$$

$$\begin{aligned}\phi_{2,0,2}e^{i\delta_2} &= \frac{-\omega_2^2 + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2}}{\frac{k\ell^2}{mL^2}}\phi_{1,0} &= \frac{-\frac{g}{L} - 2\frac{k\ell^2}{mL^2} + \frac{g}{L} + \frac{k\ell^2}{mL^2}}{\frac{k\ell^2}{mL^2}}\phi_{1,0} \\ &= -\phi_{1,0}\end{aligned}\tag{8.5.19b}$$

Die beiden Lösungen haben die folgenden Charakteristika

Lösung 1 Es ist $\phi_{2,0,1} = \phi_{1,0}$ und $\delta_1 = 0$. Die beiden Pendel schwingen in Phase mit der gleichen Resonanzfrequenz wie ein einzelnes Pendel. Die Feder wird nicht gedehnt. Ob sie vorhanden ist oder nicht, ist nicht relevant.

Lösung 2 Es ist $\phi_{2,0,2} = \phi_{1,0}$ und $\delta_2 = \pi$. Die beiden Pendel schwingen gegenphasig mit einer höheren Resonanzfrequenz als die, die ein einzelnes Pendel hätte. Die Feder wird periodisch gedehnt und gestaucht.

8.6. Verallgemeinerung: Fundamental- oder Eigenschwingungen

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 181])

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung der Schwingungsgleichung für N gleiche Pendel aussieht, die jeweils vom i -ten zum $i+1$ -ten Pendel mit einer masselosen Feder mit der Federkonstante k gekoppelt sind. Für das erste Pendel mit $i = 1$ gilt

$$I\ddot{\phi}_1 = -Lmg\phi_1 - k\ell^2(\phi_1 - \phi_2)\tag{8.6.1}$$

Die Bewegungsgleichung des letzten Pendels ist

$$I\ddot{\phi}_N = -Lmg\phi_N + k\ell^2(\phi_{N-1} - \phi_N)\tag{8.6.2}$$

Dazwischen lauten die Bewegungsgleichungen für ein Pendel $0 < j < N$

$$\begin{aligned}I\ddot{\phi}_j &= -Lmg\phi_j - k\ell^2(\phi_j - \phi_{j+1}) + k\ell^2(\phi_{j-1} - \phi_j) \\ &= -Lmg\phi_j + k\ell^2\phi_{j-1} - 2k\ell^2\phi_j + k\ell^2\phi_{j+1}\end{aligned}\tag{8.6.3}$$

Wir dividieren durch $I = mL^2$ und setzen $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ und $\kappa = \frac{k\ell^2}{mL^2}$ und schreiben die Gleichung als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\phi}_j \\ \vdots \\ \ddot{\phi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa & -\omega_0^2 - 2\kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa & -\omega_0^2 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_j \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (8.6.4)$$

Wir setzen nun $\phi_i = \phi_{i,0}e^{i\omega t}$ und lösen die obige Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,0} \\ \vdots \\ \phi_{j,0} \\ \vdots \\ \phi_{N,0} \end{pmatrix} \quad (8.6.5)$$

Diese Gleichung hat dann eine Lösung, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - 2\kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa & \omega^2 - \omega_0^2 - \kappa \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.6)$$

Die Lösung mit der tiefsten Resonanzfrequenz ist $\omega = \omega_0$, bei der alle Pendel in Phase sind (bei allen anderen Bewegungsmoden ist neben der potentiellen Energie der Pendel auch in den Federn POTENTIELLE ENERGIE gespeichert, die Gesamtenergie also für die gleich Auslenkung grösser.) Wenn wir diese Lösung einsetzen, bekommen wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa & -2\kappa & \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa & -\kappa \end{vmatrix} = 0 \quad (8.6.7)$$

Wenn man alle Zeilen dieser Determinante aufsummiert, bekommt man den Nullvektor. Deshalb ist die obige Determinantengleichung erfüllt.

9. Wellen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 423]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 158])

Im vorherigen Kapitel wurde die Lösung der Schwingungsgleichung für eine grosse Zahl gekoppelter Pendel betrachtet. Wenn bei einem solchen System ein äusseres Pendel ausgelenkt wird, breitet sich die Störung zum anderen Ende aus. Erst wenn dieser Einschwingvorgang abgeklungen ist, erhalten wir die mit den Gleichungen aus dem vorherigen Kapitel berechneten Lösungen. Die sich ausbreitende Störung im Pendelsystem nennen wir eine **Welle**.

9.1. Wellen in einer Dimension

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 423]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 161])

Wellen können sich in Medien (Schallwellen, Seilwellen) oder auch ohne Medien (Licht, elektromagnetische Wellen) ausbreiten. Sie können sich im Raum ausbreiten, also in drei Dimensionen, auf Platten, in zwei Dimensionen oder in Seilen oder Glasfaserkabeln in einer Dimension. Wir betrachten den einfachen Fall einer Welle in einer Dimension.

9.1.1. Wellenberge

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 424])

Versuch 58:   **Versuch zur Vorlesung:**
Impulse und Wellen auf Seil (Versuchskarte SW-43)

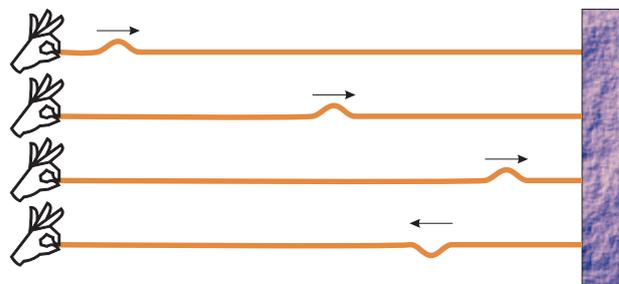


Abb. 9.1.: Reflexion einer Seilwelle wenn das Ende an der Wand eingespannt ist.

Wir sahen, dass bei einer Schwingung die Anfangsbedingung zweiteilig war. Der Ort und die Geschwindigkeit mussten vorgegeben werden. Genauso ist die Randbedingung einer Seilwelle durch eine von zwei Größen charakterisiert, dem Ort und der Geschwindigkeit (erste Ableitung) oder eine höhere Ableitung. Wenn das Seil fest eingespannt ist, wie in der obigen Abbildung, ist der Ort fest und die zweite Ableitung (siehe auch den einseitig eingespannten Balken) frei. Der Wellenberg wechselt sein Vorzeichen bei der Reflexion: wir sprechen von einem **Phasensprung**.

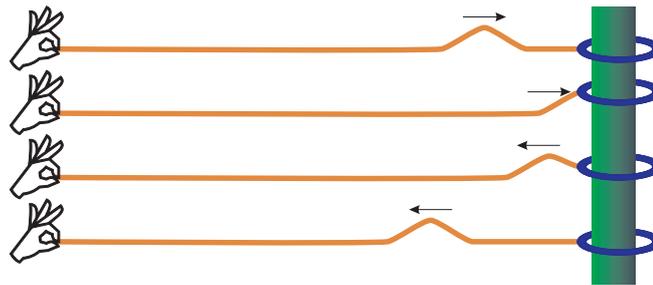


Abb. 9.2.: Reflexion einer Seilwelle wenn das Ende lose befestigt ist.

Wenn das Seilende lose ist, ist der Ort frei, aber die Geschwindigkeit stellt sich der Anregung entsprechend ein. Hier hat die Amplitude der reflektierten Seilwelle die gleiche Phase, es gibt keinen Phasensprung.

Analoge Effekte treten bei elektromagnetischen Wellen auf. Je nach Randbedingung tritt bei der Reflexion ein Phasensprung von π auf.

9.1.1.1. Transversal- und Longitudinalwellen

Die hier betrachteten Seilwellen sind Transversalwellen oder Querwellen, da die Anregung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ist. Licht und Seilwellen gehören zu den Transversalwellen. Bei Longitudinalwellen oder Längswellen geht die Auslenkung der Teilchen in die Richtung der Ausbreitung. Das bekannteste Beispiel einer Longitudinalwelle ist die Druckwelle bei einer Schallwelle.

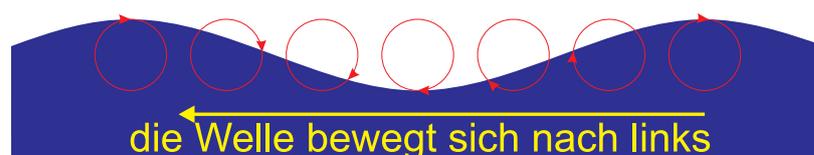


Abb. 9.3.: Wasserwelle.

Mischformen von transversal- und Longitudinalwellen existieren, so zum Beispiel die oben dargestellte Wasserwelle. Ein einzelnes Wasserteilchen bewegt sich kreisförmig (eine Folge der Energieerhaltung). Dabei ist die Geschwindigkeit der Teilchen am Wellenkamm nach rechts gerichtet, wenn die Welle sich nach links ausbreitet¹.

9.1.1.2. Reflexion und Überlagerung oder Superposition

Wenn zwei Wellenberge mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung sich treffen, dann addieren sich bei einem linearen System die Amplituden.

Eine Störung auf einem Seil wird nicht nur am Ende reflektiert, sondern auch, wenn die Eigenschaften des Seils sich ändern. Wenn ein Seil ab einer bestimmten Stelle weniger steif ist, ist ab der Stelle auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung anders. Ein Teil (im Gegensatz zur Reflexion am Ende) der Welle wird reflektiert. Dies ist analog zur Teilreflexion von Licht beim Übergang von einem Medium in das nächste.

Wir beobachten, dass die Form eines Wellenberges sich nicht ändert. Im bewegten Bezugssystem x^*, y^* ist sie durch $y^* = y(x^*)$ gegeben. Nun bewegt sich das Maximum mit der Geschwindigkeit v . Wir können die Gleichungen der Galilei-Transformation hinschreiben

$$y = y^* \quad (9.1.1a)$$

$$x = x^* + vt \quad (9.1.1b)$$

Deshalb kann man die Form des Seiles auch mit

$$y = y(x - vt) \quad (9.1.2)$$

schreiben. Bewegt sich das Maximum nach links, lautet die Gleichung

$$y = y(x + vt) \quad (9.1.3)$$

Link zur Vorlesung: ([Überlagerungsprinzip von Wellen von Walter Fendt](#))

Versuch 59:  **Versuch zur Vorlesung:**
Wellenmaschine (Versuchskarte SW-77)

¹Dies ist auch das Prinzip des Wanderwellenmotors, der häufig, zum Beispiel auch in Kameras, als Stellmotor eingesetzt wird.

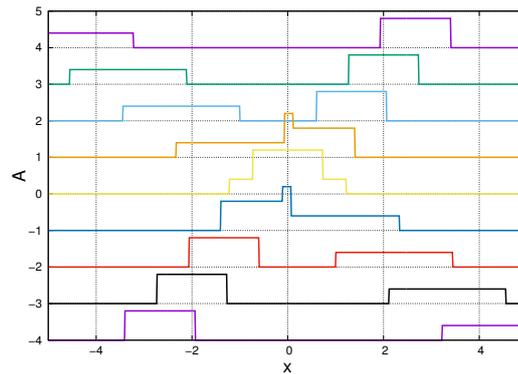


Abb. 9.4.: Überlagerung zweier Wellen mit unterschiedlichen Amplituden und gleichem Vorzeichen. Die Zeit nimmt von oben nach unten zu.

Wenn wie in der obigen Zeichnung die beiden Wellen den Gleichungen $y = y_1(x - vt)$ und $y = y_2(x + vt)$ genügen, ist die resultierende Wellenfunktion

$$y = y_1(x - vt) + y_2(x + vt) \quad (9.1.4)$$

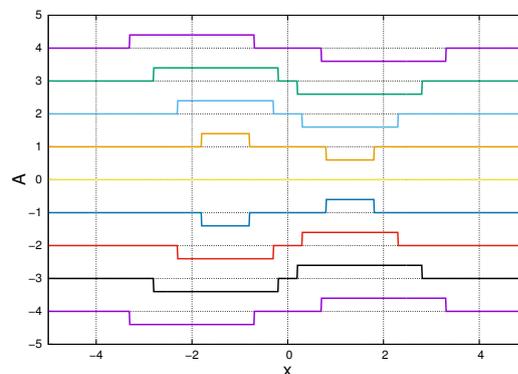


Abb. 9.5.: Überlagerung zweier Wellen mit gleichen Amplituden und unterschiedlichem Vorzeichen. Die Zeit nimmt von oben nach unten zu.

Haben die beiden Wellenberge unterschiedliche Vorzeichen, so können sie sich zu gewissen Zeiten teilweise oder, bei gleicher Amplitude, vollständig auslöschen. Obwohl in der Mitte nichts mehr von den Wellenbergen zu sehen ist, ist die Information über ihre Form und Geschwindigkeit in der kinetischen Energie der Seilstücke gespeichert.

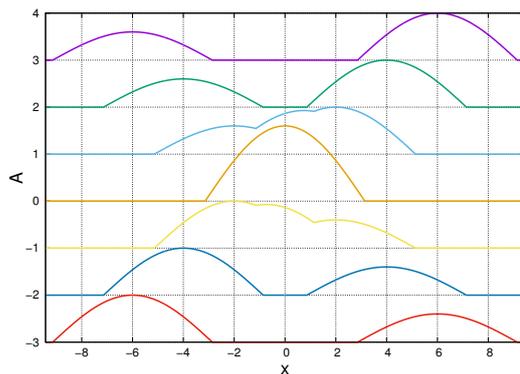


Abb. 9.6.: Überlagerung zweier sinusförmiger Wellenberge mit unterschiedlichen Amplituden und gleichem Vorzeichen.

Das Überlagerungsprinzip gilt auch für Wellen mit beliebiger Form, hier als Sinuswelle dargestellt. **Bei grossen Amplituden, also dann wenn das betrachtete System nicht mehr linear ist, gilt das Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip nicht.**

9.1.2. Ausbreitungsgeschwindigkeit

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 429])

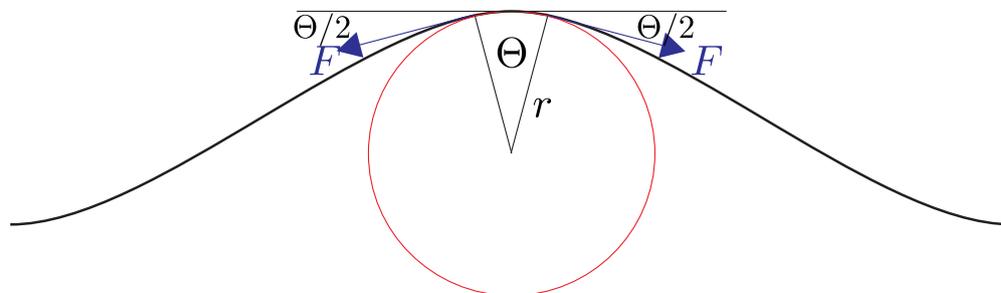


Abb. 9.7.: Kräfteverhältnisse an einem Wellenberg in einem sich mit dem Wellenberg sich fortbewegenden Koordinatensystem.

Wir betrachten ein Seilsegment der Länge $\Delta s = r\Theta$. Auf dieses Segment wirken an den Enden Kräfte F , die um den Winkel $\Theta/2$ nach unten gekippt sind. Die KRAFT F ist die Spannkraft am Seil. Das Seil bewegt sich in dieser Darstellung mit der Geschwindigkeit v durch das Bild. Dabei bewegt sich das Seilsegment auf einer Kreisbahn, ist also der Zentripetalbeschleunigung v^2/r unterworfen. Das Kräftegleichgewicht in radialer Richtung (nach unten) ist

$$\sum F_r = 2F \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \approx 2F \left(\frac{\Theta}{2}\right) = F\Theta \quad (9.1.5)$$

Die Trägheitskräfte können aus der Massenbelegung $\mu = \rho A$ des Seils berechnet werden, dabei ist ρ die Dichte und A der Seilquerschnitt. Die Masse des Seilstückes ist

$$m = \mu \Delta s = \mu r \Theta = \rho A \Delta s = \rho A r \Theta \quad (9.1.6)$$

Die durch die Seilspannung bewirkte KRAFT F ist gleich der durch die Dynamik gegebene Zentripetalkraft.

$$F \Theta = m \frac{v^2}{r} = \mu r \Theta \frac{v^2}{r} = \rho A r \Theta \frac{v^2}{r} \quad (9.1.7)$$

Dies Gleichung kann nach v aufgelöst werden (wir verwenden die Seilspannung $\sigma = F/A$)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (9.1.8)$$

Dies ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung auf einem Seil oder auf einer Saite.

Da in dieser Gleichung keine koordinatenabhängigen Grössen vorhanden sind, gilt sie auch für das «Ruhesystem» des Seils.

Ein Seil mit einer Massenbelegung von $\mu = 0.02 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ und einer Seilspannkraft $F = 30 \text{ N}$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{30 \text{ N}}{0.02 \frac{\text{kg}}{\text{m}}}} = 38.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

9.1.3. Harmonische Wellen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 431])

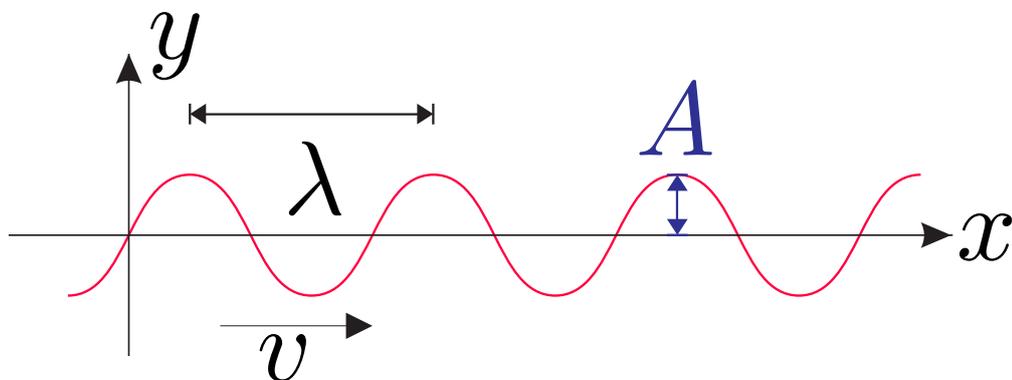


Abb. 9.8.: Der Schnappschuss einer Welle mit der Wellenlänge λ .

In der **Periodendauer** T bewegt sich die Welle um eine **Wellenlänge** λ vorwärts. Wenn wir die **Frequenz** $\nu = 1/T$ einführen erhalten wir

$$v = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda \quad (9.1.9)$$

Wenn die Auslenkung sinusförmig ist, ist die Form der Welle zu einer bestimmten Zeit t_0 durch

$$y(x) = A \sin(kx) \quad (9.1.10)$$

beschrieben. A ist die **Amplitude** und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die **Wellenzahl**, oder wenn damit auch die Ausbreitungsrichtung bezeichnet wird, den **Wellenvektor**. Die Grösse von k kann mit der folgenden Überlegung berechnet werden: Die Sinusfunktion ist mit 2π periodisch. Sie wiederholt sich aber auch mit jedem Vielfachen der Wellenlänge λ . Also ist

$$k(x_1 + \lambda) = kx_1 + 2\pi \quad (9.1.11)$$

und daraus

$$k\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.1.12)$$

Analog zu der Beschreibung der Wellenberge bemerken wir, dass die Welle sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt. Wir transformieren also $x \rightarrow x - vt$.

$$y(x, t) = A \sin(k(x - vt)) = A \sin(kx - kv t) \quad (9.1.13)$$

Wenn wir $\omega = kv$ (**Kreisfrequenz**) setzen erhalten wir das Schlussresultat

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (9.1.14)$$

Die Wellengleichung

Wie schon früher berechnet, ist $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (9.1.15)$$

Die Wellengleichung kann auch

$$y(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad (9.1.16)$$

geschrieben werden.

9.1.4. Energieübertrag bei Wellen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 434])

Wenn wir ein kurzes Segment der Länge Δx einer schwingenden Welle betrachten, dann führt dieses eine harmonische Schwingung aus. Wenn die Wellengleichung $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ ist, dann ist die Geschwindigkeit $v(x, t) = \dot{y}(x, t) =$

$-A\omega \cos(kx - \omega t)$. Damit ist die KINETISCHE ENERGIE des Seilsegments beim Nulldurchgang und damit auch die Gesamtenergie

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \Delta x \quad (9.1.17)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle sei $v = \Delta x / \Delta t$. Umgeformt $\Delta x = v \Delta t$ und eingesetzt bekommen wir

$$\Delta E = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu v \delta t \quad (9.1.18)$$

Wir dividieren durch Δt und bekommen die durch die Welle transportierte Energie pro Zeiteinheit, also die Leistung²

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v \quad (9.1.19)$$

9.1.5. Superposition und Interferenz harmonischer Wellen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 435]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 513])

Analog zu Schwingungen, deren Kombination oder Überlagerung neue Bewegungsformen ergibt, können auch Wellen überlagert werden. Dies kann sehr schön an den Wasserwellen hinter einer Hafeneinfahrt beobachtet werden.

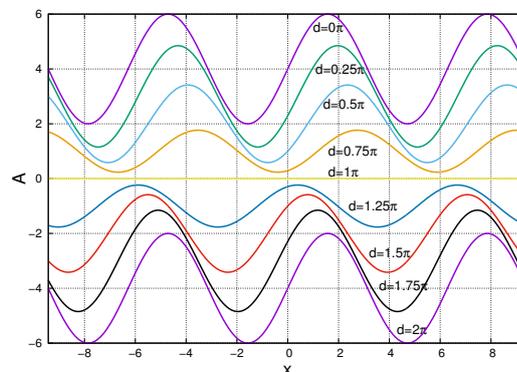


Abb. 9.9.: Interferenz zweier Wellen mit der gleichen Amplitude und der gleichen Frequenz und einer Phase, die von $0 \dots 2\pi$ variiert.

Mathematisch setzen wir zwei Wellen an

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (9.1.20a)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (9.1.20b)$$

An einem bestimmten Ort ist die Differenz der Phasen durch

²Die Intensität des Lichtes oder jeglicher Strahlung ist die Leistung pro Fläche

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_1 - t_2) - \delta = \omega\Delta t - \delta \quad (9.1.21)$$

gegeben und unabhängig vom Ort. Zu einer bestimmten Zeit ist die Differenz der Phasen durch

$$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k\Delta x - \delta \quad (9.1.22)$$

gegeben, unabhängig von der Zeit.

Wir wenden die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen an. Wir verwenden

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (9.1.23)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.1.24)$$

$$(9.1.25)$$

Aus dieser Gleichung kann die folgende Tabelle abgeleitet werden.

Phase	resultierende Amplitude	Interferenz
0	2A	konstruktive
$\pi/2$	$\sqrt{2}A$	
π	0	destruktiv
$3\pi/2$	$\sqrt{2}A$	
2π	2A	konstruktiv

Tab. 9.1.: Phase und Interferenz.

9.1.5.1. Stehende Wellen

Wenn wir eine nach links laufende Welle $y_1(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ und eine nach rechts laufende Welle $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \delta)$ zur Interferenz kommen lassen, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (9.1.26)$$

Die Summe der beiden Wellenfunktionen ist das Produkt zweier Terme

- ein zeitabhängiger Teil, der für alle Orte gleich ist: $\cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right)$
- ein ortsabhängiger Teil, der für alle Zeiten gleich ist: $\sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right)$

Damit bilden sich räumlich stehende Knotenlinien aus, wir haben eine **stehende Welle**.

