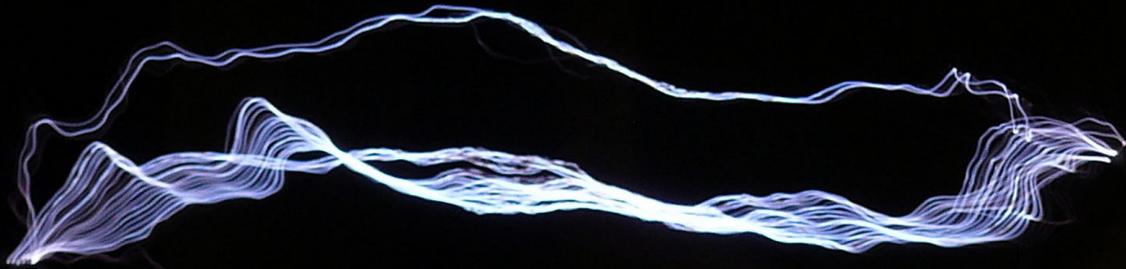




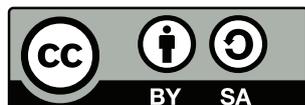
ulm university universität
uulm



Vorlesungsskript
PHYS1100.0 Elektrizität und
Magnetismus
Bachelor Physik
Bachelor Wirtschaftsphysik
Lehramt Physik

Othmar Marti
Institut für Experimentelle Physik
Universität Ulm

veröffentlicht unter



[Lizenzinformationen](#)

25. März 2015

*Nothing is too wonderful to be true if it be consistent
with the laws of nature.*

*Why, sir, there is every possibility that you will soon be
able to tax it! (to PM William Gladstone, on the
usefulness of electricity)*

But still try, for who knows what is possible?

Michael Faraday, 1791-1861

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
1.1	Lizenzinformationen	11
1.2	Dank	12
2	Elektrostatik	13
2.1	Elektrische Ladung und Coulombsches Gesetz	14
2.2	Das elektrische Feld	17
2.3	Zusammenhang zwischen Ladung und Feld: das Gauss'sche Gesetz	20
2.3.1	Dipole in elektrischen Feldern	23
2.4	Elektrische Felder von Leitern	23
2.4.1	Influenz und Bildladung	30
2.5	Elektrostatistisches Potential	31
2.6	Poisson-Gleichung	39
2.7	Kapazität: eine geometrische Eigenschaft	40
2.8	Energie des elektrischen Feldes	45
2.8.1	Diskussion Versuch Flächenladungsdichte	46
2.9	Elektrische Eigenschaften der Materie	48
2.9.1	Dielektrika	49
2.9.2	Elektrische Phänomene	56
2.10	Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik	59
3	Elektrische Ströme	63
3.1	Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes	64
3.2	Das Ohmsche Gesetz	69
3.3	Elektromotorische Kraft und Joulesche Wärme	74
3.4	RC-Stromkreise	76
3.5	Schaltungen und Bauelemente	79
3.5.1	Grafische Methode zur Bestimmung von Arbeitspunkten	81
3.5.2	Transistoren	84
3.6	Magnetfeld und Lorentzkraft	88
3.7	Die magnetische Kraft	89
3.7.1	Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme	89
3.7.2	Relativistische Berechnung	90
3.7.3	Magnetisches Feld	94
3.8	Eigenschaften des magnetischen Feldes	95
3.8.1	Eigenschaften des B-Feldes	95
3.8.2	Das Biot-Savart-Gesetz	98
3.8.3	Das Ampèresche Durchflutungsgesetz	101
3.8.4	Quellenfreiheit	105

3.8.5	Das B-Feld einer beliebigen Stromverteilung	107
3.9	Hall-Effekt	112
3.10	Die Lorentz-Transformation der Felder E und B	113
3.11	Zusammenfassung: Ströme	117
4	Zeitlich veränderliche Magnetfelder	121
4.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz	121
4.1.1	Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären B-Feld . . .	121
4.1.2	Der magnetische Fluss	122
4.1.3	Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform	125
4.1.4	Wirbelströme	128
4.1.5	Unendlich lange Spule	130
4.1.6	Transformator	132
4.1.7	Kirchhoffsche Gesetze	136
4.1.8	Wechselstromkreise, Impedanzen	137
4.1.9	Elektromotoren	142
4.1.10	Betatron	145
4.1.11	Skin-Effekt	147
4.2	Energie des Magnetfeldes	148
4.3	Magnetische Eigenschaften der Materie	150
4.3.1	Kugeln im inhomogenen Magnetfeld	150
4.3.2	Der Satz von Larmor	151
4.3.3	Diamagnetismus	155
4.3.4	Magnetisierung	157
4.3.5	Das magnetische Moment des Elektrons: Spin	158
4.3.6	Paramagnetismus	159
4.3.7	Ferromagnetismus	161
4.4	Zusammenfassung: zeitlich veränderliche Magnetfelder	165
5	Die Maxwellschen Gleichungen	169
5.1	Was wissen wir?	169
5.2	Auflösung des Widerspruchs zur Kontinuitätsgleichung, Maxwell- gleichungen	169
5.3	Maxwellgleichungen	170
5.4	Maxwellgleichungen in isotropen zeitunabhängigen Medien	172
5.5	Anwendung der Maxwellgleichungen	173
6	Elektromagnetische Wellen	175
6.1	Die Wellengleichung im Vakuum	175
6.2	Allgemeine Lösung der Wellengleichung	176
6.3	Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem	178
6.3.1	Wellenwiderstand	183
6.3.2	Stehende Wellen	184
6.4	Poynting-Vektor und Energiefluss	185
6.5	Elektromagnetische Wellen im Raum	186
6.5.1	Ebene Wellen	191
6.5.2	Kugelwellen	191
6.6	Lichtgeschwindigkeit im Medium und Intensität	192
6.7	Polarisation	193

6.7.1	Polarisation durch Absorption (Dichroismus)	194
6.8	Die Fresnelschen Formeln	196
6.8.1	s-Polarisation	200
6.8.2	p-Polarisation	203
6.8.3	Evaneszente Wellen	214
6.9	Zusammenfassung	215
A	Literaturhinweise	217
B	Begriffe	219
C	Mathematische Sätze	227
C.1	Die Diracsche Deltafunktion	227
C.2	Vektoridentitäten	229
C.2.1	Produkte mit Vektoren	229
C.2.2	Ableiten von Vektoren	230
C.2.3	Vektorableitungen bei Skalarfeldern	231
C.2.4	Vektorableitungen bei Vektorfeldern	231
C.2.5	Graphische Darstellung der Ableitungen in drei Dimensionen	232
C.2.6	Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen . .	237
C.3	Satz von Gauss	238
C.4	Satz von Green	238
C.5	Satz von Stokes	239
D	Berechnung elektrischer Felder	241
D.1	In der Nähe eines Leiterstückes	241
D.2	Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe	244
D.3	Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche	245
D.4	In allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter	246
E	Lorentztransformationen	249
E.1	Lorentztransformationen für die magnetische Induktion	249
E.2	Lorentztransformation für das magnetische Feld	250
	Liste der Versuche	251
	Abbildungsverzeichnis	253
	Tabellenverzeichnis	257
	Stichwortverzeichnis	263

1. Einleitung

1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 4.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiterverwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Der Lizenzgeber kann diese Freiheiten nicht widerrufen solange Sie sich an die Lizenzbedingungen halten.

Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter

<http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html>

oder unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

oder unter

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Die CC-Icons und -Buttons und wurden unter der Lizenz CC BY von <http://creativecommons.org/about/downloads> veröffentlicht.

1.2. Dank

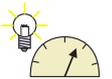
Ich habe mich über alle Kommentare und Anregungen zu diesem Skript vor allem von Studierenden gefreut. Ich bin Herrn Nils Tobias Krämer sehr dankbar für das sorgfältige Durchlesen des Skripts.

2. Elektrostatik

Elektrostatik wird benötigt, um

- die Wirkung von Klebestreifen,
- die Ladungstrennung beim Ausgiessen,
- die Funktion von Elektronenröhren,
- die Funktion der Braunschen Röhre und
- die Funktion des Kondensators

beschreiben.



Versuch zur Vorlesung: Entfernen eines Klebestreifens von einem Elektrometer

Versuch zur Vorlesung:

Ladungstrennung (Versuchskarte ES-24)



Versuch zur Vorlesung:

Ladungstrennung (Versuchskarte ES-25)

Die *Elektrostatik* befasst sich mit der Wechselwirkung elektrisch geladener Körper. Seit dem Altertum ist bekannt, dass Körper sich durch reiben aufladen können. Wo haben Sie sich schon aufgeladen? Staub oder kleine Teilchen bleiben an aufgeladenen Körpern hängen. Sie werden auch gegen die Gravitationskraft angezogen.

Die Kraft zwischen *Ladungen* kann stärker als die Gravitationskraft sein.

Es gibt auch Situationen, wo sich durch Reibung geladene Teilchen abstossen.

Es gibt mindestens zwei Arten von *Ladungen*!

Versuch zur Vorlesung:

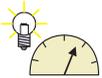


Reibungselektrizität (Versuchskarte ES-15)

Genaue Untersuchungen haben gezeigt, dass es **genau zwei Arten von Ladungen** gibt. *Lichtenberg* benannte die *Ladungen* so, dass *Ladungen* auf geriebenen Glasstäben **positiv** genannt werden und *Ladungen* auf geriebenem Bernstein **negativ**.

- Zwei *Ladungen* ziehen sich an, wenn sie verschiedener Art sind (positiv und negativ oder negativ und positiv)
- Zwei *Ladungen* stossen sich ab, wenn sie gleichnamig sind (positiv und positiv oder negativ und negativ)

Ladung ist eine extensive Grösse, das heisst, sie skaliert mit der Grösse des Systems.



Versuch zur Vorlesung:

Ladungen löffeln (Versuchskarte ES-13)

Genaue Messungen zeigen, dass für Elektronen die elektrostatischen Kräfte etwa 4.1681×10^{42} mal stärker als die Gravitationskräfte sind¹². Die Gravitationskräfte können also nur beobachtet werden, da die *Ladungen* sich im Mittel sehr genau kompensieren.

2.1. Elektrische *Ladung* und Coulombsches Gesetz

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 617]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 189])

¹Gravitation: $F_G(r) = G \frac{m_e^2}{r^2} = 6.670 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \frac{(9.1091 \times 10^{-31} kg)^2}{r^2} = 5.5345 \times 10^{-71} Nm^2 r^{-2}$.

²Elektrostatische Kraft: $F_E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \frac{(1.6021 \times 10^{-19} C)^2}{r^2}$
 $= 2.3068 \times 10^{-28} Nm^2 r^{-2}$.

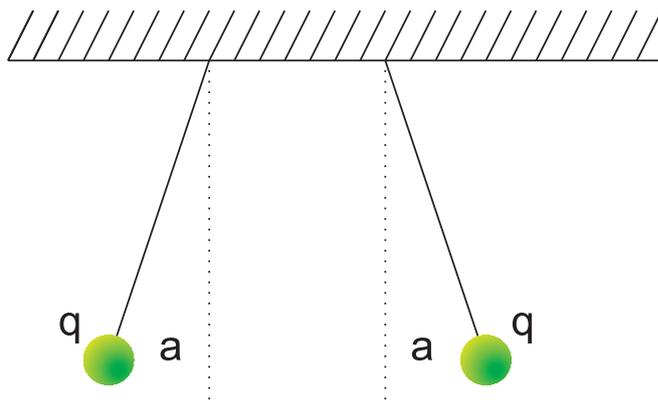


Abbildung 2.1.: Auslenkung zweier mit identischer *Ladung* q geladener Kugeln.

Wenn zwei Kugeln mit der gleichen *Ladung* q geladen sind, werden sie nach aussen abgestossen. Wird die *Ladung* verändert, ändert sich die *Kraft* proportional.

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2.1.1)$$

Dabei wird angenommen, dass die *Ladungen Punktladungen* sind.

Ladungen werden in **Coulomb**, abgekürzt, **C**, angegeben.

Eine Messung der Kräfte mit einer Drehwaage (nach *Cavendish*) ergibt das folgende Gesetz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1.2)$$

wobei die Konstante vom Masssystem abhängt und im SI-System

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.1.3)$$

ist. Die Konstante ϵ_0 heisst *Permittivität des Vakuums*. Ihre Grösse ist

$$\epsilon_0 = 8.8544 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2) \quad (2.1.4)$$

Indem man ϵ_0 festlegt, legt man die Grösse der Ladungseinheit fest. Im SI-System wurde $K = 10^{-7}c^2 = 8.9874 \cdot 10^9$ gesetzt, damit die elektrischen Grössen einen handhabbaren Zahlenwert haben. Mit dieser Definition folgt der Wert von ϵ_0 .

Dieses Gesetz kann durch folgende Überlegung erraten werden:

- $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist ein Vektorfeld.
- Der mathematische Fluss dieses Vektorfeldes durch ein Flächenelement $d\mathbf{A}$ ist $d\Phi(\mathbf{r}) = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei die Richtung von \mathbf{A} die Richtung der Normalen zu diesem Flächenelement ist.
- Der gesamte Fluss des Kraftfeldes durch die Kugeloberfläche $A(r) = 4\pi r^2$ ist durch $\Phi(r) = \iint_A d\Phi(\mathbf{r}) = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{A}$ gegeben.

- Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ nicht von der Richtung abhängen und muss radial sein. Damit kann die Kraft vor das Integral genommen werden.
- $\Phi(r) = F(r) \iint_A dA = 4\pi r^2 F(r)$
- Wenn der Fluss des Vektorfeldes \mathbf{F} unabhängig von r sein soll, so muss die Kraft umgekehrt proportional zu r^2 sein.



Versuch zur Vorlesung:

Coulomb-Gesetz (Versuchskarte ES-31)

Das *Coulombsche Gesetz* lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.1.5)$$

Das Coulombsche Gesetz ist mathematisch äquivalent zum Gravitationsgesetz. Alle Aussagen über die Gravitation gelten auch für *Ladungen*, mit der Abweichung, dass *Ladungen* zwei Vorzeichen haben können.

Elektrostatische Kräfte sind additiv.

Ladungen sind nicht beliebig teilbar. Versuche von *Millikan* ergaben, dass die kleinste beobachtbare Ladung den Betrag $1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ hat. Diese Ladung ist auf

Elektronen $q = -e = -1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Masse: $m_e = 9.1096 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) und

Protonen $q = e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Masse: $m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

zu finden. e heisst die Elementarladung. In Kernbauteilen, den Quarks, gibt es Ladungen vom Betrage $e/3$. Diese Ladungen sind aber nicht frei zu beobachten.

Ladungen können nur paarweise entstehen (jeweils die gleiche negative und positive *Ladung*). Die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System ist konstant.

2.2. Das elektrische Feld

Wir wollen eine Formulierung finden, die die Stärke der elektrostatischen Kraft als eine Feldgrösse mal die *Ladung* der Testladung beschreibt, also $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Damit haben wir eine Beschreibung der Elektrostatik, die unabhängig von der Testladung ist. Genauer formuliert hat man

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (2.2.1)$$

Wir definieren

Das *elektrische Feld* der *Ladung* Q ist durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (2.2.2)$$

gegeben.

\mathbf{E} ist das elektrische Feld und somit auch der Feldvektor des elektrischen Feldes³. Die Einheit von \mathbf{E} ist $[\mathbf{E}] = \text{N C}^{-1} = \text{V m}^{-1}$.⁴

	$E/\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$
Stromleitung in Wohnhäusern	10^{-2}
Radiowellen	10^{-1}
Atmosphäre	10^2
Sonnenlicht	10^3
Unter einer Gewitterwolke	10^4
In einer Röntgenröhre	10^6
Laser	bis 10^{12}
Am Ort des Elektrons im Wasserstoffatom	$6 \cdot 10^{11}$
Auf der Oberfläche eines Urankerns	$2 \cdot 10^{21}$

Tabelle 2.1.: Elektrische Felder in der Natur

Eine Verteilung von $N + 1$ Ladungen $q_i(\mathbf{r}_i)$ hat das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.2.3)$$

Die obige Gleichung gilt für alle $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}$, $i = 0 \dots N$. Für kontinuierliche Ladungsverteilungen führt man eine Ladungsdichte

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r})}{\Delta V} \quad (2.2.4)$$

³ g ist der Feldvektor des Gravitationsfeldes

⁴Es ist $VA = W = Nm/s$ sowie $C/s = A$. Also ist $CV = AsV = Nm$ und damit $C = Nm/V$.

ein. Das resultierende elektrische Feld ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV \quad (2.2.5)$$



Versuch zur Vorlesung:

Elektrische Feldlinien ([Versuchskarte ES-4](#))

Feldlinien dienen zur Visualisierung des elektrischen Feldes. Formal konstruiert man eine Feldlinie, indem man von einem Ausgangspunkt aus den Vektor des elektrischen Feldes abträgt und dann vom neuen Startpunkt aus wieder gleich verfährt. Zeichnet man quer zu den Feldlinien eine Linie und zählt, wie viele Feldlinien man pro Längeneinheit hat, ist dies ein Mass für die Feldstärke. Das Konzept der Feldlinien stammen von *Michael Faraday*.

Feldlinien laufen von der positiven *Ladung* zu der negativen *Ladung*.

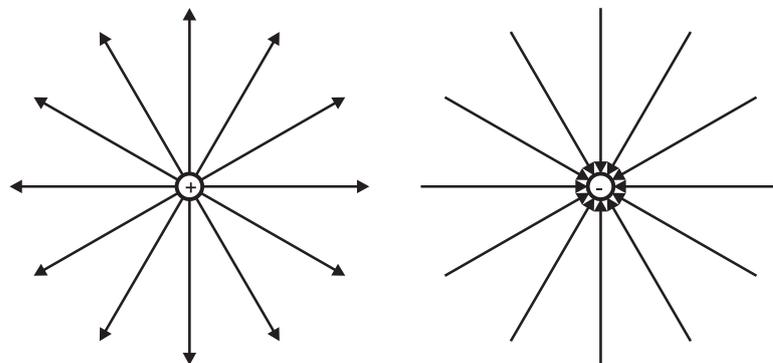


Abbildung 2.2.: Feldlinien. Links von einer positiven *Ladung*, rechts von einer negativen *Ladung*. Die Feldlinien zeigen von der positiven *Ladung* zu der negativen *Ladung*.



Versuch zur Vorlesung:

Applet: elektrostatische Felder ([Versuchskarte](#))

Link zur Vorlesung:([Applet: elektrostatische Felder](#))

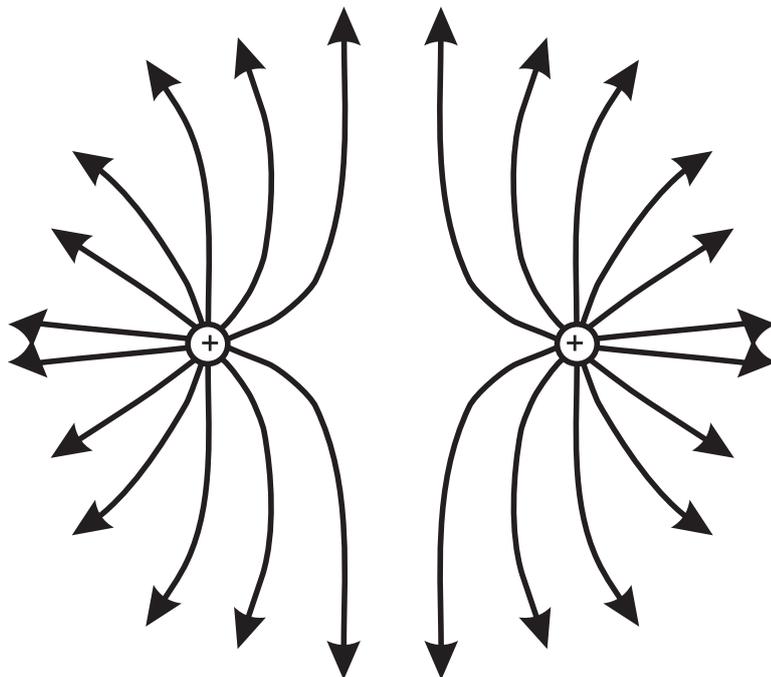


Abbildung 2.3.: Feldlinien bei zwei gleichen positiven *Ladungen*.

1. Elektrische Feldlinien beginnen bei positiven *Ladungen* und enden bei negativen *Ladungen*.
2. Um eine einzelne Punktladung herum sind alle Feldlinien kugelsymmetrisch verteilt
3. Die Anzahl der Feldlinien, die von positiven *Ladungen* ausgehen, oder auf negativen *Ladungen* enden, ist proportional zu der Grösse der *Ladung*.
4. An jedem Punkt des Raumes ist die Feldliniendichte proportional zur Feldstärke in diesem Punkt.
5. In grosser Entfernung wirkt ein System von *Ladungen* wie eine einzige Punktladung, deren Grösse der Gesamtladung des Systems entspricht.
6. Feldlinien schneiden sich nicht.

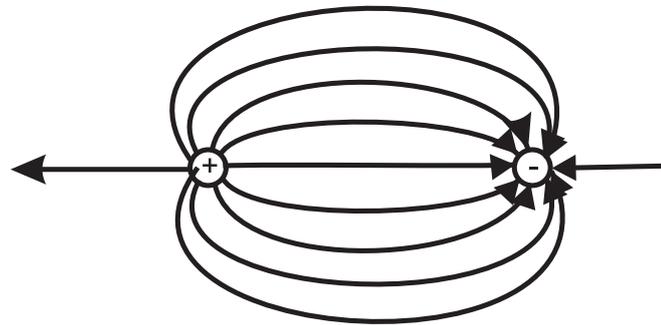


Abbildung 2.4.: Feldlinien bei einer positiven *Ladung* und einer vom Betrage her gleichgrossen negativen *Ladung*.

Wenn das elektrische Feld die einzige Ursache der Beschleunigung ist, dann gilt

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (2.2.6)$$

Ladungen, die aus der Ruhe durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden, folgen den Feldlinien. Elektrische Felder, die eine *Ladung* q mit der Masse m ablenken, erlauben q/m zu bestimmen.

2.3. Zusammenhang zwischen *Ladung* und Feld: das Gauss'sche Gesetz

Nach der Gleichung (2.2.4) kann die gesamte *Ladung* in einem Raumgebiet begrenzt durch die Fläche A durch

$$Q = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.3.1)$$

ausgedrückt werden.

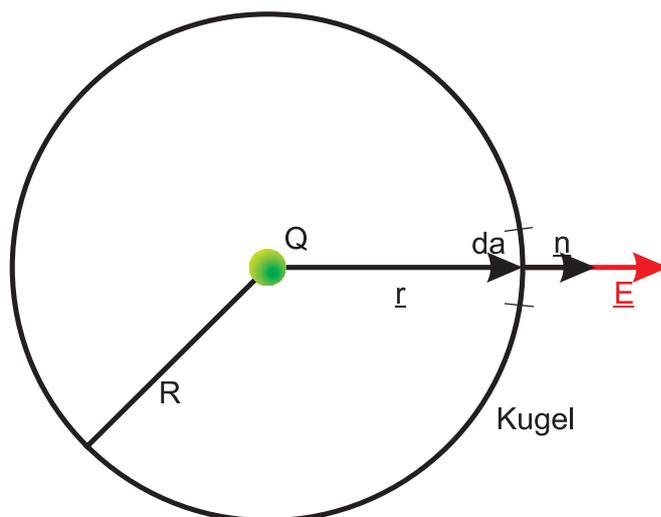


Abbildung 2.5.: Integration über eine Kugelfläche mit einer Punktladung im Zentrum

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Situation um eine Punktladung Q . Wir definieren den Normalenvektor am Ort \mathbf{r} als $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/r$. Das Oberflächenelement da ist $da = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$.

Das elektrische Feld an der Kugeloberfläche ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.3.2)$$

Wir erhalten damit das *Gaussche Gesetz*

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \int_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{Q r^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin \Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Die Grösse $\Phi = \int_{\text{Oberfläche}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ ist der *Fluss des Vektorfeldes \mathbf{E}* oder der *Fluss des elektrischen Feldes \mathbf{E}* durch die Oberfläche. Dieses Integral kann vereinfacht werden, indem wir die *dielektrische Verschiebung*

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.3.4)$$

einführen. Die Einheit der dielektrischen Verschiebung ist $[\mathbf{D}] = C/m^2 = As/m^2$.

Weiter ist

$$\int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (2.3.5)$$

Allgemein gilt die obige Gleichung für beliebige geschlossene Flächen S , die das Volumen $V(S)$ einschliesst.

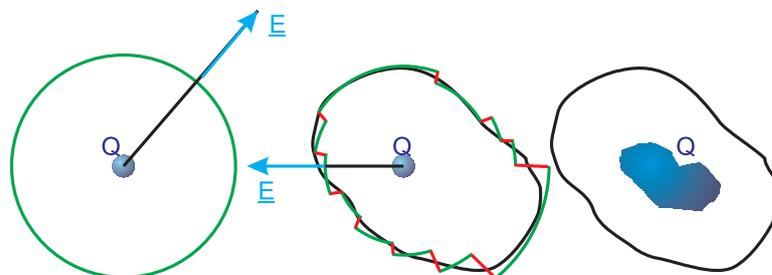


Abbildung 2.6.: Approximation von beliebigen Oberflächen durch Kugelsegmente. Approximation einer kontinuierlichen Ladungsverteilung durch Punktladungen.

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) da(\mathbf{r}) \quad (2.3.6) \\ &= Q_{\text{in } A} \\ &= \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \end{aligned}$$

Mit dem Gausschen Satz (Gleichung (C.3.1)) kann die Gleichung umgeschrieben werden in

$$\iint_A \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV = \iiint_{V(A)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (2.3.7)$$

Diese Gleichung muss für alle Oberflächen S gelten. Deshalb müssen die Integranden gleich sein

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.3.8)$$

Dies ist die Differentialform der Gleichung für die elektrische Verschiebung. Die

physikalische Interpretation ist: die *Ladungen* sind die *Quellen* (*Divergenz*) der elektrischen Verschiebung und damit des elektrischen Feldes.

Im ladungsfreien Raum lautet Gleichung (2.3.8) : $\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$. Diese Gleichung ist mathematisch äquivalent zur Kontinuitätsgleichung strömender inkompressibler Flüssigkeiten. Für deren Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gilt nämlich $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$.

2.3.1. Dipole in elektrischen Feldern

Es gibt Moleküle, bei denen die negativen und die positiven *Ladungen* getrennte Schwerpunkte haben. Eine negative *Ladung* $-q$ im Abstand ℓ von einer positiven *Ladung* q heisst *Dipol* mit dem *Dipolmoment*

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{\ell} \quad (2.3.9)$$

Die Einheit des Dipolmoments ist $[p] = \text{Cm}$. **Der Vektor des Dipols zeigt von $-q$ nach $+q$.**

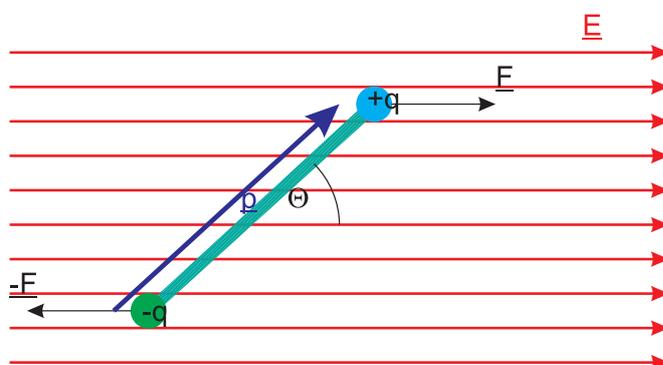


Abbildung 2.7.: Kräfte auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld.

Im homogenen elektrostatischen Feld \mathbf{E} wirkt auf die positive *Ladung* die Kraft \mathbf{F} und auf die negative *Ladung* $-\mathbf{F}$. Zusammen bilden diese beiden Kräfte ein Kräftepaar und erzeugen damit ein Drehmoment

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{F} = (q\boldsymbol{\ell}) \times (\mathbf{F}/q) = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.3.10)$$



Versuch zur Vorlesung:

Drehmoment auf einen elektrischen Dipol

(Versuchskarte ES-30)

2.4. Elektrische Felder von Leitern

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 645])



Versuch zur Vorlesung:
Elektrische Feldlinien (Versuchskarte ES-4)

Die elektrischen Felder

- in der Nähe eines ausgedehnten Leiters
- auf der Symmetrieachse eines Kreisrings
- auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe
- innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche
- in allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter

werden im Anhang berechnet.



Versuch zur Vorlesung:
Faraday-Becher (Versuchskarte ES-9)



Versuch zur Vorlesung:
Faraday-Käfig (Versuchskarte ES-21)



Versuch zur Vorlesung:
Van-de-Graaff-Generator (Versuchskarte ES-19)

Wir berechnen das elektrische Feld innerhalb und ausserhalb einer Kugelschale.

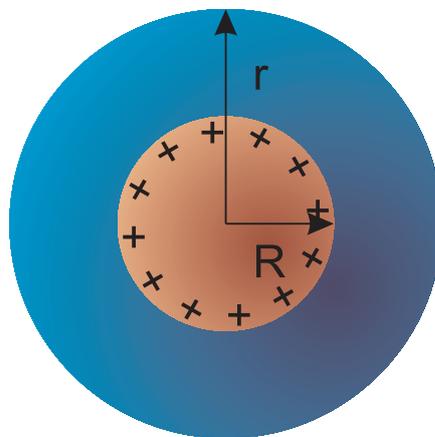


Abbildung 2.8.: Berechnung eines Feldes einer Kugelschale

Die eingeschlossene *Ladung* durch die Kugelfläche mit dem Radius $r > R$ ist

$$Q_{ges} = \iint \varepsilon_0 E_r da = \varepsilon_0 E_r 4\pi r^2 \quad (2.4.1)$$

Da die Gesamtladung innerhalb dieser Fläche Q ist, haben wir

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E_r 4\pi r^2 \quad (2.4.2)$$

Damit ist für $r > R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.4.3)$$

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugelschale ist also **ununterscheidbar** vom elektrischen Feld einer Punktladung. Für $r < R$ ist die eingeschlossene *Ladung* $Q = 0$. Damit ist auch $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = 0$ und folglich für $r < R$

$$E_r = 0 \quad (2.4.4)$$

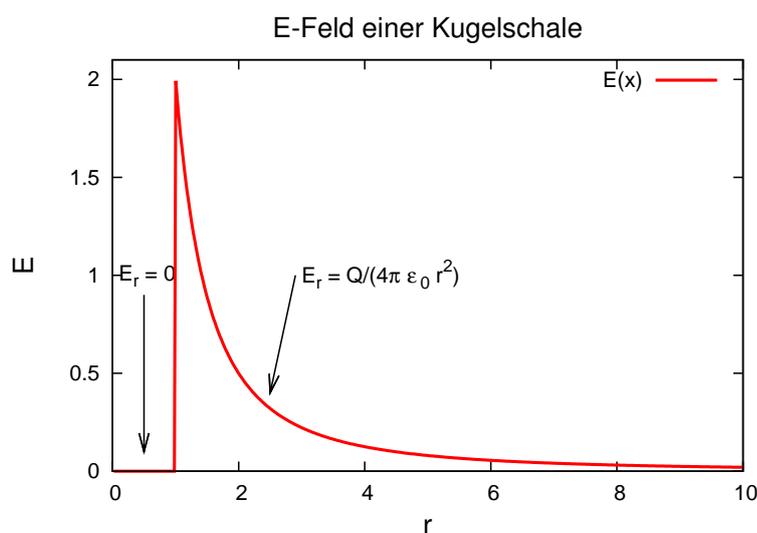


Abbildung 2.9.: Die Feldverteilung einer homogen geladenen Kugelschale.

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius R wird analog berechnet. Ausserhalb der Kugel für $r > R$ ist wie oben $\Phi_{ges} = E_r 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$. Also ist für $r > R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (2.4.5)$$

Wenn die Ladungsdichte $\rho_{el} = Q/V = Q/(\frac{4\pi}{3}R^3)$ ist, ist die von einer zur homogen geladenen Kugel konzentrischen Kugelschale mit $r < R$ umschlossene *Ladung* $Q' =$

$$\rho_{el}V(r) = \rho_{el}\frac{4\pi}{3}r^3$$

$$Q(r) = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3} \frac{4\pi}{3}r^3 = Q\frac{r^3}{R^3} \quad (2.4.6)$$

Weiter haben wir $E_r 4\pi\epsilon_0 r^2 = Q$. Also ist für $r < R$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (2.4.7)$$

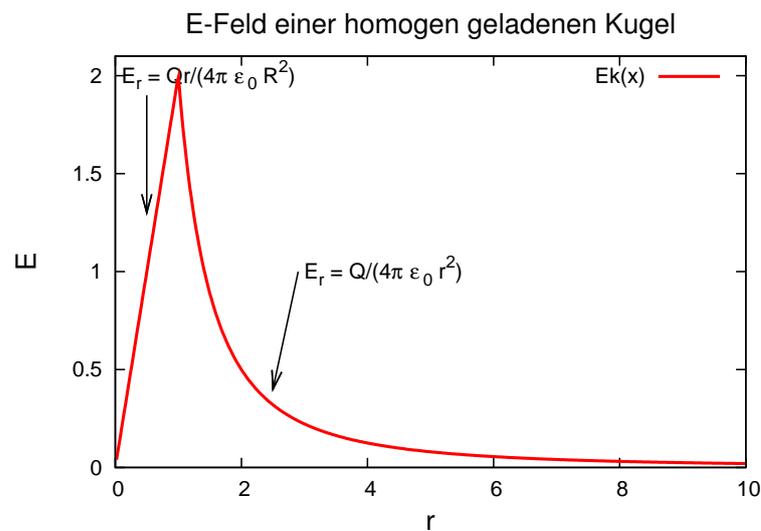


Abbildung 2.10.: Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel

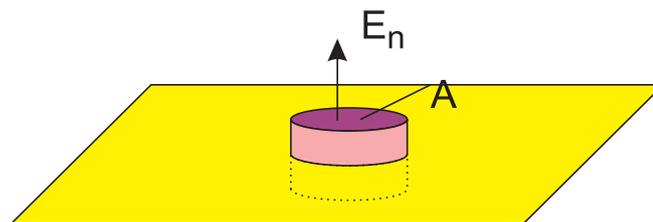


Abbildung 2.11.: Integrationsfläche zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Ebene

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Platte kann wie folgt berechnet werden.

- Da wir *Translationsinvarianz* für jede Richtung in der Plattenebene haben, muss das elektrische Feld senkrecht auf der Platte stehen.

- Die elektrischen Felder auf den beiden gegenüberliegenden Seiten der Platte müssen entgegengesetzt gerichtet sein, da die Platte eine Ebene mit *Spiegelsymmetrie* darstellt.
- Wir verwenden eine zylinderförmige Fläche parallel zur Platte. Die Seitenflächen können beliebig hoch sein, da die *Symmetrieüberlegungen* besagen, dass sie keinen Beitrag zum Fluss liefern.

Wenn σ die *Ladungsdichte* auf der Platte ist, dann ist

$$\frac{\sigma A}{\varepsilon_0} = \Phi = \iint E_n da = 2AE_n \quad (2.4.8)$$

da sowohl die Unterseite wie auch die Oberseite einen Beitrag liefern.

Also ist

$$E_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (2.4.9)$$

homogen im Raum.

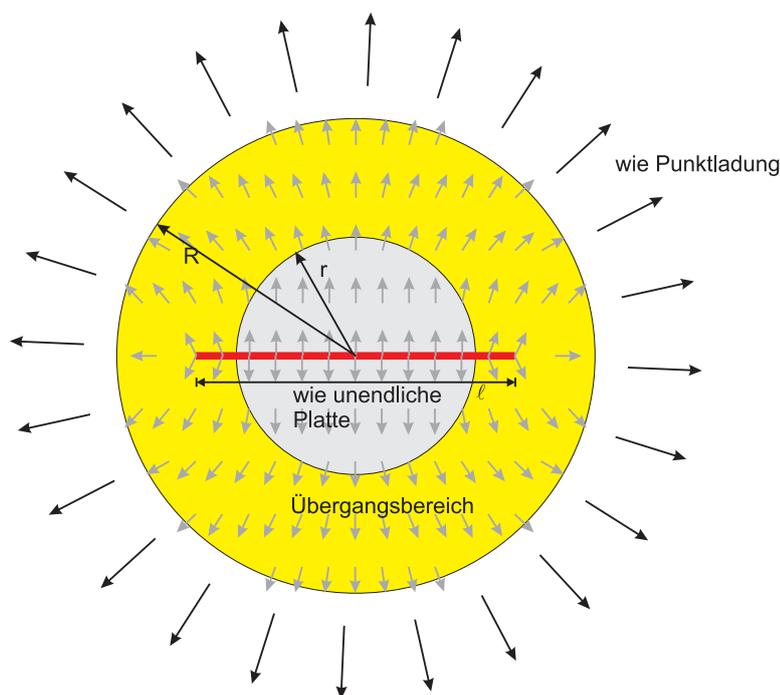


Abbildung 2.12.: Elektrisches Feld um eine endliche Platte.

Wir betrachten eine endliche ebene leitfähige Platte mit der Ausdehnung ℓ . Wir können drei Fälle unterscheiden:

$r \ll \ell$ Das elektrische Feld ist von dem einer unendlich ausgedehnten ebenen leitfähigen Platte nicht unterscheidbar.

$r \approx \ell$ Das elektrische Feld befindet sich in einem Zwischenzustand.

$R \gg \ell$ Das elektrische Feld ist von dem einer Punktladung im Kugelmittelpunkt nicht unterscheidbar.

Ein Beispiel für diese Art Flächenladungen sind *Klebestreifen*. Andreas Döring [Dör01] gibt an, dass Haftklebematerialien spezifische Haftenergien von $E_t = 30 \dots 300 \text{ J/m}^2$ haben. Die Definition von E_t ist

$$E_t = \frac{v_s}{A} \int F(t) dt \approx \frac{v_s F \Delta t}{A}$$

wobei $v_s = 0.01 \text{ m/s}$ die Geschwindigkeit ist, mit der der Klebestreifen abgezogen wird und A die Kontaktfläche ist. $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ist die Loslösezeit. Die Haftkraft rührt von *Ladungen* her. Bei einer Flächenladungsdichte σ ist $E = \sigma/\epsilon_0$. Die Kraft auf eine Flächenladungsdichte σ ist dann $F/A = \sigma^2/\epsilon_0$. Mit den Daten von Herrn Döring erhalten wir

$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{E_t}{v_s \Delta t}$$

und daraus die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{e}{d^2} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 E_t}{v_s \Delta t}}$$

Dabei haben wir angenommen, dass Elementarladungen e im Abstand d angebracht sind. d ist dann

$$d = \sqrt{e \sqrt{\frac{v_s \Delta t}{\epsilon_0 E_t}}}$$

Wenn wir E_t einsetzen erhalten wir $d \approx 10 \text{ nm} \dots 18 \text{ nm}$. Dieser Abstand korreliert gut mit den bekannten Moleküldurchmessern.

Bei zwei homogen geladenen Platten, deren Flächenladungsdichte vom Betrage her gleich sind, aber unterschiedliches Vorzeichen haben, heben sich die Felder ausserhalb der Platten auf. Gleichzeitig verstärken sich die Felder im Inneren: Die elektrische Feldstärke wird $E = \sigma/\epsilon_0$.

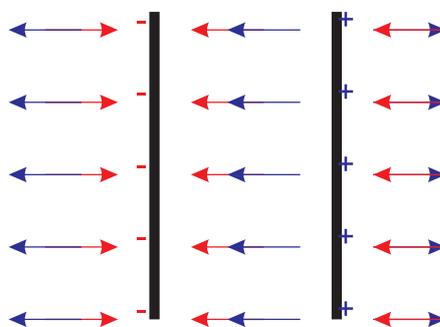


Abbildung 2.13.: Elektrisches Feld entgegengesetzt gleich geladener Platten.

Sind die Platten jedoch gleich geladen (oder ist die Oberflächenladung der Platten gleich), kompensieren sich die elektrischen Felder im Innern der Platte, verstärken sich aber im Aussenraum. Wieder ist im Aussenraum $E = \sigma/\epsilon_0$.

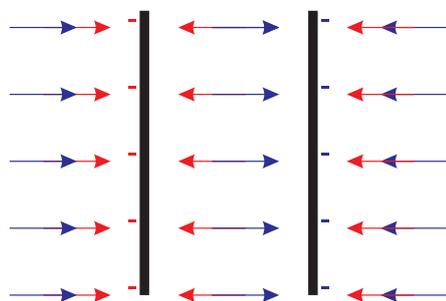


Abbildung 2.14.: Elektrisches Feld gleich geladener Platten

Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.

Da *Ladungen* im Inneren eines Leiters beweglich sind, folgt, dass das elektrische Feld an einer beliebigen Oberfläche, die sich ganz im Inneren eines Leiters befindet, null ist. Damit ist die umschlossene *Ladung* ebenso null. Daraus folgt, dass *Ladungen* sich nur an der Oberfläche eines Leiters befinden können.

Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters kann mit dem Gaußschen Gesetz berechnet werden. Wir betrachten eine zylinderförmige Fläche, deren eine Kreisfläche unter der Oberfläche des Leiters und deren andere über der Oberfläche des Leiters ist.

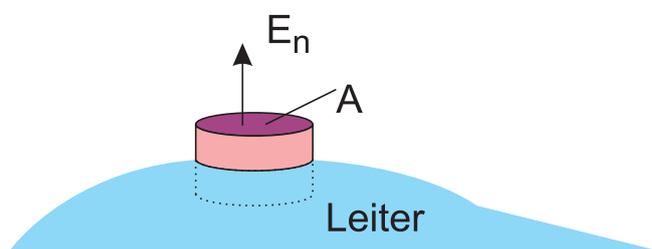


Abbildung 2.15.: Integrationsfläche

Der gesamte Fluss ist

$$\Phi_{ges} = \iint E_n da = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.4.10)$$

da das elektrische Feld im Inneren des Leiters null ist und die Höhe der Seitenflächen verschwinden soll, haben wir

$$\iint E_n da = E_n \oint_{\text{obere Fläche}} da = E_n A = \frac{1}{\varepsilon_0} A \sigma \quad (2.4.11)$$

und

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (2.4.12)$$

Aus dem Gausschen Gesetz werden die zwei folgenden Schlüsse gezogen:

- Die makroskopisch beobachtbare elektrische *Ladung* eines Leiters befindet sich auf seiner Oberfläche.
- Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters steht senkrecht zu dieser Oberfläche und hat die Grösse $E_r = \sigma/\varepsilon_0$

2.4.1. Influenz und Bildladung

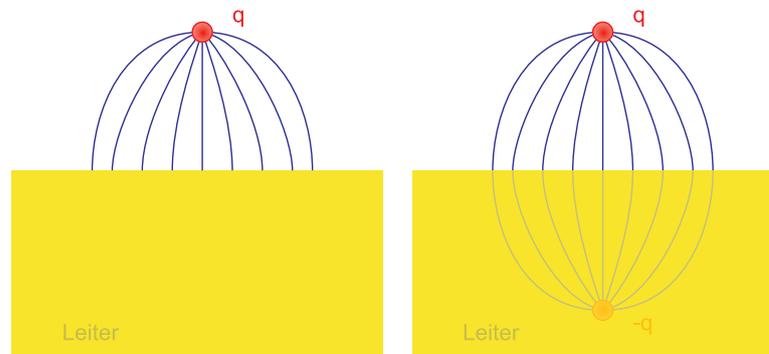


Abbildung 2.16.: Links: Feldlinien in der Nähe eines Leiters. Rechts: Diese Feldlinien können mit einer Bildladung erklärt werden.

Da elektrische Feldlinien immer senkrecht auf der Oberfläche eines Leiters stehen müssen, sieht das Feldlinienbild einer Punktladung in der Nähe eines Leiters wie die Hälfte des Feldlinienbildes eines Dipols aus. Das elektrische Feld der Punktladung erzeugt an der Oberfläche die *Influenzladung* $\sigma(\mathbf{r})$, die das äussere Feld im Leiter abschirmt. Formal kann das Feldlinienbild berechnet werden, indem man zu einer *Ladung* q im Abstand a von der Oberfläche eines Leiter im Leiter innen eine Bildladung $-q$ auch im Abstand a von der Oberfläche verwendet.

Das Konzept der Bildladung zeigt, dass eine *Ladung* q im Abstand a von einem Leiter mit der Kraft

$$F(a) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \quad (2.4.13)$$

angezogen wird. Die Senkrechtkomponente (z -Komponente) des elektrischen Feldes ist im Abstand r vom Aufpunkt in der Leiteroberfläche

$$E_z(r, a) = -\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.4.14)$$

Damit ist die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.4.15)$$

Mit analogen Überlegungen kann auch die Bildladungsdichte von kontinuierlichen Ladungsverteilungen berechnet werden⁵.

2.5. Elektrostatisches Potential

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 192]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 681])

Die Arbeit ist durch

$$W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.1)$$

definiert.

Die potentielle Energie eines Kraftfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist die Arbeit gegen diese Feldkraft. Nach dem 3. Newtonschen Axiom ist $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}$. Also

$$E_{pot}(\mathbf{x}_2) = E_{pot}(\mathbf{x}_1) + \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.2)$$

$$= E_{pot}(\mathbf{x}_1) - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E_{pot}(\mathbf{x}_1) - W(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \quad (2.5.3)$$

Eine potentielle Energie existiert, wenn

- Die Arbeit $W(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2)$ unabhängig vom Weg ist.
- Die Arbeit für jede geschlossene Bahn null ist (Die Bahn darf keine Singularitäten des Feldes umschliessen).
- $\mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$ für alle \mathbf{r}

Die potentielle Energie einer Probeladung q im Feld der *Ladung* Q ist

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5.4)$$

⁵Auch bei Dielektrika gibt es Bildladungen

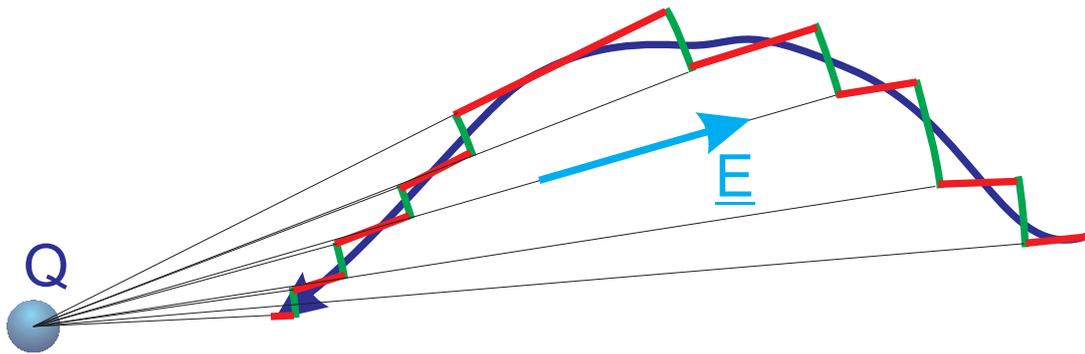


Abbildung 2.17.: Approximation eines beliebigen Integrationsweges durch Kreis-segmente. Auf den Kreissegmenten (grün) ist $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, entlang der radialen Teile ist $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E(r)ds$.

Da wir jede Bahnkurve durch Stücke in radialer Richtung und durch Bahnen mit $r = \text{const}$ approximieren können, und da die Bahnen auf den Kugelflächen keinen Beitrag geben (sie sind senkrecht zur Kraft) können wir das Integral vereinfachen.

$$\begin{aligned} E_{pot}(\mathbf{r}_2) &= E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = E_{pot}(\mathbf{r}_1) + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Üblicherweise setzt man $E_{pot}(r = \infty) = 0$. Damit wird

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.5.6)$$

Aus der potentiellen Energie kann die Kraft mit dem Gradienten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} E_{pot}(\mathbf{r}) \quad (2.5.7)$$

berechnet werden. Für die potentielle Energie der Coulomb-Kraft bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{grad} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{grad} r \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

In Komponenten ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\mathbf{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Also

$$\begin{aligned}
 \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} \tag{2.5.9}
 \end{aligned}$$

Ergänzend zu Coulomb-Kraft hatten wir das elektrische Feld als auf eine Einheitsladung normierte Grösse eingeführt.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.5.10}$$

Die potentielle Energie der *Ladung* q im Feld der *Ladung* Q , normiert auf $q = 1$ ist das *elektrische Potential* φ , auch Spannung U genannt. Ich verwende in diesem Skript die Begriffe *elektrisches Potential* und *Spannung* austauschbar.

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q} \tag{2.5.11}$$

Wichtig ist die Beziehung

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r}) = qU(\mathbf{r}) \tag{2.5.12}$$

Wie die Kraft aus der potentiellen Energie über die Gradientenbildung hervorgeht, wird das elektrische Feld mit

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{grad} U \tag{2.5.13}$$

berechnet.

Folgende Relationen gelten

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) & \xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 & \xleftarrow{\cdot q} & \\
 -\int \mathbf{F} d\mathbf{r} & \uparrow & -\int \mathbf{E} d\mathbf{r} \\
 \downarrow & -\mathbf{grad} E_{pot} & \downarrow -\mathbf{grad} \varphi \\
 E_{pot}(\mathbf{r}) & \xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q} & \varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \\
 & \xleftarrow{\cdot q} &
 \end{array}
 \tag{2.5.14}$$

Wir merken uns

$$U(\mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}
 \tag{2.5.15}$$

analog zur potentiellen Energie.

Die Einheit des elektrostatischen Potentials oder der Spannung ist

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1 \frac{J}{A \cdot s} = 1 \frac{W}{A}$$

Bem.: Beim elektrischen Feld ist der Feldvektor \mathbf{E} , bei der Gravitation \mathbf{g}

Das Gravitationspotential ist $U_{grav}(r) = -G \frac{m}{r}$.

Da die Coulomb-Kräfte additiv sind, ist auch das elektrostatische Potential oder die elektrostatische potentielle Energie additiv. Das Potential von Ladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i ist also

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N U(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}
 \tag{2.5.16}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho_{el}(\mathbf{r})$ ist das Potential

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}
 \tag{2.5.17}$$



Versuch zur Vorlesung:

Flächenladungsdichte (Versuchskarte ES-8)

Eine homogen mit der Flächenladungsdichte σ geladene Ebene erzeugt ein konstantes elektrisches Feld $E = \sigma / (2\epsilon_0)$. Das elektrostatische Potential eines Punktes

P im Abstand $x > 0$ von der Platte kann gefunden werden, indem wir entlang des Lots vom Punkt P auf die Ebene integrieren.

$$U(x) = U(0) - \int_0^x E d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^x d\xi = U(0) - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x \quad \text{für } x > 0 \quad (2.5.18)$$

Für $x < 0$ berechnet man

$$U(x) = U(0) - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) x = U(0) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} x \quad \text{für } x < 0 \quad (2.5.19)$$

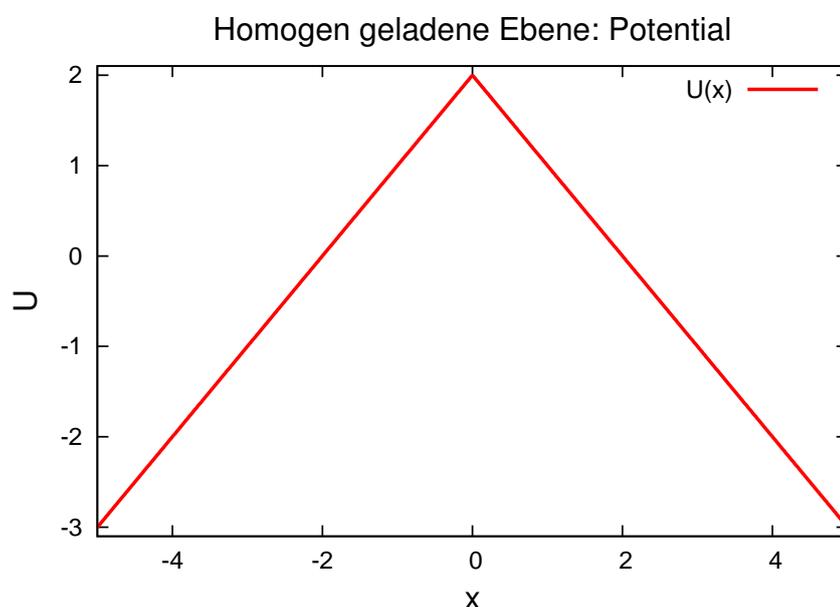


Abbildung 2.18.: Potential senkrecht zu einer homogen geladenen Ebene mit $U_0 = 2$ und $\sigma = 2\varepsilon_0$.

Das elektrostatische Potential eines Kreisringes mit der *Ladung* Q und dem Radius R im Abstand x auf der Symmetrieachse soll berechnet werden. Wir verwenden, dass

$$dU(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} dq$$

ist, mit

$$\int_0^{2\pi} dq = Q$$

Wir erhalten

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (2.5.20)$$

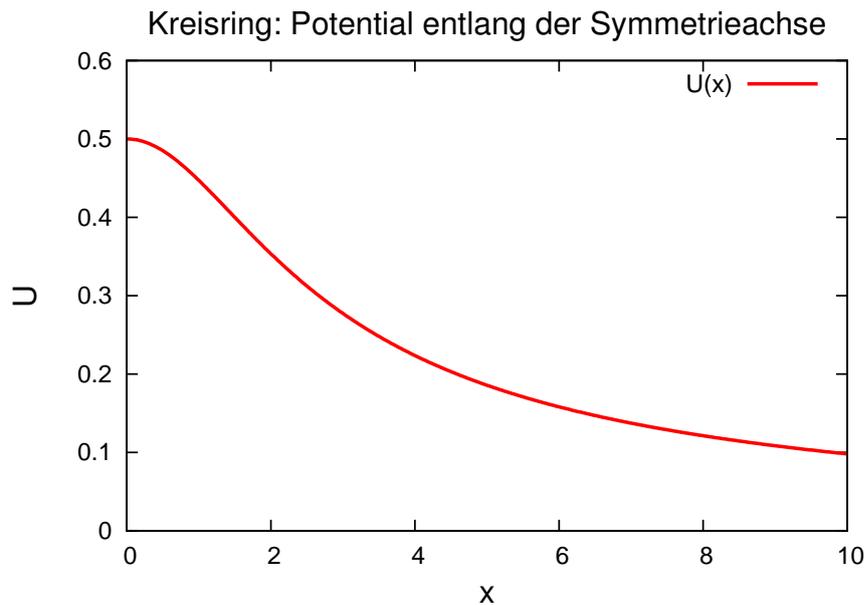


Abbildung 2.19.: Potential eines Kreisringes entlang der Symmetrieachse für eine positive Ladung $Q = 4\pi\epsilon_0$ und dem Radius $R = 2$.