Wenn die Amplituden der beiden Wellen nicht gleich gross ist, dann interferieren von der Welle mit der grösseren Amplitude nur die Amplitudenteile, die gleich gross wie die Amplitude der schwächeren Welle sind.

Stehende Wellen als Resultat zweier gegenlaufender Wellen gibt es in jedem Resonator, insbesondere in Laserresonatoren.

9.2. Wellen in 2 und mehr Dimensionen

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 160])

Die Wellenfunktion für eine Welle in zwei oder drei Dimensionen wird wie

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (9.2.1)$$

für eine longitudinale Welle und

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (9.2.2)$$

für transversale Wellen. \mathbf{A} ist ein Vektor, der auch komplexe Komponenten haben kann (Die komplexen Komponenten geben die Phasen an.). Der Vektor, der aus dem Betrag der einzelnen Komponenten gebildet wird, gibt die Schwingungsrichtung der Welle an. Für eine transversale Welle gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}) = 0 \quad (9.2.3)$$

9.2.1. Ebene Wellen

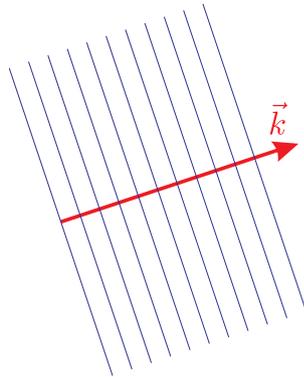


Abb. 9.10.: Bild einer ebenen Welle.

Eine ebene Welle entsteht aus der allgemeinen Wellengleichung dadurch, dass die Amplitude und der Wellenvektor nicht vom Ort abhängen. Eine ebene Transversalwelle ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (9.2.4)$$

eine Longitudinalwelle durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (9.2.5)$$

gegeben. Ebene Wellen können durch einen Vektor, der die Ausbreitungsrichtung anzeigt, dargestellt werden. Bei ebenen Lichtwellen spricht man dann von LICHTSTRAHLEN.

9.2.2. Kugelwellen

Eine weitere häufig vorkommende Form von Wellen sind die Kugelwellen. Wir können die Amplitudenabhängigkeit durch folgende Überlegung erhalten.

- Wir denken uns eine Kugeloberfläche um die Quelle, wobei die Quelle im Mittelpunkt der Kugel sein soll.
- Der Energiefluss pro Zeit, die Leistung, die durch die gesamte Kugeloberfläche fließt ist konstant, unabhängig vom Radius der Kugel.
- Die Leistung ist durch die Querschnittsfläche der Saite war durch Gleichung (9.1.19) gegeben: $P = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$. Die Querschnittsfläche F_Q der Saite ist in der Massenbelegung $\mu = F_Q \rho$ enthalten. Also ist auch die Intensität $I = \frac{P}{F_Q} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{F_Q} A^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v = K A^2$ gegeben. Die gesamte Leistung über einer Kugeloberfläche $F_Q = 4\pi r^2$ ist also durch $P = \text{const} = K A^2 F_Q = K A^2 4\pi r^2$ gegeben.
- Damit diese Gleichung für alle r gilt muss $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$ sein.

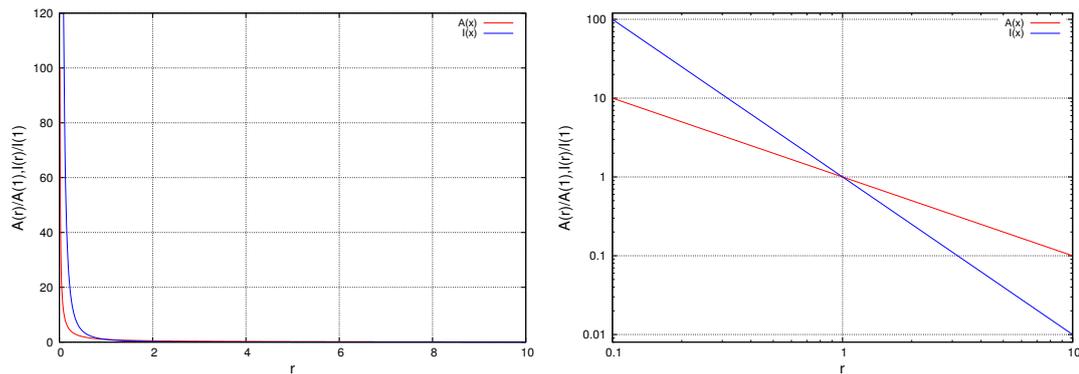


Abb. 9.11.: Amplitude und Intensität einer Kugelwelle in Abhängigkeit der Distanz r von der Quelle. Links eine lineare, rechts eine logarithmische Darstellung.

Bei einer Kugelwelle ist

- die Amplitude: $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$
- die Intensität $I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

Bei einer Wasserwelle auf der Wasseroberfläche ist die durch eine Kreis mit dem Umfang $U = 2\pi r$ gehende Leistung konstant. Deshalb gilt, dass bei Wellen, die sich auf einer 2-dimensionalen Oberfläche bewegen, dass

- die Amplitude: $A(r) = A_0 \frac{r_0}{\sqrt{r}}$
- die Intensität $I(r) = I_0 \frac{r_0}{r}$

(Welle auf einer 2-dimensionalen Fläche)

ist.

Allgemein ist bei einem n -dimensionalen Raum

- die Amplitude: $A(r) = A_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{(n-1)/2}$
- und die Intensität $I(r) = I_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}$

9.2.3. Interferenz am Beispiel von Wasserwellen



Versuch 60: Versuch zur Vorlesung:

Interferenz von Wasserwellen mit der grossen Wellenwanne (Versuchskarte O-21)

Bei Wasserwellen können Interferenzerscheinungen sehr schön beobachtet werden. Die folgenden Abbildungen zeigen schematisch die zu beobachtenden Interferenzmuster.

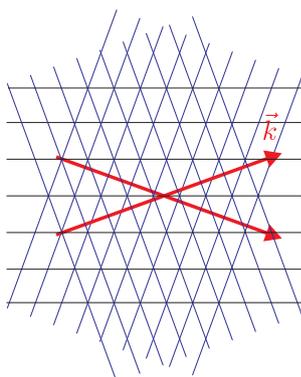


Abb. 9.12.: Interferenz zweier ebener Wellen. Blau sind die Wellenberge zu einer bestimmten Zeit markiert. Die roten Pfeile geben die \mathbf{k} -Vektoren an. Die Schwarzen Linien markieren die Orte, an denen sich die Wellenberge treffen, wo also maximale Verstärkung auftritt.

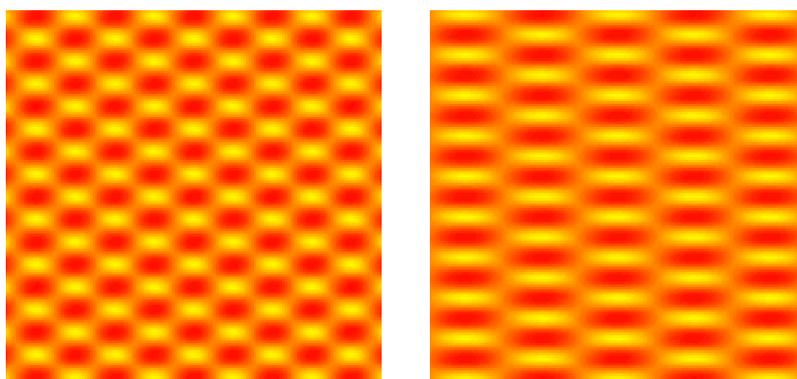


Abb. 9.13.: Interferenz ebener Wellen. Die Kantenlänge der Bilder ist 20. Der Betrag des Wellenvektors ist $|\mathbf{k}| = 3$. Links sind die Wellenvektoren der beiden ebenen Wellen im Winkel von $\pi/6$ von der Senkrechten, rechts $\pi/12$.

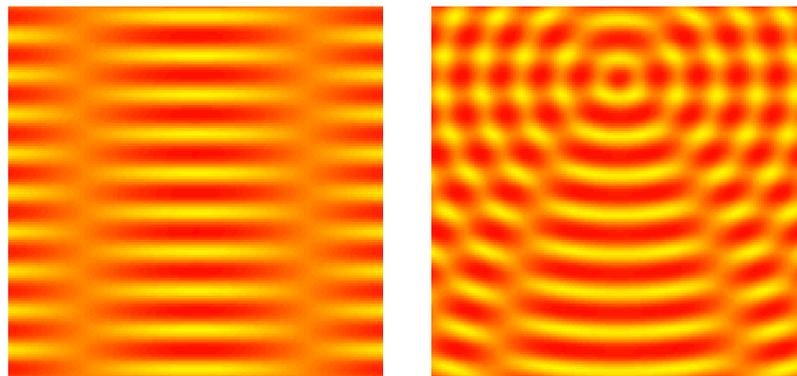


Abb. 9.14.: Links Interferenz ebener Wellen, rechts die Interferenz einer Kreiswelle mit einer ebenen Welle. Die Kantenlänge der Bilder ist 20. Der Betrag des Wellenvektors ist $|\mathbf{k}| = 3$. Links sind die Wellenvektoren der beiden ebenen Wellen im Winkel von $\pi/36$, rechts läuft die ebene Welle senkrecht, das Zentrum der Kugelwelle ist von der Mitte aus um 6 nach oben versetzt.

Die Maxima und Minima sind durch eine konstante Differenz der Phase und damit des Abstandes von zwei Referenzlinien, die parallel zu den jeweiligen Fronten liegen, charakterisiert. Damit sind auch die Orte konstanter Phase Geraden.

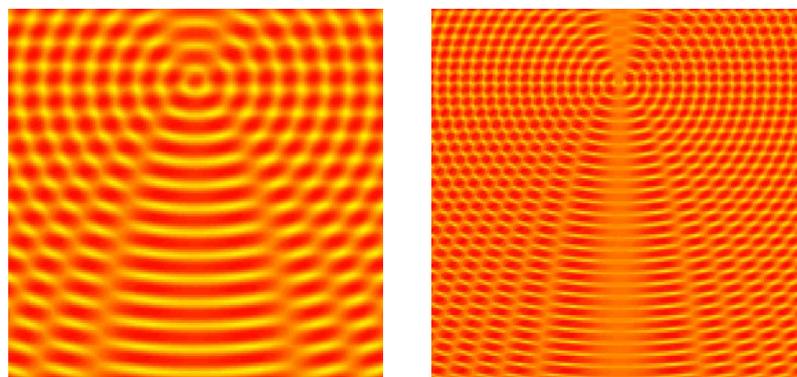


Abb. 9.15.: Interferenz einer Kreiswelle mit einer ebenen Welle. Die Kantenlänge der Bilder ist 20. Das Zentrum der Kugelwelle von der Mitte aus um 6 nach oben versetzt. Links ist der Betrag des Wellenvektors $|\mathbf{k}| = 5$, rechts 8.

Die Lage der Maxima oder der Minima ist durch eine konstante Phasendifferenz gekennzeichnet. Wenn die ebene Welle sich in y -Richtung ausbreitet, dann nimmt man eine zur x -Achse parallele Linie durch die Quelle der Kreiswelle als Referenz. Wenn \tilde{y} der Abstand des Punktes P von dieser Linie sei und \tilde{r} der Abstand von

P von der punktförmigen Quelle, dann gilt für den Abstand \tilde{x} von P parallel zur x -Achse, dass

$$\tilde{r}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \quad (9.2.6)$$

Für Maxima oder Minima ist die Phasendifferenz konstant, also gilt

$$\tilde{r} = \tilde{y} + \delta/k \quad (9.2.7)$$

wenn k der Betrag des Wellenvektors ist. Also haben wir

$$\begin{aligned} \left(\tilde{y} + \frac{\delta}{k}\right)^2 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\ \tilde{y}^2 + 2\frac{\delta}{k}\tilde{y} + \frac{\delta^2}{k^2} &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\ 2\frac{\delta}{k}\tilde{y} + \frac{\delta^2}{k^2} &= \tilde{x}^2 \\ 2\frac{\delta}{k}\tilde{y} &= \frac{k}{2\delta}\tilde{x}^2 - + \frac{\delta}{2k} \end{aligned} \quad (9.2.8a)$$

Die Linien gleicher Phase sind also Parabeln.

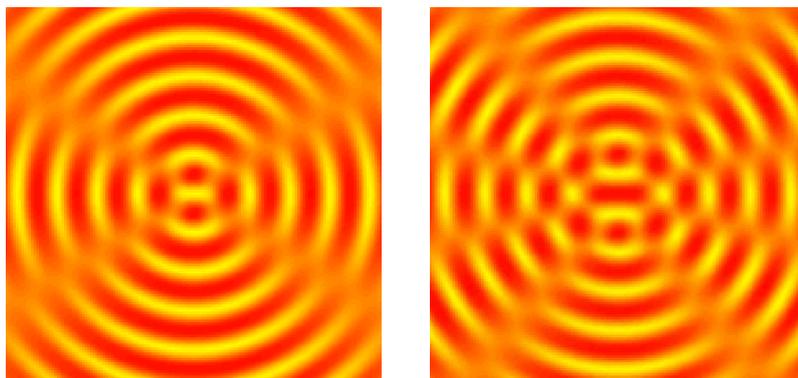


Abb. 9.16.: Interferenz zweier Kugelwellen mit dem Wellenvektor vom Betrag 3. Links sind die Zentren um 1 nach oben und unten versetzt, rechts um 2.

Die Orte konstanter Phasen, also die Lage der Maxima und Minima ist durch eine konstante Wegdifferenz von einem Punkt P zu den Quellen charakterisiert. Wir legen die Quellen an die Punkte $(0; \hat{y})$ und $(0; -\hat{y})$. Die Abstände des Punktes $(x; y)$ seien $r_1^2 = x^2 + (y - \hat{y})^2$ und $r_2^2 = x^2 + (y + \hat{y})^2$. Es ist dann $r_2 - r_1 = \delta/k$. Eingesetzt

$$\sqrt{x^2 + (y - \hat{y})^2} - \sqrt{x^2 + (y + \hat{y})^2} = \frac{\delta}{k} \quad (9.2.9)$$

Die Lösungen dieser Gleichung beschreiben die Linien konstanter Phase

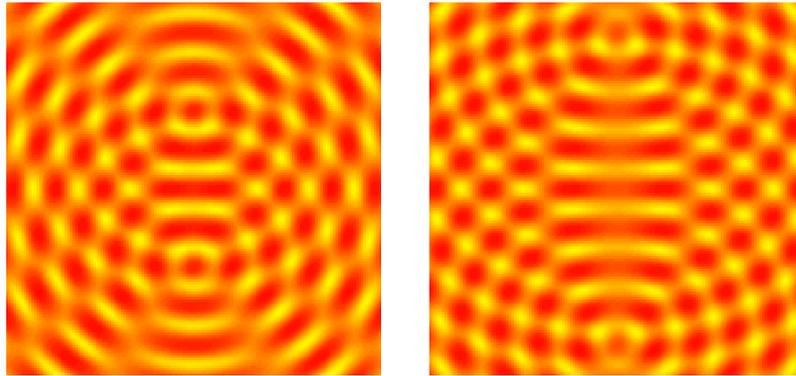


Abb. 9.17.: Interferenz zweier Kugelwellen mit dem Wellenvektor vom Betrag 3. Links sind die Zentren um 4 nach oben und unten versetzt, rechts um 8.

Teil VI.

Optik

10. Optische Phänomene

In den beiden letzten Kapiteln dieser Vorlesung wollen wir uns mit einem besonders wichtigen Wellenphänomen befassen, dem Licht.

10.1. Polarisation

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1044]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 534])

Licht ist eine transversale elektromagnetische Welle. Das heisst, dass das elektrische und das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Nach Gleichung (9.2.2) ist zum Beispiel die Wellengleichung für das elektrische Feld durch $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ gegeben. Die Tatsache, dass wir eine Transversalwelle haben erfordert, dass $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ der Bedingung

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (10.1.1)$$

gilt.

Wenn wir nun, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Ausbreitungsrichtung der Welle in die x -Richtung legen, dann sind

- der Wellenvektor $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$
- und die Amplitude $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$

Diese Wahl erfüllt die Bedingung der Transversalität.

Es gibt zwei mögliche orthogonale Orientierungen von \mathbf{E}_0 sowie die daraus folgenden Linearkombinationen. Die Richtung, in die \mathbf{E}_0 zeigt ist die **Polarisationsrichtung**.

10.1.1. Polarisation durch Absorption

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1044])

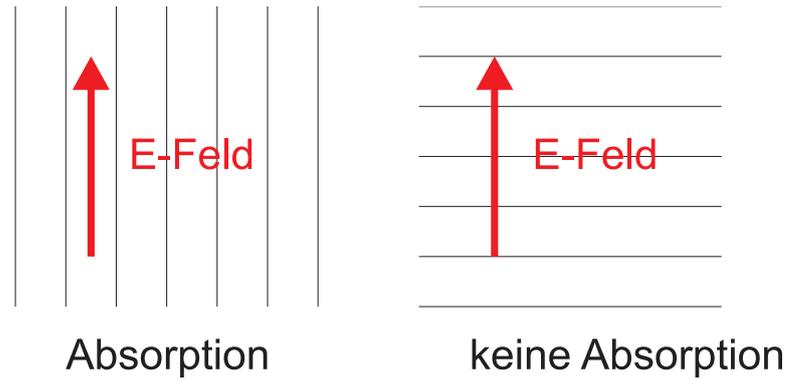


Abb. 10.1.: Polarisation und Absorption.

Wenn das elektrische Feld einer Mikrowellen entlang eines Drahtes zeigt, kann dieses Feld im Draht Ladungen bewegen und so Energie abgeben. Die Intensität der Welle und damit die die Absorption hängen von der POLARISATION ab.

Ebenso gibt es Moleküle mit Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, bei denen π -Elektronen beweglich sind, die wie Drähte wirken. Werden diese Moleküle orientiert zu einer Folie gemacht, so erhält man eine polarisierende Folie.

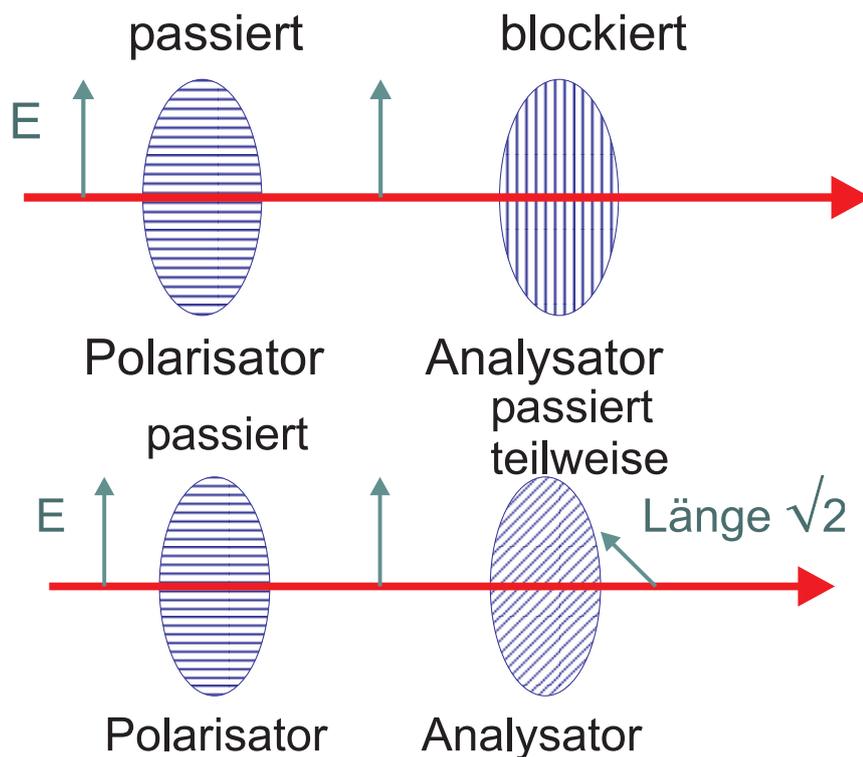


Abb. 10.2.: Licht durch einen Polarisator und einen Analysator mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der Analysator ist nun um $\pi/4$ gedreht.

Bei einer Anordnung von Analysator und Polarisator polarisiert der Polarisator das Licht. Der Analysator lässt nur die Projektion des \mathbf{E} -Feldes auf seine Durchlassachse durch. Für die Amplitude gilt

$$E = E_0 \cos \theta \quad (10.1.2)$$

wobei θ der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen von Polarisator und Analysator ist. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist $I \propto E^2$ gilt für die Intensität

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (10.1.3)$$

(GESETZ VON MALUS, nach Étienne Louis Malus). Wenn zwischen gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren eine optisch aktive Substanz eingebracht wird, kann mit dieser Anordnung die Grösse der optischen Aktivität gemessen werden¹.

Versuch 61:  **Versuch zur Vorlesung:**
[Malussches Gesetz: Licht mit Polarisator und Analysator](#)

¹Die Analyse von Spannungen in Bauteilen nachgebildet mit Plexiglas war eine wichtige Anwendung (heute gibt es Programme zur Finite-Elemente-Analyse)

Versuch 62:   Versuch zur Vorlesung:
Spannungsdoppelbrechung: Kunststoffmodelle (Versuchskarte O-008)

10.1.2. Polarisation durch Streuung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1046])

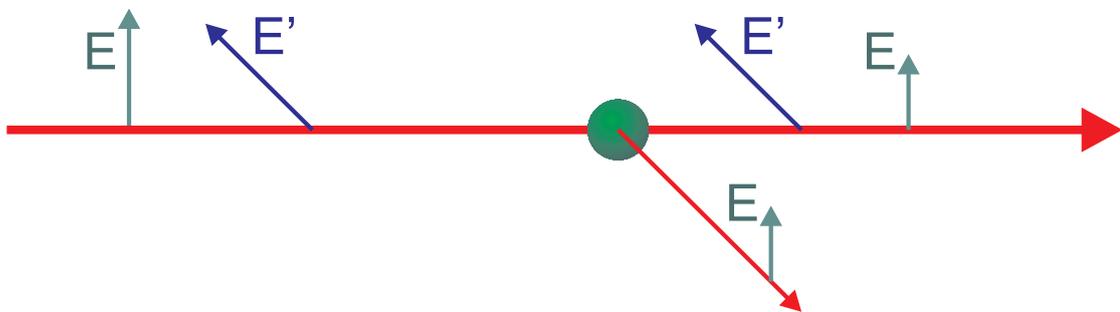


Abb. 10.3.: Polarisation durch Streuung.

Wenn Licht von links auf ein streuendes Teilchen (z.B. ein Wassertröpfchen) fällt, dann kann nur die Komponente des \mathbf{E} -Feldes, die auch senkrecht zur Streurichtung steht, eine Lichtwelle anregen. Die dazu senkrechte Komponente würde eine propagierende, longitudinal polarisierte Welle erzeugen. Propagierende, longitudinale Lichtwellen stehen aber im Widerspruch zu den Maxwell'schen Gleichungen und treten deshalb nicht auf.

Versuch 63:   Versuch zur Vorlesung:
Rayleigh-Streuung (Versuchskarte O-042, Video (VPN oder intern))

10.1.3. Polarisation durch Reflexion

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1047])

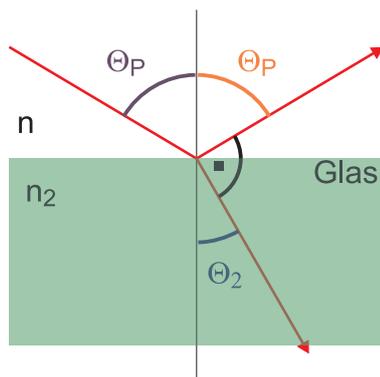


Abb. 10.4.: Winkel bei der Reflexion unter dem Brewster-Winkel.

Wenn Licht in ein dichteres Medium eindringt und es zur Reflexion (Siehe Abschnitt 12) und zur Brechung kommt gelten zwei Gesetze

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel (Impulserhaltung für die zur Grenzfläche tangentielle Komponenten des Lichtes)
- Das Gesetz von Snellius $n \sin(\theta_P) = n_2 \sin(\theta_2)$

Wenn nun der Winkel zwischen dem gebrochenen Licht und dem reflektierten Licht $\pi/2$ ist, haben wir wieder die Situation wie bei der Streuung: im reflektierten Licht kann keine Lichtwelle angeregt werden, deren Polarisationsrichtung (\mathbf{E} !) in der durch den einfallenden und gebrochenen Lichtstrahl definierten Einfallsebene liegt. Das heisst, der reflektierte Strahl ist vollkommen polarisiert mit der Polarisationssebene senkrecht zur Einfallsebene. Der Winkel θ_P heisst nach seinem Entdecker Sir David Brewster Brewster-Winkel. Eine Betrachtung der Winkel in der Abbildung ergibt, dass $\theta_P + \theta_2 = \pi/2$ ist. Damit wird der Brewster-Winkel

$$n \sin \theta_P = n_2 \sin(\theta_2) = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_P) = n_2 \cos(\theta_P) \quad (10.1.4)$$

und damit

$$\tan \theta_P = \frac{n_2}{n} \quad (10.1.5)$$

Für Glas ($n_2 = 1.5$) gegen Luft ($n = 1$) ist $\theta_P = \arctan(1.5) = 0.3128\pi = 56.31^\circ$. Der Brewster-Winkel wird zum Beispiel beim Resonator von Gaslasern angewandt um die Polarisationsrichtung zu definieren.



Versuch 64: Versuch zur Vorlesung:

Spiegelanalysator: Polarisation durch Reflexion (Versuchskarte O-115, Video (VPN oder intern))

10.2. Beugung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1109]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 527])

Die bei Licht auftretenden Beugungserscheinungen sind analog zu den Erscheinungen, die bei Wasserwellen auftreten. Beugung ist wichtig bei

- dem Auflösungsvermögen von Mikroskopen (nach Ernst Abbe). Die Beugung an der Öffnung der Objektivlinse limitiert die Auflösung, da zwei Objekte im Abstand d eine Beugung mit dem ersten Beugungsmaximum beim Winkel $\Theta = \arcsin\left(1.22\frac{\lambda}{d}\right)$ erzeugen. Wenn dieses erste Beugungsmaximum nicht in die Apertur der Linse fällt, sind die beiden Objekte nicht mehr getrennt abbildbar.
- der Berechnung der übertragenen Struktur bei Masken für die Halbleiterlithographie. Die Beugung an den mit < 100 nm definierten Schattenmasken für Halbleiters verändert das Bild. Bei Kontaktmasken tritt zusätzlich noch der TALBOTEFFEKT (nach Henry Fox Talbot, siehe auch [Wik24]) auf.
- der Holografie. Ein Hologramm ist ein auf fotografischem Wege erzeugtes Beugungsmuster. Dieses Beugungsmuster ist so, dass bei der Belichtung mit monochromatischem Licht² das ursprüngliche Wellenfeld wieder erzeugt wird. Im Gegensatz zu einer Fotografie ist bei der Holografie die Information über das ganze Aufnahmemedium verteilt. Das halbe Hologramm hat die gleiche Bildinformation wie das ganze Hologramm, aber mit einer schlechteren Auflösung.

Versuch 65:  Versuch zur Vorlesung:
Beugung an Spalt, Loch und Hindernis (Versuchskarte O-050, Video (VPN oder intern))

10.3. Absorption, Dispersion und Streuung

10.3.1. Absorption

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 547])

²Es gibt auch Hologramme, die mit weissem Licht arbeiten.

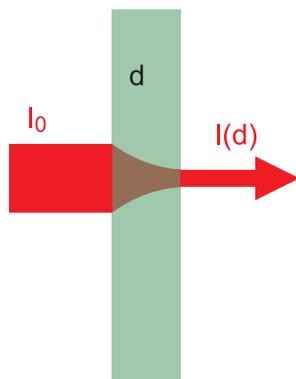


Abb. 10.5.: Absorption von Licht.

Wenn Licht durch Materie transportiert wird, dann gibt es, abhängig vom Material, eine Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Anteil der transportierten Energie absorbiert wird. Auf der Strecke dz verringert sich die Intensität um

$$dI = -\alpha I dz \quad (10.3.1)$$

Diese Gleichung kann integriert werden und führt zum Beer-Lambertschen Absorptionsgesetz

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \quad (10.3.2)$$

In beiden Gleichungen ist α der ABSORPTIONSKOEFFIZIENT.

10.3.2. Dispersion und Kommunikation

Im allgemeinen Falle hängt die Phasengeschwindigkeit einer Welle von der Frequenz und vom Medium ab. Das heisst für Licht, dass jede Farbe eine eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.

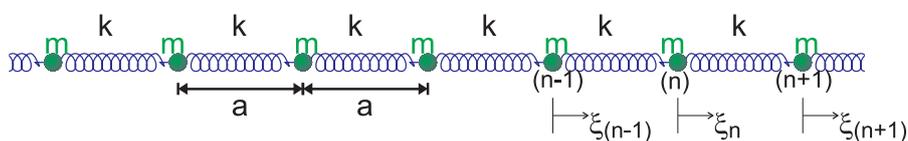


Abb. 10.6.: Federmodell für die Dispersion nach Känzig[Kän78].

Wir betrachten eine longitudinale Welle auf einem Feder-Masse-System. Die Bewegungsgleichung für die n -te Masse ist

$$m\ddot{\xi}_n = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) = k(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - 2k\xi_n \quad (10.3.3)$$

analog zur Gleichung (8.6.3) für ein inneres Pendel bei gekoppelten Pendeln. Bei sehr kleinen Frequenzen schwingen alle Massen in Phase: wie bei den gekoppelten Pendeln gibt die gleichsinnige Bewegung aller Massen die tiefste Frequenz, die hier, da wir eine unendliche Anzahl Massen annehmen, null ist. Die maximale Frequenz erhält man dann, wenn jeweils zwei benachbarte Massen gegensinnig schwingen. Eine höher Schwingungsfrequenz ist nicht möglich. Die minimale Wellenlänge ist $\lambda_{min} = 2a$ und entsprechend $k_{max} = \frac{\pi}{a}$. Wir setzen $\Omega_0^2 = \frac{4k}{m}$ und erhalten

$$\ddot{\xi}_n = \Omega_0^2 \left[\frac{1}{4} (\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - \frac{1}{2} \xi_n \right] \quad (10.3.4)$$

Wir setzen als vorläufige Lösung für $\lambda > 2a$ an: $\xi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Da die Schwingung nur für diskrete Positionen definiert ist, ersetzen wir $x = na$ und erhalten als endgültigen Lösungsansatz

$$\xi_n = \xi(n, t) = Ae^{i(kna - \omega t)} \quad (10.3.5)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$-\omega^2 e^{ikna} = \Omega_0^2 \left[\frac{1}{4} (e^{ik(n-1)a} + e^{ik(n+1)a}) - \frac{1}{2} e^{ikna} \right] \quad (10.3.6a)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \Omega_0^2 \left[1 - \frac{1}{2} (e^{ika} + e^{-ika}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Omega_0^2 [1 - \cos(ka)] \\ &= \Omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \end{aligned} \quad (10.3.6b)$$

Die Dispersionsbeziehung für die Feder-Masse-Kette ist

$$\omega(k) = \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \quad (10.3.7)$$

- Für lange Wellen $\lambda \gg a$ oder $ka \ll 2\pi$ ist $\sin \frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2}$. Damit ist $\omega(k) \approx \frac{1}{2} \Omega_0 ka$.

Mit der Definition der PHASENGESCHWINDIGKEIT $c = \omega/k$ Erhalten wir

$$c \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = \frac{1}{2} \sqrt{km}$$

Die Gruppengeschwindigkeit $c_G = \frac{d\omega}{dk}$ ist

$$c_g \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = c$$

- Für Wellen mit $\lambda = \lambda_{min} = 2a$ ist die Phasengeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{\Omega_0}{\pi/a} = \frac{\Omega_0 a}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{km}$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \frac{d}{dk} \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \Big|_{\pi/a} = \frac{a}{2} \cos \frac{ka}{2} \Big|_{\pi/a} = 0$$

- Für $\lambda < 2a$ wird die Welle exponentiell gedämpft.

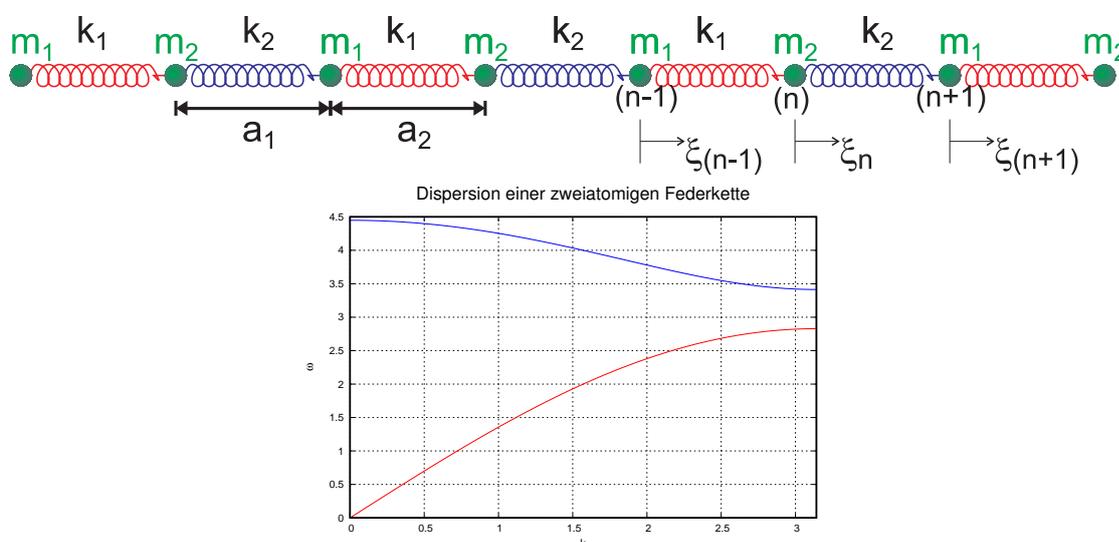


Abb. 10.7.: Dispersionsrelation für Federketten mit zwei unterschiedlichen Atomen. Oben ist die Federkette dargestellt, unten die Dispersionsrelation.

Wenn eine Federkette mit einer regelmässigen Anordnung zweier ungleicher Massen gebildet wird, tritt zum von den vorherigen Ausführungen bekannten AKUSTISCHEN ZWEIG ein optischer Zweig. Zusätzlich gibt es Frequenzen, für die es keinen reellen \mathbf{k} -vektor gibt. Diese Frequenzen (oder über $E = \hbar\omega$ auch diese Energien) sind keine propagierenden Wellen möglich. Gibt es neben longitudinalen auch transversale Wellen, zeigt die Dispersionsrelation nicht einen sondern drei Zweige akustischer Phononen.

Schwerewellen im tiefen Wasser haben die Dispersionsbeziehung

$$c^2 = \frac{g}{k} = \frac{1}{2\pi} g\lambda \quad (10.3.8)$$

Eine Konsequenz ist, dass Tsunamis, Flutwellen von Erdbeben, auf dem offenen Meer eine sehr grosse Wellenlänge und auch eine sehr hohe Geschwindigkeit (mehrere $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bis zu $1000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) haben. Da ihre Energie auf eine so grosse Distanz

verteilt ist, hebt sich der Meeresspiegel nur um einen bis einige 10 Meter. Diese gesamte Energie wird dann an einem Strandabschnitt deponiert und richtet grosse Zerstörungen an.

- $c = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Dann ist $\lambda = 2\pi c^2/g \approx 2 \cdot 3 \cdot 300 \cdot 300/10 = 54\,000 \text{ m}$
- Bei einer Höhe von 10 m ist der Energiegehalt pro Meter Strand $E_{\text{pot}} = 54\,000 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}/2/\pi = 85 \text{ kJ}$ für jeden Wellenberg (dies entspricht dem Aufprall einer Masse von 2000 kg mit $12.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf 2 m Breite.)

Ein Puls oder eine Wellengruppe besteht aus Wellen benachbarter Frequenz. Analog zur Modulation (siehe Abschnitt 8.4.3) und der Gleichung (8.4.7)³ besteht ein Puls aus einer Einhüllenden sowie einer Phase, die für sich aber keine Information trägt. Eine längere Rechnung[Kän78] ergibt, dass die resultierende Wellenfunktion aus harmonischen Welle $e^{i(k_0x - \omega t)}$ sowie der Modulation $G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right)$. Die resultierende Welle ist

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0x - \omega t)} G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right) \quad (10.3.9)$$

Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} \quad (10.3.10)$$

Bei unserem Feder-Masse-System ist $v_G = 0$ wenn $\lambda = 2a$ ist. Das heisst, der Puls, der die Information trägt, ist **ortsfest**. Wenn v_G nicht konstant ist, verändert sich die Form des Pulses mit der Zeit, da die verschiedenen Frequenzanteile sich unterschiedlich schnell ausbreiten.

Lösungsmöglichkeiten

- Dispersionskompensation. Sie ist aufwendig und wird hauptsächlich bei Kurzpuls-Lasersystemen angewandt.
- Betrieb des Systems bei einer Wellenlänge, bei der die Dispersion minimal, also v_G möglichst konstant ist. Dies wird bei der optischen Kommunikation angewandt (Wellenlängen 1300 nm und 1500 nm).
- Man setzt die Datenrate auf niedrigere Werte, verbreitert also die Pulse und minimiert so die Fehler durch die Dispersion. Bis zu einer Verringerung der übertragenen Datenrate um den Faktor 2 kann der Geschwindigkeitsverlust meist durch die Anwendung von Kompressionsalgorithmen minimiert werden.

³Dabei muss ωt durch $kx - \omega t$ ersetzt werden.



Versuch 66: Versuch zur Vorlesung:

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit: Modellversuch (Versuchskarte SW-093, Video (VPN oder intern))

10.3.3. Streuung

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 553])

Alle Teilchen, ob sie sehr viel kleiner als die Wellenlänge des Lichtes sind wie Moleküle oder ob sie etwa die gleiche Grösse wie die Wellenlänge haben, streuen Licht. Moleküle und Atome werden zur Berechnung der Streuung als Dipolstrahler betrachtet.

- Zwei Ladungen $+Q$ und $-Q$ in einem Molekül vom Querschnitt A erzeugen das elektrische Feld $E = Q/(\epsilon_0 A)$
- Das resultierende Dipolmoment, wenn die Ladungen im Abstand d sind, ist $p = Qd \approx \epsilon_0 A d E \approx \epsilon_0 V E$. dabei ist $V = Ad$ das Volumen des Moleküls.
- Die Polarisierbarkeit des Moleküls ist $p/E \approx \epsilon V$
- Wenn diese molekulare Antenne schwingt, so strahlt sie nach H. Hertz die Leistung $P = \omega^4 p^2 / (6\pi\epsilon_0 c^3) \approx \omega^4 \epsilon_0 V^2 E^2 / (6\pi\epsilon_0)$ ab.
- Diese Leistung entzieht die Streuung sie der Einfallenden Welle mit der Intensität $I = c\epsilon_0 E^2$.

Ein Molekül hat also den Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{P}{I} \approx \frac{\omega^4 V^2}{6\pi c^4} \quad (10.3.11)$$

Blaues Licht wird also durch Moleküle sehr viel stärker gestreut als rotes Licht. Wir berechnen die Eindringtiefe oder die mittlere freie Weglänge für Licht

- Mittlere Freie Weglänge: $\ell = 1/(n\sigma)$, wobei n die Molekülzahldichte ist.
- Also ist $\ell = \frac{6\pi c^4}{nV^2\omega^4} = \frac{6\pi\lambda^4}{16\pi^4 nV^2} = \frac{3}{8\pi^3} \frac{\lambda^4}{nV^2}$
- Das Molekülvolumen ist etwa $V \approx 5 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$
- Die Eindringtiefe ist dann $\ell = 160\lambda^4$ (wobei ℓ in km und λ in μm gemessen werden).

Wellenlänge in nm	Farbe	Eindringtiefe in km
400	violett	4
600	gelb	20
800	rot	65

Tab. 10.1.: Eindringtiefen von Licht in Luft.

Es ist deshalb auch nicht verwunderlich, dass die Alpen von Ulm aus gesehen nur schlecht zu sehen sind. Diese RAYLEIGH-STREUUNG ist für den blauen Himmel und das rötliche Licht am Morgen und am Abend verantwortlich. Ist die Atmosphäre dichter, dann nimmt die Streuung zu. Licht wird dann nicht mehr propagierend sondern diffusiv transportiert. So braucht ein Photon aus dem Sonneninneren etwa ein Jahr um die Oberfläche zu erreichen.

Für grössere Teilchen, $d \approx \lambda$ oder grösser, folgt die Streuung dem Gesetz von Mie (MIE-STREUUNG). In diesem Bereich ist die Streuung unabhängig von der Wellenlänge. Deshalb sieht das gestreute Licht weiss aus, zum Beispiel das an Wolken oder am Nebel gestreute Licht.

11. Das Fresnel-Huygenssche Prinzip

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 163, 650]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 328]) (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1028])



Versuch 67: Versuch zur Vorlesung:

Huygen'sches Prinzip: Wellenwanne (Versuchskarte O-015)

Die Beugung von Wellen an einem Objekt kann mit dem PRINZIP VON FRESNEL-HUYGENS erklärt werden.

Dieses Prinzip kann mit Hilfe von sphärischen Wellen und der Fourier-Transformation motiviert werden. Wir betrachten das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle in einer Ebene, praktischerweise mit $z = 0$. Die komplexe Amplitude (ein Weg, die Phase mit zu berücksichtigen) ist in dieser Ebene ortsabhängig. Der Mittelpunkt der Kugelwelle wird dabei nach \mathbf{r}_0 verschoben.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(i(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - \omega t)) \quad (11.0.1)$$

Die resultierende Welle kann als Summe von Einzelwellen, oder im kontinuierlichen Falle als Integral geschrieben werden.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(i(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - \omega t)) d\mathbf{r}_0 \quad (11.0.2a)$$

Das Integral hängt nicht von t ab

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \exp(ik|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) d\mathbf{r}_0 \quad (11.0.2b)$$

In Komponenten haben wir $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$. Wir setzen $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)^T = (x - x_0, y - y_0, z)^T$. Mit der neuen Variablen $\boldsymbol{\rho}$ und $d\rho_x = -dx_0$ und $d\rho_y = -dy_0$ und $d\mathbf{r}_0 = (-dx_0)(-dy_0) = d\boldsymbol{\rho}$ lautet das Integral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \iint_{\text{Ebene}} \frac{\mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho})}{\rho} \exp(ik\rho) d\boldsymbol{\rho} \quad (11.0.3)$$

Weit weg von der Ebene $z = 0$ kann man schreiben, dass $\rho \approx \rho_0$ ist. Wir können dann schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\exp(-i\omega t)}{\rho_0} \iint_{\text{Ebene}} \mathbf{E}_0(\boldsymbol{\rho}) \exp(ik\rho) d\boldsymbol{\rho} \quad (11.0.4)$$

Aus dieser Gleichung folgt, die komplexe Amplitude einer elektromagnetischen Welle, die in einer Ebene bekannt ist, näherungsweise als Fouriertransformation beschrieben werden kann. Genauere Analysen (später) sind die Kirchhoff-Theorie, die Fraunhofer-Theorie und die Fresnel-Theorie.

Andererseits kann, wenn vom Integral zurück zu einer Summe gegangen wird, und die $1/\rho$ -Abhängigkeit vernachlässigt wird, das FRESNEL-HUYGENSSCHE PRINZIP formuliert werden.

Das Fresnel-Huygenssche Prinzip

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen **kugelförmigen** Elementarwelle, die die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle hat. Die **Einhüllende** aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt. (nach Augustin Fresnel und Christiaan Huygens)

Man nimmt eine Momentaufnahme des Wellenbildes eines bestimmten Wellenberges und nimmt jeden Punkt auf diesem Wellenberg als Ausgangspunkt einer neuen KREISWELLE (KUGELWELLE in 3 Dimensionen).

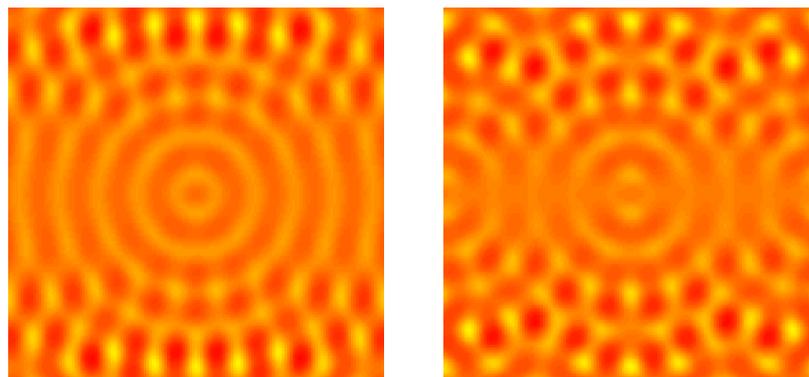


Abb. 11.1.: HUYGENSSCHES PRINZIP. Links die Interferenz von 5 KREISWELLEN auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 9 KREISWELLEN.

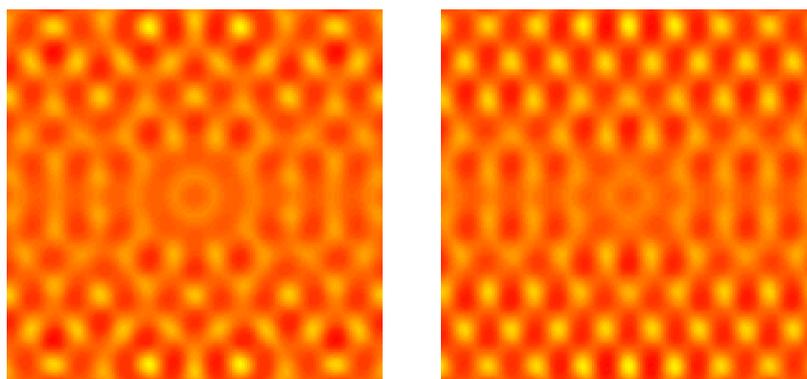


Abb. 11.2.: HUYGENSSCHES PRINZIP. Links die Interferenz von 17 KREISWELLEN auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 33 KREISWELLEN.

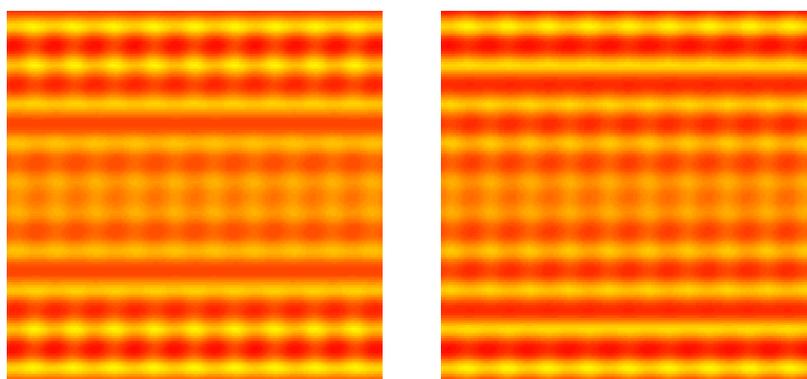


Abb. 11.3.: HUYGENSSCHES PRINZIP. Links die Interferenz von 65 KREISWELLEN auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 129 KREISWELLEN.