Analog kann das Potential einer homogen geladenen Scheibe mit dem Radius R entlang ihrer Symmetrieachse x berechnet werden. Die Ladungsdichte der Scheibe sei $\sigma = Q/(\pi R^2)$. Ein Kreisring mit dem Radius a trägt die Ladung $dq = 2\pi a\sigma da$ und erzeugt dann das Potential

$$dU(a, x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.5.21)$$

Durch Integration über die gesamte Scheibe erhalten wir

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi a\sigma da}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{a da}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2.5.22)$$

Dieses Integral ergibt nach Bronstein[BSMM00, Seite 309, Nr. 193]

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{x^2 + a^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \quad (2.5.23)$$

Asymptotisch verläuft auch dieses Potential für $x \rightarrow \infty$ wie das Potential einer Punktladung, da

$$U(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - x \right) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(x + \frac{R^2}{2x} - x \right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{x}$$

Für den anderen Grenzfall berechnen wir die Taylorreihe um 0 bis zum ersten Glied.

$$\begin{aligned}
 U(0) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{0^2 + R^2} - 0) \\
 \left. \frac{d}{dx} U(x) \right|_{x=0} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 1 \right) \Big|_{x=0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\
 U(x) &\approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(U(0) + \left. \frac{d}{dx} U(x) \right|_{x=0} x \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (R - x)
 \end{aligned}$$

Die beiden Grenzfälle zeigen, dass sich die geladene Kreisplatte für $x \gg R$ wie eine Punktladung und für $x \ll R$ wie eine unendlich ausgedehnte Platte verhält.

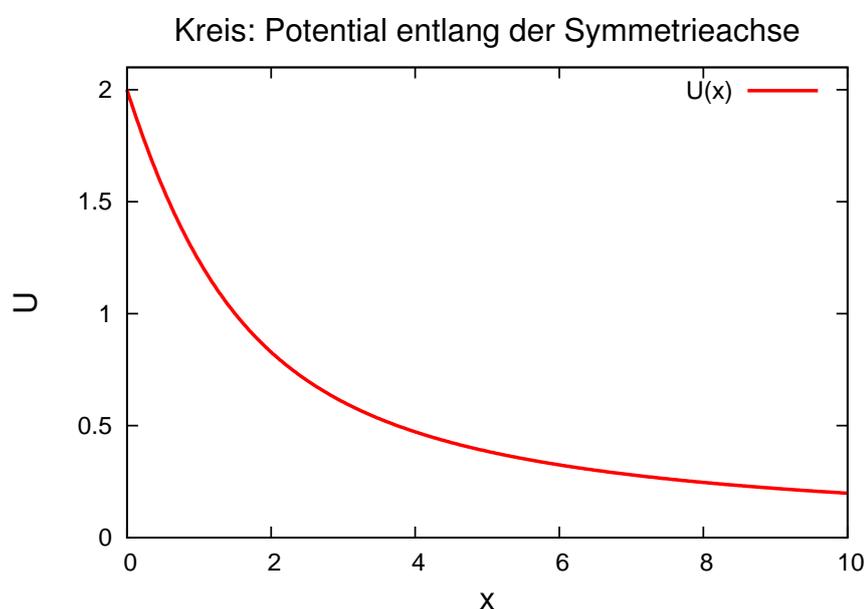


Abbildung 2.20.: Elektrostatistisches Potential einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang ihrer Symmetrieachse mit $R = 2$ und $\sigma = 2\varepsilon_0$.

Das Potential einer homogen geladenen Kugelschale wird mit dem elektrischen Feld berechnet. Das radiale elektrische Feld ist $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$. Damit ist das Potential

$$\begin{aligned}
 U(r) &= U(\infty) - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\
 &= U(\infty) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r \\
 &= U(\infty) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Oder mit $U(\infty) = 0$

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{für } r > R \quad (2.5.25)$$

Innerhalb der Kugelschale ist das elektrische Feld null, das Potential also konstant.

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{für } r < R \quad (2.5.26)$$

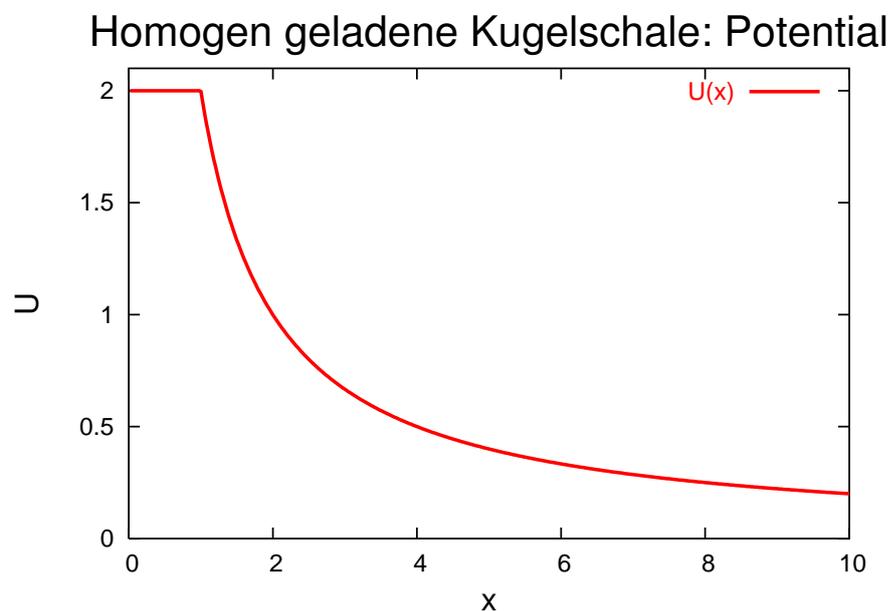


Abbildung 2.21.: Potential einer homogen geladenen Kugelschale mit $R = 1$ und $Q = 8\pi\epsilon_0$.

Schliesslich berechnen wir das elektrostatische Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Linienladung mit der Ladungsdichte λ . Das radiale elektrische Feld ist $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 x)$. Das Potential ist dann

$$U(r) = U(r_0) - \int_{r_0}^r \frac{\lambda dx}{2\pi\epsilon_0 x} = U(r_0) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.5.27)$$

Wir setzen $U(r_0) = 0$ und erhalten

$$U(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (2.5.28)$$

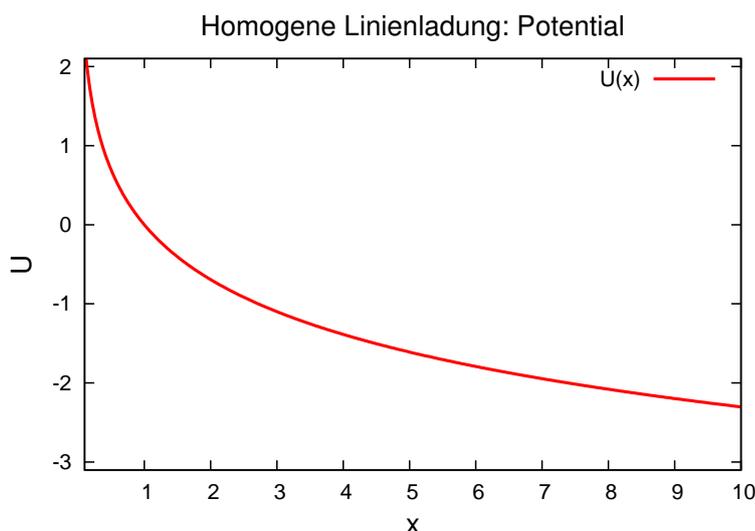


Abbildung 2.22.: Potential in der Nähe einer unendlich ausgedehnten homogenen Linienladung mit $r_0 = 1$ und $\lambda = 2\pi\epsilon_0$.

2.6. Poisson-Gleichung

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 197]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 703])

Wir hatten in Gleichung (2.3.8) gesehen, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) \quad (2.6.1)$$

ist.

Gleichung (2.5.13) besagt, dass

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.6.2)$$

ist. Mit der im Vakuum geltenden Beziehung $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ erhalten wir die Poisson-Gleichung.

$$-\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Delta \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.6.3)$$

oder

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (2.6.4)$$

Dabei haben wir den Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla$ verwendet. In Komponentenschreibweise in einem kartesischen Koordinatensystem ist dies

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.6.5)$$

Die *Poissongleichung* ermöglicht eine Berechnung der Potentiale ausgehend von Ladungsverteilungen.

Bemerkung:

Im allgemeinen Falle bei beliebigen Materialien lautet die Beziehung zwischen der dielektrischen Verschiebung D und dem elektrischen Feld E

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \underline{\varepsilon}\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.6.6)$$

Dabei ist die relative Dielektrizitätszahl $\underline{\varepsilon}$ im einfachsten Falle eine Zahl und im allgemeinen Falle ein Tensor zweiter Stufe. Die allgemeine Poissongleichung (Gleichung (2.6.4)) wird dann wie folgt geschrieben

$$\operatorname{div}(\underline{\varepsilon}\varepsilon_0 \mathbf{grad} \varphi(\mathbf{r})) = -\rho_{el} = \nabla \cdot (\underline{\varepsilon}\varepsilon_0 \nabla \varphi(\mathbf{r})) \quad (2.6.7)$$

Beispiel: Ebene

Bei einer geladenen Ebene ist $\rho_{el}(x, y, z) = \delta(z)\sigma(x, y)$. Die Poissongleichung wird, wegen der Translationssymmetrie in x und y zu

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = -\frac{\sigma\delta(z)}{\varepsilon_0} \quad (2.6.8)$$

Daraus folgt, dass $\frac{\partial U}{\partial z} = \text{const} \neq 0$ für $z \neq 0$.

Bei $z = 0$ haben wir einen Sprung der Grösse $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ der symmetrisch von $+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ bis $-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ reichen muss. Nochmals integrieren ergibt

$$U(z) = \begin{cases} U_0 + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z & \text{für } z < 0 \\ U_0 - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z & \text{für } z > 0 \end{cases} \quad (2.6.9)$$

U_0 ist eine frei wählbare Integrationskonstante.

Das Innere eines Leiters ist ein Äquipotentialraum, da in einem Leiter *Ladungen* sich frei bewegen können. Da Feldlinien $d\mathbf{E}$ senkrecht zu einer Metalloberfläche, die immer eine Äquipotentialfläche ist, stehen kann man schliessen (und mathematisch beweisen), dass Feldlinien senkrecht auf Äquipotentialflächen stehen.

An Luft kann man nicht beliebige Potentialunterschied aufrechterhalten. Die möglichen Potentialdifferenzen werden durch Funkenüberschläge begrenzt. Für Luft unter Normalbedingungen muss

$$E < 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m} \quad (2.6.10)$$

sein.

2.7. Kapazität: eine geometrische Eigenschaft

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 722]) (Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 202])

**Versuch zur Vorlesung:**

Kapazität von Kugeln (Versuchskarte ES-27)

Wir wollen das folgende Problem lösen:

- Wieviel *Ladung* kann auf einer Leiteranordnung gespeichert werden?

Wir wissen:

Im Inneren der Leiter ist $U = \text{const}$ und $\rho_{el} = 0$

- An der Oberfläche sind die \mathbf{E} -Felder senkrecht zur Oberfläche
- Zwischen den Leitern ist $\rho_{el} = 0$, also $\Delta U = 0$
- Die *Ladungen* auf den Leitern sind Oberflächenladungsdichten.

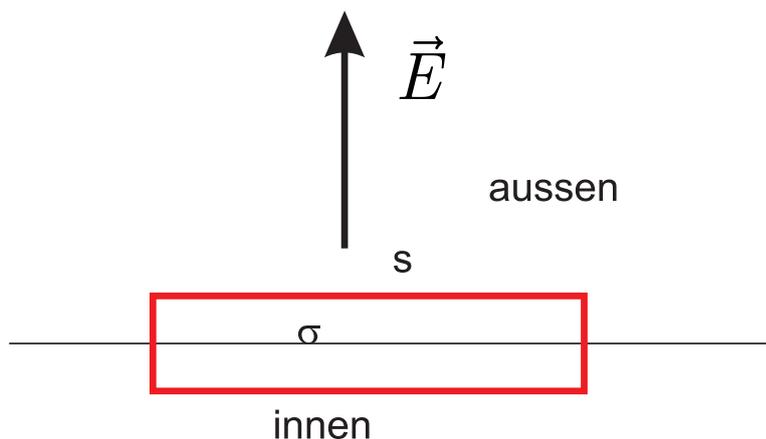


Abbildung 2.23.: Integrationsoberfläche an der Grenze Metall-Vakuum.

Wir betrachten eine kleine zylinderförmige Oberfläche und verwenden

$$\iint_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{\text{eingeschlossen}}}{\varepsilon_0} \quad (2.7.1)$$

Da das Feld im Inneren des Leiters verschwindet und die Seitenflächen keinen Beitrag geben, ist

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} = \sigma \quad (2.7.2)$$

Bei einer genügend grossen ebenen Fläche A ist die *Ladung* dann

$$Q = \int_A \sigma da = \int_A \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} da \approx \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} A \quad (2.7.3)$$

A repräsentiert hier die Geometrie, so dass man schliessen kann, dass die gesamte *Ladung* von der Geometrie der Leiter abhängt [Jac75, 48]. Wenn wir die Leiter $1, 2, \dots, n$ betrachten, ist

$$U_j - U_i = \frac{Q}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ji} \quad (2.7.4)$$

mit U_j dem Potential auf dem Leiter j und U_i dem Potential auf dem Leiter i . C_{ji} ist die Kapazität zwischen den Leitern i und j .

Da die Nummerierung in der Gleichung (2.7.4) willkürlich ist, muss $C_{ij} = C_{ji}$ gelten.

Die Einheit der Kapazität ist

$$1 \text{ Farad} = 1 F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{As}{V} \quad (2.7.5)$$

Als erstes Beispiel betrachten wir den Plattenkondensator

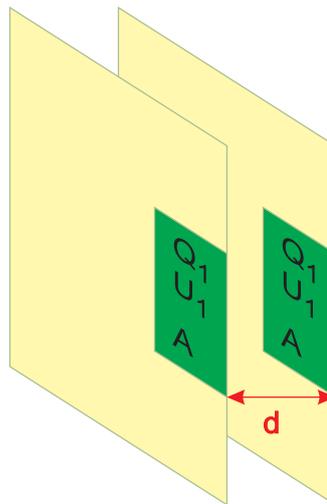


Abbildung 2.24.: Geometrie eines Plattenkondensators. Wir betrachten auf beiden Seiten eine Fläche A die jeweils in eine unendlich ausgedehnte Fläche eingebettet ist.

Wir benutzen, dass das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten homogenen Flächenladung konstant $E_{Ebene} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ist (Gleichung (2.4.8)).

Auf den Kondensatorplatten ist die Ladung $Q = A\sigma = 2\epsilon_0 E_{Ebene} A$.

Das elektrische Feld zwischen den beiden Platten stammt von beiden Platten, also ist

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_{Ebene} \quad (2.7.6)$$

Also ist $Q = A\sigma = \epsilon_0 EA$. Deshalb ist das Potential am Ort der zweiten Platte gemessen von der ersten Platte

$$U_{2,1} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 2E_{Ebene} \cdot d = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (2.7.7)$$

Damit ist die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten oder die angelegte Spannung

$$U = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \quad (2.7.8)$$

oder

$$\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C \quad (2.7.9)$$

Damit haben wir die Kapazität eines Plattenkondensators berechnet. Beachte, dass wir einen endlichen Plattenkondensator, der in einen unendlichen Plattenkondensator eingebettet ist, betrachtet haben, um Randeﬀekte auszuschliessen.

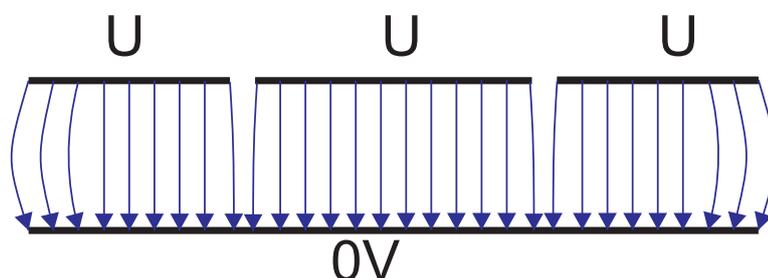


Abbildung 2.25.: Durch die Dreiteilung des Kondensators können bei einem realen Kondensator die Randeﬀekte minimiert werden. Die kleine Lücke stört das homogene Feld nur unwesentlich.

Beispiel: Ein Kondensator mit $d = 0.1\mu\text{m}$, $A = 1\text{m}^2$ und $U = 10\text{V}$

Dann ist $C = 88.5\mu\text{F}$, $Q = 0.885\text{mC}$, $\sigma = \frac{Q}{A} = 0.885\frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$ und $E = 10^8\text{V/m}$

Aus der Additivität der Ladung folgt, dass bei der *Parallelschaltung* von *Kondensatoren* sich die Kapazitäten addieren.



Versuch zur Vorlesung:

Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten ([Versuchskarte EM-48](#))

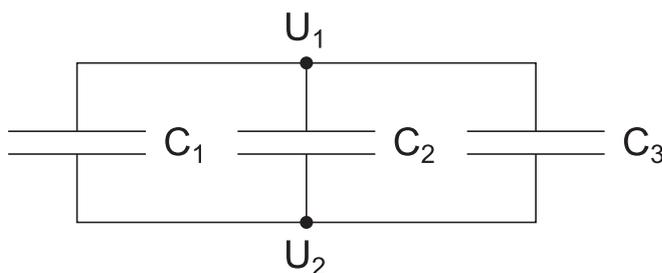


Abbildung 2.26.: *Parallelschaltung* von Kondensatoren.

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U \\ Q_2 &= C_2 U \\ Q_3 &= C_3 U \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

$$Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U \tag{2.7.11}$$

oder

$$\frac{Q_{ges}}{U} = C_{ges} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2.7.12)$$

bei Parallelschaltung

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.7.13)$$

Bei der *Reihenschaltung* wird die angelegte Spannung U auf die in Reihe geschalteten Kondensatoren aufgeteilt.

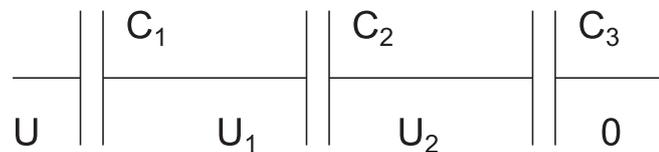


Abbildung 2.27.: *Reihenschaltung* oder *Serienschaltung* von Kondensatoren.

Auf den Kondensatoren sind die *Ladungen*

$Q = Q_1 = (U - U_1)C_1 = Q_2 = (U_1 - U_2)C_2 = Q_3 = U_2C_3$ gespeichert, da in diesem System nur *Ladungen* verschoben, aber nicht erzeugt oder vernichtet werden können.

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_1} &= U - U_1 \\ \frac{Q}{C_2} &= U_1 - U_2 \\ \frac{Q}{C_3} &= U_2 \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

oder

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C_{ges.}} \quad (2.7.15)$$

Für die Reihenschaltung gilt

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.7.16)$$

2.8. Energie des elektrischen Feldes

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 204]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 729])



Versuch zur Vorlesung: Energie im Kondensator

Ein Plattenkondensator der Kapazität C sei auf die Spannung $U = \frac{Q}{C}$ aufgeladen. Wir transportieren die Ladung ΔQ von einer Seite zur anderen. Die Arbeit ist

$$W(Q, Q + \Delta Q) = U \cdot \Delta Q = \frac{Q \Delta Q}{C} \quad (2.8.1)$$

Dabei haben wir die Ladung ΔQ über die Potentialdifferenz U transportiert.

$$W(0, Q) = \int_0^Q \frac{Q dQ}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.8.2)$$

also

$$E_{pot}(C) = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.8.3)$$

oder mit $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$E_{pot}(d) = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \quad (2.8.4)$$

oder mit $Q = U \cdot C$

$$E_{pot}(U) = \frac{U^2 \cdot C}{2} \quad (2.8.5)$$

Das Integral über die Oberfläche eines Leiters verknüpft die Ladung $Q = EA\epsilon_0$ mit dem elektrischen Feld. Das Volumen ist $V = A \cdot d$. Zusammen ergibt sich

$$E_{pot} = \frac{E^2 \cdot A \cdot d \cdot \epsilon_0}{2} = \frac{E^2 \cdot V \cdot \epsilon_0}{2} = \frac{E \cdot D \cdot V}{2} \quad (2.8.6)$$

oder mit $w_{el} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{E_{pot}}{V}$ der *Energiedichte des elektrischen Feldes*

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \quad (2.8.7)$$

Die Kraft $\Delta \mathbf{F}_V$ auf ein Volumenelement ΔV wird durch

$$\mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r})}{\Delta V} = \rho_{el}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.8.8)$$

beschrieben, da

$$\Delta \mathbf{F}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \Delta Q = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \rho_{el} \cdot \Delta V \quad (2.8.9)$$

Das elektrische Feld übt eine mechanische Spannung aus

$$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta A} \quad (2.8.10)$$

Diese Spannung wird *Maxwellspannung* genannt. Sie hat die Einheit des Druckes. \mathbf{n} ist der Normalenvektor der Oberfläche.

Die *Oberflächenladungsdichte* eines Metalls sei die Ursache des elektrischen Feldes. Wir hatten die potentielle Energie im Feld des Plattenkondensators ausgerechnet: $E_{pot} = \frac{Q^2}{2C}$. Die Arbeit, den Kondensator von d auf $d + \Delta d$ zu bringen ist.

$$\begin{aligned}
 W(d, d + \Delta d) &= F \Delta d \\
 &= E_{pot}(d + \Delta d) - E_{pot}(d) \\
 &= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} (d + \Delta d) - \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} \\
 &= \frac{Q^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 A} \\
 &= \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{\Delta d A}{2\varepsilon_0} \\
 &= \sigma^2 \frac{\Delta d A}{2\varepsilon_0} \\
 &= \varepsilon_0^2 E^2 \cdot \frac{A \Delta d}{2\varepsilon_0} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \Delta d
 \end{aligned} \tag{2.8.11}$$

und damit

$$\sigma_{Maxwell} = \frac{F}{A} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \tag{2.8.12}$$

Beispiel: In einem Laser können Felder von 10^{12}V/m auftreten. Dies entspricht einer Maxwell-Spannung von $4.43 \cdot 10^{12} \text{Pa} \simeq 4.43 \cdot 10^7 \text{bar}$.

Wichtig: Energiedichten haben die Einheit des Druckes. In jedem Raumgebiet, in dem Energie gespeichert wird, herrscht Druck.



Versuch zur Vorlesung:

Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) (Versuchskarte ES-16)

2.8.1. Diskussion Versuch Flächenladungsdichte

Im Versuch **Flächenladungsdichte** wird die Flächenladungsdichte gemessen, indem eine kleine Kugel in Kontakt mit verschiedenen grossen Kugeln auf einem konstanten Potential $\varphi = U$ gebracht werden.

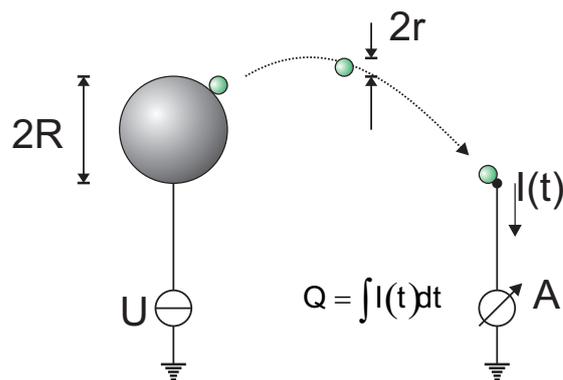


Abbildung 2.28.: Schematische Darstellung des Flächenladungsversuches.

In der Abbildung 2.28 wird der Messprozess schematisch gezeigt. Eine Kugel mit dem Radius R wird auf die Spannung U aufgeladen. Die kleine Kugel mit dem Radius r wird mit der grossen Kugel in Kontakt gebracht. Nach kurzer Zeit haben beide Kugeln gegen Erde (unendlich) das Potential $\varphi_0 = U$. Wenn wir annehmen, dass die kleine Kugel eine unwesentliche Störung der grossen Kugel ist, ist die Kapazität der beiden Kugeln

$$C_{\text{gemeinsam}} \approx C_R = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2.8.13)$$

Die Flächenladungsdichte der beiden Kugeln im Kontakt ist durch

$$Q_R = 4\pi (R^2 + r^2) \sigma_{\text{gemeinsam}} = C_{\text{gemeinsam}} U \approx C_R U = 4\pi\epsilon_0 R U \quad (2.8.14)$$

gegeben. Durch die Trennung der beiden Kugeln wird die Flächenladungsdichte $\sigma_{\text{gemeinsam}}$ auf beiden Kugeln eingefroren. Für die kleine Kugel haben wir dann

$$q_r = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} \quad (2.8.15)$$

Die Kugel hat nach der Trennung ein anderes Potential gegen unendlich, nämlich

$$q_r = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} = C_r U_r = 4\pi\epsilon_0 r U_r \Rightarrow U_r = \frac{r \sigma_{\text{gemeinsam}}}{\epsilon_0}$$

Aus dem Potential an der grossen Kugel $U = \frac{R \sigma_{\text{gemeinsam}}}{\epsilon_0}$ bekommt man

$$\sigma_{\text{gemeinsam}} = \frac{\epsilon_0 U}{R} \quad (2.8.16)$$

und

$$U_r = U \frac{r}{R} \quad (2.8.17)$$

Aus Gleichung (2.8.15) und Gleichung (2.8.16) erhalten wir

$$q_r = 4\pi r^2 \frac{\epsilon_0 U}{R} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{R} U = 4\pi r^2 \sigma_{\text{gemeinsam}} \quad (2.8.18)$$

Die Kugel wird schliesslich auf das Ladungsmessgerät (eigentlich ein Strom-Integrierer) aufgebracht. Die gemessene Ladung ist proportional zu $1/R$ und damit proportional zu $\sigma_{\text{gemeinsam}}$.

2.9. Elektrische Eigenschaften der Materie

Wir betrachten ein Modellatom bestehend aus einem Kern der *Ladung* Ze und einer Elektronenwolke der *Ladung* $-Ze$. Ohne äusseres Feld liegen die Ladungsschwerpunkte übereinander.