Die Beugung an einem Spalt kann so verstanden werden, dass nicht mehr KREISWELLEN aus einem grossen Bereich, sondern nur noch KREISWELLEN aus dem Spalt zum neuen WELLENBILD beitragen.

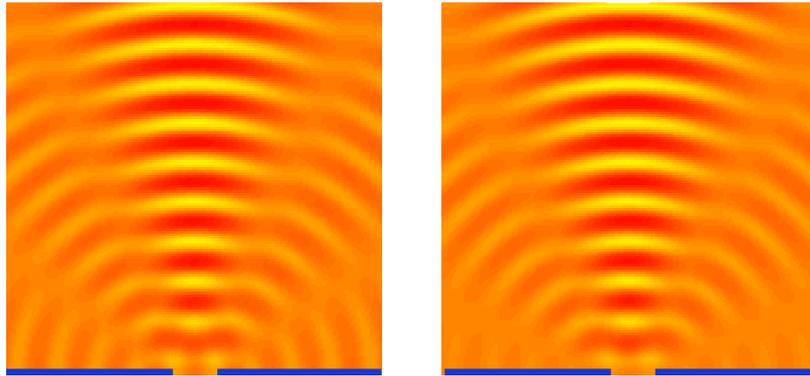


Abb. 11.4.: HUYGENSSCHES PRINZIP. INTERFERENZMUSTER an einem Spalt. Links die Interferenz von 5 KREISWELLEN auf einer horizontalen Linie im Spalt. Rechts das gleiche mit 9 KREISWELLEN.

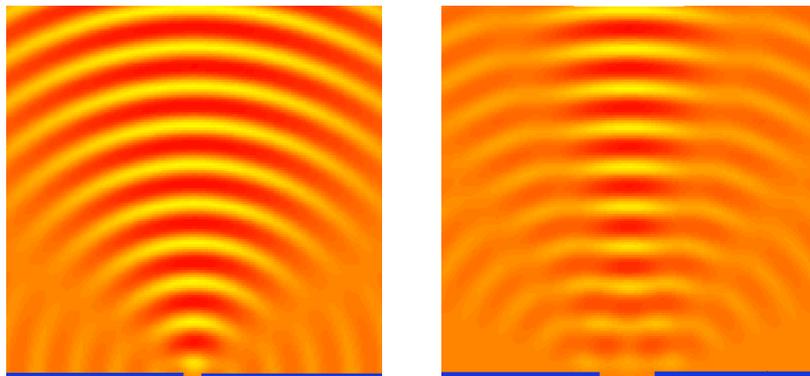


Abb. 11.5.: HUYGENSSCHES PRINZIP. INTERFERENZMUSTER an einem Spalt. Links das INTERFERENZMUSTER bei einer Spaltbreite von 1 Wellenlänge, rechts von 3 Wellenlängen.

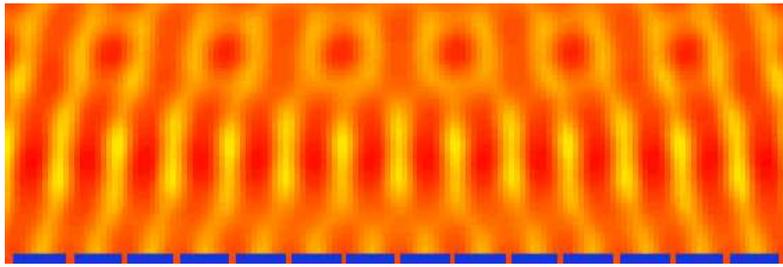


Abb. 11.6.: HUYGENSSCHES PRINZIP. INTERFERENZMUSTER an einem Gitter. Die im Bild sichtbare Drehung rührt daher, dass nur eine endliche Anzahl von Gitterschlitzen berücksichtigt wurde.

11.1. Interferenz von Kugelwellen

Nach dem Fresnel-Huygensschen Prinzip interferieren Kugelwellen. Bei grossem ρ (siehe auch Gleichung (11.0.4)) und achsnahen Positionen ($\rho_z^2 \gg (\rho_x^2 + \rho_y^2)$) ist

$$\rho = \sqrt{\rho_z^2 + (\rho_x^2 + \rho_y^2)} = \sqrt{\rho_z^2 \left(1 + \frac{(\rho_x^2 + \rho_y^2)}{\rho_z^2}\right)} \approx \rho_z \left(1 + \frac{(\rho_x^2 + \rho_y^2)}{2\rho_z^2}\right) \approx \rho_z \quad (11.1.1)$$

Situationen, bei denen Gleichung (11.1.1) gilt, heissen PARAXIAL, die Näherung also PARAXIALE NÄHERUNG.

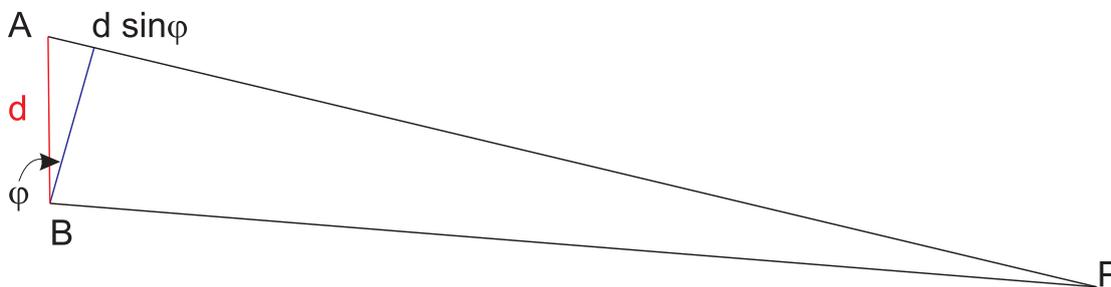


Abb. 11.7.: Interferenz zweier Wellen aus A und B

Die Interferenz von Kugelwellen kann bei etwa gleichen Amplituden nach Abbildung 11.7 berechnet werden. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass der Weglän-

genunterschied von A nach P und von B nach P $\Delta\ell = d \sin(\varphi)$ ist. Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn

$$\sin(\varphi) = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.1.2)$$

ist. In der PARAXIALEN NÄHERUNG (kleine φ) gilt auch

$$\varphi = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.1.3)$$

Interferenzminima treten bei

$$\sin \varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.1.4)$$

oder, in der PARAXIALEN NÄHERUNG (kleine ϕ), bei

$$\varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.1.5)$$

Die Lage der INTERFERENZEXTREMA hängen von der Wellenlänge ab.

11.2. Interferenzmuster an einem Doppelspalt

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hee05, pp. 572]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 358]) (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1116])

Versuch 68:   **Versuch zur Vorlesung:**
Beugung am Doppelspalt (Versuchskarte O-123)

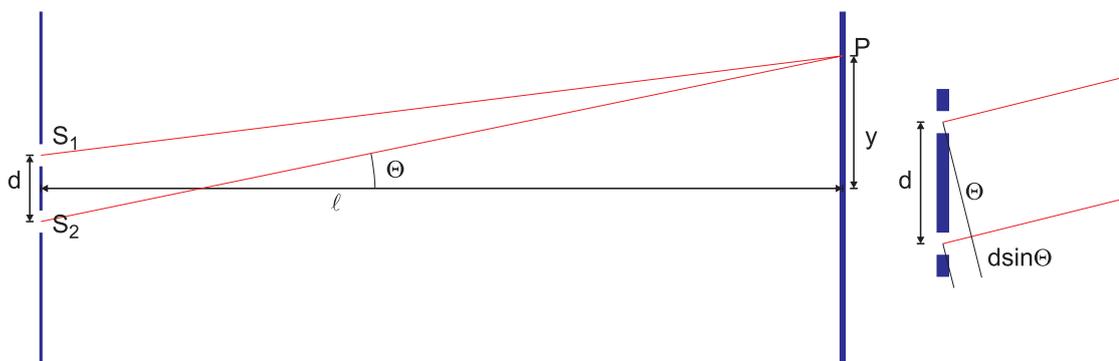


Abb. 11.8.: Strahlengang bei einem Doppelspalt

Aus den Interferenzbedingungen wissen wir, dass wir

konstruktive Interferenz (helle Streifen) bei

$$d \sin(\Theta) = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.2.1)$$

destruktive Interferenz (dunkle Streifen) bei

$$d \sin(\Theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.2.2)$$

haben. Wir berechnen nun den Verlauf der INTENSITÄT.

Am Punkt P ist die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\Theta) \quad (11.2.3)$$

Der m -te helle Streifen hat von der Achse den Abstand y_m . Nach der Skizze ist der Winkel dann durch

$$\tan \Theta = \frac{y_m}{\ell} \quad (11.2.4)$$

gegeben. Wir verwenden, dass für kleine Winkel Θ gilt: $\tan(\Theta) \approx \sin(\Theta) \approx \Theta$. Damit folgt

$$d \sin(\Theta) \approx d \tan(\Theta) = d \frac{y_m}{\ell} \approx m\lambda \quad (11.2.5)$$

Der m -te helle Streifen liegt also bei

$$y_m \approx m \frac{\lambda \ell}{d} \quad (11.2.6)$$

Der Abstand zweier Streifen ist

$$\Delta y = \frac{\lambda \ell}{d} \quad (11.2.7)$$

Wenn wir die Amplituden der Felder verwenden (die elektrischen Felder E), können wir sagen, dass die beiden Felder $E_1 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t)$ und $E_2 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + \delta)$ am Punkt P interferieren.

$$E = E_1 + E_2 = |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t) + |\mathbf{E}_{0i}| \sin(\omega t + \delta) \quad (11.2.8)$$

Mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ bekommt man

$$E = 2 |\mathbf{E}_{0i}| \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \quad (11.2.9)$$

Die INTENSITÄT ist dann (ohne Herleitung)

$$I = 4n \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{e}_{0i}|^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = 2n\epsilon_0 c |\mathbf{e}_{0i}|^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (11.2.10)$$

wobei n der Brechungsindex des Mediums ist. Mit $d \sin(\Theta) \approx yd/\ell$ wird die Phase

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\Theta) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{\ell} \quad (11.2.11)$$

und mit $I_0 = \frac{n\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{e}_{0i}|^2$

$$I(y) \approx 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi y d}{\lambda \ell} \right) \quad (11.2.12)$$

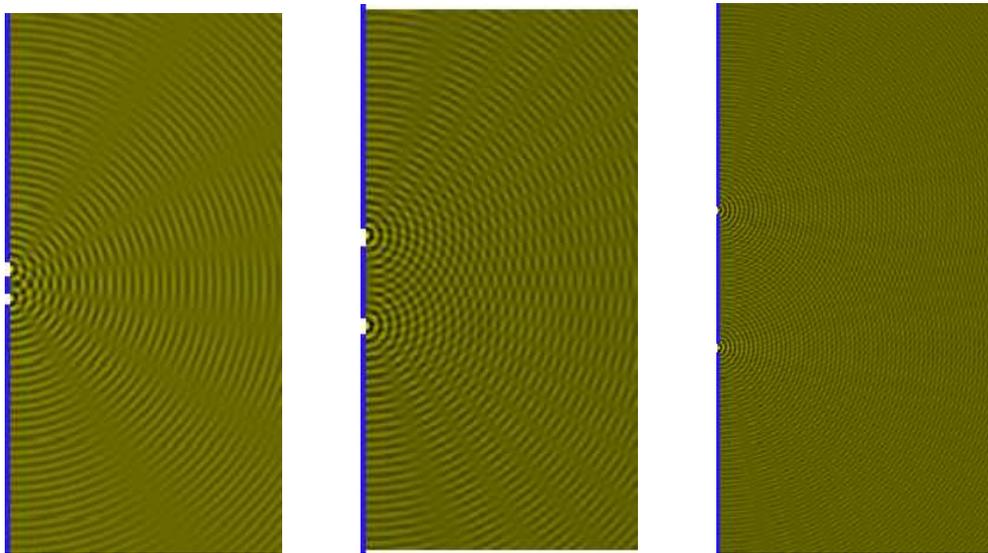


Abb. 11.9.: Beugung an einem Doppelspalt. Links ist $d = 3\lambda$, in der Mitte $d = 10\lambda$ und rechts $d = 30\lambda$ (rechts ist der gezeigte Bildausschnitt grösser).

Die Interferenz an einem Doppelspalt hängt von der Polarisationsrichtung ab.

Versuch 69:   **Versuch zur Vorlesung:**
Interferenz mit Polarisation ([Versuchskarte AT-051](#))

12. Reflexion und Brechung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1059]) (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1030]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 481])

Reflexion und Brechung sind die Phänomene, die ein Grundverständnis von Linsen, Mikroskopen aber auch von Glasfasern ermöglicht. Grundlage für die Diskussion ist das Huygens'sche Prinzip (Siehe Abschnitt 11).

12.1. Lichtstrahlen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1028]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 481])

Wir verwenden Lichtstrahlen (siehe Abschnitt 9.2.1). Die Richtung des Wellenvektors definiert die Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls. Eine ebene Welle ist lateral unendlich ausgedehnt. Für Lichtstrahlen heisst dies, dass sie, streng gesehen, nur dann angewendet werden dürfen, wenn die Ausdehnungen gross gegen die Wellenlänge λ des Lichtes sind.

12.2. Reflexion

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1030]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 483])

Versuch 70:  **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Reflexion (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

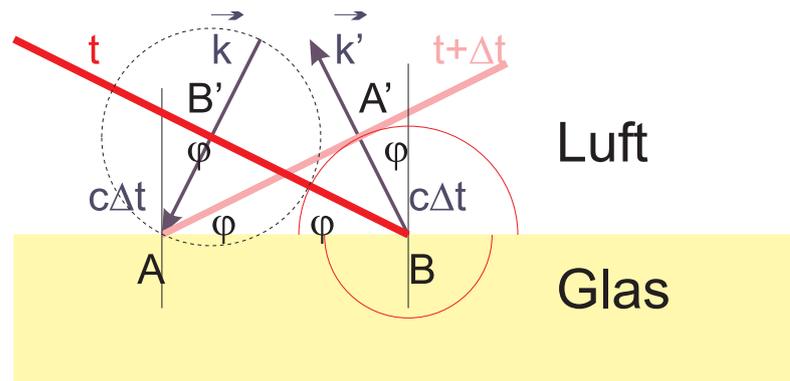


Abb. 12.1.: Geometrie der Reflexion.

Wir betrachten eine Welle, die sich mit dem Wellenvektor \mathbf{k} sich auf die Grenzfläche Luft-Glas hin bewegt. Eingezeichnet ist rot der Wellenberg, der durch B' zur Zeit t geht. Dieser Wellenberg berührt die Grenzfläche in B . An beiden Orten wird eine Huygens'sche Elementarwelle (Siehe Abschnitt 11) ausgelöst. Nach der Zeit Δt hat der Wellenberg, der zur Zeit t durch B' ging, A erreicht. Nach dem Huygensschen Prinzip (Siehe Abschnitt 11) hat auch die in B' startende Elementarwelle A erreicht. Die Elementarwelle aus B ist nun bei A' . Da wir keine Annahme über Zeiten und Abstände gemacht haben, muss diese Elementarwelle Teil eines konstruktiv überlagernden Systems von Elementarwellen sein, die eine zweite ebene Welle mit dem Wellenvektor \mathbf{k}' erzeugen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die beiden Elementarwellen gleich ist, da die Verbindungsstrecken $\overline{B'A}$ und $\overline{BA'}$ gleich lang sind und beide Teile eines rechtwinkligen Dreiecks sind, müssen alle Winkel gleich sein. Deshalb ist der Neigungswinkel von \mathbf{k}' zur Senkrechten gleich dem Neigungswinkel von \mathbf{k} zur Senkrechten. Es folgt das Reflexionsgesetz

Bei der Reflexion gilt:
Einfallswinkel = Ausfallswinkel

In einem Medium bewegt sich Licht langsamer: die Lichtwelle regt die gebundenen Elektronen zum Schwingen an. Diese erzeugen Huygens'sche Elementarwellen (Siehe Abschnitt 11), aber mit einer Phasenverschiebung (Siehe Abschnitt 8.3) oder, in anderen Worten, einer Zeitverzögerung. Dies bedeutet, dass Licht sich langsamer ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Medium ist

$$c_m = \frac{c}{n} \quad (12.2.1)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n der Brechungsindex des Mediums ist¹.

Bei senkrechtem Einfall ist die Intensität des reflektierten Lichtes (ohne Beweis)

¹Es ist auch $n = \epsilon^2$, wobei ϵ die relative Permittivität bei der Frequenz des Lichtes ist

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0 \quad (12.2.2)$$

Dabei sind n_1 und n_2 die Brechzahlen der beiden Medien und I_0 die einfallende Intensität. Bei $n_1 = 1$ (Luft) und $n_2 = 1,33$ (Wasser) ist $I/I_0 = 0,02$. Für $n_2 = 1,5$ (Glas) ist $I/I_0 = 0,04$ und für $n_2 = 2,5$ (etwa Diamant) ist $I/I_0 = 0,18$. Bei $n_2 = 3,5$ ist $I/I_0 = 0,31$!

Bei zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen heisst dasjenige das **optisch dichtere Medium**, dessen Brechzahl grösser ist.

12.3. Brechung

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1032]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 485])

Versuch 71:   **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Brechung (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

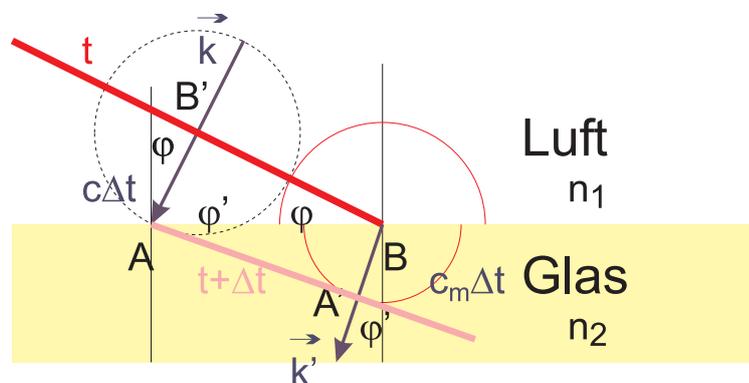


Abb. 12.2.: Geometrie der Brechung.

Wir betrachten nun den Weg, den das Licht im Inneren eines Mediums zurücklegt. Wir berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit im Medium um den Brechungsindex n kleiner ist. Aus dem rechtwinkligen Dreieck wissen wir, dass

$$\overline{AB} \sin \phi = \overline{AB'} \quad (12.3.1a)$$

$$\overline{AB} \sin \phi' = \overline{BA'} \quad (12.3.1b)$$

Weiter ist

$$\overline{AB'} = \frac{c}{n_1} \Delta t \quad (12.3.2a)$$

$$\overline{BA'} = \frac{c}{n_2} \Delta t \quad (12.3.2b)$$

Also gilt

$$\frac{\frac{c}{n_1} \Delta t}{\sin \phi} = \frac{\frac{c}{n_2} \Delta t}{\sin \phi'} \quad (12.3.3)$$

Wir kürzen mit $c\Delta t$ und setzen $\phi = \phi_1$ und $\phi' = \phi_2$ und erhalten das SNELLIUS'SCHE BRECHUNGSGESETZ (nach Snellius).

Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad (12.3.4)$$

Bei diesem Gesetz gibt es nur dann immer eine Lösung, wenn $n_1 \leq n_2$ ist. Sonst gibt es den Winkel der Totalreflexion. Wenn der vom optisch dichteren Medium einfallende Lichtstrahl gegen die Grenzflächennormale den Winkel ϕ_{tot} hat und der Winkel des resultierenden Lichtstrahls gegen die Grenzflächennormale im optisch dünneren Medium $\pi/2$ ist, hat das Brechungsgesetz gerade noch eine reelle Lösung.

$$\phi_{tot} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad \text{mit } n_1 < n_2 \quad (12.3.5)$$

Für Winkel, die grösser als ϕ_{tot} sind, wird Licht aus dem optisch dünneren Medium total reflektiert. Die Reflexion geschieht in einer Tiefe von etwa 100 nm innerhalb des optisch dünneren Mediums.

12.4. Totalreflexion und optische Kommunikation

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1035]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 485])

Versuch 72:   **Versuch zur Vorlesung:**
Wasserstrahl als Lichtleiter: Totalreflexion (Versuchskarte O-72)

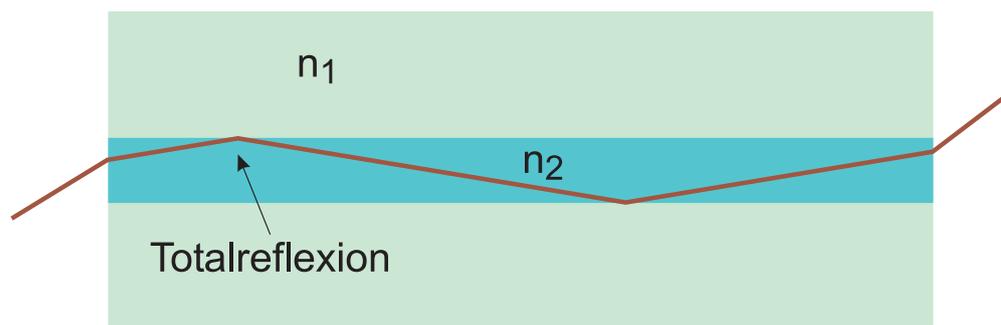


Abb. 12.3.: Transport von Licht in einer Stufenindexfaser.

Wenn Licht mit einem Winkel nahe der Achse der optischen Faser in diese eingekoppelt wird, dann wird das Licht mit Totalreflexion transportiert. Nur Licht, das innerhalb des Akzeptanzwinkels den Faserkern trifft, wird weiter transportiert. Wenn die Faser gekrümmt wird, dann verlässt ein Teil des Lichtes die Faser: Krümmungen in der Faser erhöhen die Verluste.

Wenn der Faserkern den Durchmesser d hat, ist der effektive Weg vom Winkel α gegen die Achse abhängig. Die Hypotenuse ist $\ell_H = d / \sin \alpha$ lang, der direkte Weg wäre $\ell = d / \tan \alpha$. Die relative Längenänderung ist

$$\frac{\ell_H}{\ell} = \frac{d}{\sin \alpha} \frac{\tan \alpha}{d} = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (12.4.1)$$

Die Laufzeit hängt also davon ab, wie das Licht durch eine Glasfaser läuft. Zusätzlich tritt Dispersion auf. Bei allen Gläsern ist

$$n_{\text{blau}} > n_{\text{grün}} > n_{\text{gelb}} > n_{\text{rot}} \quad (12.4.2)$$

Deshalb ist die Laufzeit für die verschiedenen Farben auch unterschiedlich. Da $c_{\text{Medium}} = c / n_{\text{Medium}}$ ist, ist auch

$$c_{\text{blau}} < c_{\text{grün}} < c_{\text{gelb}} < c_{\text{rot}} \quad (12.4.3)$$

12.5. Prismen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1036]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 487])

Versuch 73:  **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Prisma (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

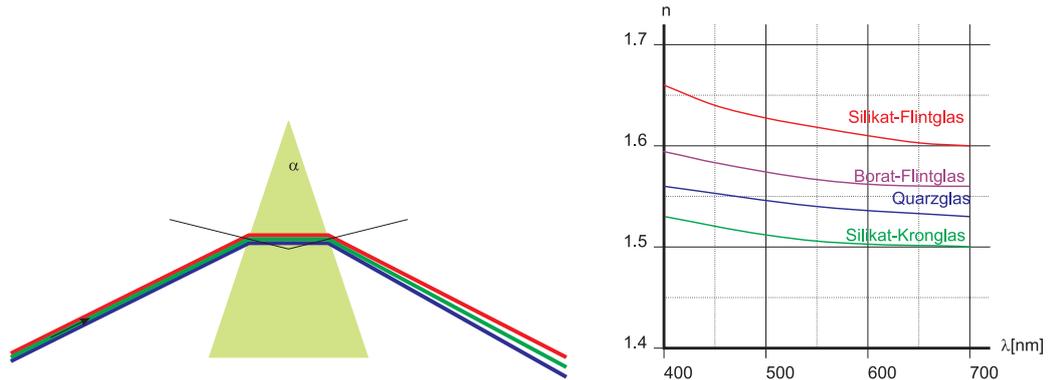


Abb. 12.4.: Links: Strahlengang durch ein Prisma. Rechts: Dispersion einiger Materialien.