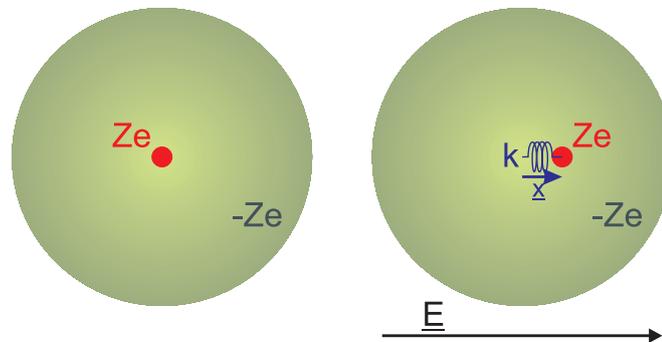


Abbildung 2.29.: Schematisches Bild eines *Atoms* mit seiner *Elektronenhülle*.

Auf den positiven Kern wirkt die Kraft

$$\mathbf{F}_+ = Ze \mathbf{E} \quad (2.9.1)$$

Auf die negative Elektronenwolke wirkt

$$\mathbf{F}_- = -Ze \mathbf{E} \quad (2.9.2)$$

Die Federkraft wirkt auf die positive Ladung wie

$$\mathbf{F}_{+, \text{Feder}} = -k\mathbf{x} \quad (2.9.3)$$

Auf die negative Ladung wirkt die Federkraft

$$\mathbf{F}_{-, \text{Feder}} = -k(-\mathbf{x}) \quad (2.9.4)$$

Das Kräftegleichgewicht für die positive Ladung lautet:

$$\mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_{+, \text{Feder}} = 0 = Ze\mathbf{E} - k\mathbf{x} \Rightarrow Ze\mathbf{E} = k\mathbf{x} \quad (2.9.5)$$

Alternativ kann das Kräftegleichgewicht für die negative Ladung angegeben werden:

$$\mathbf{F}_- + \mathbf{F}_{-, \text{Feder}} = 0 = -Ze\mathbf{E} - k(-\mathbf{x}) \Rightarrow Ze\mathbf{E} = k\mathbf{x} \quad (2.9.6)$$

Das *induzierte Dipolmoment* ist

$$\mathbf{p}_{ind} = Ze\mathbf{x} \quad (2.9.7)$$

und damit

$$\mathbf{p}_{ind} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E} \quad (2.9.8)$$

Dabei ist α die *atomare Polarisierbarkeit* (Einheit $[\alpha] = \text{F m}^2 = \text{C m}^2/\text{V} = \text{A s m}^2/\text{V}$).

Atom oder Molekül	$\alpha / \left(10^{-40} \frac{\text{Asm}^2}{\text{V}}\right)$
He	0.2
Li ⁺	0.03
Ne	0.4
K ⁺	0.9
Xe	3.5
O ⁻⁻	3.5
CCL ₄	10
CL ⁻	4
I ⁻	7

Tabelle 2.2.: Gefüllte Elektronenschale

Atom oder Molekül	$\alpha / \left(10^{-40} \frac{\text{Asm}^2}{\text{V}}\right)$
H	0.7
Li	13
K	38
Cs	46

Tabelle 2.3.: Nicht gefüllte Elektronenschale

Die potentielle Energie des induzierten Dipols im homogenen Feld \mathbf{E} ist

$$E_{pot} = \frac{\alpha}{2} \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{p}_{ind}^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{p}_{ind} \quad (2.9.9)$$

da

$$\Delta E_{pot} = W(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) = Q \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}}{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{p} \quad (2.9.10)$$

und damit

$$E_{pot} = \int_0^{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{\alpha} d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\alpha} \quad (2.9.11)$$

2.9.1. Dielektrika



Versuch zur Vorlesung:

Plattenkondensator mit Dielektrikum (Versuchskarte ES-3)

Bis jetzt haben wir angenommen, dass das elektrische Feld im Vakuum gemessen wurde. Dann gilt

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.12)$$

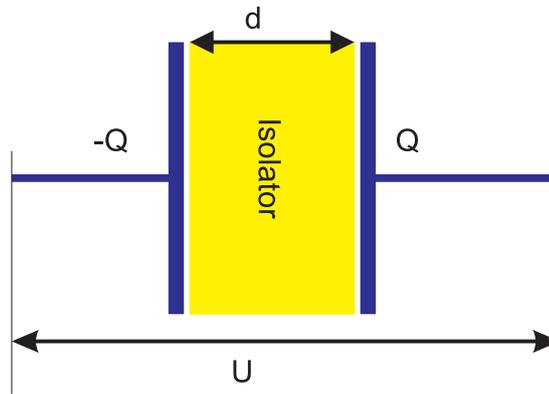


Abbildung 2.30.: Isolatoren in einem Kondensatoren

Die Beziehung zwischen angelegter Spannung und dem elektrischen Feld ist

$$E = \frac{U}{d} \quad (2.9.13)$$

unabhängig von den Eigenschaften des Isolationsmaterials. Andererseits ist

$$D = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \frac{\varepsilon_0 Q}{Cd} = \frac{\varepsilon_0 Q}{\varepsilon_0 \frac{A}{d} d} = \frac{Q}{A} \quad (2.9.14)$$

abhängig von der gespeicherten *Ladung*. Am Kondensator können D und E unabhängig bestimmt werden.

In vielen Fällen sind \mathbf{D} und \mathbf{E} linear voneinander abhängig.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.15)$$

mit $\varepsilon \geq 1$ und $\chi_e \geq 0$

ε heisst die Permittivität, χ_e die dielektrische Suszeptibilität.

Im Allgemeinen sind ε und χ_e Tensoren.

Material	ε	$\alpha/(10^{-40} \text{ A s m}^2 \text{ V}^{-1})$
Vakuum	1	0
Luft	1.0006	2.00332
Paraffin	2.1	38.7601
Diamant	5.6	0.912181
Glas	5-9	5.71864 - 7.27827
Silizium	11.9	4.16924
Wasser (291K, 0Hz)	81	7.65901
Wasser (291K, 1PHz)	1.77	1.62297
Rutil (\perp)	90	7.9997
Rutil (\parallel)	170	8.12512

Tabelle 2.4.: Einige relative Permittivitäten

Alle Formeln der Elektrostatik können auf isotrope und homogene *Dielektrika* angewandt werden, indem ε_0 durch $\varepsilon\varepsilon_0$ ersetzt wird.

2.9.1.1. Woher rührt $\varepsilon > 1$?

Wenn ein Material ortsfeste permanente elektrische Dipole besitzt, dann werden diese im extremen Feld ausgerichtet. Die *Ladungen* im Inneren des Materials kompensieren sich. An der Oberfläche treten *Ladungen* auf, die das äussere Feld schwächen.

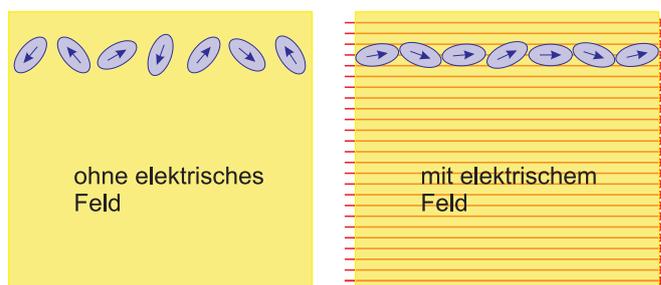


Abbildung 2.31.: Anordnung permanenter Dipole ohne und mit elektrischem Feld.

Dabei werden die positiven *Ladungen* an der Oberfläche angereichert, in die das elektrische Feld zeigt. Die negativen *Ladungen* werden auf der Gegenseite angereichert. Diese Polarisation heisst *Orientierungspolarisation*.

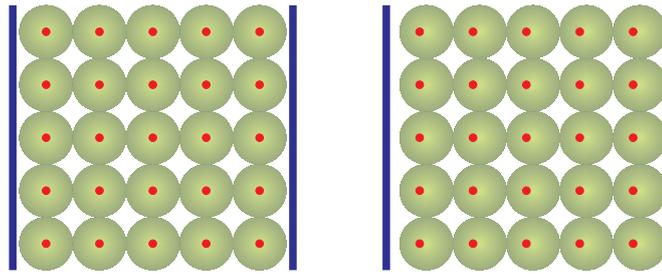


Abbildung 2.32.: Links: unpolares Medium ohne äusseres elektrisches Feld.
Rechts: mit einem nach links gerichteten elektrischen Feld.

Ein unpolares Medium wird durch das äussere Feld nach Gleichung (2.9.8) polarisiert. Die Ladungsschwerpunkte der Elektronen verschieben sich und wieder entsteht ein inneres elektrisches Feld, das dem äusseren Feld entgegen wirkt. Diese Polarisation ist die *Verschiebungspolarisation*.

2.9.1.2. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Dielektrika

Wir verwenden das *Gauss'sche Gesetz*. Im ladungsfreien Raum gilt $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ (siehe Gleichung (2.3.8)). Da das elektrostatische Feld ein konservatives Feld ist, gilt auch $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Wir betrachten eine Oberfläche A , die ein Stück ΔA der Grenzfläche umschliesst. Dann ist

$$\int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = -D_{1\perp} \Delta A + D_{2\perp} \Delta A = 0$$

und damit gilt für die *dielektrische Verschiebung* die folgende Stetigkeitsbedingung

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (2.9.16)$$

Wir verwenden weiter eine Schlaufe s , die die Grenzfläche zweimal durchdringt und erhalten

$$\int_{A(s)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{1\parallel} \frac{s}{2} - E_{2\parallel} \frac{s}{2} = 0$$

und damit gilt für das *elektrische Feld* die folgende Stetigkeitsbedingung

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (2.9.17)$$

An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
- die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche

sind stetig.

Mit $\mathbf{grad} \varphi = -\mathbf{E}$ = können diese Stetigkeitsbedingungen auch für das *Potential* φ umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.9.18)$$

2.9.1.3. Das Gesetz von Clausius und Mosotti

In diesem Abschnitt wollen wir aus einer mikroskopische Betrachtung einen Zusammenhang zwischen der relativen *Permittivität* und der *Polarisierbarkeit* ableiten. Die *Polarisation* eines Atoms oder Moleküls hängt von der *Polarisierbarkeit* α sowie vom lokalen elektrischen Feld $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ ab. Dieses lokale Feld ist die Summe aus dem externen Feld \mathbf{E} sowie dem Feld aller anderen Dipole am Beobachtungsort, \mathbf{E}_i .

$$\mathbf{E}_{\text{lokal}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i \quad (2.9.19)$$

Die *Polarisation* hängt vom lokalen Feld $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ wie folgt ab:

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p}_{\text{ind}} = N \alpha \mathbf{E}_{\text{lokal}} \quad (2.9.20)$$

wobei N die Dichte der induzierten Dipole ist.

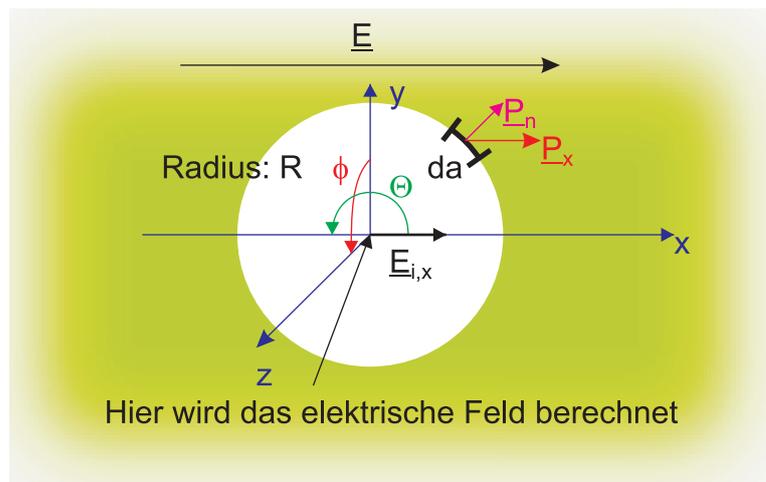


Abbildung 2.33.: Berechnung des Gesetzes von Clausius-Mosotti

Zur Berechnung von \mathbf{E}_i und damit $\mathbf{E}_{\text{lokal}}$ betrachten wir ein homogenes Dielektrikum mit ε , bei dem ein kugelförmiges kleines Volumen mit dem Radius R entfernt wurde. In diesem Volumen berechnen wir das lokale Feld [Som78, 68], [LL85], das von einem externen Feld \mathbf{E} in der x -Richtung hervorgerufen wird. Das Dielektrikum erzeugt an der Oberfläche des Hohlraums eine Ladungsdichte $\sigma(\Theta) = P_n = P_x \cos \Theta$, analog wie eine Ladungsdichte und ein elektrisches Feld mit $E = \sigma/\varepsilon_0$ zusammenhängt. Nach dem Coulombgesetz (Gleichung (2.1.5)) ist der Beitrag von σda gegeben durch

$$dE_{i,r} = \frac{\sigma da}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{P_x \cos \Theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} da \quad (2.9.21)$$

gegeben. Die x -Komponente ist dann

$$dE_{i,x} = \frac{P_x \cos^2 \Theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} da \quad (2.9.22)$$

Wir integrieren über die ganze Kugel und beachten, dass $da = r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi$ ist. Die Integration über φ (Faktor 2π) und diejenige über r (Faktor 1, da die Ladung an der Oberfläche konzentriert ist) sind sofort ausführbar, so dass wir mit $\int \cos^2(\Theta) \sin(\Theta) d\Theta = -\frac{1}{3} \cos^3(\Theta)$

$$E_{i,x} = \frac{P_x}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{3\varepsilon_0} P_x \quad (2.9.23)$$

erhalten. Da die x -zufällig gewählt wurde, gilt die *Lorentz-Beziehung* auch allgemein

$$E_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} P \quad (2.9.24)$$

Mit

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.9.25)$$

wird aus der Kombination von Gleichung (2.9.20) und Gleichung (2.9.24) die *Clausius-Mosotti-Beziehung*

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (2.9.26)$$

die die Polarisierbarkeit α mit der Dielektrizitätszahl ε verknüpft. N ist die Dichte der induzierten Dipole.

Die Rechnung verläuft folgendermassen

$$\begin{aligned} P &= (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E \\ E &= \frac{P}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0} \\ P &= N\alpha E_{\text{lokal}} \\ E_{\text{lokal}} &= \frac{P}{N\alpha} \\ E_{\text{lokal}} &= E + E_i \\ \frac{P}{N\alpha} &= \frac{P}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0} + \frac{P}{3\varepsilon_0} \\ \frac{1}{N\alpha} &= \frac{1}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(\varepsilon - 1)} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{3 + \varepsilon - 1}{3(\varepsilon - 1)} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{2 + \varepsilon}{3(\varepsilon - 1)} \right) \\ \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \end{aligned}$$

2.9.1.4. Kondensator gefüllt mit Dielektrikum

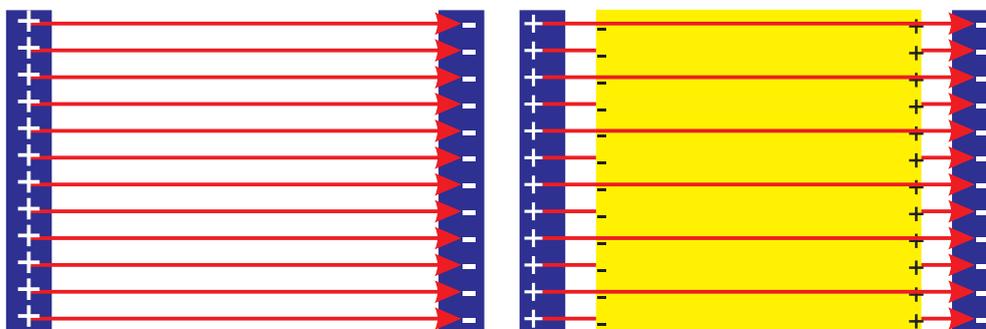


Abbildung 2.34.: Links: Kondensator ohne und rechts: mit Dielektrikum

Wir betrachten einen Kondensator, dessen Platten die konstante *Ladung* Q tragen. Das Feld im Inneren des Kondensators sei um den Faktor ε geringer als das Feld E_0 ohne Dielektrikum

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad (2.9.27)$$

Bei einem Plattenkondensator mit dem Abstand d ist

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon} \quad (2.9.28)$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{U_0}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{Q}{U_0} = \varepsilon C_0 \quad (2.9.29)$$

Also ist beim Plattenkondensator

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.9.30)$$

Die dielektrische Verschiebung ist im obigen Falle konstant

$$D = \frac{Q}{A} \quad (2.9.31)$$

Hält man die Spannung fest, wenn ein Dielektrikum in den Kondensator eingebracht wird ist,

$$Q = \varepsilon Q_0 \quad (2.9.32)$$

2.9.2. Elektrische Phänomene



Versuch zur Vorlesung:

Steighöhe im Kondensator (Versuchskarte ES-12)

Die Energiedichte im Kondensator ist

$$w_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (2.9.33)$$

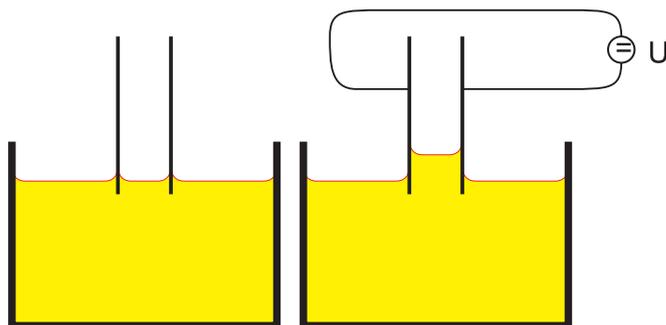


Abbildung 2.35.: Links eine dielektrische Flüssigkeit im Kondensator ohne angelegtes Feld. Rechts mit angelegtem Feld.

Wenn wir das obige Experiment durchführen, steigt die dielektrische Flüssigkeit. Dabei erhöht sich die im elektrischen Feld gespeicherte Energie und auch die potentielle Energie.

Wie geht das?

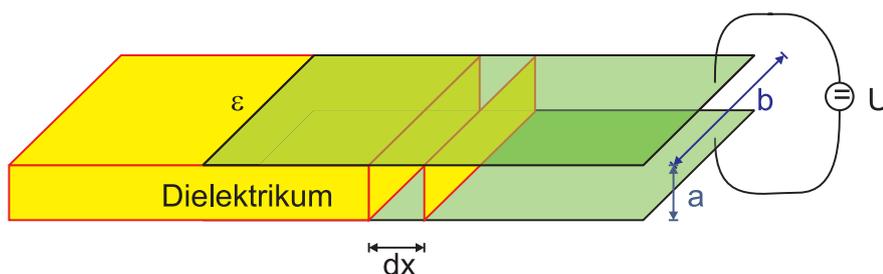


Abbildung 2.36.: Skizze der Änderungen beim Anlegen einer Spannung

Zur Berechnung müssen wir auch die Batterie oder Spannungsquelle mit betrachten [Kän78].

1. Mechanische Arbeit:

$$dW_{\text{mech}} = F dx$$

2. **Elektrostatistische Energie** im Volumen $abdx$: Die Spannung U wird konstant gehalten, und damit auch

$$E = \frac{U}{a}$$

Dabei nehmen wir ein homogenes Feld an

$$\begin{aligned} dW_{\text{el}} &= \left(\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) abdx \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{U^2}{a^2} abdx \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon - 1) \epsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx \end{aligned} \quad (2.9.34)$$

3. Die **Batterie** liefert elektrische Energie, da die Ladungsmenge sich ändert. Die Kapazität ändert sich um

$$\begin{aligned} dC &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{bdx}{a} - \varepsilon_0 \frac{bdx}{a} \\ &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{bdx}{a} \end{aligned} \quad (2.9.35)$$

Die Spannung U_0 wird aufrecht erhalten und die *Ladung* dQ transportiert ($E_{pot} = qU$)
Also

$$\begin{aligned} dW_{Batt} &= UdQ \\ &= U \cdot UdC \\ &= (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{bdx}{a} \end{aligned} \quad (2.9.36)$$

4. Die **Energiebilanz** ist

$$dW_{mech} + dW_{el} = dW_{Batt} \quad (2.9.37)$$

$$Fdx + \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U^2 \frac{b}{a} dx \quad (2.9.38)$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{b}{a} U^2 \quad (2.9.39)$$

2.9.2.1. Dielektrische Flüssigkeit im Kondensator bei konstanter Ladung

Wenn der Kondensator von allen Spannungsquellen getrennt ist, bleibt die Ladung auf seinen Platten, Q , konstant. Die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} und nicht das elektrische Feld \mathbf{E} bleiben konstant.

1. **Mechanische Arbeit:**

$$dW_{mech} = Fdx$$

2. **Elektrostatische Energie** im Volumen $abdx$: Die Ladung Q wird konstant gehalten, und damit auch

$$D = \frac{Q}{A}$$

Dabei nehmen wir ein homogenes Feld an

$$\begin{aligned} dW_{el} &= \left(\frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} D^2 - \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 \right) abdx \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{A^2} abdx \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{a^2 b^2} abdx \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{ab} dx \end{aligned} \quad (2.9.40)$$

dW_{el} ist negativ, da $1 - \varepsilon < 0$ ist.

3. Die **Energiebilanz** ist

$$dW_{mech} + dW_{el} = 0 \quad (2.9.41)$$

$$F dx + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{ab} dx = 0 \quad (2.9.42)$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q^2}{ab} \quad (2.9.43)$$

2.10. Zusammenfassung: die Grundgleichungen der Elektrostatik

Permittivität Gleichung (2.1.4)

$$\varepsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2}$$

Coulomb-Gesetz Gleichung (2.1.5)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Elektrisches Feld Gleichung (2.2.2)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Elektrische Feldlinien • Elektrische Feldlinien beginnen bei der positiven *Ladung* und enden bei der negativen *Ladung*.

- Die Anzahl der von einer *Ladung* ausgehenden oder auf einer *Ladung* endenden Feldlinien ist proportional zur Ladungsmenge.
- Ihre Dichte ist proportional zum elektrischen Feld.

Elektrisches Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung Gleichung (2.2.5)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV$$

Ladung in einem Raumgebiet Gleichung (2.3.1)

$$Q = \int_{V(S)} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV$$

dielektrische Verschiebung Gleichung (2.3.4)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

elektrischer Fluss $\Phi = \int_{\text{Oberfläche}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$

Gaussches Gesetz Gleichung (2.3.3)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\text{Kugel}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} r^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \sin\Theta d\Theta d\varphi \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Differentialform des Gausschen Gesetzes Gleichung (2.3.8)

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_{el}(\mathbf{r})$$

Leiter Leiter haben in ihrem Inneren keine statischen elektrischen Felder.

Potentielle Energie einer Probeladung Gleichung (2.5.4)

$$E_{pot}(\mathbf{r}_2) = E_{pot}(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Elektrostatistisches Potential und Spannung Gleichung (2.5.11)

$$\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{E_{pot}(\mathbf{r})}{q}$$

Potentielle Energie und Potential Gleichung (2.5.14)

$\mathbf{F}(\mathbf{r})$	$\xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q}$ $\xleftarrow{\lim_{q \rightarrow 0} \cdot q}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r})$
$-\int \mathbf{F} d\mathbf{r}$	\uparrow \downarrow	$-\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$
$-\text{grad } E_{pot}$		$-\text{grad } U$
$E_{pot}(\mathbf{r})$	$\xrightarrow{\lim_{q \rightarrow 0} /q}$ $\xleftarrow{\lim_{q \rightarrow 0} \cdot q}$	$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})$

Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung Gleichung (2.5.17)

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{el}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Poisson-Gleichung Gleichung (2.6.4)

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{el}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Kapazität Gleichung (2.7.4)

$$U_j - U_i = \frac{Q}{C_{ji}} = U_{ji} = \varphi_{ij}$$

Parallelschaltung von Kondensatoren Gleichung (2.7.13)

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Reihenschaltung von Kondensatoren Gleichung (2.7.16)

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Energiedichte des elektrostatischen Feldes Gleichung (2.8.7)

$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

Maxwell-Spannung Gleichung (2.8.10) und Gleichung (2.8.12)

$$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{\Delta A}$$

$$\sigma_{Maxwell} = \frac{F}{A} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}$$

induziertes Dipolmoment Gleichung (2.9.8)

$$\mathbf{p}_{ind} = \frac{(Ze)^2}{k} \cdot \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}$$

Lorentz-Beziehung Gleichung (2.9.24)

$$E_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} P$$

dielektrische Suszeptibilität Gleichung (2.9.15)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Stetigkeit der Feldkomponenten An der Grenzfläche zweier Dielektrika gilt

- die Komponente der dielektrischen Verschiebung senkrecht zur Grenzfläche und
 - die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche
- sind stetig.

Stetigkeitsbedingung für das Potential

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

3. Elektrische Ströme

Ströme und Magnetfelder beschreiben

- die Funktionsweise von Motoren,
- die Funktionsweise von Fernschröhren,
- die Funktionsweise von Beschleunigern,
- die Arbeitsweise von Magnetbändern und Festplatten und
- die Funktionsweise von Lautsprechern

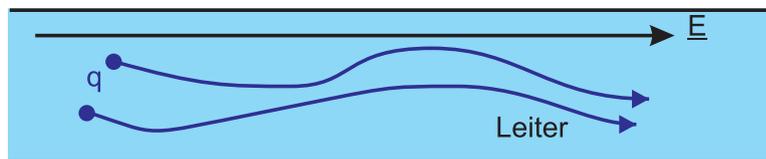


Abbildung 3.1.: Kräfte auf *Ladungen* in einem Leiter

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden *Ladungen* beschleunigt. Die Wechselwirkung der *Ladungen* mit dem Medium ergibt eine Begrenzung der *Driftgeschwindigkeit*. Medien für den *Ladungstransport* können sein:

- Metalle
- Ionische Materialien
- Plasmen

Die *Ladungsträger* sind

- Elektronen
- Ionen
- Positronen

- Protonen

also alle geladenen Teilchen oder Moleküle.

Der Strom wird als

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{Fläche}} \quad (3.0.1)$$

die in einer bestimmten Zeit durch eine Fläche A fließende Ladungsmenge definiert.¹

Der elektrische Strom I beschreibt den Fluss von Ladung. Deshalb fließt der Strom von „+“ nach „-“. Der elektrische Strom I darf nicht mit dem Massenstrom \dot{m} verwechselt werden. Bei positiver Ladung ist die Geschwindigkeit des die Ladung tragenden Masseteilchens **parallel** zur Stromrichtung. Bei negativer Ladung ist die Geschwindigkeit des die Ladung tragenden Masseteilchens **antiparallel** zur Stromrichtung.

Man beobachtet, dass I proportional zu $U = E\ell$, der angelegten Spannung über der Strecke ℓ ist.

3.1. Die Kontinuitätsgleichung und der Begriff des Stromes

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 64])

¹ Der an Gymnasien propagierte physikalische Strom von „-“ nach „+“ ist ein Massenstrom, aber nicht ein Strom von Ladung. Wir beschäftigen uns hier mit Ladungsströmen und nicht mit Massenströmen. Die gymnasiale Unterscheidung von von physikalischer und technischer Stromrichtung ist unsinnig. Die physikalische Stromrichtung ist das gleiche wie die technische Stromrichtung, also so wie hier definiert.

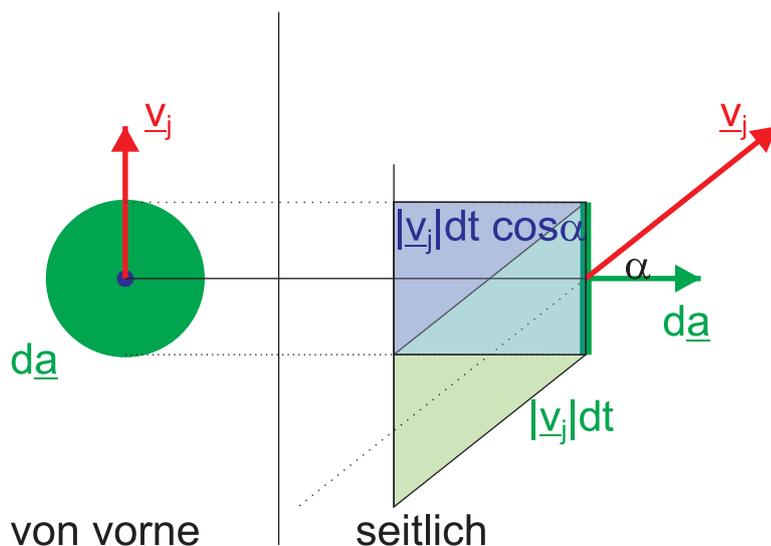


Abbildung 3.2.: Berechnung des Stromes in einem Medium

Wir betrachten *Ladungsträger* mit der einheitlichen *Ladung* q . Die Ladungsträgerdichte n_j habe die Geschwindigkeit \mathbf{v}_j .

Der Strom δI_j durch das Flächenelement $d\mathbf{a}$ ist

$$\delta I_j = \frac{\delta Q_j}{dt} \quad (3.1.1)$$

Die *Ladungsmenge* ist

$$\delta Q_j = q n_j |\mathbf{v}_j| \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot |d\mathbf{a}| \quad (3.1.2)$$

und damit

$$\delta I_j = q n_j |\mathbf{v}_j| \cos \alpha |d\mathbf{a}| = q n_j \mathbf{v}_j \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.3)$$

Der gesamte *Strom* der *Ladungsträger* q ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = nq \frac{1}{n} \left(\sum_j n_j \mathbf{v}_j \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.4)$$

wobei $n = \sum n_j$ ist.

Die mittlere Geschwindigkeit der *Ladungsträger* ist

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j \quad (3.1.5)$$

Wir definieren das Vektorfeld der *Stromdichte*

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.1.6)$$

\mathbf{i} ist abhängig vom Ort, da auch n und $\langle \mathbf{v} \rangle$ ortsabhängig sind.

Der *Strom* bezüglich $d\mathbf{a}$ ist dann

$$dI(d\mathbf{a}) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.7)$$

und, integriert,

$$I(A) = \int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.1.8)$$

Diese Gleichung besagt, dass der *Strom* gleich dem *Fluss* des *Stromdichtefeldes* durch eine Fläche A ist.

Wird der Strom durch mehrere Arten von *Ladungsträgern* gebildet, schreibt man

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle \quad (3.1.9)$$

Beispiel:

Driftgeschwindigkeit in einem Kupferdraht mit 10mm Durchmesser und $I = 100A$

Annahme: 1 Elektron pro Cu - Atom

Anzahl Cu - Atome pro Volumen

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\rho N_A}{M_{Mol}} = \frac{8930 \frac{kg}{m^3} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \frac{1}{Mol}}{0.0635 kg/Mol} \\ &= 8.47 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3} = n_e \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{I}{neA} = \\ &= \frac{100A}{8.47 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} (0.01)^2 m^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} \\ &\approx 1 \mu m/s \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Mit $v(t) = v_0 \cos(2\pi\nu t)$ und $x(t) = \int v(t) dt$ hat man

$$x(t) = \frac{v_0}{2\pi\nu} \sin(2\pi\nu t) + \text{const}$$

Die maximale Strecke erhält man wenn der Sinus von -1 nach $+1$ geht.

Folgerung: bei $\nu = 50Hz$ Wechselstrom zittern die Elektronen einige $\frac{1\mu m/s}{2\pi \cdot 50Hz} \cdot 2 \approx 6.4nm$ weit.

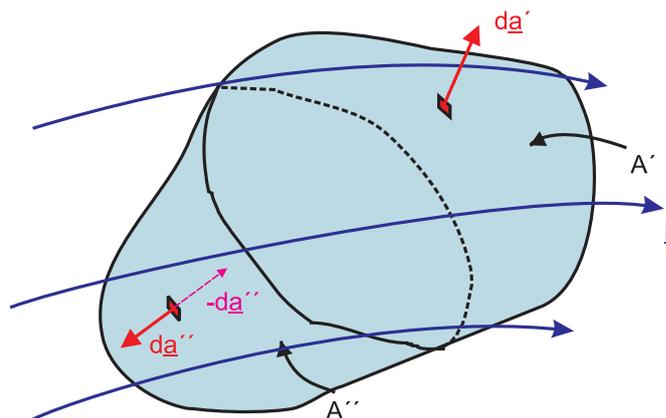


Abbildung 3.3.: Berechnung des Flusses eines Stromdichtefeldes durch ein geschlossenes Gebiet

Wir betrachten eine geschlossene Fläche A , die wir in zwei Teilflächen A' und A'' aufteilen, so dass auf der Fläche A' die Feldlinie aus der Fläche austreten und auf der Fläche A'' sie eindringen.

Die *Ladungserhaltung* fordert:

$$I_{aus} - I_{ein} = -\frac{d}{dt}Q_{innen} \quad (3.1.12)$$

Wir schreiben die Gleichung mit der *Stromdichte* um

$$\int_{A'} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}' - \int_{A''} \mathbf{i} \cdot (-d\mathbf{a}'') = -\frac{d}{dt} \int_{V(A)} \rho_{el} dV \quad (3.1.13)$$

oder

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_{el} dV \quad (3.1.14)$$

Dies ist die Integralform der *Kontinuitätsgleichung*.

Mit dem Gausschen Satz bekommen wir

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{i} dV = -\int_V \frac{d}{dt} \rho_{el} dV \quad (3.1.15)$$

Die Differentialform der Kontinuitätsgleichung lautet demnach:

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{d}{dt} \rho_{el}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1.16)$$

Bei stationären Strömen hängen \mathbf{i} und ρ_{el} nicht von der Zeit ab, so dass

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0 \quad (3.1.17)$$

ist.

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.1.18)$$

Beispiel:

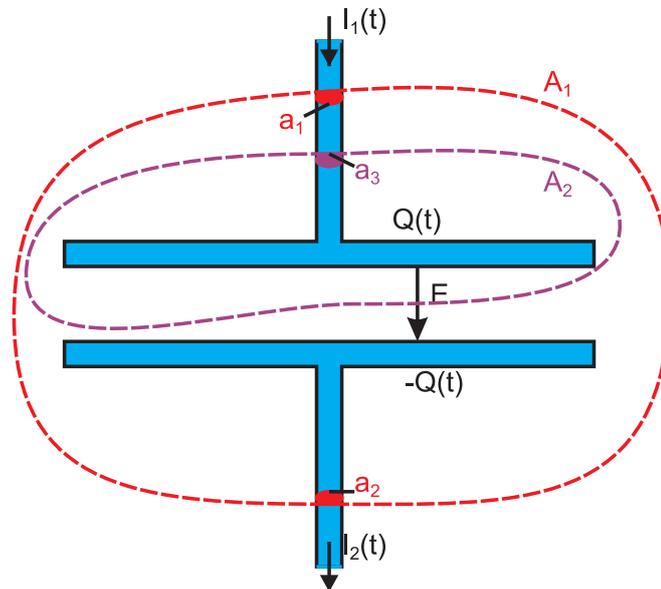


Abbildung 3.4.: Stromfluss in einem Kondensator

Wir betrachten eine quasistationäre Änderung am Kondensator

$$\iint_{A_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} + \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.1.19)$$

Mit $I_1 = -\iint_{a_1} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$ und $I_2 = \iint_{a_2} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$ folgt

$$I_1 = I_2 \quad (3.1.20)$$

d.h. es scheint, als ob der *Strom* durch den Kondensator hindurch fließen würde. Wenn wir die Kontinuitätsgleichung auf A_2 anwenden, bekommen wir

$$\iint_{a_3} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = -I_1(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.1.21)$$

oder

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.1.22)$$

Die Einheit der Stromstärke ist Ampère [A]

$$1A = 1\frac{C}{s} \quad (3.1.23)$$

3.2. Das Ohmsche Gesetz

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 71]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 751])



Versuch zur Vorlesung:

Strom-Spannungs-Kennlinie (Versuchskarte EM-83)

Allgemein gilt für einen Leiter, dass

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = f(\mathbf{E}) \quad (3.2.1)$$

eine beliebige Funktion des angelegten Feldes \mathbf{E} ist. Im linearen Fall

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} \quad (3.2.2)$$

spricht man von einem *Ohmschen Leiter*.



Versuch zur Vorlesung:

Ohmscher Leiter (Versuchskarte EM-117)

σ ist die *Leitfähigkeit*. Ihre Einheit ist

$$[\sigma] = \frac{A \cdot m}{m^2 \cdot V} = \frac{A}{Vm}$$

Das Gesetz nach Gleichung (3.2.2) heisst das lokale Ohmsche Gesetz. Für homogene Medien ist σ eine Zahl. Für inhomogene Medien wie *Graphit* ist σ ein *Tensor*. Indem wir die differentielle Form des Ohmschen Gesetzes integrieren, erhalten wir

$$\int_A \mathbf{i} d\mathbf{a} = I = \int_A \sigma \mathbf{E} d\mathbf{a} = \int_A \sigma \frac{U}{d} d\mathbf{a} = \sigma \frac{A}{d} U \quad (3.2.3)$$

Dabei haben wir angenommen, dass \mathbf{i} und σ konstant über A sind. Das integrale Ohmsche Gesetz kann auch als

$$I = G \cdot U \quad (3.2.4)$$

geschrieben werden. G ist der *Leitwert*. Die Einheit ist

$$[G] = \text{Siemens} = \frac{A \cdot m^2}{Vm \cdot m} = \frac{A}{V}$$

Bekannter ist die Form

$$U = \frac{1}{G} \cdot I = R \cdot I \quad (3.2.5)$$

$R = \frac{1}{G}$ ist der *Widerstand*. Seine Einheit ist das Ohm

$$[R] = \Omega = \frac{1}{S} = \frac{V}{A} = \frac{W}{A^2}$$

Die zu R gehörende mikroskopische Grösse ist der spezifische Widerstand

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (3.2.6)$$

Die Einheiten sind

$$[\rho] = \frac{Vm}{A} = \Omega m = \frac{m}{S}$$

sowie

$$[\sigma] = \frac{A}{Vm} = \frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega m}$$

Wir betrachten die Bewegung von Ionen ($\langle v \rangle \approx 100 m/s$) in einer Umgebung von nicht ionisierten Molekülen

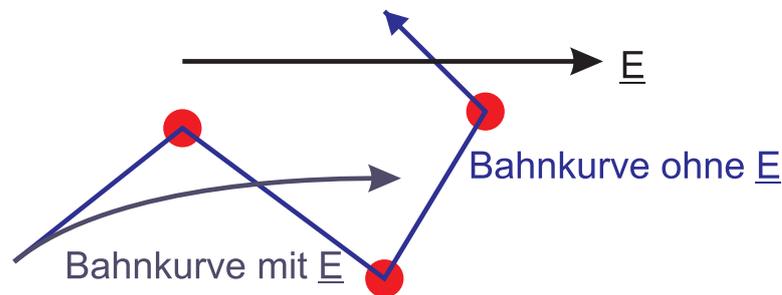


Abbildung 3.5.: Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld.

Die Masse eines Ions sei M , ihre *Ladung* q und die Gesamtzahl im betrachteten Volumenelement N

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.2.7)$$

oder

$$\Delta\mathbf{p} = q\mathbf{E}\Delta t \quad (3.2.8)$$

wobei Δt die freie Flugzeit ist.

Der mittlere Impuls eines Ions ist

$$M \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [M\mathbf{v}_j^{(k)} + q\mathbf{E}\Delta t_j] \quad (3.2.9)$$

$\langle \mathbf{v} \rangle$ ist die mittlere Driftgeschwindigkeit, $\mathbf{v}_j^{(k)}$ die Geschwindigkeit nach dem letzten Stoss.

Sind die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_j^{(k)}$ isotrop verteilt, mittelt sich der erste Summand zu null. Unter dieser Annahme ist

$$M \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = q\mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \sum \Delta t_j \right) = q\mathbf{E} \cdot \langle t \rangle \quad (3.2.10)$$

wobei $\langle t \rangle = \tau$ die mittlere Zeit zwischen den Zusammenstößen ist. Mit $\mathbf{i} = nq\langle \mathbf{v} \rangle$ bekommen wir

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{q \cdot \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = \frac{q\tau}{M} \mathbf{E} \quad (3.2.11)$$

und

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \cdot \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E} \quad (3.2.12)$$

Dabei ist n die Dichte der *Ladungsträger*.

Somit ist bei einer Mischung verschiedener *Ladungsträger*

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k} \quad (3.2.13)$$

Wir haben $\tau = \langle t \rangle$ gesetzt.

Das Ohmsche Gesetz gilt, wenn τ und n_k unabhängig von \mathbf{E} sind,

Beispiel: Metall

Wir nehmen an, dass $m_e \ll m_{\text{kernel}}$ ist. Dann sind die Geschwindigkeiten nach dem Stossen isotrop verteilt. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ist $\langle v_e \rangle = 10^5 \text{ m/s}$ (kinetische Gastheorie). Mit

$$\frac{1}{\rho_{\text{exp}}} = \sigma = n_e \frac{e^2 \tau}{m_e} \quad (3.2.14)$$

bekommen wir

$$\tau = \frac{m_e}{\rho_{\text{exp}} n_e e^2} = 3.3 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad (3.2.15)$$

(mit $\rho_{\text{exp}} = 4.3 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ und $n_e = 2.5 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$ für Na-Metall)

Die mittlere freie Weglänge ist dann

$$\lambda = \langle v_e \rangle \tau = 3.3 \text{ nm} \quad (3.2.16)$$

im Widerspruch zum Ionenabstand von 0.1nm \implies Lösung: **Quantenmechanik**



Versuch zur Vorlesung:

Leitfähigkeit (Versuchskarte EM-172)



Versuch zur Vorlesung:

Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit (Versuchskarte TH-122)

Bei einem homogenen Ohmschen Leiter mit einer stationären Stromverteilung ist $\rho_{\text{el}} = 0$ im Inneren. Dies folgt aus

1. **Ohmsches Gesetz** $\mathbf{i}(x, y, z) = \sigma \mathbf{E}(x, y, z)$
2. **Kontinuitätsgleichung** $\text{div } \mathbf{i} = 0$, also $\text{div}(\sigma \mathbf{E}) = 0$
und damit $\text{div } \mathbf{E} = 0$

3. das **Gauss'sche Gesetz** sagt $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$

4. damit folgt die Behauptung, dass $\rho_{el} = 0$.

Aus der Eigenschaft

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad} U \quad (3.2.17)$$

erhalten wir im Inneren eines Leiters

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = 0 \quad (3.2.18)$$

Dies bedeutet, dass φ im Inneren eines homogenen Ohmschen Leiters das Potential eines Potentialfeldes ist. Die Lösung von

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.2.19)$$

ist durch die Randbedingungen

1. $U = \varphi = \text{const}$ an den Elektrodenflächen (bei den Anschlüssen nach aussen)
2. $\mathbf{i}_\perp = 0$ sonst (entlang des Leiters, Drahtoberfläche!)

gegeben².

Mit diesen Gleichungen kann man zum Beispiel den Widerstand eines homogenen Leiters berechnen. Bei inhomogenen Leitern müssen wir das Ohmsche Gesetz in seiner Differentialform verwenden. Aus der Kontinuitätsgleichung für stationäre Stromverteilungen Gleichung (3.1.17) und dem lokalen Ohmschen Gesetz Gleichung (3.2.2) bekommen wir

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \mathbf{E}(x, y, z)] = 0 \quad (3.2.20)$$

Wir ersetzen nun \mathbf{E} und erhalten

$$\operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \operatorname{grad} U(x, y, z)] = 0 \quad (3.2.21)$$

Bei einem homogenen Leiter könnte $\sigma(x, y, z)$ vor die Divergenz gezogen werden.

²Im Gegensatz zum Kondensator ist hier $\mathbf{E} \neq 0$ in einem endlichen Gebiet.

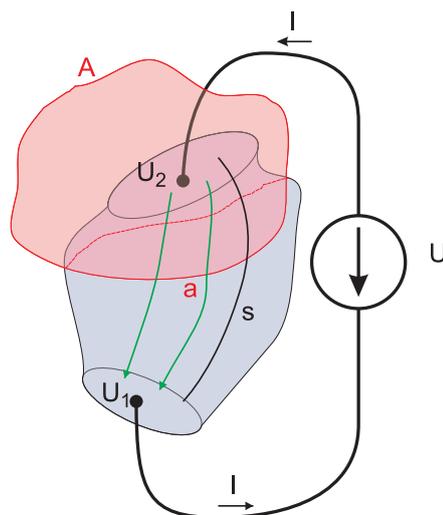


Abbildung 3.6.: Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter

Wir verwenden die Definition des Stromes in Gleichung (3.1.8) und wenden Sie auf die Fläche A , beziehungsweise auf den Teil, der den Leiter durchschneidet a , an.

$$\iint_A \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = I \quad (3.2.22)$$

wobei a die durch A aus dem Leiter herausgeschnittene Fläche ist. Die Spannungsdifferenz ist

$$U_2 - U_1 = \int_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.2.23)$$

Wenn nun $\varphi_1(x, y, z)$ eine Lösung von Gleichung (3.2.21) ist, dann ist aufgrund der Linearität dieser Gleichung auch

$$U_2(x, y, z) = kU_1(x, y, z) \quad (3.2.24)$$

eine Lösung. Dabei kann k eine beliebige, auch komplexzahlige Zahl sein. Da $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$ auch eine lineare Gleichung ist, muss also auch

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{grad} U_2 = -k \mathbf{grad} U_1 = k\mathbf{E}_1 \quad (3.2.25)$$

eine Lösung sein. Nach Gleichung (3.2.22) ist dann auch

$$I_2 = \iint_a \sigma \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} = \iint_a \sigma k\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = k \iint_a \sigma \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a} = kI_1 \quad (3.2.26)$$

Damit haben wir, dass bei einem beliebigen inhomogenen Leiter

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1} = \text{const} = R \quad (3.2.27)$$

ist. Die Proportionalitätskonstante ist der Widerstand R . Um den Widerstand eines beliebigen Leiters zu berechnen, muss man $\mathbf{E}(x, y, z)$ im Inneren kennen. Dies kann man erreichen, indem man die Laplacegleichung löst.

Im statischen Falle ist $\mathbf{E}(x, y, z) = 0$ im Inneren eines Leiters. Bei einem stromdurchflossenen Leiter liefert die Batterie die notwendige Energie, um das elektrische Feld im Inneren des Leiters aufrecht zu erhalten.

3.3. Elektromotorische Kraft und Joulsche Wärme

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 85]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 756])

Ein elektrisches Feld im Inneren eines Leiters bewirkt einen Strom. Wird dieses elektrische Feld durch *Ladungen* erzeugt, bewirkt der resultierende Strom einen Ausgleich dieser *Ladung*. Durch Influenz werden die Oberflächenladungen so umgeschichtet, dass der Strom abnimmt und schliesslich verschwindet.

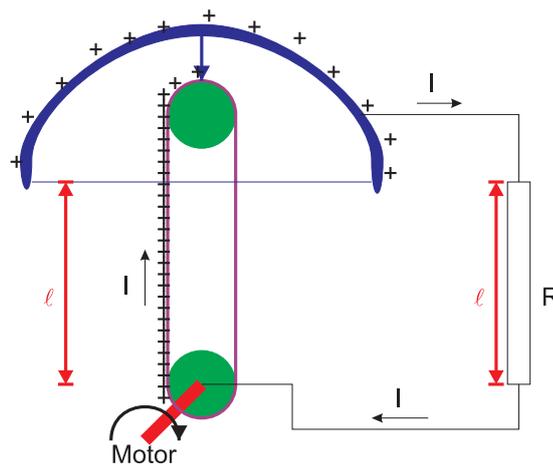


Abbildung 3.7.: Ladungstransport in einem mit einem Widerstand R kurzgeschlossenen *van de Graaff-Generator*.

Nehmen wir an, dass im stationären Betrieb eine Spannung U zwischen der Kugel und dem Fuss des van-de-Graaff-Generators liegen. Das elektrische Feld entlang des Bandes ist dann, in erster Näherung,

$$E = U/\ell \quad (3.3.1)$$

Die Arbeit, eine Ladungseinheit dQ gegen dieses elektrische Feld zur Halbkugel zu bringen, ist³

$$dW_M = dQ \cdot U \quad (3.3.2)$$

³Wir vernachlässigen dabei die Gravitationsarbeit. Frage: Ist dies für das Problem wichtig (prinzipiell und praktisch)?

Die Leistung des Motors, der hier als Spannungsquelle wirkt, ist

$$P_M = \frac{dW_M}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U \quad (3.3.3)$$

Das elektrische Feld leistet im Widerstand auf der anderen Seite in der Zeit dt die Arbeit

$$dW_E = E \cdot dQ \cdot \ell \quad (3.3.4)$$

oder, mit Gleichung (3.3.1) ,

$$dW_E = dQ \cdot U \quad (3.3.5)$$

Damit ist die Leistung des E -Feldes

$$P_E = \frac{dW_E}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = I \cdot U = P_M \quad (3.3.6)$$

Die Energie des elektrischen Stromes wird im Widerstand in *Joulsche Wärme* umgesetzt, also ist die Leistung der Wärmequelle auch

$$P_J = P_M = P_E = I \cdot U \quad (3.3.7)$$

Bei einem Ohmschen Leiter erhalten wir

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} \quad (3.3.8)$$

Wenn wir eine Probeladung q_0 langsam um den Stromkreis herumführen, ist die geleistete Arbeit grösser als null. Diese Arbeit nennen wir *elektromotorische Kraft* der Stromquelle. Wir definieren also

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.3.9)$$

Diese elektromotorische Kraft⁴ ist die Arbeit, die beim Herumführen einer kleinen *Ladung* q_0 von der Stromquelle geleistet wird. Beim van-de-Graaff-Generator besteht diese Arbeit aus zwei Teilen:

- Auf dem Band wird an jedem Punkt die Kraft des elektrostatischen Feldes durch die Kraft des Motors kompensiert. Auf diesem Zweig ist die Arbeit null.
- Die Arbeit, die im Widerstand in *Joulsche Wärme* umgewandelt wird.

Die elektromotorische Kraft einer Stromquelle ist die Quelle der Energie (Arbeit), die einen konstanten Stromfluss in einem Stromkreis aufrecht erhält. Neben der elektromotorischen Kraft können auch magnetische Kräfte und andere Quellen einen Stromfluss in einem Leiter aufrecht erhalten.



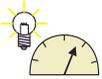
⁴Die elektromotorische Kraft ist keine Kraft im Sinne der Mechanik!

Versuch zur Vorlesung:

EMK des Daniell-Elementes (Versuchskarte TH-44)

3.4. RC-Stromkreise

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 88]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 761]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 790])

**Versuch zur Vorlesung:**

Entladen eines Kondensators (Versuchskarte EM-145)

Ohne ein Verständnis von Stromkreisen sind moderne elektronische Schaltungen nicht verständlich. Wir betrachten deshalb Schaltungen aus Kondensatoren und Widerständen. Zur Erinnerung: die relevanten Gleichungen sind

- $U = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ}{dt}$ für Widerstände
- $Q = \int I dt = U \cdot C$ für Kondensatoren

Wir betrachten die folgende Schaltung

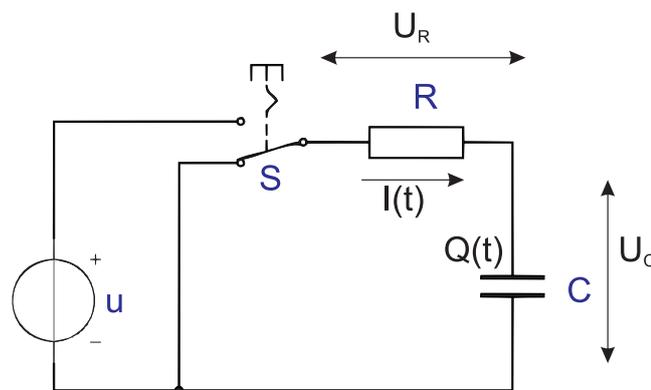


Abbildung 3.8.: Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand.

Für die Zeit $t < 0$ soll der Schalter S in der gezeigten Stellung sein. Die Spannung am Kondensator ist $U_C = 0$. Damit ist auch $Q = 0$ und $I(t) = 0$. Für $t \geq 0$ wird der Kondensator C mit der Spannungsquelle U verbunden. Da Spannungen im quasistationären Falle sich wie potentielle Energien verhalten, kann man für

$$U_R(t) = U - U_C(t) = I(t) \cdot R \quad (3.4.1)$$

schreiben. Ebenso gilt

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int_0^t I(\tau) d\tau}{C} \quad (3.4.2)$$

Zusammen erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = U \quad (3.4.3)$$

oder

$$\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C \cdot R} = \frac{U}{R} \quad (3.4.4)$$

mit der Anfangsbedingung $U_C(0) = 0 = Q(0)$.

Zur Lösung dieser Differentialgleichung machen wir den Ansatz

Partikuläre Lösung $Q = C \cdot U$

Allgemeine Lösung $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$Q(t) = U \cdot C \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.4.5)$$

für $U_C(t)$ ist also

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) \quad (3.4.6)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = U e^{-t/(RC)} \quad (3.4.7)$$

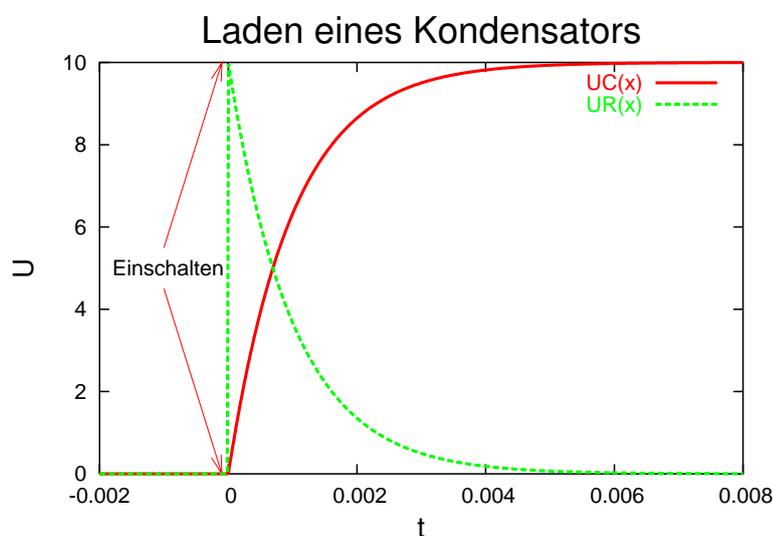


Abbildung 3.9.: Ladekurven am Kondensator. Die verwendeten Werte sind $U = 10V$ und $R \cdot C = 0.001s$.