Durch die Dispersion des Lichtes, das heißt, dass die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt, werden die verschiedenen Farben unterschiedlich gebrochen. Jedes mal, wenn Licht durch die Grenzfläche Luft-Materie geht, werden unterschiedliche Farben unterschiedlich gebrochen. Dies bewirkt die folgenden Effekte:

- die Chromatische Aberration bei Linsen (Farbsäume)
- die Möglichkeit, ein Prisma als Spektralapparat zu verwenden
- das Auseinander laufen von Signalen in Glasfasern
- der Regenbogen

13. Optische Instrumente

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1089]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 488])

Optische Instrumente bestehen aus Spiegeln, eben oder gekrümmt, und Linsen. Dazu kommen Öffnungen, Aperturen genannt, sowie Blenden.

13.1. Spiegel

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1059])

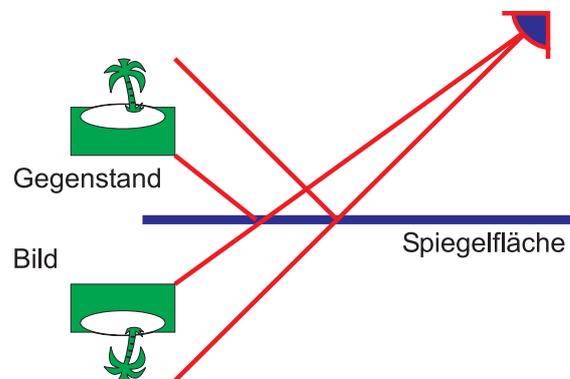


Abb. 13.1.: Ebener Spiegel.

Blickt man in einen ebenen Spiegel, so sieht man ein virtuelles Bild des Gegenstandes. Bei einem perfekten Spiegel ist das Bild nicht von einem wirklichen Gegenstand zu unterscheiden, ausser: links und rechts sind vertauscht. Eine andere Sichtweise ist auch, dass links und rechts bleiben, aber dass vorne und hinten vertauscht sind. Mehrere Spiegel erlauben Mehrfachbilder. Zwei Spiegel, die senkrecht aufeinander stehen, reflektieren das Licht in die gleiche Richtung zurück, aus der es gekommen ist.

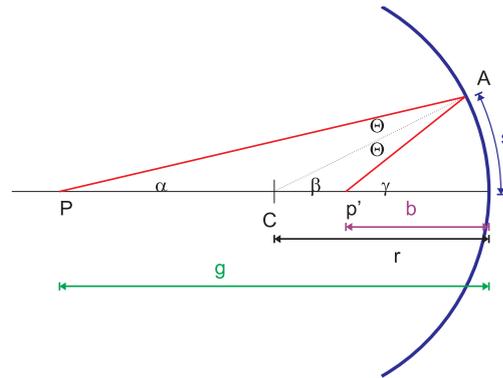


Abb. 13.2.: Gekrümmter Spiegel.

Versuch 74:  **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Gekrümmte Spiegel (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

Bei einem gekrümmten Spiegel wird der Gegenstand P in das Bild P' abgebildet. C ist der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, deshalb sind die Winkel Θ der einfallenden und reflektierten Strahlen zu dieser Linie gleich. Es gilt (Aussenwinkel)

$$\beta = \Theta + \alpha \quad (13.1.1)$$

und (auch Aussenwinkel)

$$\gamma = \alpha + 2\Theta \quad (13.1.2)$$

Wir eliminieren Θ

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (13.1.3)$$

Für kleine Winkel (PARAXIALE NÄHERUNG) gilt, dass $\alpha \approx s/g$, $\beta = s/r$ und $\gamma = s/b$ ist, wobei g die Gegenstandsweite, b die Bildweite und r der Krümmungsradius des Spiegels ist. Eingesetzt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (13.1.4)$$

Wenn der Gegenstand im unendlichen ist, $g = \infty$ ist $b = r/2$. Wir nennen diese Weite die

Brennweite

$$f = \frac{r}{2} \quad (13.1.5)$$

Die Abbildungsgleichung, die nicht nur für sphärische Spiegel gilt, ist also

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (13.1.6)$$

Abbildungsgleichung eines sphärischen Spiegels

Der obige Spiegel ist ein Konkavspiegel (französisch: la cave: Keller (mit einem Kellergewölbe)). Bei einem Konvexspiegel gilt die Abbildungsgleichung auch, die Brennweite ist aber negativ.

Spiegel sind in weiten Wellenlängenbereichen unabhängig von der Wellenlänge. Sie sind dispersionsfrei und zeigen keine chromatische Aberration.

13.2. Linsen

13.2.1. Brechung an Kugelflächen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1068]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 488])

Versuch 75:  **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Halbebene, einseitig abgerundet (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

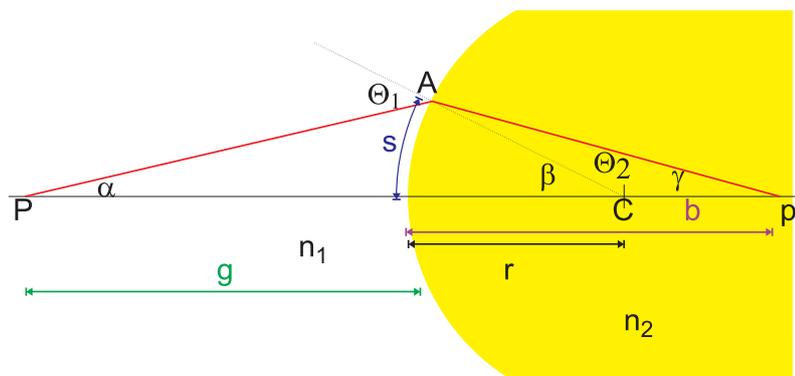


Abb. 13.3.: Brechung von Licht an einer gekrümmten Glasoberfläche.

Gleich wie mit Spiegeln können Abbildungen mit Linsen durchgeführt werden. Für kleine Winkel gilt $\sin(\Theta) \approx \Theta$. Wir erhalten

$$n_1\Theta_1 = n_2\Theta_2 \quad (13.2.1)$$

β ist der Aussenwinkel von $P'CA$. Also ist

$$\beta = \Theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2}\Theta_1 + \gamma \quad (13.2.2)$$

Θ_1 ist der Aussenwinkel von PAC .

$$\Theta_1 = \alpha + \beta \quad (13.2.3)$$

Nach Elimination von Θ_1 folgt

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \quad (13.2.4)$$

Für kleine Winkel (PARAXIALE NÄHERUNG) gilt, dass $\alpha \approx s/g$, $\beta = s/r$ und $\gamma = s/b$ ist, wobei g die Gegenstandsweite, b die Bildweite und r der Krümmungsradius der Oberfläche ist. Eingesetzt:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (13.2.5)$$

Hier sind, im Gegensatz zum sphärischen Spiegel, die reellen Bilder hinter der Grenzfläche.

13.2.2. Abbildungsmassstab

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1007]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 493])

Nach dem Strahlensatz ist $n_1 \frac{\text{Gegenstandsgrösse}}{g} = n_2 \frac{\text{Bildgrösse}}{b}$. Der Abbildungsmassstab ist also

$$V = \frac{\text{Bildgrösse}}{\text{Gegenstandsgrösse}} = -\frac{n_1 b}{n_2 g} \quad (13.2.6)$$

13.2.3. Dünne Linsen

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1071]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 491])

Versuch 76:   **Versuch zur Vorlesung:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Dünne Linse (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

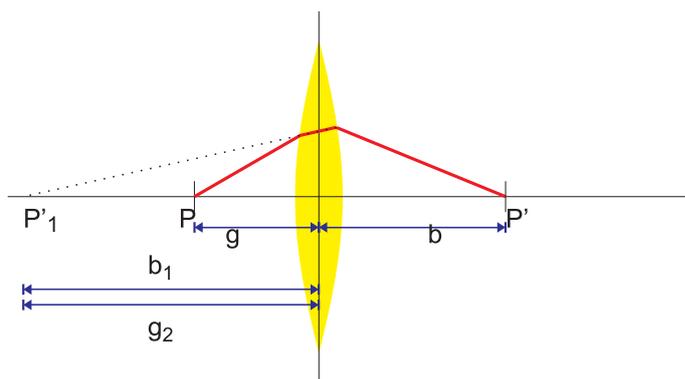


Abb. 13.4.: Dünne Linse. Brechung tritt an beiden Oberflächen auf.

Wir betrachten eine dünne Linse, das heißt, dass wir die Dicke des Glases vernachlässigen. Die Linsenoberflächen sollen die Krümmungsradien r_1 und r_2 (rechts) haben. Die Linse mit dem Brechungsindex n ist in Luft (Brechungsindex 1). Ein Gegenstand befindet sich im Abstand g links vor der ersten Ebene, und damit auch im Abstand g vor der Mittelebene. Die Bildweite b_1 aufgrund der ersten Oberfläche nach wird Gleichung (13.2.5) mit

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad (13.2.7)$$

Das Bild ist virtuell, da das Licht auch noch an der zweiten Grenzfläche gebrochen wird. In unserer Abbildung ist die Bildweite b_1 negativ. Diese Bildweite b_1 ist für die zweite Oberfläche die Gegenstandsweite $g_2 = -b_1$. Die Abbildungsgleichung dort lautet

$$\frac{n}{g_2} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{r_2} \quad (13.2.8)$$

Eingesetzt und addiert ergibt sich

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (13.2.9a)$$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (13.2.9b)$$

wobei wir $g = \infty$ gesetzt haben. Dann ist $b = f$ die Brennweite.

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (13.2.10)$$

- Strahlen, die die Linse auf der optischen Achse schneiden, werden nicht abgelenkt.
- Achsenparallele Strahlen werden im Brennpunkt fokussiert
- Strahlen aus dem Brennpunkt werden zu achsenparallelen Strahlen.

13.2.3.1. Arten von Linsen

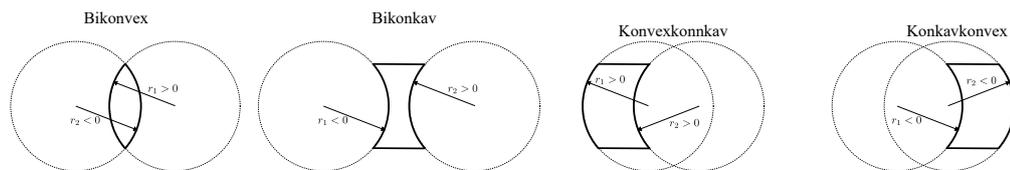


Abb. 13.5.: Vereinbarung: Konvexe Radien links und konkave Radien rechts sind positiv, konvexe Radien rechts und konkave Radien links sind negativ.

In Gleichung (13.2.9b) treten zwei Radien auf, r_1 und r_2 . So wie die Gleichung (13.2.9b) hergeleitet wurde, müssen die Vorzeichen der Radien wie in Abbildung 13.5 gesetzt werden. Dann ergeben sich die richtigen Brennweiten f .

13.2.3.2. Dünne Linsen mit unterschiedlichen Medien links und rechts

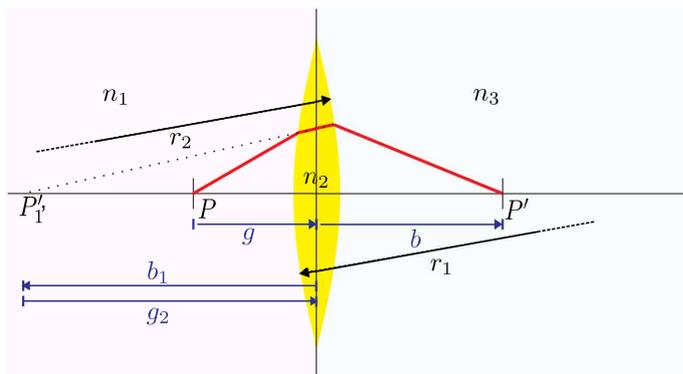


Abb. 13.6.: Eine dünne Linse links im Kontakt mit einem anderen Medium als rechts.

In Gleichung (13.2.9b) diskutieren wir eine dünne Linse in Luft. In diesem Abschnitt soll die dünne Linse links mit einem Medium mit dem Brechungsindex n_1 und rechts von einem Medium mit dem Brechungsindex n_2 in Kontakt sein. Dabei sollen n_1 , n_2 und n_3 als unterschiedlich angenommen werden. Wenn $n_1 = n_3 = 1$ ist, wird das Resultat aus Gleichung (13.2.9b) erhalten

Der Rechenweg ist analog zu dem, der zur Gleichung (13.2.9b) geführt hat.

Die Bildweite b_1 aufgrund der ersten Oberfläche in der Linse ist

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \quad (13.2.11)$$

Diese Bildweite b_1 ist für die zweite Oberfläche die Gegenstandsweite $g_2 = -b_1$. Die Abbildungsgleichung für die Grenzfläche rechts lautet

$$\frac{n_2}{g_2} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (13.2.12)$$

Analog zur Rechnung für Gleichung (13.2.9b) wird die Beziehung $g_2 = -b_1$ eingesetzt und die Gleichungen (13.2.11) und (13.2.12) addiert. Es ergibt sich

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (13.2.13)$$

Wir erhalten die Brennweite f_3 im Medium mit n_3 indem wir $g = \infty$ setzen. Dann ist $b = f_3$.

$$\frac{n_3}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (13.2.14a)$$

$$\frac{1}{f_3} = \frac{n_2 - n_1}{n_3 r_1} + \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2} \quad (13.2.14b)$$

Wir erhalten die Brennweite f_1 im Medium mit n_1 indem wir $b = \infty$ setzen. Dann ist $g = f_1$.

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 r_1} + \frac{n_3 - n_2}{n_1 r_2} \quad (13.2.15a)$$

$$(13.2.15b)$$

Einige Beispiele:

- Bikonvexlinse $r_1 = -r_2 = r > 0$ in Luft $n_1 = n_2 = 1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_3} = \frac{2(n_2 - 1)}{r}$$

- Plankonvexlinse $r_1 = \infty$, $-r_2 = r$ in Luft $n_1 = n_2 = 1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_3} = \frac{(n_2 - 1)}{r}$$

- Konvexkonkavlinse $r_1 = r$, $r_2 = 2r$ in Luft $n_1 = n_2 = 1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_3} = \frac{(n_2 - 1)}{2r}$$

- Bikonvexlinse $r_1 = -r_2 = r > 0$ in Luft $n_1 = 1$ nach Wasser $n_2 = 4/3$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{6n_2 - 7}{3r} \neq \frac{1}{f_3} = \frac{6n_2 - 7}{4r}$$

- Bikonkavlinse $r_1 = -r_2 = -r < 0$ in Luft $n_1 = n_2 = 1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_3} = -\frac{2(n_2 - 1)}{r}$$

- Bikonvexlinse $r_1 = -r_2 = r > 0$ in Medium mit $n_1 = n_3 = n > 1$ aus Luft $n_2 = 1$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_3} = \frac{1 - n}{nr_1} - \frac{1 - n}{nr_2} = -\frac{2(n - 1)}{nr}$$

Dies ist eine Zerstreuungslinse. Wenn der Brechungsindex der Linse kleiner ist als der der Umgebung sind Bikonkavlinse Sammellinsen und Bikonvexlinse Zerstreuungslinsen!

13.2.4. Dicke Linsen

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 491])

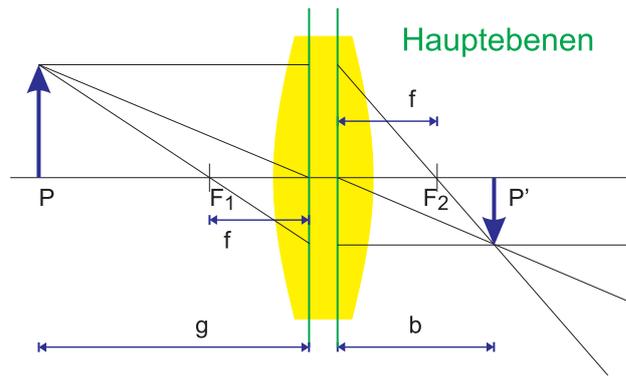


Abb. 13.7.: Dicke Linse.

Eine dicke Linse wird wie eine dünne berechnet, mit der Ausnahme, dass alle Messungen von Distanzen von den jeweiligen Hauptebenen aus gemacht werden müssen.

13.3. Das Auge

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 304]) (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1089])

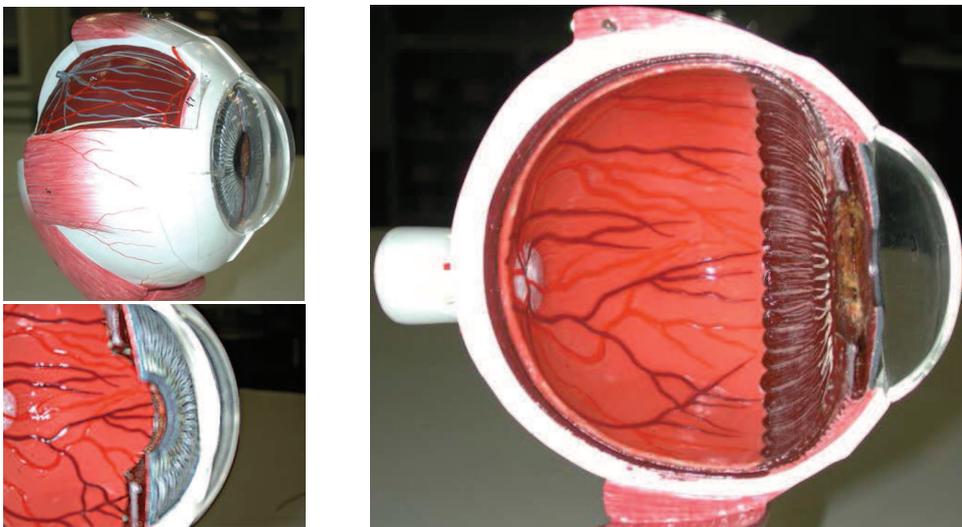


Abb. 13.8.: Das Auge. Links oben eine Gesamtansicht eines Augenmodells. Rechts ein Schnitt durch das Auge mit der Iris links, dann der LINSE und dem GLASKÖRPER. Links unten eine Detailansicht der Linse.

Das Auge hat eine LINSE mit einer BRENNWEITE von etwa 2.5 cm (Abstand Linse-Netzhaut). **Achtung: Der Brechungsindexunterschied nach aussen (Linse zu Luft)**

und nach innen (Linse zu GLASKÖRPER) ist verschieden. Deshalb ist die BRENNWEITE der LINSE ausserhalb kleiner als innerhalb des Auges. Die Krümmung der LINSE kann eingestellt werden: AKKOMODATION.

Versuch 77:  Versuch zur Vorlesung:
Augen-Modell (Versuchskarte O-132)

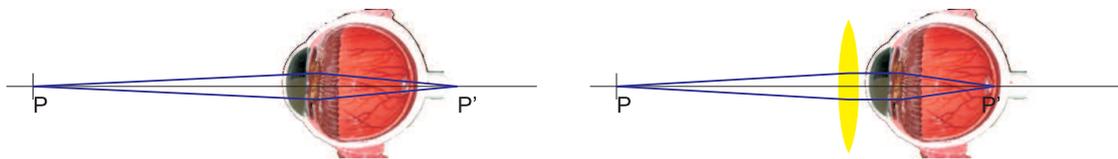


Abb. 13.9.: Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur

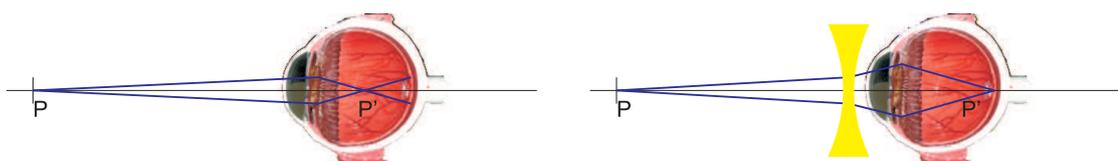


Abb. 13.10.: Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur

13.4. Lupe

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1093]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 494])

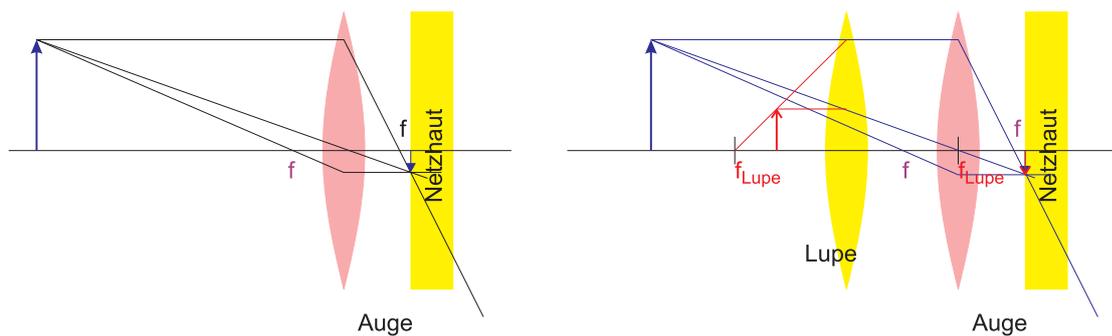


Abb. 13.11.: Wirkungsweise einer Lupe.

Die Wirkungsweise einer Lupe kann nur verstanden werden, wenn wir das Auge mit berücksichtigen. Auf der linken Seite finden sie eine Skizze, wie ein Bild auf der Netzhaut des Auges entsteht. Die Brennweite des Auges sei dabei f . Der blaue Pfeil wird entsprechend den Abbildungsgesetzen auf die Netzhaut abgebildet.

Die Lupe (rechtes Bild) wird nun so vor das Auge gehalten, dass ihr Brennpunkt auf der Linsenachse des Auges ist. Die vom roten Pfeil (innerhalb der Brennweite des Auges) ausgehenden Strahlen werden von der Lupe so geformt, dass sie nach ihr gleich wie die Strahlen des blauen Pfeils ohne Lupe sind. Das Bild des roten Pfeils ist gleich gross wie das des blauen. Die Lupe hilft dem Auge, ein vergrößertes Bild zu sehen.