Die Differentialgleichung für das Entladen lautet

$$\dot{Q}(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (3.4.8)$$

wobei die Anfangsbedingung nun $U_C(0) = U$ oder $Q(0) = C \cdot U$ ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

Partikuläre Lösung $Q = 0$

Allgemeine Lösung $Q(t) = C \cdot U \cdot e^{-t/(RC)}$

Damit erhalten wir

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.4.9)$$

und

$$U_R(t) = I(t) \cdot R = \dot{Q}(t) \cdot R = -U \cdot e^{-t/(RC)} \quad (3.4.10)$$

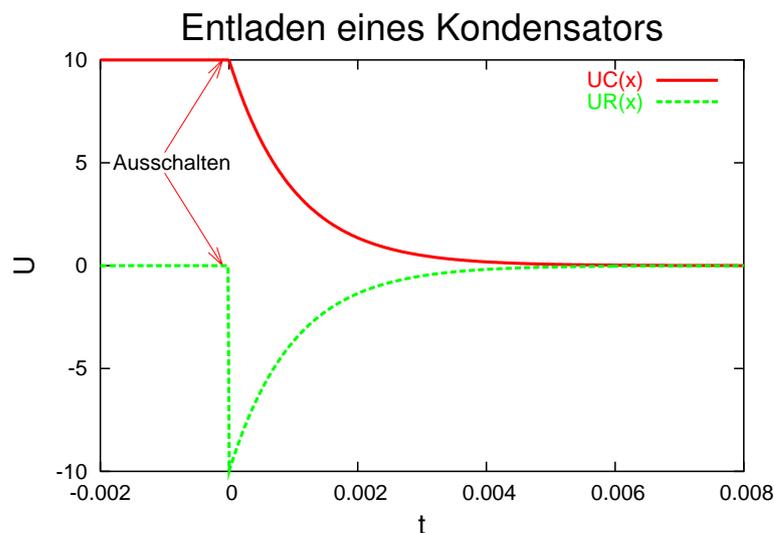


Abbildung 3.10.: Entladekurven am Kondensator. Die verwendeten Werte sind $U = 10V$ und $R \cdot C = 0.001s$.

Die Grösse $\tau = R \cdot C$ ist die Zeitkonstante der Schaltung. In der Zeit τ steigt U_C beim Einschalten von 0 auf 63%. Ebenso fällt beim Ausschalten die Spannung in der Zeit τ von 100% auf 37% ab.

Eine alternative Ableitung dieser Gleichung verwendet eine Leistungsbetrachtung. Die Leistung der Jouleschen Wärme im Widerstand und die zeitliche Änderung der Energie im Kondensator müssen gleich der von der Batterie gelieferten Leistung sein.

$$U \cdot I \cdot = R \cdot I^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \quad (3.4.11)$$

oder

$$U \cdot \frac{dQ}{dt} = R \cdot \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 + \frac{1}{C} \cdot Q \cdot \frac{dQ}{dt} \quad (3.4.12)$$

und damit

$$U = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q \quad (3.4.13)$$

3.5. Schaltungen und Bauelemente

Wir kennen bis jetzt zwei Typen von *Bauelementen*, den *Widerstand* und den *Kondensator*. Beim Widerstand haben wir die Beziehung

$$I(U) = \frac{1}{R}U$$

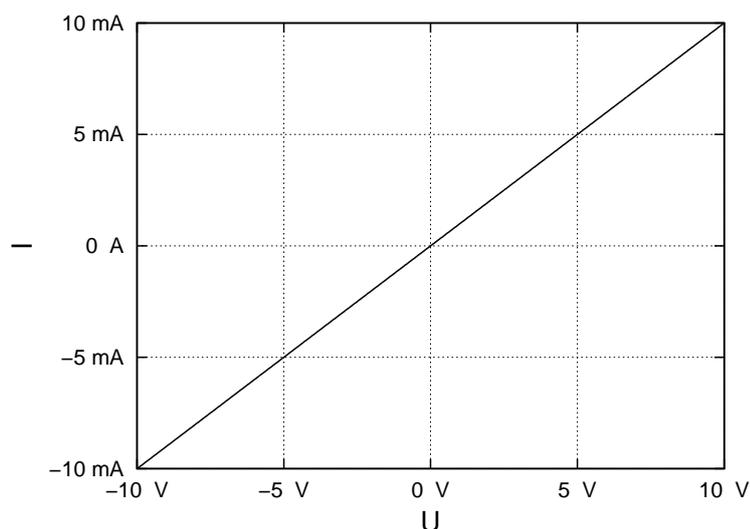


Abbildung 3.11.: Kennlinie eines 1000Ω -Widerstands.

Abbildung 3.11 zeigt die Kennlinie eines Widerstandes. Neben Widerständen und Kondensatoren gibt es andere passive und aktive Bauelemente. Die Kennlinien sind meistens nicht linear. Abbildung 3.12 zeigt verschiedene Bauelemente.

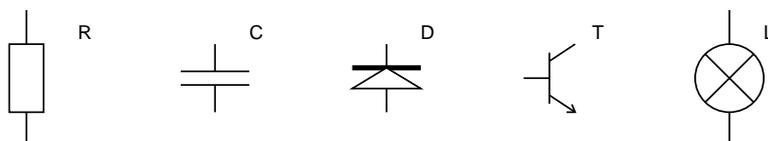


Abbildung 3.12.: Symbole für einen Widerstand (Zeichen: R), einen Kondensator (Zeichen: C), eine Diode (Zeichen: D), einen NPN-Transistor (Zeichen: T) und eine Lampe (Zeichen: L). Bei der Diode zeigt der Pfeil von der Anode zur Kathode (mit Querstrich). Beim Transistor heisst der Anschluss mit Pfeil *Emitter*, derjenige links *Basis* und der Anschluss oben *Kollektor*. Die Lampe, der Widerstand und der Kondensator sind symmetrische Objekte.

Diese Bauelemente sind sowohl linear wie nichtlinear. Wenn man die genaue physikalische Funktionsweise eines Bauelementes nicht kennt, dann helfen Kennlinien,

trotzdem mit dem Bauelement Schaltungen zu berechnen.

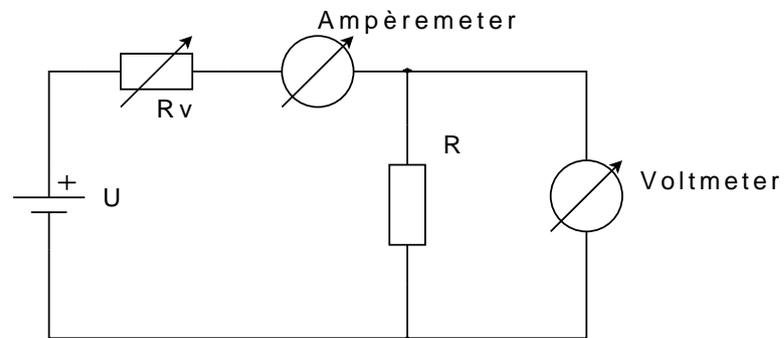


Abbildung 3.13.: Messung der Kennlinie eines Widerstandes.

Abbildung 3.13 zeigt wie die Messung geht. Die Spannung U wird über das Potentiometer R_V , ein gebräuchlicher Name für einen veränderbaren Widerstand, an den zu testenden Widerstand R angeschlossen. Mit einem (idealen) Voltmeter wird die Spannung U_R am Widerstand R gemessen. Das ideale Ampèremeter misst den Strom durch I_R durch den Widerstand R . Diese beiden Größen werden denn wie in Abbildung 3.11 aufgezeichnet.

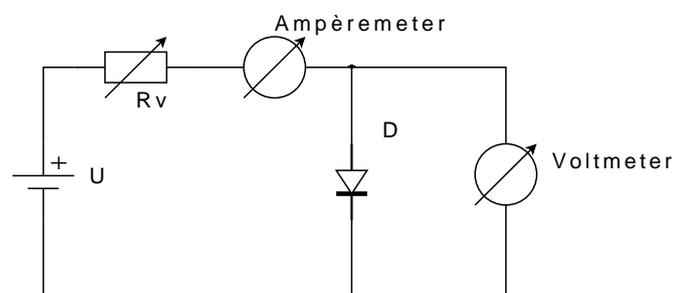


Abbildung 3.14.: Messschaltung zur Bestimmung der Kennlinie einer Diode vom Typ 1N4148.

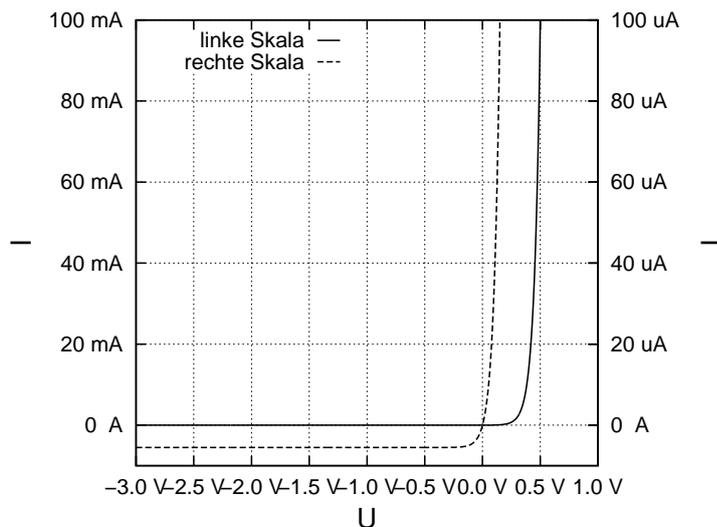


Abbildung 3.15.: Kennlinie einer Diode vom Typ 1N4148 gemessen mit der Schaltung nach Abbildung 3.14.

Als Beispiel eines nichtlinearen Bauelementes zeigt Abbildung 3.14 die Messschaltung und Abbildung 3.15 die Kennlinie der Diode 1N4148. Für positive Spannungen U ist die Diode in *Durchlassrichtung* gepolt. Deshalb sind die Ströme bei kleinen Spannungen sehr gross. In der *Sperrrichtung* sind die Ströme viel kleiner. Diese können an der rechten Skala abgelesen werden.

3.5.1. Grafische Methode zur Bestimmung von Arbeitspunkten

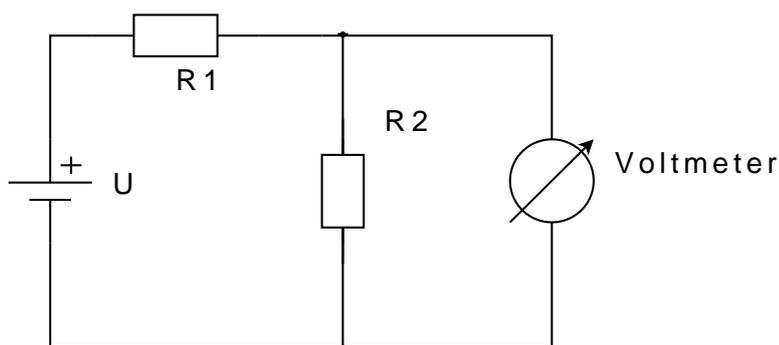


Abbildung 3.16.: Spannungsteiler.

Abbildung 3.16 zeigt einen Spannungsteiler bestehend aus den Widerständen R_1 und R_2 . Die Spannung an R_1 und die Spannung an R_2 sind in Serie. Es muss gelten

$$U = U_{R_1} + U_{R_2} \quad (3.5.1)$$

Andererseits fließt der gleiche Strom durch R_1 und R_2 und durch den Ersatzwiderstand $R = R_1 + R_2$. Also hat man

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{U_{R_1}}{R_1} \quad (3.5.2)$$

und daraus

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (3.5.3)$$

$$U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (3.5.4)$$

Die Spannung an der Batterie U ist vorgegeben. Wenn die Spannung U_{R_2} an R_2 steigt, muss die Spannung U_{R_1} an R_1 um den gleichen Betrag sinken. Wenn $U_{R_1} = 0$ ist, ist $U_{R_2} = U$, und umgekehrt. Dies bedeutet, dass

$$U_{R_2} = U - U_{R_1} \quad (3.5.5)$$

ist. Wir können also beide Kennlinien in einem Diagramm aufzeichnen.

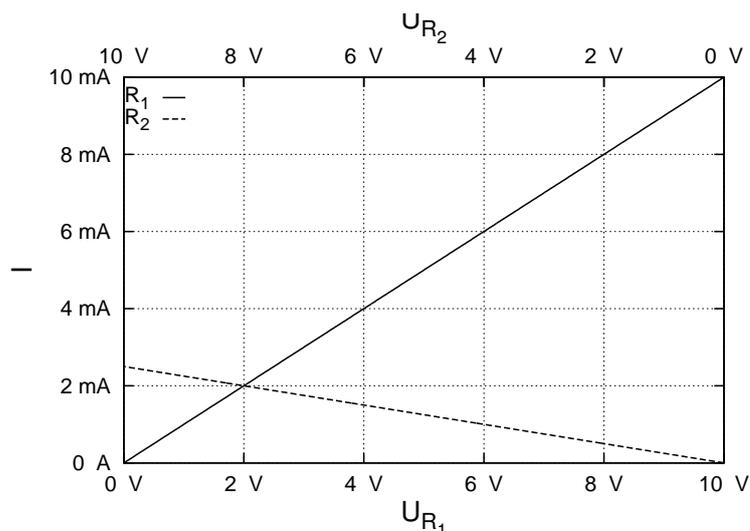


Abbildung 3.17.: Gemeinsame Auftragung der Kennlinien zweier in Reihe geschalteter Widerstände $R_1 = 1k\Omega$ und $R_2 = 4k\Omega$ mit einer Batteriespannung $U = 10V$.

Die beiden Kennlinien in Abbildung 3.17 schneiden sich bei $U_{R_1} = 2V$ und $U_{R_2} = 8V$. Nur an diesem Punkt stimmt an beiden Widerständen die Beziehung zwischen Strom und Spannung (Ohmsches Gesetz) und gleichzeitig ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Batteriespannung. Setzt man in Gleichung (3.5.3) und Gleichung (3.5.4) die Werte für U , R_1 und R_2 ein, erhält man das gleiche Ergebnis. Das Verfahren zur Bestimmung des Arbeitspunktes ist unabhängig von der Tatsache, dass Widerstände lineare Bauelemente sind. Es funktioniert auch mit Dioden und jeglichen anderen nichtlinearen Bauelementen.

Um grafisch die Spannungsabfälle an zwei in Serie geschalteten Bauelementen zu bestimmen, trägt man die Kennlinien einmal mit zunehmender und für das andere Bauelement mit abnehmender Spannung übereinander auf. Der Schnittpunkt ist der gesuchte Arbeitspunkt. Die Spannungen an den zwei Bauelementen können an der entsprechenden Skala direkt abgelesen werden.

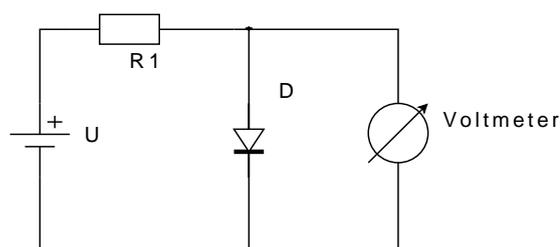


Abbildung 3.18.: Serieschaltung einer Diode D mit einem Widerstand R .

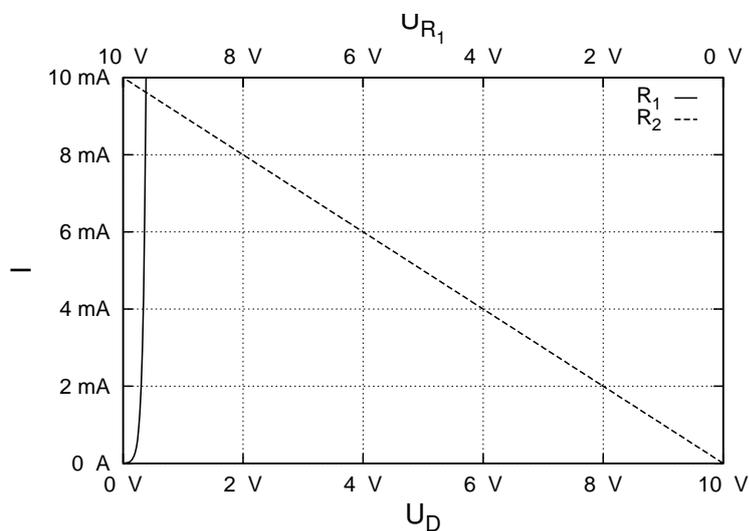


Abbildung 3.19.: Arbeitspunkt einer Diode vom Typ 1N4148 in Serie mit einem Widerstand $R_1 = 1k\Omega$ (Schaltung nach Abbildung 3.18).

Aus der Abbildung 3.19 liest man ab, dass am Arbeitspunkt der Schaltung nach Abbildung 3.18 die Spannung $U_D = 0.376$ V und an dem Widerstand die Spannung $U_{R_1} = 9.624$ V abfällt. Durch beide Bauteile fließt der Strom $I = 9.57$ mA. Das

Verfahren nach Abbildung 3.19 ist universell anwendbar.

3.5.2. Transistoren

Ein Transistor hat drei Anschlüsse, den Emitter (E), den Kollektor (C) und die Basis (B). Im Schaltschema ist der Anschluss mit dem Pfeil der Emitter, derjenige auf der gleichen Seite ohne Pfeile der Kollektor und derjenige auf der anderen Seite die Basis.

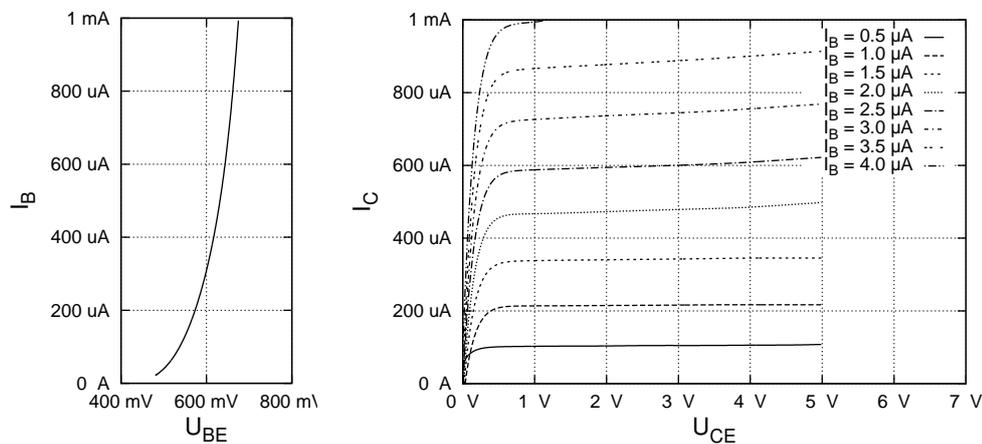


Abbildung 3.20.: Links: Basis-Emitter-Kennlinie des Transistors BC107, rechts: Kollektor-Kennlinie des Transistors BC107 mit dem Basisstrom I_B .

Die *Basis-Emitter-Kennlinie* in Abbildung 3.20 ist die gewöhnliche Diodenkennlinie. Die rechte Seite von Abbildung 3.20 zeigt das *Kollektor-Kennlinienfeld* des Transistors. Dieses Kennlinienfeld wird manchmal auch das *Ausgangskennlinienfeld* genannt. Beim Ausgangskennlinienfeld wird der Basisstrom I_B als Parameter verwendet. Die Abbildung 3.20 zeigt die Kennlinien bei festgehaltenem Basisstrom, wobei die Basisströme von $I_B = 0.5 \mu A$ bis $I_B = 4 \mu A$ in Schritten von $0.5 \mu A$ variieren.

Bei vorgegebener Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} kann man so den Ausgangsstrom am Kollektor bestimmen. Analog kann bei vorgegebenem Kollektorstrom die Spannung zwischen Emitter und Kollektor als Funktion des Basisstroms abgelesen werden. Dies ist wichtig, wenn der Transistor als Schalter verwendet werden soll.

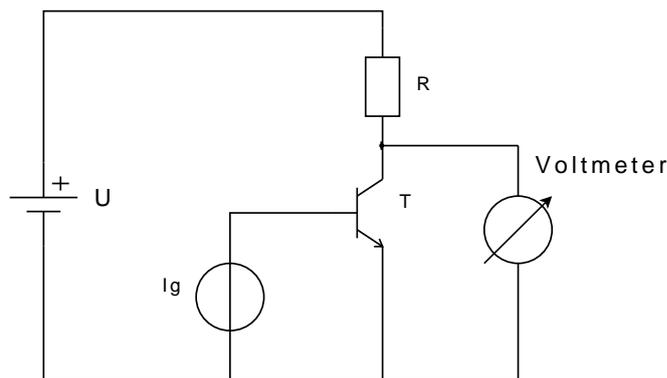


Abbildung 3.21.: Schaltung zur Messung der Ausgangskennlinie des Transistors BC107 mit einem Kollektorwiderstand von $5k\Omega$.

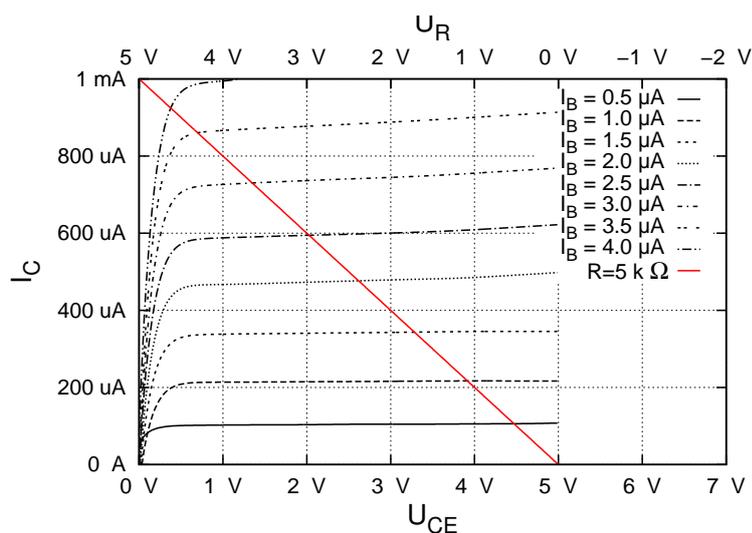


Abbildung 3.22.: Arbeitskennlinie des Transistors BC107 mit einem Kollektorwiderstand von $5k\Omega$ gemessen mit der Schaltung nach [Abbildung 3.21](#).

Die [Abbildung 3.21](#) zeigt die Schaltung eines Transistorverstärkers. Der Strom in die Basis I_B steuert den Strom im Kollektor I_C . Der Kollektorstrom fließt durch den Widerstand R . Die Summe der Spannungsabfälle an beiden Bauelementen muss der Batteriespannung U entsprechen. Wir können also analog wie bei der Diode vorgehen (siehe [Abbildung 3.19](#)): Wir zeichnen die Kennlinie des Widerstandes wie bei der Diode rückläufig ein. Die Schnittpunkte der Kennlinie des Widerstandes mit den verschiedenen, basisstromabhängigen Ausgangskennlinien des Transistors sind die Kurve, die die Strom- oder Spannungsverstärkung angibt.

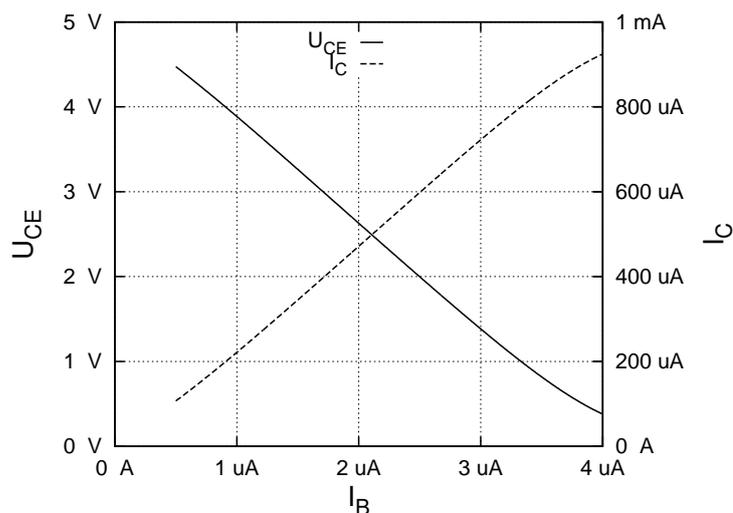


Abbildung 3.23.: Verstärkung eines Transistors in der Emitterschaltung (Der Emitter wird sowohl vom Eingang wie vom Ausgang verwendet.)

Abbildung 3.23 zeigt sowohl die Kollektor-Emitterspannung $U_{CE}(I_B)$ wie auch den Kollektorstrom $I_C(I_B)$. Die Verstärkung ist für den Basisstrombereich $0.5\mu\text{A} < I_B < 3\mu\text{A}$ linear. Die Verstärkungswerte sind in Tabelle 3.1 angegeben.

$$\begin{aligned} \text{Stromverstärkung} \quad \frac{I_C}{I_B} &= 0.252 \frac{\text{mA}}{\mu\text{A}} = 252 \frac{\mu\text{A}}{\mu\text{A}} = 252 \frac{\text{A}}{\text{A}} \\ \text{Spannungsverstärkung} \quad \frac{U_{CE}}{I_B} &= 1.28 \frac{\text{V}}{\mu\text{A}} \end{aligned}$$

Tabelle 3.1.: Verstärkungen der Schaltung 3.21.

Wenn das Eingangssignal nicht ein Strom, sondern eine Spannung sein soll, muss die Spannung mit einem Widerstand in einen Strom umgewandelt werden.