13.5. Mikroskop

(Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1098]) (Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 494])

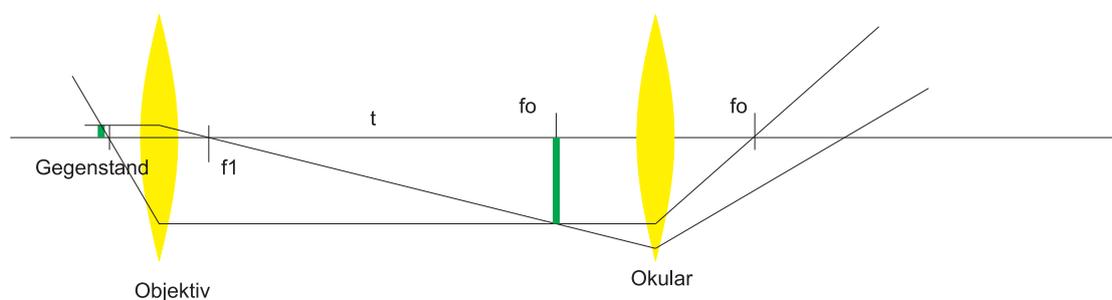


Abb. 13.12.: Strahlengang in einem Mikroskop.



Versuch 78: Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Mikroskop (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

Bei einem Mikroskop ist ein Gegenstand so nahe am Brennpunkt einer Objektivlinse, dass ein stark vergrößertes Bild erzeugt wird. Dieses Bild, ZWISCHENBILD genannt, wird in einer Ebene im Abstand t vom zweiten Brennpunkt des Okulars erzeugt. Würde man in dieser Ebene eine Kamera anbringen, könnte man ein Bild des Gegenstandes aufnehmen.

Die Strahlen gehen jedoch weiter und werden von einer zweiten Linse, dem Okular weiterverarbeitet. Das Okular ist so platziert, dass das von der ersten Linse erzeugte Bild genau auf seinem Brennpunkt erzeugt wird. Die Strahlen aus der ersten Linse, dem Objektiv, werden nun so gebrochen, dass sie divergent sind. Dies ist die gleiche Funktion, wie sie die Lupe (Siehe Abschnitt 13.4) hatte. Nur das Auge, hier nicht eingezeichnet, kann wieder ein Bild formen, das nun aber sehr stark vergrößert ist.

In vielen Lehrbüchern findet man Zeichnungen, in denen die Lichtstrahlen beim Zwischenbild ihre Richtung ändern. Dies ist in Luft nicht möglich, und Streukörper gibt es in einem Mikroskoptubus nicht.

13.6. Die Kamera

Literatur: (Siehe Hecht, Optik [Hec05, pp. 327]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 228]) (Siehe P. A. Tipler und G. Mosca, *Physik* [TM04, pp. 1095])

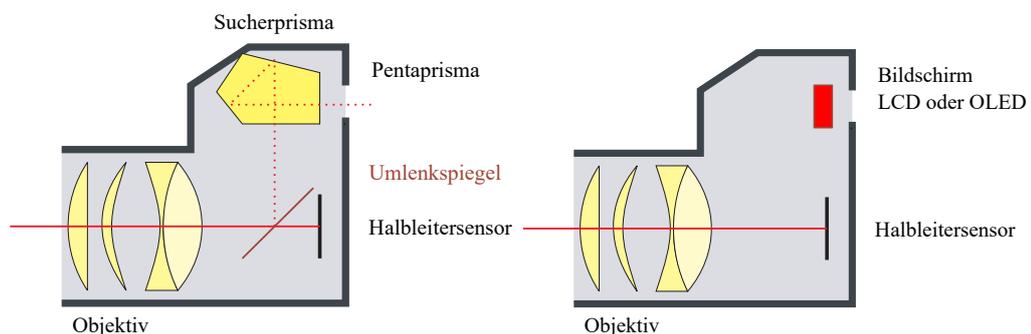


Abb. 13.13.: Schematische Skizzen von Kameras. Links eine Spiegelreflexkamera, rechts eine moderne spiegellose Kamera

Eine Kamera besteht aus einem OBJEKTIV, das in einer Führung verschiebbar gelagert ist, dem Film oder einem elektronischen Sensor (CCD oder CMOS) und

einer Beobachtungsoptik oder einem Bildschirm. Bei einer Spiegelreflexkamera sind die Beobachtungsoptik und der Strahlengang des OBJEKTIVS teilweise identisch. Wie weit müssen OBJEKTIVE bewegt werden? Wir verwenden $1/f = 1/b + 1/g$ und beachten, dass bei einer auf ∞ eingestellten Kamera das Objektiv gerade f vom Film oder Sensor entfernt ist.

Distanz	20 mm	50 mm	100 mm	200 mm	1000 mm
100 m	20.004 mm	50.025 mm	100.1 mm	200.4 mm	1010.1 mm
Verschiebung	0.004 mm	0.025 mm	0.1 mm	0.4 mm	10.1 mm
30 m	20.013 mm	50.08 mm	100.3 mm	201.3 mm	1034.4 mm
Verschiebung	0.013 mm	0.08 mm	0.3 mm	1.3 mm	34.4 mm
10 m	20.04 mm	50.25 mm	101 mm	204.1 mm	1111 mm
Verschiebung	0.04 mm	0.25 mm	1 mm	4.1 mm	111 mm
3 m	20.13 mm	50.85 mm	103.4 mm	214 mm	1500 mm
Verschiebung	0.13 mm	0.85 mm	3.4 mm	14 mm	500 mm
1 m	20.4 mm	52.6 mm	111 mm	250 mm	-
Verschiebung	0.4 mm	2.6 mm	11 mm	50 mm	-
0.3 m	21.4 mm	60 mm	150 mm	600 mm	-
Verschiebung	1.4 mm	10 mm	15 mm	400 mm	-
0.1 m	25 mm	100 mm	-	-	-
Verschiebung	5 mm	50 mm	-	-	-
0.03 m	60 mm	-	-	-	-
Verschiebung	50 mm	-	-	-	-

Fett angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu klein sind. **Rot** angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu gross sind.

Die Blendenzahl ist das Verhältnis der BRENNWEITE f zum Durchmesser der d der Öffnung der Blende.

$$\text{Blendenzahl} = \frac{f}{d} \quad (13.6.1)$$

Bei einem OBJEKTIV mit der BRENNWEITE 50 mm und einer Blendenzahl von 8 ist die Öffnung also $d = 6.25$ mm.

13.7. Kollimationsoptik für Laserdioden

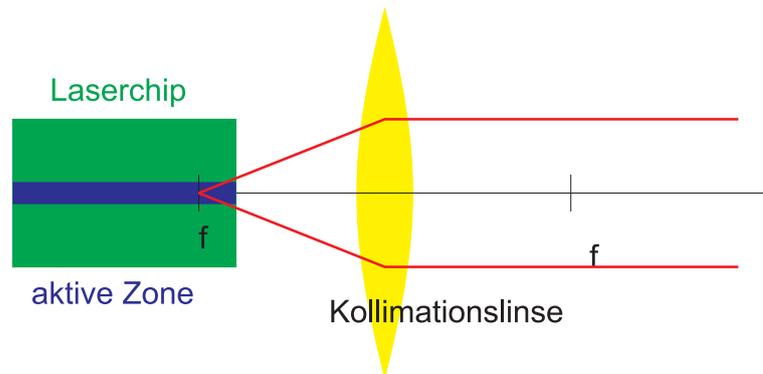


Abb. 13.14.: Kollimationsoptik für Laser.

Eine Laserdiode ist eine quasi-Punktquelle. Deshalb verwendet man eine Linse, deren Fokus an der Stelle platziert wird, bei der sich die Lichtstrahlen aus einer Laserdiode, rückwärts gesehen, schneiden würden. Damit erreicht man, dass ein in etwa paralleler Strahl aus dem Laser emittiert wird. Die Linsen sind im allgemeinen sehr stark gekrümmt, da die Breite oder Höhe des Emissionsvolumens sehr gering ist (Beugung am Spalt).

13.8. Beamer

(Siehe D. Meschede, *Gerthsen Physik* [Mes15, pp. 496])

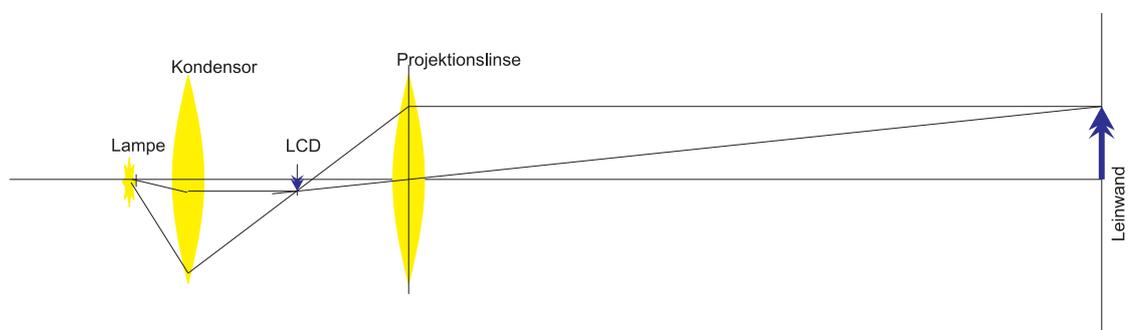


Abb. 13.15.: Schematische Zeichnung eines Diaprojektors oder eines LCD-Beamers.

**Versuch 79:**

Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Projektion, Projektor (Versuchskarte O-046, Video (VPN oder intern))

Jeder LCD-Beamer oder Diaprojektor besteht aus einer Projektionsoptik, die das Bild auf dem Dia oder dem LCD-Bildschirm auf die Leinwand abbildet. Damit eine optimale Helligkeit da ist, wird die Lampe mit einem Kondensator so abgebildet, dass das Dia, der LCD-Bildschirm, voll ausgeleuchtet wird und dass gleichzeitig die Lichtstrahlen ohne das abzubildende Bild die Projektionslinse optimal beleuchten.

Teil VII.

Anhang

A. Differentiation und Integration

A.1. Differentiationsregeln

Definition der Ableitung	$u = f(t)$	$u' = \frac{du}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$
Partielle Ableitung	$u = f(x, y, z, \dots, t)$	$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}$
Andere Schreibweise	$u = f(t)$	$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} u = \frac{d}{dt} f(t)$
Konstanter Faktor	$u = f(x), c = \text{const}$	$\frac{dcu}{dx} = c \frac{du}{dx}$
Summenregel	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d(u+v)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
Produktregel	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d(uv)}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$
Bruch	$u = f(t), v = g(t)$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}}{v^2}$
Kettenregel	$u = f(v), v = g(t)$	$\frac{df(g(t))}{dt} = \frac{df}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{df}{dv} \frac{dg(t)}{dt}$
logarithmische Ableitung	$u = f(x)$	$\frac{d \ln u}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$

A.2. Differentiation einfacher Funktionen

Funktion	n-te Ableitung
x^m	$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ bei ganzzahligem m und n und $m > n$ ist die n-te Ableitung null
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)! x^{-n}$
$\log_a(x)$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} x^{-n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin(kx)$	$k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos(kx)$	$k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$

Beispiel:

$$y = (5x^2 - 3x + 2)^{6x}$$

soll differenziert werden. Wir verwenden die logarithmische Ableitung.

$$\ln(y) = 6x \ln(5x^2 - 3x + 2) \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{d}{dx} \left(6x \ln(5x^2 - 3x + 2) \right) \quad \left| \text{ableiten, Produktregel rechts} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{d \ln(5x^2 - 3x + 2)}{dx} \quad \left| \text{Kettenregel ganz rechts} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{1}{5x^2 - 3x + 2} \frac{d(5x^2 - 3x + 2)}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = 6 \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6x \frac{1}{5x^2 - 3x + 2} (10x - 3) \quad \left| \cdot y \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 6y \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6yx \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2} \quad \left| y \text{ einsetzen} \right.$$

$$y' = 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} \ln(5x^2 - 3x + 2) + 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} x \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2}$$

$$y' = 6(5x^2 - 3x + 2)^{6x} \left[\ln(5x^2 - 3x + 2) + \frac{10x - 3}{5x^2 - 3x + 2} \right]$$

A.3. Taylorreihe und Reihen

Definition

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

andere Schreibweise

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= \sin(x + \Delta x) \\ &= \sin(x) + \frac{\Delta x}{1!} \cos(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n}}{(2n)!} \sin(x) + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(x) + \dots \end{aligned}$$

Spezialfall: $x = 0$

$$\sin(\Delta x) = \Delta x - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 + \frac{1}{5!} (\Delta x)^5 + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

A.4. Einige Reihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenz
$(1 \pm x)^m$	$1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ $+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x \leq 1$
$\sin(x + \Delta x)$	$\sin(x) + \frac{\Delta x}{1!}\cos(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x) + \dots$ $+ \frac{(\Delta x)^n}{(n)!}\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) + \dots$	$ \Delta x < \infty$
$\cos(x + \Delta x)$	$\cos(x) - \Delta x \sin(x) - \frac{\Delta x^2 \cos(x)}{2!} + \frac{\Delta x^3 \sin(x)}{3!}$ $+ \frac{\Delta x^4 \cos(x)}{4!} - \dots + \frac{\Delta x^n \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \dots$	$ \Delta x < \infty$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} \dots \right]$	$0 < x < \pi$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
$a^x = e^{x \ln a}$	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \frac{(x \ln a)^4}{4!} + \dots$	$ x < \infty$
$\ln x$	$2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right]$ $+ \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots$	$x > 0$
$\ln x$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots$ $+ (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$	$0 < x \leq 2$
$\ln x$	$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots$ $+ \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n + \dots$	$x > \frac{1}{2}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $+ (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$	$ x < 1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right]$	$ x < 1$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$ x < 1$

B. Rotationsmatrizen, Variablenpermutation

Die Rotationsmatrizen um die Achsen x und y können aus der Rotationsmatrix $R_z(\alpha_z)$ durch PERMUTATION von Variablen hergeleitet werden (siehe auch Abschnitt 2.2.4).

B.1. Drehung um die z -Richtung

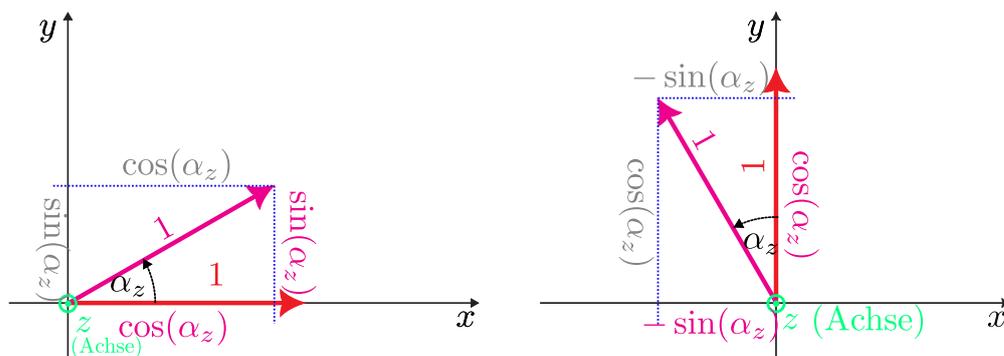


Abb. B.1.: Drehung der Vektoren e_x und e_y um den Winkel α_z um die z -Achse.

Abbildung B.1 zeigt, wie die Einheitsvektoren in der xy -Ebene um die z -Achse gedreht werden. Die daraus folgenden Gleichungen (Wiederholung von Abschnitt 2.2.4) lauten

$$R_z(e_x, \alpha_z) = R_z \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_z \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z \\ \sin \alpha_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1a})$$

$$R_z(e_y, \alpha_z) = R_z \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_z \right) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_z \\ \cos \alpha_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.1b})$$

$$R_z(e_z, \alpha_z) = R_z \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_z \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1.1c})$$

Daraus ergibt sich die Matrixgleichung für die Drehung um die z -Achse

$$R_z(\mathbf{A}, \alpha_z) = \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.2})$$

Daraus folgern wir, dass die Drehung um die z -Achse als Matrix R_z

$$R_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_z) & -\sin(\alpha_z) & 0 \\ \sin(\alpha_z) & \cos(\alpha_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.3})$$

geschrieben werden kann.

B.2. Von der Drehung um z zur Drehung um y

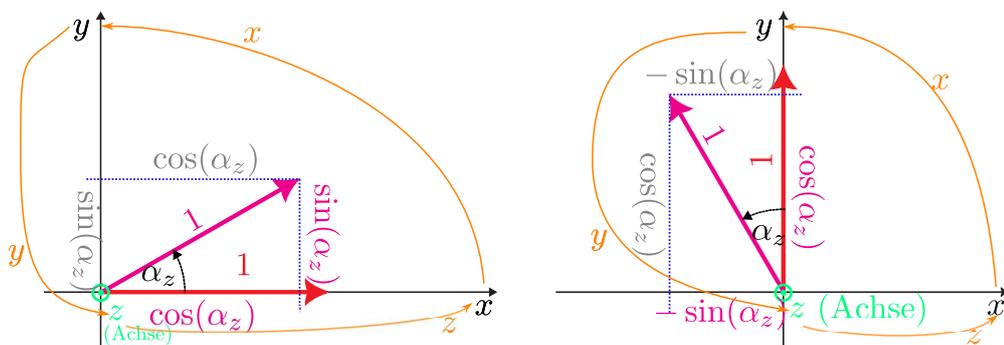


Abb. B.2.: Darstellung der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Abbildung B.2 illustriert den Weg der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

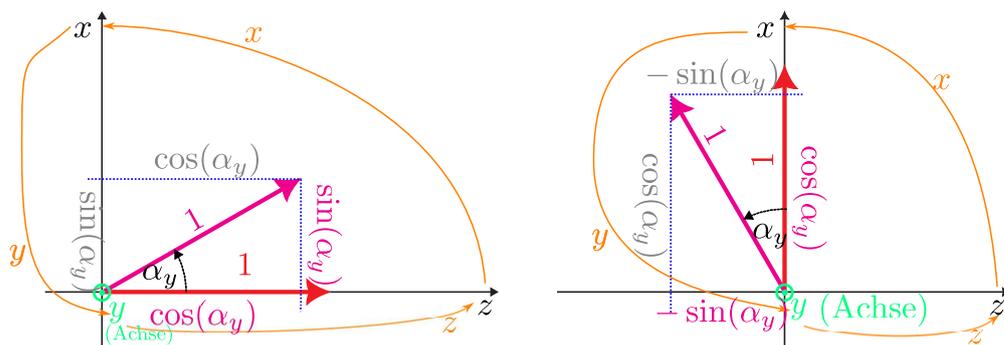


Abb. B.3.: Darstellung des Zustandes nach der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Abbildung B.2 zeigt die Variablen nach der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Dies führt jetzt auf die Darstellung B.4

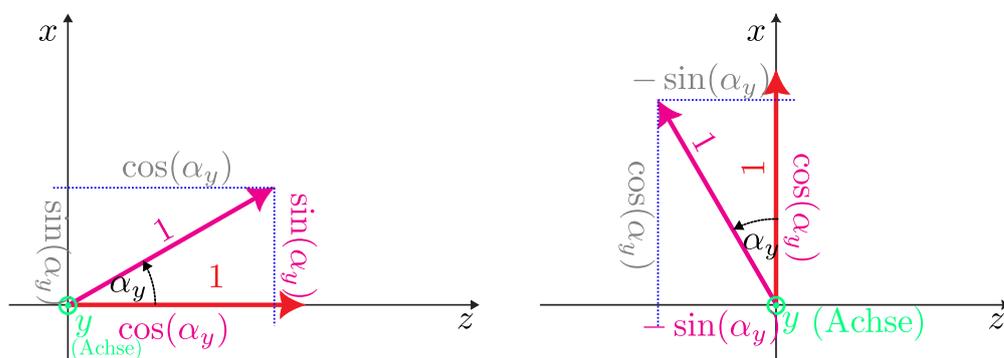


Abb. B.4.: Drehung der Vektoren e_z und e_x um den Winkel α_y um die y -Achse. Wichtig ist die Reihenfolge: Nur so haben wir immer noch ein rechtshändiges Koordinatensystem.

B.3. Drehung um die y -Richtung

Wir führen jetzt exakt das gleiche Verfahren wie bei der Drehung um z aus (Abbildung B.1), verwenden aber die Bezeichnungen aus der Abbildung B.4. Wieder achten wir peinlich genau darauf, die Reihenfolge beizubehalten.

$$R_y(\mathbf{e}_z, \alpha_y) = R_y \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_y \right) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_y \\ 0 \\ \cos \alpha_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.1a})$$

$$R_y(\mathbf{e}_x, \alpha_y) = R_y \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_y \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y \\ 0 \\ -\sin \alpha_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.1b})$$

$$R_y(\mathbf{e}_y, \alpha_y) = R_y \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_y \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3.1c})$$

Daraus ergibt sich die Matrixgleichung für die Drehung um die y -Achse

$$R_y(\mathbf{A}, \alpha_y) = \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.2})$$

Daraus folgern wir, dass die Drehung um die y -Achse als Matrix R_y

$$R_y(\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_y) & 0 & \sin(\alpha_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_y) & 0 & \cos(\alpha_y) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.3})$$

geschrieben werden kann.

Wir müssen nun die verschiedenen Koordinaten am richtigen Ort einordnen um die korrekte Matrix zu bekommen.

B.4. Von der Drehung um z zur Drehung um y

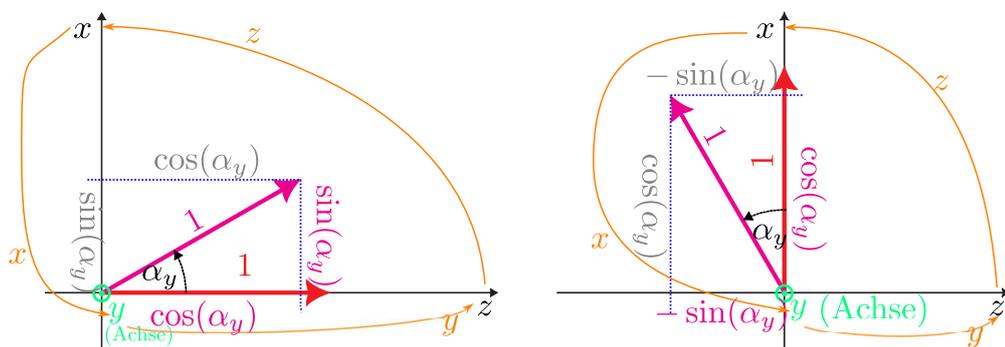


Abb. B.5.: Darstellung der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Abbildung B.5 illustriert den Weg der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

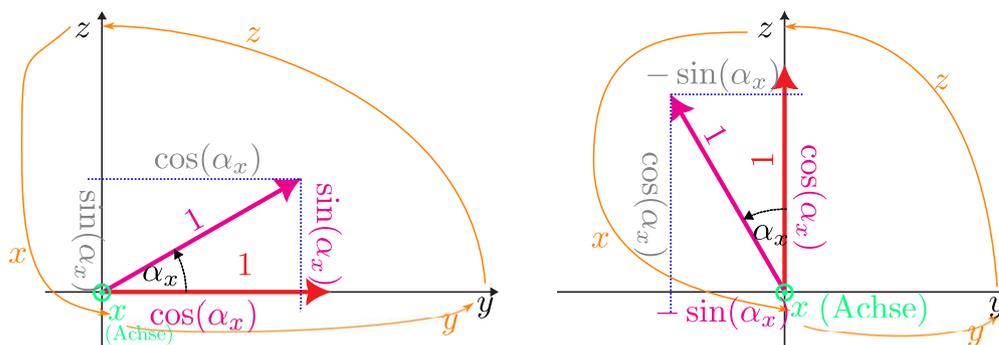


Abb. B.6.: Darstellung des Zustandes nach der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Abbildung B.5 zeigt die Variablen nach der zyklischen Vertauschung (PERMUTATION) $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Dies führt jetzt auf die Darstellung B.7

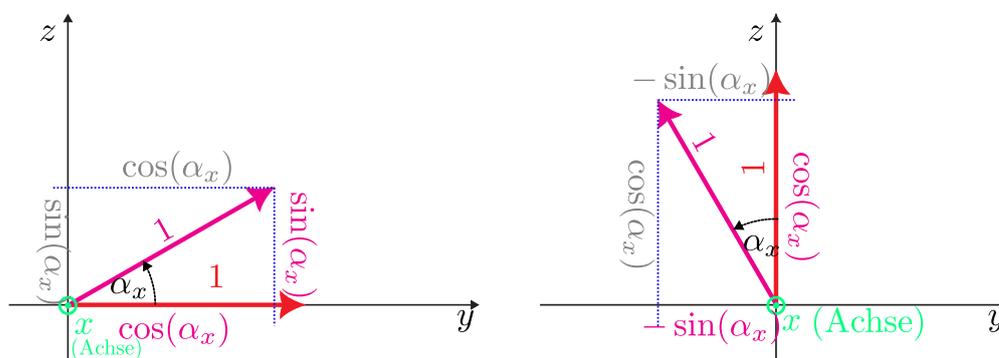


Abb. B.7.: Drehung der Vektoren e_y und e_z um den Winkel α_x um die x -Achse. Wichtig ist die Reihenfolge: Nur so haben wir immer noch ein rechtshändiges Koordinatensystem.