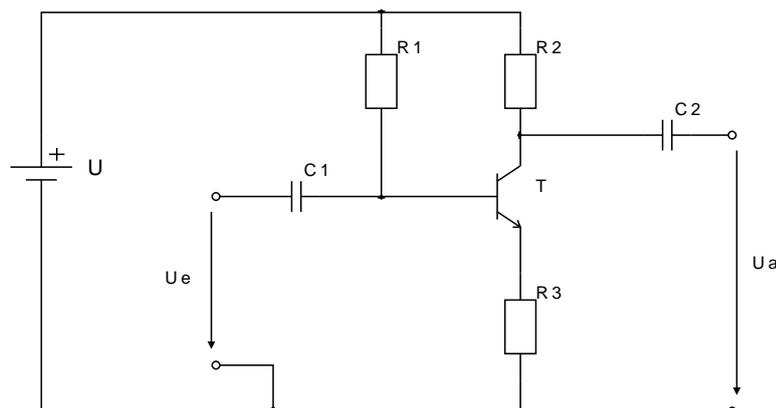


Abbildung 3.24.: Verstärkerschaltung mit BC107.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir die Schaltung nach Abbildung 3.24 besprechen. Wir verwenden die Daten aus Abbildungen 3.22 und 3.23. Der Widerstand R_2 ist der Arbeitswiderstand R aus Abbildung 3.21. Wir hatten immer eine Spannung von $5V$ über dem Arbeitswiderstand R (oder R_2 hier) und dem Transistor. Wir wollen dies beibehalten und gleichzeitig einen Spannungsabfall von $0.2V$ über R_3 haben. Bei unseren vorherigen Berechnungen war $R_2 = 5k\Omega$. Den Arbeitspunkt setzen wir in etwa in die Mitte des linearen Bereiches, bei $I_B = 2\mu A$ und bei $I_C = 500\mu A$. Damit ist

$$R_3 = \frac{U_{R_3}}{I_B + I_C} = \frac{0.2V}{500\mu A + 2\mu A} = 398\Omega \approx 400\Omega$$

Die Grösse des Widerstandes R_1 finden wir, wenn wir aus Abbildung 3.20 ablesen $U_{BE}(2\mu A) \approx 0.5V$. Die Spannung über R_1 ist dann $4.5V$ und wir haben

$$R_1 = \frac{4.5V}{2\mu A} = 2.25M\Omega$$

Was ist die Funktion von R_3 ? R_3 stabilisiert die Schaltung gegen Temperaturänderungen und setzt gleichzeitig die Verstärkung fest. Wenn nämlich die Eingangsspannung U_e und damit die Basis-Spannung U_B steigt, steigt der Basisstrom I_B und der Kollektorstrom I_C und damit die Spannung über R_3 . Dieser Spannungsanstieg verringert aber den Anstieg der Basis-Emitter-Spannung, da $U_{BE} = U_e - U_{R_3}$ ist. Die Spannungsverstärkung der Schaltung ist

$$A = \frac{R_2}{R_3} = 12$$

Die Kondensatoren werden so gewählt, dass die tiefsten Frequenzen der zu verstärkenden Signale noch kaum geschwächt werden. Für Signale zwischen $100Hz$ und $4kHz$ (Telefonbandbreite klassischer Telefone) würde man erhalten $C_1 > 0.7pF$ und $C_2 > 320nF$. Der so berechnete Wert für C_1 ist falsch: wir haben vergessen, dass auch der Widerstand Basis-Emitter-Diode (grob abgeschätzt aus der Steigung $r_{BE} = 1mV/2\mu A \approx 500\Omega$ wechselfspannungsmässig parallel zu R_1 ist. Zu r_{BE}

ist noch R_3 in Serie geschaltet. Die modifizierte Berechnung für C_1 ergibt dann $C_1 > 2nF$. C_1 kann ohne Probleme 10 bis 100 mal grösser gewählt werden.

U	R_1	R_2	R_3	C_1	C_2	A
5.2V	2.25M Ω	5k Ω	400 Ω	1 μF	330nF	12

Tabelle 3.2.: Dimensionierung der Schaltung nach Abbildung 3.24

Weiterführende Informationen finden Sie im **Skript Physikalische Elektronik und Messtechnik** [Mar09].

3.6. Magnetfeld und Lorentzkraft



Versuch zur Vorlesung:

Kraft zweier stromdurchflossener Leiter (Versuchskarte EM-63)

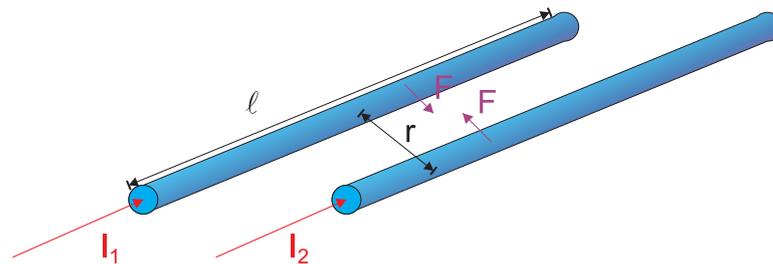


Abbildung 3.25.: Strom in zwei parallelen Leitern. Die Leiter haben die Länge ℓ und sind im Abstand r . Sie sind von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen.

Wenn in zwei parallelen Stromkreisen Ströme fließen, so gibt es eine Kraft zwischen den beiden Leitern.

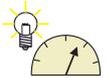
$$F_M = \text{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.6.1)$$

Die beobachtete Kraft hat die in der Gleichung (3.6.1) angegebene Form. Sie wird grösser, wenn längere Leiterstücke parallel sind. Sie nimmt ab, wenn der Abstand zunimmt. Sie hängt vom Produkt der beiden Ströme ab und ist **anziehend**, wenn die beiden Ströme in die gleiche Richtung fließen.

Die Kraft F_M ist nicht eine elektrostatische Kraft, da eine geerdete Metallplatte die Kraft, anders als bei der Coulomb-Kraft, nicht abschirmt.

Die Kraft F_M wirkt auf bewegte *Ladungen*!

Die Kraft F_M wirkt auch auf Elektronenstrahlen.



Versuch zur Vorlesung:

Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter (Versuchskarte Applet)

3.7. Die magnetische Kraft

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 812]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 91])

Um die Magnetische Kraft zu berechnen gehen wir in zwei Schritten vor:

1. Wir zeigen, dass elektrostatische Gesetze auch in bewegten *Bezugssystemen* gelten.
2. Wir berechnen mit den Gesetzen der *Relativitätstheorie* die magnetische Kraft.

3.7.1. Ladungsinvarianz bewegter Bezugssysteme

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 91])

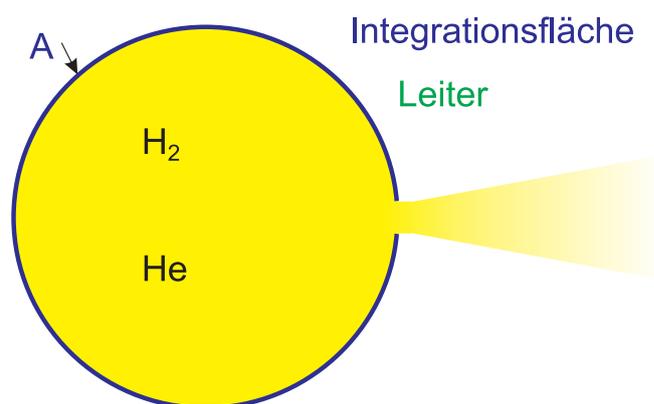


Abbildung 3.26.: Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung.

Mit zwei Gedankenexperimenten soll geklärt werden, ob die *Ladung* von der Geschwindigkeit abhängt. Zuerst schliessen wir eine grosse Menge H_2 -Gas in den

metallischen Tank ein, entladen ihn, und lassen das Gas ausströmen. Die *Ladung* des leeren Tanks ist unmessbar klein. Daraus schliesst man:

$$q_{\text{Elektron}} = -q_{\text{Proton}} \quad (3.7.1)$$

mit einer Genauigkeit von $|q_{\text{Elektron}}|/N = 10^{-20} q_{\text{Elektron}}$.

Dies folgt aus dem Gausschen Gesetz Gleichung (2.3.3)

$$\iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \pm a |q_{\text{Elektron}}| = \frac{1}{\varepsilon_0} [NQ(H_2) + q] \quad (3.7.2)$$

wobei q eine eventuell vor dem Ausströmen vorhandene *Ladung*, $Q(H_2)$ die *Ladung* eines Wasserstoffmoleküls und N die Anzahl der eingeschlossenen Wasserstoffmoleküle ist. a ist die Ungenauigkeit der Ladungsmessung. Aus der Tatsache, dass der Metallbehälter nach dem Ausströmen im Rahmen der Messgenauigkeit ungeladen ist, folgt, dass das H_2 -Molekül ungeladen ist.

Der Versuch wird mit *He*-Gas wiederholt. Das Resultat ist das gleiche. Nun bewegen sich aber die zwei Protonen im *He*-Atom mit sehr grosser Geschwindigkeit. **Das bedeutet, dass die *Ladung des Protons* unabhängig von der Geschwindigkeit ist.** Die *Ladung* muss insbesondere in jedem *Inertialsystem* gleich sein. Wir betrachten zwei Inertialsysteme S und S' ⁵

$$\iint_{A(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A'(t)} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (3.7.3)$$

Diese Gleichung drückt die *relativistische Ladungsinvarianz* aus. Die *Ladungsinvarianz* ist nicht gleich der *Ladungserhaltung*. So ist zum Beispiel die Energie erhalten, zwischen zwei Inertialsystemen aber nicht invariant ($m_0c^2 \neq m(v)c^2$).

3.7.2. Relativistische Berechnung

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 94])

⁵Die Inertialsysteme bewegen sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit!

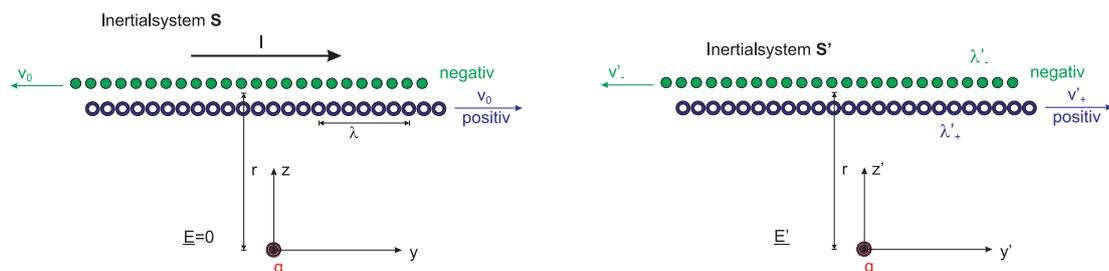


Abbildung 3.27.: Berechnung der magnetischen Kraft. Links: im Bezugssystem S und rechts: im Bezugssystem S' , in dem q in Ruhe ist. Beachte: wir wissen zwar nicht, wie groß der Strom I gemessen im Bezugssystem S im Bezugssystem S' ist. Die *Ladung* ist jedoch **invariant**.

Den Strom I modellieren wir mit zwei Ketten aus Ladungsträgern, je eine positiv und negativ geladen. Ihre Linienladungsdichten λ sollen so sein, dass die beiden Ketten neutral sind. Im Ruhesystem S^+ der positiven *Ladungen* ist

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L_0} \quad (3.7.4)$$

Im Inertialsystem S ist wegen der Ladungsinvarianz

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad (3.7.5)$$

Wegen der Längenkontraktion gilt

$$L = \frac{L_0}{\gamma_0} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.7.6)$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad (3.7.7)$$

Die gleiche Beziehung kann für die negativen *Ladungen* abgeleitet werden. Das heisst, wenn in S die Linienladungsdichten der positiven und negativen *Ladungen* gleich sind, dann auch in den jeweiligen Ruhesystemen. In den Ruhesystemen ist die Linienladungsdichte geringer als in bewegten Bezugssystemen. Da die beiden bewegten Ladungsketten die gleiche Linienladungsdichte im System S haben, ist $E = 0$.

Im Ruhesystem S' , in dem das Teilchen mit der *Ladung* q in Ruhe ist, sieht die Situation anders aus. Die Geschwindigkeit der positiven und der negativen Ladungsketten ist unterschiedlich. deshalb sind sie zusammen nicht mehr elektrisch neutral. Auf die *Ladung* q wirkt eine elektrostatische Kraft. Da die Relativgeschwindigkeit der positiven *Ladungen* zu q kleiner ist als die der negativen *Ladungen*, liegen in S' die positiven *Ladungen* weniger dicht als die negativen⁶. Die beiden Ladungsketten

⁶In S sind die Ladungsdichten der positiven und negativen *Ladungen* gleich.

sind insgesamt **negativ** geladen. Deshalb wird q angezogen, wenn $q > 0$ ist. Das \mathbf{E}' -Feld in die z' -Richtung erzeugt in S' die Kraft

$$F'_z = q \cdot E' \quad (3.7.8)$$

Das \mathbf{E} -Feld hängt vom Bezugssystem ab, ist also nicht relativistisch invariant!

Das elektrische Feld einer Linienladung im Abstand r ist

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad (3.7.9)$$

Um das elektrische Feld \mathbf{E}' berechnen wir die Geschwindigkeiten v'_+ und v'_- in S' .

$$\begin{aligned} v'_+ &= \frac{v - v_0}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ v'_- &= \frac{v + v_0}{1 + \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{v}{c} \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \beta'_+ &= \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \\ \beta'_- &= \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta} \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Mit $\gamma'_+ \equiv \gamma(v'_+)$ und $\gamma'_- \equiv \gamma(v'_-)$ und mit $\lambda_0 = \lambda'_+/\gamma'_+$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda'_+ &= \gamma'_+ \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \\ \lambda'_- &= \gamma'_- \left(\frac{\lambda}{\gamma_0} \right) \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Die Netto-Linienladung in S' ist dann

$$\lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-) \quad (3.7.14)$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \gamma'_+ - \gamma'_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_+^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_-^2}} & (3.7.15) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}\right)^2}} \\
 &= \frac{1 - \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} - \frac{1 + \beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\
 &= \frac{-2\beta_0\beta}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} \\
 &= -2\beta_0\beta\gamma_0\gamma
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\lambda' = -2\lambda\beta\beta_0\gamma = \frac{-2\lambda v v_0}{c^2}\gamma \quad (3.7.16)$$

Betrachten wir am Ort der *Ladung* q das von der Linienladung λ' hervorgerufene Feld E'_r . Für positives λ' zeigt dieses in die $-z'$ -Richtung. Also ist das elektrische Feld

$$\begin{aligned}
 E'_r &= -\frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} & (3.7.17) \\
 &= \frac{2\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

Die Kraft im Ruhesystem S' des Teilchens ist also

$$F'_z = q \cdot E'_r = \frac{2q\lambda v_0 v \gamma(v)}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.18)$$

Wir verwenden die Lorentztransformation der Impulse p_i und der Energie \mathfrak{E}

$$\begin{aligned}
 p'_x &= p_x & (3.7.19) \\
 p'_y &= \gamma(v) \left(p_y - v \frac{\mathfrak{E}}{c^2} \right) \\
 p'_z &= p_z \\
 \mathfrak{E}' &= \gamma(v) (\mathfrak{E} - v \cdot p_y)
 \end{aligned}$$

Der Vierervektor $(p_x, p_y, p_z, \frac{\mathfrak{E}}{c^2})$ transformiert sich wie der Vierervektor (x, y, z, ct) . Die Kraft transformiert sich also wie

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot dt} = \gamma(v) F_z \quad (3.7.20)$$

Der Strom in S ist

$$I = 2\lambda v_0 \quad (3.7.21)$$

Damit bekommen wir

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.22)$$

Multipliziert man Gleichung (3.7.22) mit der Dichte der Ladungsträger n (Einheit $[n] = 1/m$), so erhält man die zu I_2 proportionale Kraft pro Länge $\mathfrak{F}(r)$.

$$\mathfrak{F}(r) = n \cdot F_z(r) = \frac{n \cdot q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{I_2 \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.23)$$

Aus $\mathfrak{F}(r)$ bekommt man die Kraft auf ein Leiterstück der Länge ℓ

$$F(r, I, I_2, \ell) = \ell \cdot \mathfrak{F}(r) = n \cdot \ell \cdot F_z(r) = \frac{n \cdot \ell \cdot q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{I_2 \cdot I \cdot \ell}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.7.24)$$

Die magnetische Kraft F_m im Laborsystem S ist die relativistisch transformierte elektrostatische Kraft auf die Ladung q in deren Ruhesystem S' . Die magnetische Kraft kann als relativistische Effekt der elektrostatischen Kraft in einem bewegten Bezugssystem verstanden werden.

3.7.3. Magnetisches Feld

In der Gleichung Gleichung (3.7.24) können wir die Terme sortieren, dass ein Leiter als Ursache eines Feldes und der Rest als Wirkung dasteht, analog wie beim elektrischen Feld.

$$\begin{aligned} F(r, I, I_2, \ell) &= \frac{I_2 \cdot I \cdot \ell}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \right) \left(\frac{I}{2\pi r} \right) (2\ell \cdot I_2) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} H(r) (2\ell \cdot I_2) \end{aligned} \quad (3.7.25)$$

Wir haben den Vorfaktor zur *Permittivität des Vakuums* zusammengefasst mit

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad [\mu_0] = \text{N A}^{-2} \quad (3.7.26)$$

Der Zahlenwert der Permittivität des Vakuums ist im *SI-System* zur Definition des Ampères vorgegeben

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (3.7.27)$$

Die Funktion

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad [H(r)] = \text{A m}^{-1} \quad (3.7.28)$$

ist das *magnetische Feld*. Es hat für den Magnetismus die gleiche Funktion wie das *elektrische Feld*.

3.8. Eigenschaften des magnetischen Feldes

3.8.1. Eigenschaften der magnetischen Induktion B

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 98])



Versuch zur Vorlesung:

Fadenstrahlrohr (Versuchskarte EM-11)

Um nicht immer die *Lorentz-Transformation* ausrechnen zu müssen, führen wir die *magnetische Feldstärke* oder die *magnetische Induktion B* ein. Ein magnetisches Feld lenkt Elektronen ab. Wie wir schon früher gesehen haben, ist eine Bewegung der Ladungsträger für die magnetische Kraft notwendig. Wird das Magnetfeld der *Helmholtzspulen* so gedreht, dass es parallel zur Bewegungsrichtung der *Elektronen* liegt, verschwindet die Magnetkraft. Das folgende Kraftgesetz

$$\mathbf{F}_L = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8.1)$$

beschreibt die magnetischen Kräfte auf Elektronen. Die Kraft \mathbf{F}_L heisst *Lorentz-Kraft*.

Durch den Vergleich von Gleichung (3.8.1) und Gleichung (3.7.22) kann man für die magnetische Feldstärke einer linienförmigen Stromverteilung schreiben

$$B(r) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.8.2)$$

Die *Induktionskonstante*

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.8.3)$$

ermöglicht es Gleichung (3.8.2) kompakter zu schreiben

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \quad (3.8.4)$$

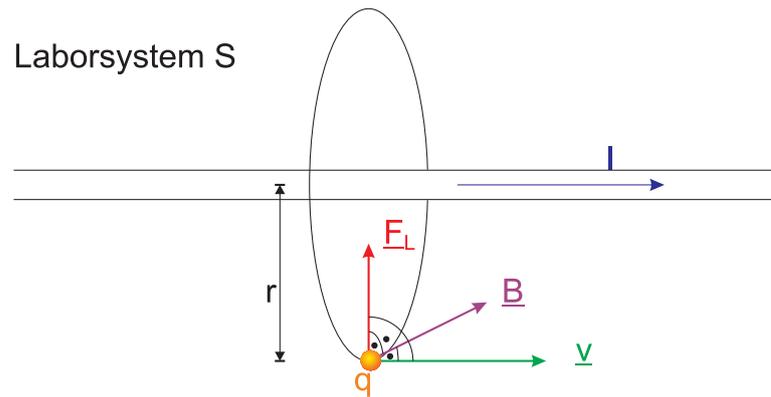


Abbildung 3.28.: Lage der magnetischen Induktion zum Strom und zur Geschwindigkeit der *Ladung*.

Die magnetische Induktion \mathbf{B} bildet eine Rechtsschraube um den Strom I (Daumen in Stromrichtung, Finger zeigen in die Richtung der magnetischen Induktion).



Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Feldlinien (Versuchskarte EM-50)

Die magnetische Induktion eines geraden, unendlich ausgedehnten Stromes bildet Feldlinien, die kreisförmig in einer Ebene senkrecht zum Strom liegen. Der Mittelpunkt der kreisförmigen Feldlinien ist der Strom.

Die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern kann neu berechnet werden. Mit

$$\mathbf{F}_L = q_2 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(r) \quad (3.8.5)$$

wobei q_2 eine *Ladung* im Leiter 2 ist, und mit n_2 der Ladungsträgerdichte im Leiter 2, ℓ die betrachtete Länge, A_2 der Querschnitt des Leiters und $\langle v_2 \rangle = |\mathbf{v}_2|$, bekommt man

$$F_M = q_2 \cdot \langle v_2 \rangle \cdot B_1(r) \cdot n_2 \cdot \ell \cdot A_2 \quad (3.8.6)$$

Der Strom im Leiter 2 ist nun aber

$$I_2 = \langle v_2 \rangle \cdot q_2 \cdot n_2 \cdot A_2 \quad (3.8.7)$$

Damit ist

$$F_M = I_2 \cdot B_1(r) \cdot \ell \quad (3.8.8)$$

Wenn wir Gleichung (3.8.4) einsetzen, bekommen wir

$$F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r} \quad (3.8.9)$$

Diese Gleichung wird zur Definition der Einheit der magnetischen Induktion im *SI-System* verwendet.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (3.8.10)$$

Die Einheit der magnetischen Induktion ist

$$[B] = \text{Tesla} = T = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = \frac{N}{Am} = \frac{V \cdot s}{m^2} \quad (3.8.11)$$

Manchmal wird die *magnetische Induktion* auch als *magnetische Flussdichte* bezeichnet.

Die magnetische Induktion wurde so definiert, dass in Gleichung (3.8.9) alle Faktoren bis auf den Strom I_2 und die Länge ℓ durch $B(r)$ symbolisiert werden. Diese Wahl ist willkürlich. Wir hätten genau so gut ein Feld durch

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.8.12)$$

definieren können. \mathbf{H} heisst *magnetisches Feld* oder *magnetische Feldstärke*. Das magnetische Feld hat die Einheit

$$[H] = \frac{A}{m}$$

Das magnetische Feld H ist unabhängig von der Materie die den betrachteten Raum erfüllt. Die magnetische Induktion B hängt vom den Raum füllenden Material ab.

elektrisches Feld $E \Leftrightarrow$ dielektrische Verschiebung $D = \epsilon\epsilon_0 E$
 magnetisches Feld $H \Leftrightarrow$ magnetische Induktion $B = \mu\mu_0 H$

- Die gesamte Kraft einer bewegten *Ladung* q in einer beliebigen Ladungs- und Stromverteilung ist

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8.13)$$

Dies ist das *Kraftgesetz der Elektrodynamik*

- Das magnetische Feld ist kein fundamentales Feld, sondern eine relativistische Korrektur zu dem elektrostatischen Feld.

3.8.2. Das Biot-Savart-Gesetz

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem beliebigen Magnetfeld kann mit dem *Gesetz von Biot-Savart* berechnet werden.

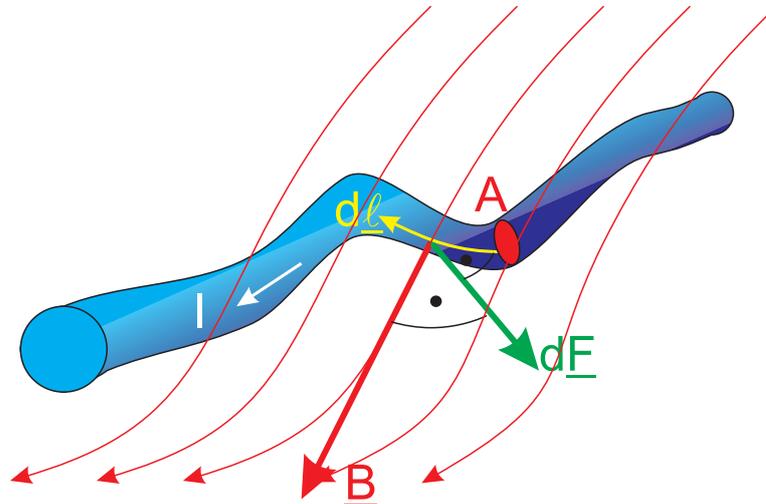


Abbildung 3.29.: Berechnung der Kraft auf ein Leiterelement.

Der Betrag des Vektors $d\mathbf{F}$, der senkrecht auf $d\mathbf{l}$ und senkrecht auf $d\mathbf{B}$ steht, ist

$$dF = q \cdot \langle v \rangle \cdot \sin \phi \cdot B \cdot n \cdot d\ell \cdot A \quad (3.8.14)$$

wobei n die Dichte der Ladungsträger und ϕ der Winkel zwischen \mathbf{B} und $d\mathbf{l}$ ist. Mit der Stromdichte $\mathbf{i} = n \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \cdot q$ erhalten wir

$$dF = i \cdot A \cdot d\ell \cdot \sin \phi \cdot B = I \cdot d\ell \cdot \sin \phi \cdot B \quad (3.8.15)$$

Die vektorielle Schreibweise der *Biot-Savart-Kraft* ist demnach

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.8.16)$$

Beispiel:

1. Die Kraft für eine beliebig geformte geschlossene Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld ist

$$\mathbf{F} = \oint I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \cdot \left(\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.8.17)$$

Da das Linienintegral $\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ über eine geschlossene Schleife null ist (die positiven und die negativen Anteile heben sich auf) ist $\mathbf{F} = 0$.

2. Das Drehmoment auf eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld kann durch summieren der Kraftanteile auf die vier Segmente berechnet werden.

Link zur Vorlesung: (Elektromotor)

Versuch zur Vorlesung:

Lorentz-Kraft (Versuchskarte EM046)

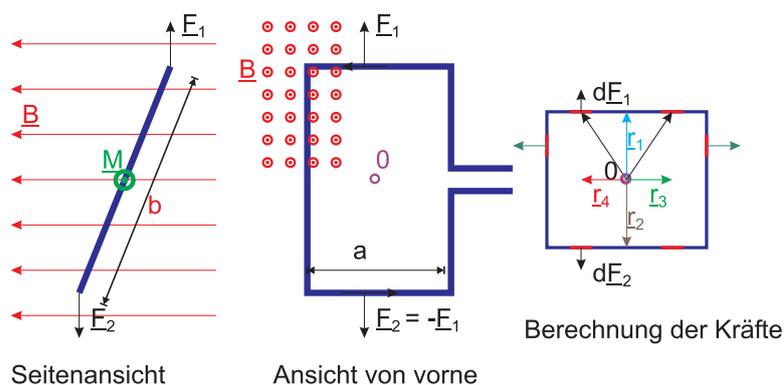
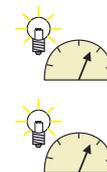


Abbildung 3.30.: Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

Bezüglich 0 ist die Situation symmetrisch. Die in der Zeichnung vertikalen Leitersysteme liefern kollinear sich aufhebende Kräfte. Die horizontalen Segmente ergeben das infinitesimale Drehmoment

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_1 & (3.8.18) \\ &+ (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \times d\mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4) \times d\mathbf{F}_2 \\ &= 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_1 + 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{F}_2 \end{aligned}$$

In Gleichung (3.8.18) enthält das Differential die Beiträge der oberen linken Seite plus die Beiträge der oberen rechten Seite plus die Beiträge der unteren linken Seite plus die Beiträge der unteren rechten Seite. Das gesamte *Drehmoment* bekommt man, indem man über die halbe Seite a integriert.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int_0^{a/2} d\mathbf{T} = \int_0^{a/2} (2 \cdot \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{F}_1 + 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times d\mathbf{F}_2) & (3.8.19) \\ &= \int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds + \int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{F}_2}{ds} ds \end{aligned}$$

Wenn \mathbf{F}_1 die Kraft auf die ganze obere Seite ist (und \mathbf{F}_2 entsprechend für die untere Seite), ist

$$\int_0^{a/2} 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \int_0^{a/2} \frac{d\mathbf{F}_1}{ds} ds = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \frac{\mathbf{F}_1}{2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad (3.8.20)$$

Damit ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad (3.8.21)$$

Das Drehmoment \mathbf{T} liegt in der Ebene der Leiterschleufe. Wenn ϕ der Winkel zwischen der Normalen auf die Ebene der Leiterschleufe und \mathbf{B} ist, gilt mit $F_1 = a \cdot I \cdot B$:

$$T = 2 \frac{b}{2} \sin \phi \cdot F_1 = a \cdot b \cdot I \cdot \sin \phi \cdot B \quad (3.8.22)$$

Wir definieren das *magnetische Moment* \mathbf{m} so, dass es senkrecht auf die Ebene der Leiterschleufe steht und dass $|\mathbf{m}| = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = a \cdot b \cdot I$ ist. Damit ist

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.8.23)$$

Das Drehmoment auf eine Leiterschleufe im homogenen Magnetfeld wird in *Drehspulinstrumenten*, in *Motoren* oder bei der Sichtbarmachung von Magnetfeldern mit Eisenfeilspänen verwendet.