B.5. Drehung um die x -Richtung

Wir führen jetzt exakt das gleiche Verfahren wie bei der Drehung um z aus (Abbildung B.1), verwenden aber die Bezeichnungen aus der Abbildung B.7. Wieder achten wir peinlich genau darauf, die Reihenfolge beizubehalten.

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{e}_y, \alpha_x) = \mathbf{R}_x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_x \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha_x \\ \sin \alpha_x \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.1a})$$

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{e}_z, \alpha_x) = \mathbf{R}_x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_x \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_x \\ \cos \alpha_x \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.1b})$$

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{e}_x, \alpha_x) = \mathbf{R}_x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_x \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5.1c})$$

Daraus ergibt sich die Matrixgleichung für die Drehung um die x -Achse

$$\mathbf{R}_y(\mathbf{A}, \alpha_y) = \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.2})$$

Daraus folgern wir, dass die Drehung um die x -Achse als Matrix \mathbf{R}_x

$$\mathbf{R}_x(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_x) & -\sin(\alpha_x) \\ 0 & \sin(\alpha_x) & \cos(\alpha_x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5.3})$$

geschrieben werden kann.

Wir müssen nun die verschiedenen Koordinaten am richtigen Ort einordnen um die korrekte Matrix zu bekommen.

B.6. Drehmatrizen durch direkte Permutation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x',x} & a_{x',y} & a_{x',z} \\ a_{y',x} & a_{y',y} & a_{y',z} \\ a_{z',x} & a_{z',y} & a_{z',z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Abb. B.8.: Anleitung zur Permutation in Matrizen.

Im Folgenden geht es um die Permutation $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ in der Matrixgleichung gezeigt in Abbildung B.8.

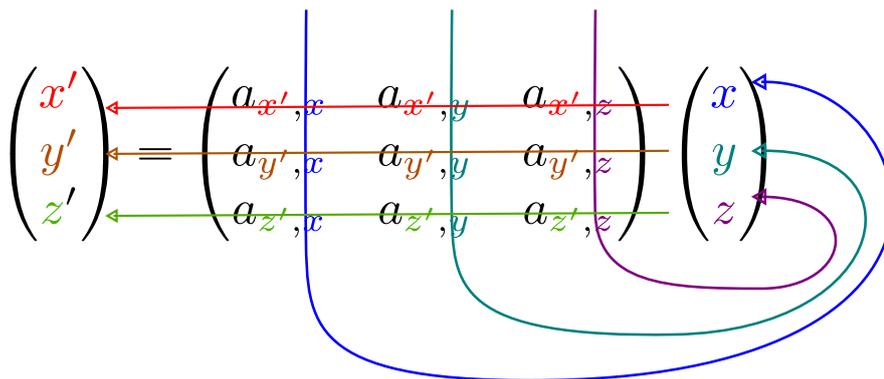


Abb. B.9.: Anleitung zur Permutation in Matrizen.

Die Komponenten des Vektors links («gestrichen») in Abbildung B.8 sind durch die horizontalen Linien mit den Komponenten der Matrix verbunden (siehe Abbildung B.9). Das heisst, wenn eine Komponente um eins nach **unten** bewegt wird, muss die entsprechende Zeile in der Matrix nach **unten** bewegt werden.

Der Vektor rechts («ungestrichen») adressiert die Spalten. Wenn eine Komponente des Vektors nach **unten** bewegt wird, muss die entsprechende Spalte nach **rechts** bewegt werden. Das Analoge gilt für die Bewegung nach oben (in der Matrix nach links).

C. Rechnen mit Integralen

(Siehe I. N. Bronštein u. a., *Taschenbuch der Mathematik* [Bro+08, pp. 447])

Konstanter Faktor

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

Integral einer Summe oder Differenz

$$\int [u(x) + v(x) - w(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx - \int w(x) dx$$

Substitutionsmethode

Sei $y = \phi(x)$

$$\int f(y) dy = \int f[\phi(x)] \phi'(x) dx$$

Partielle Integration (hergeleitet aus der Kettenregel der Differentiation)

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln[f(x)] + C$$

C.1. Unbestimmte Integrale

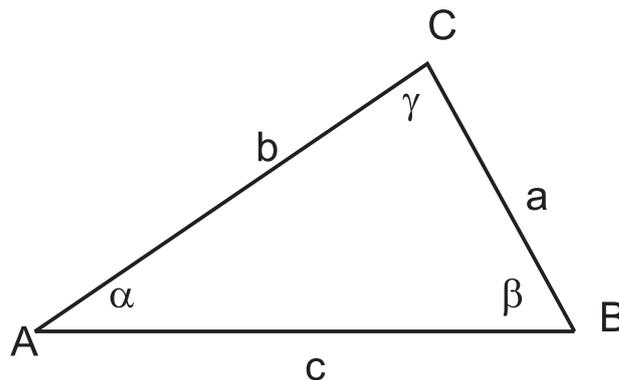
(Siehe I. N. Bronštein u. a., *Taschenbuch der Mathematik* [Bro+08, pp. 445])

Funktion	Integral
x^n	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x $
$\sin(x)$	$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
$\cos(x)$	$\int \cos(x) dx = \sin(x)$
$\tan(x)$	$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) $
$\cot(x)$	$\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) $
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$
e^x	$\int e^x dx = e^x$
a^x	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$\int \ln x dx = x \ln x - x$

Funktion	Integral
$\sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\cosh x$	$\int \cosh x dx = \sinh x$
$\tanh x$	$\int \tanh x dx = \ln \cosh x $
$\coth x$	$\int \coth x dx = \ln \sinh x $
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$

D. Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken

(Siehe I. N. Bronštein u. a., *Taschenbuch der Mathematik* [Bro+08, pp. 146])



halber Dreiecksumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$

Radius des Umkreises $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$

Radius des Inkreises $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = s \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

Flächeninhalt $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
 R ist der Umkreisradius

Projektionssatz $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$

Kosinussatz oder Satz des Pythagoras im schiefwinkligen Dreieck $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Mollweidsche Gleichungen $(a+b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$
 $(a-b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$

Tangenssatz $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$

Halbwinkelsatz $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

Tangensformeln $\tan \alpha = \frac{a \sin \beta}{c-a \cos \beta} = \frac{a \sin \gamma}{b-a \cos \gamma}$

Beziehungen für halbe Winkel $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

(Siehe I. N. Bronštein u. a., *Taschenbuch der Mathematik* [Bro+08, pp. 148])

	gegeben	Formeln
1.	1 Seite und 2 Winkel (a, α, β)	$\gamma = \pi - \alpha - \beta, b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$
2.	2 Seiten und der eingeschlossene Winkel (a, b, γ)	$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ α und β werden aus $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ berechnet. $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$
3.	2 Seiten und der einer von ihnen gegenüberliegende Winkel (a, b, α)	<p>$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ Für $a \geq b$ ist $\beta < \frac{\pi}{2}$ und eindeutig bestimmt. Für $a < b$ sind die folgenden Fälle möglich:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. β hat für $b \sin \alpha < a$ zwei Werte $\beta_2 = \pi - \beta_1$ 2. β hat genau einen Wert ($\frac{\pi}{2}$) für $b \sin \alpha = a$ 3. Für $b \sin \alpha > a$ ist es unmöglich, ein Dreieck zu konstruieren. <p>$\gamma = \pi - \alpha - \beta, c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}, S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$</p>
4.	3 Seiten (a, b, c)	<p>$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b},$ $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}, S = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$</p>

Versuchsliste

1. Versuch (M-059): Messfehler am Beispiel der Zeitmessung: Lange Luftkissenbahn mit Smartphoneuhren	18
2. Versuch (M-083): Gleichförmige und beschleunigte Bewegung, Messen von Hand und mit Tracker	23
3. Versuch (M-133): Anfangsgeschwindigkeit: Einfluss auf den zurückgelegten Weg	26
4. Versuch (M-012): Vektoraddition von drei Kräften	27
5. Versuch (neu): Relativgeschwindigkeit Fahrzeug auf Lehmann-Bahn	30
6. Versuch (M-053): Freier Fall und waagrechter Wurf - Überlagerung von zwei Bewegungen	31
7. Versuch (M-050): Wurfparabel	32
8. Versuch (M-108): Nichtkommutativität von Drehungen	34
9. Versuch (M-201): Newton'sches Grundgesetz mit LKB und CASSY	39
10. Versuch (M-104): Kraftstoss	40
11. Versuch (M-141): Actio = Reactio: Fischerstechen	41
12. Versuch (M-12): Kräfteparallelogramm	44
13. Versuch (neu): Watt'scher Zentrifugalregulator	45
14. Versuch (M-22): Haft- und Gleitreibung	47
15. Versuch (M-49): Schiefe Ebene	48
16. Versuch (M-70): d'Alembertsches Prinzip: Maxwellsches Rad auf Waage	51
17. Versuch (M-60): Zentrifugalkraft	56
18. Versuch (M-7): Mechanik Corioliskraft: Kugel auf Drehtisch	56
19. Versuch (M-152): Corioliskraft: Moskauer Gerät	57
20. Versuch (M-94): Mechanik Schiefe Ebene: Arbeit	59
21. Versuch (M-55): Autorennen auf drei Bahnen: Potentielle und kinetische Energie	60
22. Versuch (M-100): Elastische Dehnung einer Schraubenfeder	61
23. Versuch (M-29): Kraft-Dehnungskurve von Gummi	62
24. Versuch (M-150): Galileis Pendel	65
25. Versuch (M-21): Gleichgewichtsarten: Stabil, labil und indifferent	67
26. Versuch (M-102): Harmonischer Oszillator : Schwingende Masse zwischen zwei Federn auf LKB	71
27. Versuch (M-77): Fadenpendel: Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer	72
28. Versuch (M-45): Massenmittelpunktsbestimmung bei einem starren Körper	76
29. Versuch (M-139): Massenmittelpunktsbewegung: Stoss zweier Kugeln auf Glasfahrbahn	78
30. Versuch (M-205, modifiziert): Elastischer Stoss mit LKB und CASSY: Unterschiedliche Massen	81

31. Versuch (M-78): Inelastischer Stoss	83
32. Versuch (M-104): Kraftstoss und Impuls : Stoss eines Gleiters gegen einen Kraftaufnehmer	86
33. Versuch (M-147): Rakete	87
34. Versuch (M-38): Messung der Trägheitsmomente von verschiedenen Körpern	90
35. Versuch (M-52): Trägheitsmoment: Voll- und Hohlzylinder auf schräger Ebene	98
36. Versuch (M-30): Grosser Kreisel: Präzession	104
37. Versuch (M-30): Grosser Kreisel: Nutation	105
38. Versuch (M-11): Drehmoment: Kräftepaar an einem starren Körper . .	108
39. Versuch (M-5): Gravitationswaage: Bestimmung der Gravitationskon- stante	116
40. Versuch (neu): Richtmoment aus einem Drehpendel	127
41. Versuch (MF-008): Hydraulische Presse	138
42. Versuch (MF-009): Hydrostatischer Druck	139
43. Versuch (MF-001): Auftrieb	140
44. Versuch (MF-54): Auftrieb: Modellversuch zur Zellseparation im Dich- tegradient	141
45. Versuch (MF-045): Schwimmende Prismen: Schwimmlage von homo- genen Körpern	141
46. Versuch (MF-057): Auftrieb: Aräometer und Batteriesäuretester . . .	142
47. Versuch (MF-060): Druck in Seifenblasen	149
48. Versuch (MF-063): Oberflächenspannung: Messung mit Ring	151
49. Versuch (MF-065): Oberflächenspannung: Minimalflächen bei Seifenla- mellen	152
50. Versuch (MF-061): Kapillarwirkung bei Keilküvette	154
51. Versuch (MF-012): Laminare Strömung: Kleiner Strömungsapparat . .	159
52. Versuch (MF-033): Hagen-Poiseuille-Gesetz: Kapillaren mit verschie- denen Durchmessern	169
53. Versuch (MF-016): Bernoulli-Gleichung: Gesamtdruck, Staudruck, sta- tischer Druck	173
54. Versuch (MF-046): Mariotte'sche Flasche: Ausströmgeschwindigkeit nach Torricelli	174
55. Versuch (SW-61): Physikalisches Pendel und Reversionspendel: Be- stimmung der Fallbeschleunigung g	189
56. Versuch (SW-90): Erzwungene Schwingung: Federpendel (Aufbau mit PC)	193
57. Versuch (SW-50): Gekoppelte Stangenpendel	202
58. Versuch (SW-43): Impulse und Wellen auf Seil	207
59. Versuch (SW-77): Wellenmaschine	209
60. Versuch (O-21): Interferenz von Wasserwellen mit der grossen Wellen- wanne	219

61. Versuch (neu): Malussches Gesetz: Licht mit Polarisator und Analysator	227
62. Versuch (O-008): Spannungsdoppelbrechung: Kunststoffmodelle	228
63. Versuch (O-042): Rayleigh-Streuung	228
64. Versuch (O-115): Spiegelanalysator: Polarisation durch Reflexion	229
65. Versuch (O-050): Beugung an Spalt, Loch und Hindernis	230
66. Versuch (SW-093): Gruppen- und Phasengeschwindigkeit: Modellversuch	235
67. Versuch (O-015): Huygen'sches Prinzip: Wellenwanne	237
68. Versuch (O-123): Beugung am Doppelspalt	242
69. Versuch (AT-051): Interferenz mit Polarisation	244
70. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Reflexion	245
71. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Brechung	247
72. Versuch (O-72): Wasserstrahl als Lichtleiter: Totalreflexion	248
73. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Prisma	249
74. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Gekrümmte Spiegel	252
75. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Halbebene, einseitig abgerundet	253
76. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Dünne Linse	254
77. Versuch (O-132): Augen-Modell	260
78. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Mikroskop	262
79. Versuch (O-046): Optische Scheibe: Große Scheibe mit mehrfach Laserstrahl: Projektion, Projektor	265

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Naturwissenschaften	13
2.1.	lineare Bewegung	24
2.2.	Lineare Bewegung	25
2.3.	Weg und Integration	25
2.4.	Grafische Vektoraddition	28
2.5.	Komponentenschreibweise	28
2.6.	Vektoraddition in Komponenten	29
2.7.	Mittlere Geschwindigkeit	29
2.8.	Relativgeschwindigkeit	30
2.9.	Wurfbewegung	31
2.10.	Wurfparabel	31
2.11.	Satelliten	33
2.12.	Zentripetalbewegung	34
2.13.	Nichtvertauschbarkeit von Drehungen	34
2.14.	Drehung 2D	35
3.1.	Masse auf Tisch	41
3.2.	Kraft Sonne Erde	42
3.3.	Kräfte auf Körper	43
3.4.	Fadenspannung	43
3.5.	Schiefe Ebene	44
3.6.	Kräfteparallelogramm	45
3.7.	Watt'scher Zentrifugalregulator	46
3.8.	Haft- und Gleitreibung	47
3.9.	Reibung bei schiefer Ebene	48
3.10.	Rollreibung	49
3.11.	d'Alembert'sches Prinzip	51
3.12.	Bewegung verbundener Körper	52
3.13.	Beschleunigung eines Stapels von Massen	52
3.14.	Bezugssysteme: Ruhender Beobachter	54
3.15.	Bezugssysteme: Bewegter Beobachter	55
3.16.	Beschleunigtes Bezugssystem	55
3.17.	Coriolisbeschleunigung	57
3.18.	Euler-Verfahren	58
3.19.	mechanische Arbeit	59
3.20.	Numerische Integration	61
3.21.	Elektrostatisch angezogene Feder: Energie	68
3.22.	Elektrostatisch angezogene Feder: Kraft	69
3.23.	Elektrostatisch angezogene Feder: Ruhelage	70
3.24.	Feder-Masse-Oszillator	71
3.25.	Energien beim harmonischen Oszillator	72

3.26.	Fadenpendel: Hubarbeit	73
3.27.	Lage des Massenmittelpunktes	77
3.28.	System von Massen: Laborsystem	79
3.29.	System von Massen: Massenmittelpunktssystem	80
3.30.	Stoss mit beliebigen Geschwindigkeiten	85
3.31.	Massen bei einer Rakete	87
3.32.	Winkel und Winkelgeschwindigkeit	88
3.33.	Masse an Rolle	90
3.34.	Trägheitsmoment eines Kreisringes	92
3.35.	Rollbewegung	97
3.36.	Kugel auf schiefer Ebene	98
3.37.	Kreisel: Präzession	104
3.38.	Kräfte am Ellbogen	106
3.39.	Kräfte bei einer Leiter	107
3.40.	Definition eines Kräftepaares.	108
3.41.	Kräftepaare	109
3.42.	2. Keplersches Gesetz	111
3.43.	Ellipse: Parameter	112
3.44.	Gravitationsfeld	115
3.45.	Gravitationswaage	116
3.46.	Zentrifugalpotential	118
4.1.	Begründung des Namens Scherung	125
4.2.	Scherung eines Würfels	125
4.3.	Verdrillung	126
4.4.	Biegebalken	127
4.5.	Cantilevered beam	129
4.6.	Mikrofotografie eines Cantilevers	129
4.7.	Scherung und Dehnung	130
4.8.	Anelastisches Verhalten	131
4.9.	Allgemeine Kräfte auf Würfel	132
5.1.	Flüssigkeitsoberfläche	136
5.2.	Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeitsfläche	136
5.3.	Definition des Druckes	137
5.4.	Hydraulische Presse.	138
5.5.	Druckarbeit	139
5.6.	Berechnung des Schweredruckes	139
5.7.	Auftrieb in Flüssigkeiten	140
5.8.	Schwimmen	141
5.9.	Stabilität eines schwimmenden Körpers	142
5.10.	Aräometer	143
5.11.	Quecksilber-Barometer	144
5.12.	Druckänderung mit der Höhe	145
5.13.	Druck auf ein Volumenelement	146
5.14.	Kräfte auf ein Volumenelement Wasser	147
6.1.	Molekulares Bild der Flüssigkeit.	149
6.2.	Berechnung der Kraft eines Flüssigkeitsfilms	151

6.3.	Tropfenzähler	152
6.4.	Krümmungsradien bei einer freien Oberfläche	152
6.5.	Oberflächenspannung und Druck in einer Kugel	153
6.6.	Benetzende Flüssigkeiten	154
6.7.	Kräftegleichgewicht an der Grenzfläche	155
6.8.	Kohäsion und Adhäsion bei Benetzung und ohne Benetzung	156
6.9.	Winkelanteil Kohäsion	156
6.10.	Benetzungswinkel, Adhäsion und Kohäsion	158
7.1.	Vektorfeld der Strömung	159
7.2.	Stromlinien	160
7.3.	Fluss	160
7.4.	Berechnung der Divergenz	161
7.5.	Geschwindigkeitsgradient und Rotation	162
7.6.	Mitbewegtes System	163
7.7.	Stromlinien in einer inkompressiblen Flüssigkeit	165
7.8.	Innere Reibung in einer Flüssigkeit	166
7.9.	Laminare Strömung	167
7.10.	Viskose Strömung um einen Quader	167
7.11.	Strömung durch einen Spalt	168
7.12.	Rohrströmung	169
7.13.	Strömung um eine Kugel	170
7.14.	Prandtl-Grenzschicht	171
7.15.	Ideale Strömung	173
7.16.	Manometer	174
7.17.	Prandtl'sches Staurohr	174
7.18.	Ausströmen aus einem Loch	175
7.19.	Stromlinie	175
7.20.	Reales Bild einer Wirbelstrasse	176
7.21.	Potentialwirbel	176
7.22.	Helmholtz'sche Wirbelsätze	177
8.1.	Feder-Masse-Oszillator	181
8.2.	Kreisbewegung und Schwingung	183
8.3.	Schwingendes System im Schwerfeld	185
8.4.	mathematisches Pendel	187
8.5.	Physikalisches Pendel	188
8.6.	Torsionspendel	189
8.7.	Fremderregtes Pendel	192
8.8.	Zeigerdiagramm	196
8.9.	Fouriersynthese 1: Rechteck	199
8.10.	Fouriersynthese 2: Dreieck	199
8.11.	Fouriersynthese 3: auf dem Weg zu Pulsen	200
8.12.	Fouriersynthese 4: auf dem Weg zu Pulsen	200
8.13.	Fouriersynthese 5: auf dem Weg zu Pulsen	201
8.14.	Fouriersynthese 5: auf dem Weg zu Pulsen	201
8.15.	Gekoppelte Pendel	202
9.1.	Seilreflexion eingespannt	207

9.2.	Seilreflexion lose	208
9.3.	Wasserwelle	208
9.4.	Überlagerung von Wellen	210
9.5.	Überlagerung von gleichen Wellen	210
9.6.	Überlagerung sinusförmiger Wellen	211
9.7.	Kräfte und Ausbreitungsgeschwindigkeit	211
9.8.	Harmonische Welle: Momentaufnahme	212
9.9.	Interferenz zweier Wellen	214
9.10.	Ebene Welle	217
9.11.	Amplitude und Intensität von Kugelwellen	218
9.12.	Interferenz zweier ebener Wellen	219
9.13.	Interferenz ebener Wellen	219
9.14.	Interferenz ebener Wellen und Kugelwellen	220
9.15.	Interferenz Kreiswelle und Ebene Welle	220
9.16.	Interferenz von Kugelwellen	221
9.17.	Interferenz von Kugelwellen	222
10.1.	Polarisation durch Absorption	226
10.2.	Polarisator und Analysator	227
10.3.	Polarisation durch Streuung	228
10.4.	Brewster-Winkel	229
10.5.	Absorption von Licht	231
10.6.	Federmodell Dispersion	231
10.7.	Dispersion Federkette mit 2 Massen	233
11.1.	Huygenssches Prinzip	238
11.2.	Huygenssches Prinzip	239
11.3.	Huygenssches Prinzip	239
11.4.	Huygenssches Prinzip	240
11.5.	Huygenssches Prinzip	240
11.6.	Huygenssches Prinzip	241
11.7.	Interferenz zweier Wellen aus A und B	241
11.8.	Strahlengang bei einem Doppelspalt	242
11.9.	Beugung an einem Doppelspalt	244
12.1.	Geometrie der Reflexion	246
12.2.	Geometrie der Brechung	247
12.3.	Stufenindexfaser	249
12.4.	Prismen	250
13.1.	Ebener Spiegel	251
13.2.	Gekrümmter Spiegel	252
13.3.	Brechung an gewölbter Fläche	253
13.4.	Dünne Linse	255
13.5.	Linsen: Vereinbarte Vorzeichen	256
13.6.	Linsen zwischen zwei Medien	257
13.7.	Dicke Linse	259
13.8.	Das Auge	259
13.9.	Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur	260

13.10. Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur	260
13.11. Lupe	261
13.12. Mikroskop0	261
13.13. Kameras	262
13.14. Kollimationsoptik für Laser	264
13.15. Projektor	264
B.1. Koordinaten bei Drehung um z	273
B.2. Vertauschung $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$	274
B.3. Vertauschung $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$	275
B.4. Koordinaten bei Drehung um y	275
B.5. Vertauschung $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$	276
B.6. Vertauschung $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$	277
B.7. Koordinaten bei Drehung um x	277
B.8. Anleitung zur Permutation in Matrizen	278
B.9. Anleitung zur Permutation in Matrizen	279

Tabellenverzeichnis

1.1.	Längenskalen	14
1.2.	Massenskalen	14
1.3.	Zeitskalen	15
1.4.	Vorsätze für SI-Einheiten	16
1.5.	Namen von Grössen	17
3.1.	Schiefe Ebene: Leistung	75
3.2.	Schiefe Ebene: Geschwindigkeit	75
3.3.	Schiefe Ebene: Personenwagen	76
3.4.	Massenträgheitsmomente	94
3.5.	Beschleunigung auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel Θ .	99
3.6.	Böschungswinkel	99
3.7.	Dichten bei Normaldruck	121
5.1.	Aggregatzustände	135
5.2.	Analogie zwischen Gravitation und Druck	147
9.1.	Phase und Interferenz	215
10.1.	Eindringtiefen von Licht in Luft	236

Personenregister

Ernst Abbe Abbe, Ernst Karl, 23. 01. 1840 (Eisenach, Sachsen-Weimar-Eisenach) bis 14. 01. 1905 (Jena, Sachsen-Weimar-Eisenach, Deutsches Reich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Ernst_Abbe

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Abbe 230

André-Marie Ampère Ampère, André-Marie, 20. 07. 1775 (Lyon, Frankreich) bis 10. 06. 1836 (Marseille, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/André-Marie_Ampère

oder ausführlicher

https://fr.wikipedia.org/wiki/André-Marie_Ampère 16

Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, Conte di Quaregna e Cerreto Avogadro, Lorenzo Romano Amedeo Carlo, Conte di Quaregna e Cerreto, 09. 08 1776 (Turin, Italien) bis 09. 07. 1856 (Turin, Italien),

https://de.wikipedia.org/wiki/Amedeo_Avogadro

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Amedeo_Avogadro 16

Daniel Bernoulli Bernoulli, Daniel, 08. 02. 1700 (Groningen, Niederlande) bis 17. 03. 1782 (Basel, Schweizerische Eidgenossenschaft)

https://de.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli 173

Johann I Bernoulli Bernoulli, Johann I, 06. 08. 1666 (Basel, Schweizerische Eidgenossenschaft) bis 01. 01. 1748 (Basel, Schweizerische Eidgenossenschaft)

https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_I_Bernoulli

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli 173

Ludwig Boltzmann Boltzmann, Ludwig Eduard, 10. 02. 1844 (Wien, Österreich), bis 05. 09. 1906 (Duino, Österreich-Ungarn, heute Italien)

https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann 15, 16

Robert Boyle Boyle, Robert, 04. 02. 1627 (Lismore, Königreich Irland) bis 10. 01. 1692 (London, England)

https://de.wikipedia.org/wiki/Robert_Boyle

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Boyle 143, 144

Sir David Brewster Brewster, Sir David, 11. 12. 1781 (Jedburgh, Schottland, Vereinigtes Königreich), bis 10. 01. 1868 (Allerly bei Melrose, Schottland, Vereinigtes Königreich)

https://de.wikipedia.org/wiki/David_Brewster

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/David_Brewster 229

Augustin Fresnel Fresnel, Augustin Jean, 10. 05. 1788 (Broglie, Frankreich) bis 14. 07. 1827 (Ville-d'Avray, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Augustin_Fresnel

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean_Fresnel

sowie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Augustin_Fresnel 238

C. F. Gauß Gauß, Carl Friederich, 30. 04. 1777 (Braunschweig, Deutschland) bis 23. 02. 1855 (Göttingen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauß

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss 162

Gotthilf Hagen Hagen, Gotthilf Heinrich Ludwig, 03. 03. 1797 (Königsberg, Ostpreussen) bis 03. 02. 1884 (Berlin, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthilf_Hagen

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Gotthilf_Hagen 170

Hermann von Helmholtz Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von, 31. 08. 1821 (Potsdam, Deutschland) bis 08. 09. 1894 (Berlin Charlottenburg, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz 177

Christiaan Huygens Huygens, Christiaan, 14. 04. 1629 (Den Haag, Niederlande) bis 08. 07. 1695 (Den Haag, Niederlande),

https://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens 238

Johannes Kepler Kepler, Johannes auch Keppler genannt, 27.12. 1571 (Weil der Stadt, Deutschland) bis 15. 11. 1630 (Regensburg, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler 110

Étienne Louis Malus Malus, Étienne Louis, 23. 06. 1775 (Paris, Frankreich) bis 23. 02. 1812 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Louis_Malus

oder

https://fr.wikipedia.org/wiki/Étienne_Louis_Malus 227

Edme Mariotte Mariotte, Edme, um 1620 (wahrscheinlich Dijon, Frankreich) bis 12. 05. 1684 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Edme_Mariotte

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Edme_Mariotte 143, 144, 174, 175

James Clerk Maxwell Maxwell, James Clerk, 13. 06. 1831 (Edinburgh, Schottland) bis 05. 11. 1879 (Cambridge, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell 51

Claude Louis Marie Henri Navier Navier, Claude Louis Marie Henri, 10. 02. 1785 (Dijon, Frankreich) bis 21. 08. 1836 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Claude_Louis_Marie_Henri_Navier oder ausführlicher

https://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Navier 172

Isaac Newton Newton, Isaac, 04. 01. 1643 (Woolsthorpe-by-Colsterworth, Lincolnshire, England) bis 31. 03. 1727 (Kensington, heute Stadtteil von London, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton 39, 77, 113, 172

Max Planck Planck, Max Karl Ernst Ludwig, 23. 02. 1858 (Kiel, Herzogtum Holstein, Dänemark, heute Deutschland) bis 04. 10. 1947 (Göttingen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Max_Planck

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Max_Planck 15

Jean-Léonard-Marie Poiseuille Poiseuille, Jean-Léonard-Marie, 23. 04. 1797 (Paris, Frankreich) bis 26. 12. 1869 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Jean_Léonard_Marie_Poiseuille

oder ausführlicher

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Léonard-Marie_Poiseuille 170

Ludwig Prandtl Prandtl, Ludwig, 04. 02. 1875 (Freising, Bayern, Deutschland) bis 15. 08. 1953 (Göttingen, Deutschland),

https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Prandtl 171, 174

Osborne Reynolds Reynolds, Osborne, 23. 08. 1842 (Belfast, Nordirland, Vereinigtes Königreich) bis 21. 02. 1912 (Watchet, Somerset, Vereinigtes Königreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds 171, 172

Jean Baptiste le Rond d'Alembert le Rond d'Alembert, Jean-Baptiste, 16. 11. 1717 (Paris, Frankreich) bis 29. 10. 1783 (Paris, Frankreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_le_Rond_d'Alembert

oder ausführlicher

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean_Le_Rond_d'Alembert 50, 51, 175

Snellius Snell, Willebrord van Roijen (auch Willebrordus Snel van Royen oder Snellius), 13. 06. 1580 (Leiden, Spanische Niederlande), bis 30. 10. 1626 (Leiden, Spanische Niederlande)

https://de.wikipedia.org/wiki/Willebrord_van_Roijen_Snell

oder

https://en.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snellius 248

George Stokes Stokes, George Gabriel, 13. 08. 1819 (Skree, County Sligo, Irland) bis 01. 02. 1903 (Cambridge, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes 170, 172

Henry Fox Talbot Talbot, William Henry Fox, 11. 02. 1800 (Melbury, Dorset, England, Vereinigtes Königreich) bis 17. 09. 1877 (Lacock, Wiltshire, England, Vereinigtes Königreich),

https://de.wikipedia.org/wiki/William_Henry_Fox_Talbot

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Fox_Talbot 230

Brook Taylor Taylor, Brook , 18. 08. 1685 (Edmonton, Middlesex, England) bis 29. 12. 1731 (Somerset House, London, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor 190

William Thomson, 1st Baron Kelvin Thomson, William 1st Baron Kelvin , 26. 06. 1824 (Belfast, Nordirland) bis 17. 12. 1907 (Netherhall bei Largs, Schottland),

https://de.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1._Baron_Kelvin

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1st_Baron_Kelvin 15

Evangelista Torricelli Torricelli, Evangelista, 15. 10. 1608 (Faenza, Italien) bis 25. 10. 1647 (Florenz, Italien)

https://de.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli 144, 174

James Watt Watt, James, 30. 01. 1736 (Greenock, Iverclyde, Schottland) bis 25. 08. 1819 (Heathfield, Staffordshire, England),

https://de.wikipedia.org/wiki/James_Watt

oder ausführlicher

https://en.wikipedia.org/wiki/James_Watt 45

Abkürzungen

CCD Charge Coupled Device 262

CMOS Complimentary Metal Oxide Semiconductor 262

VPN Virtual Private Network 31, 32, 39, 47, 48, 51, 56, 61, 72, 76, 81, 87, 90, 98, 104, 105, 108, 116, 228–230, 235, 245, 247, 249, 252–254, 262, 265

Referenzen

- [Ake+22] M. Aker u. a. „Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity“. In: *Nature Physics* 18.2 (Feb. 2022), S. 160–166. DOI: [10.1038/s41567-021-01463-1](https://doi.org/10.1038/s41567-021-01463-1) (siehe S. 14).
- [Bro+08] I. N. Bronštein u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Aufl. QA 40/2008 B. Verlag Harri Deutsch, 2008 (siehe S. 20, 63, 281, 282, 285, 287).
- [HRW03] D. Halliday, R. Resnick und J. Walker. *Physik*. QC 21/2003 H. Wiley-VCH GmbH, 2003 (siehe S. 19).
- [Hal+17] D. Halliday u. a. *Halliday Physik*. Online lesbar über die Bibliothek. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2017, S. 1635. ISBN: 9783527812592. URL: https://hauptfach-wiley-kiz-uniulm.ciando.com/shop/book/short/index.cfm?fuseaction=short&bok_id=2364960&cat_id=0&cat_nav=0 (siehe S. 19).
- [Hal+19] D. Halliday u. a. *Halliday Physik Für Natur- und Ingenieurwissenschaftliche Studiengänge*. online lesbar über Bibliothek. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2019, S. 992. ISBN: 9783527822645. URL: https://nebenfach-wiley-kiz-uniulm.ciando.com/shop/book/short/index.cfm?fuseaction=short&bok_id=2747567&cat_id=0&cat_nav=0 (siehe S. 20).
- [Hec05] E. Hecht. *Optik*. 4. Aufl. Übersetzt von Dr. Anna Schleitner. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005. ISBN: 3-486-27359-0. DOI: [10.1515/9783110526653](https://doi.org/10.1515/9783110526653) (siehe S. 237, 242, 259, 262).
- [HMS21] E. Hering, R. Martin und M. Stohrer. *Physik für Ingenieure*. Online erhältlich über Uni Ulm. Springer Berlin Heidelberg, 2021. DOI: [10.1007/978-3-662-63177-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-63177-5). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-63177-5> (siehe S. 20).
- [Kän78] W. Känzig. *Physik I: Mechanik und Wellenlehre*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978 (siehe S. 231, 234).
- [Kne78] F. Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner, 1978. DOI: [10.1007/978-3-322-84886-4](https://doi.org/10.1007/978-3-322-84886-4) (siehe S. 20, 102, 177).
- [Kuc21] H. Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. gibt es in der Bibliothek. Carl Hanser Verlag GmbH & Co, 2021. ISBN: 9783446442184. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=799031461> (siehe S. 20).
- [Lin14] Lindner. *Physik für Ingenieure 19.A.* eine ältere Auflage ist in der Bibliothek erhältlich. Carl Hanser Verlag GmbH & Co, 2014. ISBN: 9783446442528. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=1606542745> (siehe S. 20).

- [LO08] K. Lüders und G. von Oppen. *Bergmann, Schäfer, Mechanik, Akustik, Wärme*. Erhältlich in der Bibliothek. de Gruyter, 2008. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=1355184738> (siehe S. 20).
- [Mes06] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. 23. Aufl. QC 21/2006 G-1 Ex.2. Springer Verlag, 2006. DOI: [10.1007/978-3-662-45977-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5) (siehe S. 19).
- [Mes15] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. Bibliothek: QC 21/2015 G. Springer Berlin Heidelberg, 2015. DOI: [10.1007/978-3-662-45977-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5). URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=1612684335> (siehe S. 15, 19, 23, 24, 27, 32, 39, 40, 42, 46, 50, 56, 58, 61, 64, 70, 102, 104, 105, 111, 121, 123, 124, 126, 127, 129, 131, 181, 190, 192, 196, 198, 202, 205, 207, 214, 216, 225, 230, 235, 245, 247–249, 251, 253, 254, 258, 260, 261, 264).
- [Pau02] H. J. Paus. *Physik in Experimenten und Beispielen*. einsehbar in der Bibliothek. Hanser Fachbuchverlag, 2002, S. 1038. ISBN: 9783446221352. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=350183376> (siehe S. 20).
- [Pér96] J.-P. Pérez. *Optik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1996. ISBN: 3-86025-389-1 (siehe S. 237, 242, 262).
- [Stö04] H. Stöcker. *Taschenbuch der Physik Formeln, Tabellen, Übersichten. Formeln, Tabellen, Übersichten*. gibt es in der Bibliothek. Deutsch, 2004. ISBN: 9783817117215. URL: <https://rds-ulm.ibs-bw.de/link?kid=1620138735> (siehe S. 20).
- [TM04] P. A. Tipler und G. Mosca. *Physik*. 2. Aufl. ISBN-13: 978-3827411648. Spektrum Verlag, 2004. DOI: [10.1007/978-3-662-58281-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-58281-7) (siehe S. 15, 17, 19, 23, 24, 27, 31, 32, 39–42, 46, 51, 54, 56–61, 63, 64, 66, 70, 71, 74, 76–79, 81–84, 86, 88, 90–92, 94, 96, 100, 102, 105–107, 110, 111, 116, 117, 121, 123, 181, 183, 185, 189, 190, 192, 207, 211–214, 225, 228, 230, 237, 242, 245, 247–249, 251, 253, 254, 259–262).
- [Wik24] Wikipedia. *Talbot Effect*. 19. Jan. 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Talbot_effect (siehe S. 230).

Stichwortverzeichnis

- 1. Newtonsches Axiom, 39, 53
- 2. Newtonsches Axiom, 86
- 2. Newtonsches Axiom, 53, 63, 78, 89
- 3. Newtonsches Axiom, 43, 53, 78
- Ableitung
 - lokal, 163–165
 - total, 163–165
- Absorptionskoeffizient, 231
- Adhäsionskräfte, 155
- Aggregatzustand, 135
- Akkomodation, 260
- Aktionsgesetz, 40
- akustischen Zweig, 233
- Ampere, 16
- Aräometer, 142–143
- Arbeit, 139, 150, 151, 173
 - Druck, 139
- Atmosphäre
 - Höhe, 144–145
- Atmosphärendruck, 144–145
- Auftrieb, 140–141
- Auge, 259–260
- Avogadrozahl, 16
- Benetzung, 154–158
- Bernoulli-Gleichung, 173
- Beschleunigung, 164
- Beschreibung
 - Strömung, 159–163
- Bewegungsgleichung
 - Flüssigkeit, 172
- Boltzmannkonstante, 15
- Boyle-Mariotte
 - Gesetz, 143
- Brennweite, 259, 260, 263
- Brownsche Bewegung, 149
- Cäsium, 15
- Candela, 16
- Dampfbildung, 175
- Deformierbare Medien, 177
- Differentiation, 270–271
 - Regeln, 269
- Differentiationsregeln, 269
- Dimension, 171
- Divergenz, 162
- Doppelspalt, 242–244
- Drehimpulssatz, 109
- Drehmoment, 108, 109, 142
- Dreieckschwingung, 199
- Druck, 137–139, 170, 177
 - Gas, 143
 - Potential, 146–147
 - Wirkung, 137–138
- Druckarbeit, 139
- Druckgradient, 177
- Dyname, 108–109
- Einheitsladung, 16
- Elektrostatik, 163
- Elementarladung, 16
- Energie
 - kinetisch, 58–60, 63, 72, 80–82, 92, 93, 96, 97, 112, 113, 117, 118, 171, 184, 185, 214
 - potentiell, 58, 62, 64–68, 71–73, 113–115, 184–186, 206
- Feld
 - Gravitation, 135
- Flüssigkeit, 135, 140, 142, 143, 154, 155, 165, 166, 172
 - benetzend, 154–158
 - Bewegungsgleichung, 172
 - ideal
 - Strömung, 173–175
 - Oberfläche
 - Gestalt, 136
- Flüssigkeiten, 135–147

- Fluss, 160–163
 Fourieranalyse, 199–201
 Fouriersynthese, 199–201
 Freie Oberfläche, 152–153
 Frequenzspektrum, 198
 Fresnel-Huygens
 Prinzip, 237
 Fresnel-Huygenssches Prinzip, 237–241

 Gasdruck, 143
 Gase, 135–147
 Geometrie, 172
 Geschwindigkeit, 135, 159, 166, 171
 Gesetz
 Boyle-Mariotte, 143
 Navier-Stokes, 172
 Gesetz von Malus, 227
 Gestalt
 Flüssigkeitsoberfläche, 136
 Glaskörper, 259, 260
 Gleichgewicht
 Kräfte, 152, 155
 Gradient
 Druck, 177
 Gravitation, 147, 163, 173
 Gravitationsfeld, 135
 Gravitationskraft, 147
 Grenzschicht, 171
 Prandtl, 171–172

 Höhe
 Atmosphäre, 144–145
 Helmholtzsche Wirbelsätze, 177
 Huygens
 Prinzip, 237–241
 Huygenssches Prinzip, 237–241
 Hydraulische Presse, 138

 Ideale Flüssigkeit
 Strömung, 173–175
 Inertialsystem, 39
 Innere Reibung, 166
 Integrale
 Rechenverfahren, 281–283
 unbestimmt, 282
 Intensität, 243
 Interferenz
 Kugelwellen, 241–242
 Interferenzextrema, 242

 Interferenzmuster, 240–242

 Kamera, 262–263
 Kapillarität, 154–158
 Kavitation, 175
 Kelvin, 15
 Kilogramm, 15, 40
 Kinetische Energie, 58–60, 63, 72, 80–82, 92, 93, 96, 97, 112, 113, 117, 118, 171, 184, 214
 Kohäsionskräfte, 149, 155
 Kompressibilität
 isotherm, 143
 konservativ, 65
 Kontinuitätsgleichung, 164–165
 Kräftegleichgewicht, 152, 155
 Kräftepaare, 107–108
 Kraft, 17, 40–43, 46, 47, 53, 55–69, 73, 74, 86, 87, 89, 100, 101, 104, 105, 108–110, 112, 114, 123, 125, 128, 132, 136, 137, 140, 146, 151, 152, 166, 181, 187, 190, 193, 202, 211, 212
 konservativ, 65
 resultierend, 52, 55, 56
 Kraft-Distanz-Kurve, 190
 Kreiswellen, 238–240
 Kugel
 Strömung, 170
 Kugelwellen, 238
 Interferenz, 241–242

 Längeneinheit, 15
 Laminare Strömung, 167–172
 Lichtgeschwindigkeit
 Vakuum, 15
 Lichtstärke, 16
 Lichtstrahlen, 217
 Linse, 259, 260
 Auge, 259
 Linsen
 Arten, 256
 dünn
 Medien, 257–258
 Radien, 256
 Medien
 unterschiedlich, 257–258
 Loch
 Strömung, 174–175

- Lokale Ableitung, 163–165
- Malus
Gesetz, 227
- Manometer, 173–174
- Mariotte'sche Flasche, 175
- Masse, 15, 40, 140, 143
- Massenträgheitsmoment, 188
- Matrix
Rotation, 273–279
- Meter, 15
- Mie-Streuung, 236
- Mol, 16
- Näherung
paraxial, 241, 242
- Navier-Stokes
Gesetz, 172
- Newton, 17, 41, 77, 113
1. Axiom, 39, 53
2. Axiom, 53, 63, 78, 86, 89
3. Axiom, 43, 53, 78
- Oberfläche
Flüssigkeit, 136
frei, 152–153
- Oberflächenspannung, 149–158
- Objektiv, 262, 263
- paraxial, 241
- paraxiale Näherung, 241, 252, 254
- Permutation, 273–277
- Phasengeschwindigkeit, 232
- Phasenspektrum, 198
- Planckkonstante, 15, 40
- Polarisation, 226
- Potential
Druck, 146–147
- Potentielle Energie, 186
- Potentielle Energie, 58, 62, 64–68, 71–73, 113–115, 184–186, 206
- Prandtl-Grenzschicht, 171–172
- Prandtl'sches Staurohr, 174
- Presse
hydraulisch, 138
- Prinzip
Huygens, 238–241
- Prinzip von Fresnel-Huygens, 237
- Pulsfolge, 200, 201
- Quantenmechanik, 62
- Quecksilber, 155
- Raumwinkel, 16
- Rayleigh-Streuung, 236
- Rechteckschwingung, 199
- Reibung
innere, 166
- Reihen, 272
- Reynoldszahl, 172
- Rohr
Strömung, 169–170
- Rotation
Matrix, 273–279
- Schere, 125
- Scherung, 125
- Scherviskosität, 166, 172
- Schwebung, 197
- schwere Masse, 42
- Schweredruck, 139–143
- Schwimmen, 141–142
- Sekunde, 15
- SI-System, 16
- Snellius'sche Brechungsgesetz, 248
- Spalt, 168
Strömung, 168–169
- Stationäre Strömung, 165
- Staurohr
Prandtl, 174
- Stoffmenge, 16
- Strömung, 159, 160, 162, 163, 165, 167, 168, 170, 171, 173
ideale Flüssigkeit, 173–175
Kugel, 170
laminar, 167–172
Loch, 174–175
Rohr, 169–170
Spalt, 168–169
stationär, 165
- Strömungen, 159–177
Beschreibung, 159–163
- Strömungswiderstand, 175–177
- Stromstärke, 16
- Talboteffekt, 230
- Taylorreihe, 190, 271
- Temperatur, 15
- Totale Ableitung, 163–165

- Trägheitsgesetz, 39
- Volumen, 137, 143, 146, 161, 165
- Volumenstrom, 170
- Volumenviskosität, 172
- Wellen
- 2D, 242
 - 3D, 242
- Wellenbild, 239
- Widerstand
- Strömung, 175–177
- Windkanal, 172
- Wirbelfaden, 177
- Wirbelsätze
- Helmholtz, 177
- Wirkung
- Druck, 137–138
- Zeiteinheit, 15
- Zeitkonstante, 191
- Zirkulation, 177
- Zwischenbild, 262