3. Die potentielle Energie E_{pot} einer um den Winkel ϕ gegenüber dem Magnetfeld verdrehten stromdurchflossenen Leiterschleufe wird berechnet, indem man von $\phi = 0$ ausgeht und die Schleufe langsam zum Winkel ϕ dreht. Die Arbeit, um von ϕ' nach $\phi' + d\phi'$ zu drehen ist

$$dE_{pot} = 2 \cdot F_1 \sin \phi' \cdot \frac{b}{2} \cdot d\phi' = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \sin \phi' \cdot d\phi' \quad (3.8.24)$$

Damit erhalten wir

$$E_{pot}(\phi) = a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot \int_0^{\phi} \sin \phi' \cdot d\phi' = -a \cdot b \cdot I \cdot B \cdot (\cos \phi - 1) \quad (3.8.25)$$

Wenn wir $E_{pot}(\phi = \pi/2) = 0$ wählen haben wir

$$E_{pot} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (3.8.26)$$

Ein weiteres Beispiel einer Kraftwirkung auf *Ladungen* ist das *Barlowsche Rad*.



Versuch zur Vorlesung:
Barlowsches Rad (Versuchskarte EM004)

3.8.3. Das Ampèresche Durchflutungsgesetz

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 104])

Beim unendlich ausgedehnten geraden Leiter war das durch einen Strom I erzeugte Magnetfeld durch kreisförmige Magnetfeldlinien mit der Stärke $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$ charakterisiert, wobei das \mathbf{B} -Feld tangential zu den Kreisen liegt. Das Linienintegral entlang der Feldlinien, also entlang des Kreises S , ergibt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_S \frac{r}{r} d\phi = \mu_0 I \quad (3.8.27)$$

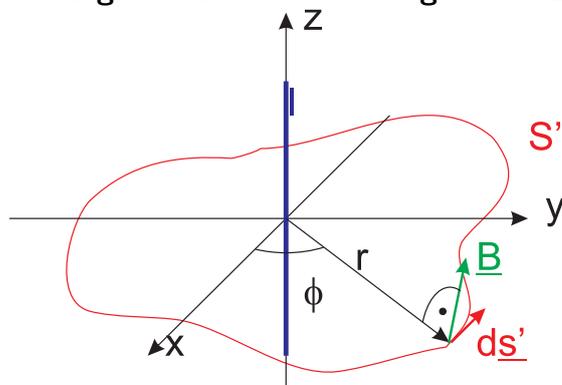
Dieses Linienintegral ist unabhängig von r . Die Behauptung ist, dass die obige Gleichung, ein einfacher Fall des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes, allgemeingültig ist.

Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8.28)$$

Der Beweis geht in mehreren Schritten:

Eine beliebige Kurve S um einen geraden Leiter



ds' ist die Projektion des Weglängenelementes $d\mathbf{s}$ auf der Kurve S auf die in der xy -Ebene liegende Projektion der Kurve S' . Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}' = B(r) \cdot \cos \alpha ds' = B(r) \cdot r \cdot d\phi$$

da $\mathbf{B}(r)$ keine Komponente in die z -Richtung hat. Es ist

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot d\phi$$

und damit

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

Eine beliebige Kurve S'' , die den Leiter nicht umschliesst Es ist

$$\begin{aligned}\oint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_A^B d\phi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_B^A d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_B - \phi_A) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_A - \phi_B) = 0\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass Ströme durch Leiter, die nicht vom Integrationsweg S umschlossen werden, keinen Beitrag zum Integral geben.

Eine beliebige Kurve S um eine beliebige Stromverteilung Wir betrachten viele Ströme I_k , die von der Integrationskurve S umschlossen werden. Wegen der Linearität des Problems gilt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_k I_k$$

wobei diejenigen Ströme, die mit dem Umlaufsinn von S eine Rechtsschraube bilden, positiv zu zählen sind.

Beispiel:

Ein zylindrischer Leiter mit dem Radius R soll homogen vom Strom I durchflossen werden. Die Stromdichte \mathbf{i} und der Strom I stehen dann betragsmässig wie

$$I = i (\pi R^2)$$

in Beziehung. Aus Symmetriegründen sind die Magnetfeldlinien konzentrische Kreise um den Leiter. Wir betrachten einen zum Strom konzentrischen Integrationsweg s . Ausserhalb des Leiters ($r > R$) haben wir

$$\oint_s \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{\pi R^2 (\text{Querschnitt})} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \cdot I$$

Innerhalb des Leiters ($r \leq R$) gilt

$$\oint_s \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \cdot i \cdot \pi r^2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

und damit

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

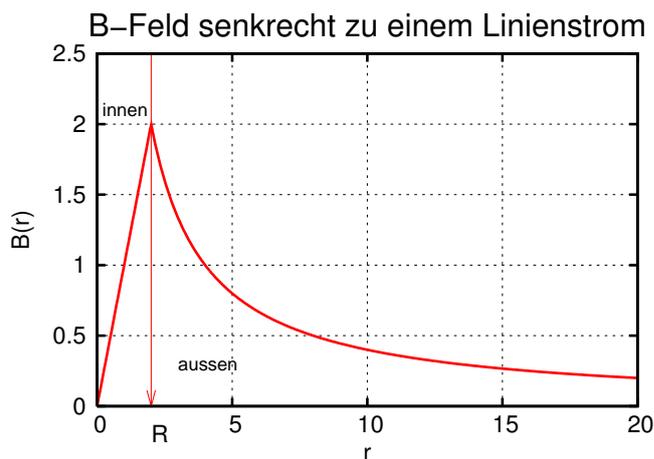


Abbildung 3.31.: Tangentiales Magnetfeld eines ausgedehnten, unendlich langen Linienstromes.

Mit dem Stokeschen Satz (Gleichung (C.5.1)) kann man die Integralform des Ampèreschen Gesetzes umschreiben

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.8.29)$$

Da diese Gleichungen für alle Integrationsflächen $A(S)$ gelten müssen, muss auch die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes gelten

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (3.8.30)$$

Beispiel: homogene Stromverteilung in einem unendlich ausgedehnten Leiter

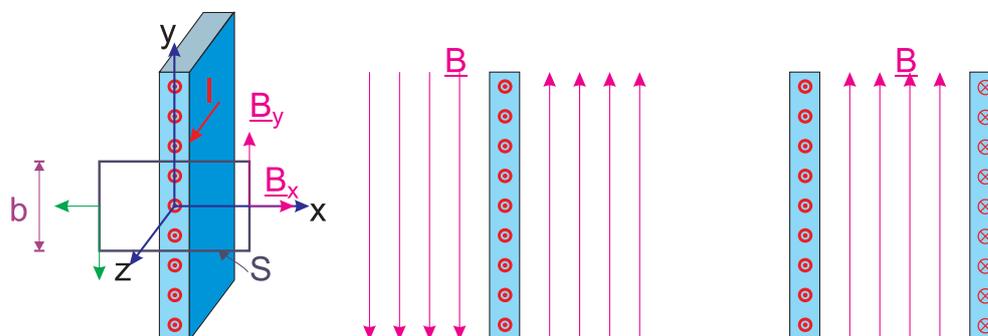


Abbildung 3.32.: Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung in einer dünnen Platte. Links: die Geometrie zur Berechnung, Mitte: das Magnetfeld eines homogenen Stromflusses und Rechts: das Magnetfeld zweier antiparallel von Strom durchflossener Platten.

Wir definieren eine **lineare Stromdichte**

$$j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$$

($[j] = \text{A/m}$). In unserem Falle hängt \mathbf{j} und \mathbf{i} über

$$\mathbf{i}(x, y, z) = \mathbf{j}(y, z)\delta(x)$$

zusammen. Das Stromfeld können wir uns als Parallelschaltung vieler linearer Leiter vorstellen. Aus dem Superpositionsprinzip folgt, dass in der z -Richtung

$$B_z \equiv 0 \quad (3.8.31)$$

Das resultierende Feld dieser Superposition muss in der xy -Ebene liegen. Auf den beiden Seiten senkrecht zur Platte finden sich immer zwei Stromfäden, die die x -Komponente kompensieren. Wenn wir später das Ampèresche Gesetz auf diese beiden Seiten anwenden, gibt es keine Komponente von \mathbf{B} parallel zur Seite: dieser Teil des Linienintegrals ist null.

Wir betrachten weiter die Komponenten $B_x(x)$ und $B_y(x)$ des Feldes \mathbf{B} im Abstand x von der Platte. Wir werden zwei Symmetrieoperationen an:

- Wir drehen die Platte um π um die z -Achse. Die neue Situation (Ströme) ist identisch mit der Ursprungssituation. Deshalb muss

$$\mathbf{B}(x) = -\mathbf{B}(-x)$$

und damit

$$B_x(x) = -B_x(-x) \text{ und } B_y(x) = -B_y(-x)$$

sein.

- Wir drehen die Platte um π um die y -Achse und drehen gleichzeitig die Flussrichtung des Stromes um $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$. Die Situation am Ende ist ununterscheidbar von der am Anfang. Also gilt auch

$$B_x(-x) = B_x(x) \text{ und } B_y(-x) = -B_y(x)$$

Mit den beiden Symmetrieüberlegungen folgt:

$$B_x(x) \equiv 0 \quad (3.8.32)$$

Um B_y zu bestimmen, nehmen wir an, dass unser Integrationspfad S symmetrisch bezüglich der Platte ist. Das Ampèresche Gesetz sagt

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2B_y(x) \cdot b + 2 \cdot 0 = \mu_0 \iint_{A(s)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int j dy = \mu_0 \cdot j \cdot b$$

Das Resultat ist unabhängig von x und homogen im Raum. Die Magnetfeldlinien sind parallel zur Platte und links und rechts antiparallel (siehe Abbildung 3.32, Mitte).

$$B_y = \frac{\mu_0}{2} j \quad (3.8.33)$$

Bei zwei antiparallel von Strom durchflossenen Platten ist das Magnetfeld auf den Raum zwischen den Platten beschränkt.

$$B = \mu_0 j \quad (3.8.34)$$

Die beiden Gleichungen sind einheitenmässig korrekt, da $[j] = \left[\frac{I}{r}\right] = \text{A/m}$ ist.

Anwendungsbeispiele: Streifenleiter, Koaxialkabel, Modell für eine Spule

3.8.4. Quellenfreiheit

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 111])

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass das Magnetfeld *quellenfrei* ist.

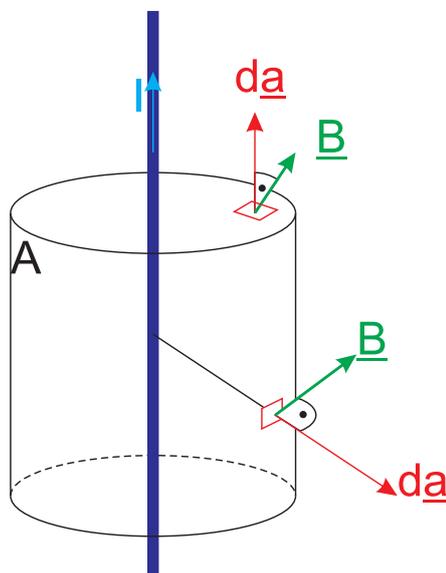


Abbildung 3.33.: Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes

Da überall auf der Integrationsfläche A gilt: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$, ist

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.8.35)$$

Wir verallgemeinern das Resultat, indem wir einen Zylinder mit beliebiger Grund- und Deckfläche nehmen. Auf der Grund und Deckfläche gilt das vorherige Argument, so dass

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

ist.

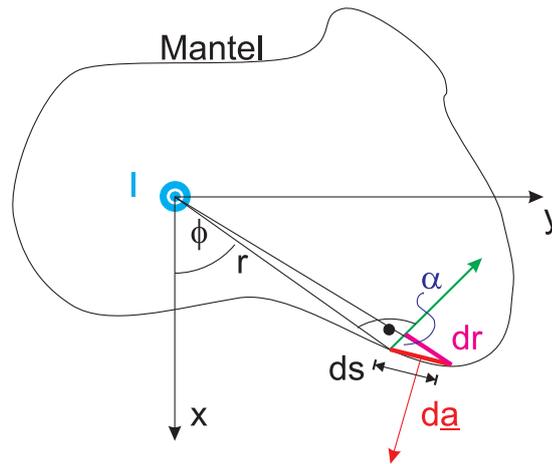


Abbildung 3.34.: Integration über die Mantelfläche.

An der Mantelfläche gilt mit $da = h \cdot ds$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= B(r) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) h \cdot ds = -B(r) \sin(\alpha) h \cdot ds \\ &= -B(r) \cdot dr \cdot h = -B(r) \cdot \frac{dr}{d\phi} d\phi \cdot h = -B(r) \cdot r'(\phi) \cdot d\phi \cdot h \end{aligned}$$

und damit

$$\iint_{\text{Mantel}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r'(\phi)}{r(\phi)} d\phi = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln(r(\phi)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Damit gilt auch für allgemeine Zylinderflächen

$$\iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.8.36)$$

Mit diesem Resultat zeigt man, dass dieses Integral für beliebige Flächen um einen Leiter null ist. Schliesslich zeigt man, dass das Resultat auch für beliebige Stromverteilungen gilt. Mit dem Gausschen Satz (Gleichung (C.3.1)) zeigt man

Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{B} \, dV \quad (3.8.37)$$

oder in differentieller Form

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.8.38)$$

Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes bedeutet, dass **es keine magnetischen Ladungen gibt und dass die Feldlinien im Endlichen geschlossen sind.**

3.8.5. Das B -Feld einer beliebigen Stromverteilung: das Vektorpotential A

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 114])



Versuch zur Vorlesung:

Magnetfeld von Leitern (Versuchskarte Em021)

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage lösen: wie konstruiere ich eine magnetische Induktion \mathbf{B} möglichst bequem? Das Rezept stammt aus der Elektrizitätslehre (Siehe Abschnitt 2.5). Dort wurde gezeigt, dass aus einem beliebigen Potential $U(\mathbf{r})$ durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} U(\mathbf{r})$$

eindeutig ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ konstruiert werden kann, das dem Gesetz der Elektrostatik

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

genügt. Grundlage war die Vektoridentität

$$\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \mathfrak{U}(\mathbf{r})) \equiv 0$$

die für beliebige Funktionen $\mathfrak{U}(\mathbf{r})$ gilt (siehe Gleichung (C.2.33)). Es gibt unter den Rechenregeln für Vektorableitungen (siehe Abschnitt C.2.4) eine weitere Identität mit dem Nullvektor, nämlich Gleichung (C.2.34).

$$\mathbf{div} (\mathbf{rot} \mathfrak{F}) = 0 \quad \forall \mathfrak{F}$$

Jedes Magnetfeld muss das *Ampèresche Gesetz* $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ und die Quellenfreiheit $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$ erfüllen. Analog zur Poissongleichung Gleichung (2.6.4) soll auch für das Magnetfeld eine Potentialgleichung gelten. Wir müssen also nach Gleichung (C.2.34) ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{A} wählen und die magnetische Induktion \mathbf{B} gleich der Rotation von \mathbf{A} setzen: dann ist die Divergenzfreiheit von \mathbf{B} gewährleistet. Mit dem *Vektorpotential* \mathbf{A}

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(x, y, z) \quad (3.8.39)$$

werden beide Gleichungen erfüllt. Wegen der Vektoridentität

$$\mathbf{div} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (3.8.40)$$

ist die Quellenfreiheit bei beliebiger Wahl von \mathbf{A} garantiert. Mit der zweiten Vektoridentität $\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ bekommen wir aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\Delta \mathbf{A} - \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (3.8.41)$$

Das *Vektorpotential* \mathbf{A} kann immer so gewählt werden, dass $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ gilt. Das *Vektorpotential* ist nicht eindeutig bestimmt. Nehmen wir an, dass ein *Vektorpotential* mit $\operatorname{div} \mathbf{A} = f \neq 0$ existiert. Dann existiert auch ein Vektorfeld $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \phi$ mit

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{V} &= f \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= 0\end{aligned}\tag{3.8.42}$$

mit einer eindeutigen Lösung, denn die obigen Gleichungen sind formal äquivalent zur *Elektrostatik*. Wir definieren ein *Vektorpotential*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{V}$$

Wegen Gleichung (3.8.43) gilt dann

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Dies bedeutet, dass das neue *Vektorpotential* das gleiche \mathbf{B} -Feld erzeugt wie das ursprüngliche. Wegen Gleichung (3.8.43) gilt auch

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{div} \mathbf{V} = f - f = 0$$

Zu jedem *Vektorpotential* \mathbf{A} kann ein *Vektorpotential* \mathbf{A}' gefunden werden, so dass $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ ist.

Das zu einer realen physikalischen Situation gehörende *Vektorpotential* \mathbf{A} ist nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl eines der zur gleichen Lösung von \mathbf{B} gehörenden Potentiale nennt man *Eichung*.

In der *Relativitätstheorie* und in der *Quantenmechanik* rechnet man bevorzugt mit dem *Vektorpotential*.

Aus der Gleichung für das *Vektorpotential* einer Stromverteilung

$$\Delta \mathbf{A}(x, y, z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x, y, z)\tag{3.8.43}$$

kann man die Umkehrfunktion berechnen und erhält, analog zur Elektrostatik,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\tag{3.8.44}$$

Aus der Beziehung $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ (Siehe Landau und Lifschitz, Klassische Feldtheorie [LL89, pp. 121]) bekommen wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{rot} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.8.45)$$

Nun bezieht sich die Rotation nur auf \mathbf{r} , nicht aber auf \mathbf{r}' . Deshalb kann sie unter das Integral gezogen werden.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\mathbf{rot} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \quad (3.8.46)$$

Nun gilt für die Rotation eines Produktes (Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM00, pp. 468])

$$\mathbf{rot} U \mathbf{B} = U \mathbf{rot} \mathbf{B} + \mathbf{grad} U \times \mathbf{B}$$

Hier ist der Vektor $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ bezüglich der Rotation eine Konstante, da er nur von \mathbf{r}' und nicht von \mathbf{r} abhängt. Weiter darf die Ableitung irgend eines Punktes nicht davon abhängen dass das Koordinatensystem um einen konstanten Vektor verschoben wurde. Wir rechnen deshalb die Ableitungen in der Rotation, beziehungsweise im Gradienten, nicht bezüglich \mathbf{r} sondern bezüglich des verschobenen Koordinatensystems $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ aus. Es bleibt also

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\mathbf{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\mathbf{grad} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} \right) \times \mathbf{i}(\mathbf{r}') \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} dV_\rho \end{aligned} \quad (3.8.47)$$

Die letzte Zeile ergibt sich, da für die Zwecke der Integration \mathbf{r} eine Konstante ist. Auch hier muss das Resultat der Integration unabhängig davon sein, dass wir das Koordinatensystem verschoben oder das Vorzeichen geändert haben. Deshalb darf man $\mathbf{i}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{i}(\boldsymbol{\rho})$ setzen.

Wir betrachten nun einen infinitesimal dünnen Strom $dI \mathbf{e}_{\text{Draht}}(\mathbf{r}') = \mathbf{i} = I d\boldsymbol{\ell}$. $\mathbf{e}_{\text{Draht}}$ ist ein Einheitsvektor entlang des Drahtes. Da \mathbf{i} überall null ist ausser auf dem eindimensionalen Draht, wird aus dem Volumenintegral ein eindimensionales Integral. Wieder ist es für die Integration egal, ob wir \mathbf{i} von \mathbf{r}' oder von $\boldsymbol{\rho}$ abhängen lassen.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.8.48)$$

Diese Gleichung ist bekannt als das *Gesetz von Biot-Savart*. Mit ihm kann man das Feld einer beliebigen Leiteranordnung berechnen.

Auch wenn sie physikalisch keine Bedeutung hat, kann es sinnvoll sein in Zwischenschritten die differentielle Formulierung zu verwenden, nämlich die *Formel von Laplace*.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} \quad (3.8.49)$$

Achtung: nur die integrale Form hat eine physikalische Bedeutung!

Beispiel:

Wir hatten in Abbildung 3.32 gesehen, dass ein homogener Strom in die $+z$ -Richtung homogene magnetische Induktionen links und rechts erzeugt. Die Magnetfelder haben die Form

$$B_y(x, y, z) = \begin{cases} -B_0, & \text{wenn } x < 0; \\ B_0, & \text{wenn } x > 0. \end{cases} \quad (3.8.50)$$

Für $x = 0$ ist B_y nicht definiert.

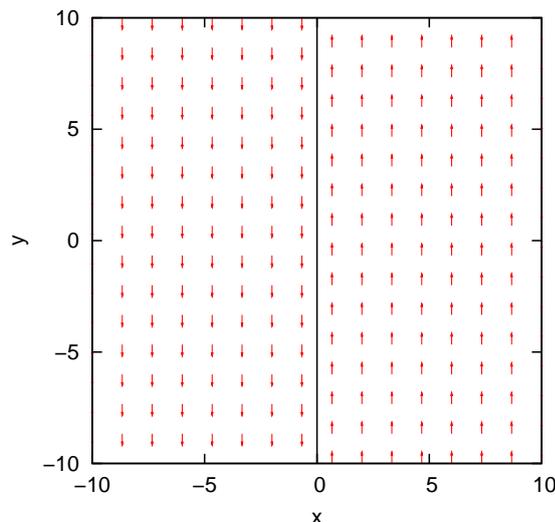


Abbildung 3.35.: Darstellung von \mathbf{B} in einer ($x = \text{const}$)-Ebene. Die Strom-Ebene liegt bei $x = 0$.

Das zu Gleichung (3.8.50) gehörige Vektorpotential ist

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z) &= 0 \\ A_y(x, y, z) &= 0 \\ A_z(x, y, z) &= \begin{cases} B_0 x, & \text{für } x < 0; \\ -B_0 x, & \text{für } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8.51)$$

Wieder ist \mathbf{A} für $x = 0$ nicht definiert. Aus $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ bekommt man

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &&= 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &&= \begin{cases} -B_0, & \text{für } x < 0; \\ B_0, & \text{für } x > 0. \end{cases} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &&= 0 \end{aligned} \quad (3.8.52)$$

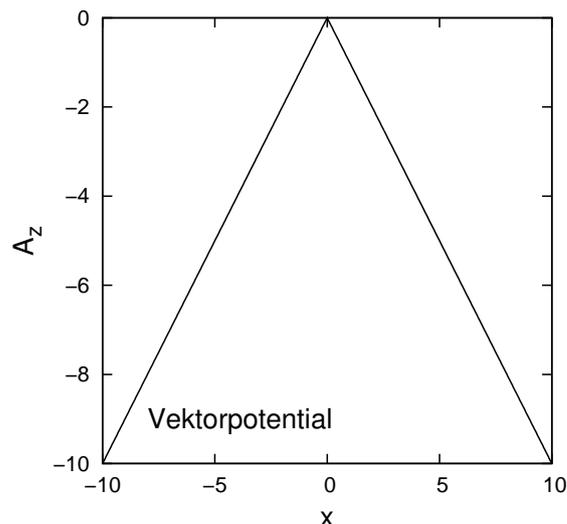


Abbildung 3.36.: z -Komponente des Vektorpotentials einer unendlichen Stromdichte in z -Richtung in der ($x = 0$)-Ebene.

Beispiel:

Das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I x z}{\pi(x^2 + y^2)} \\ \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I y z}{\pi(x^2 + y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt das magnetische Feld für einen in der z -Richtung laufenden Strom I

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{I y}{\pi(x^2 + y^2)} \\ \frac{1}{2} \frac{I x}{\pi(x^2 + y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) gehört zum Magnetfeld

$$\mathbf{H}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{I}{\pi r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I z}{\pi r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.9. Hall-Effekt

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 831]) (Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 126])



Versuch zur Vorlesung:
Halleffekt (Versuchskarte EM023)

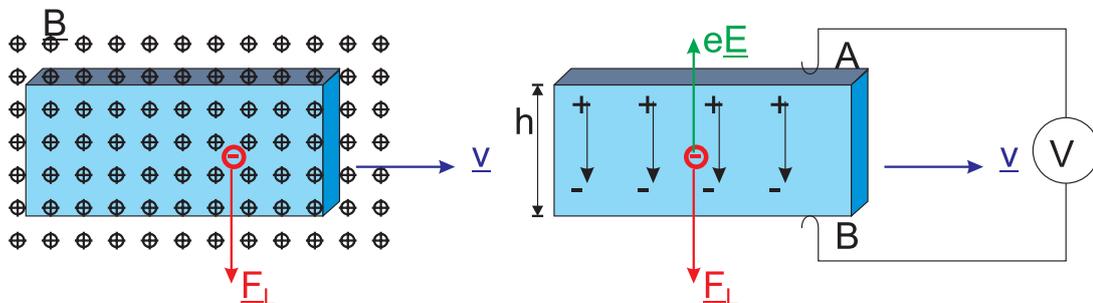


Abbildung 3.37.: Hall-Effekt

Wenn Elektronen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein Metall in einem Magnetfeld mit der magnetischen Induktion \mathbf{B} fließen (in einer Geometrie wie im obigen Bild), werden sie von der Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

nach unten abgelenkt. Man kann sich dies klar machen, indem man annimmt, der gesamte Metallstreifen werde mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} nach rechts bewegt. Da der Leiter eine begrenzte Ausdehnung hat, laden sich die Grenzflächen auf. Das elektrische Feld bewirkt eine Kraft $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$ nach oben auf die Elektronen. Im Gleichgewicht gilt $\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_E = 0$, oder

$$-e \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -eE \quad (3.9.1)$$

Eine Einheitsladung, die langsam von A nach B herumgeführt wird, erfährt vom elektrischen Feld eine Arbeit $h \cdot E$, so dass diese elektromotorische Kraft als Spannung am Voltmeter abgelesen werden kann. Durch Kombination mit der Gleichung (3.9.1) bekommt man für die *Hallspannung*

$$U_{Hall} = h \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \quad (3.9.2)$$

Die Hallspannung für ein einzelnes Teilchen ist unabhängig vom Material. Bei vielen Ladungsträgern muss die Geschwindigkeit v durch die Driftgeschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Ladungsträger ersetzt werden. $\langle v \rangle$ ist materialabhängig. Strom I und Driftgeschwindigkeit $\langle v \rangle$ hängen über

$$I = q \cdot n \cdot h \cdot b \cdot \langle v \rangle$$

zusammen. b ist hier die Dicke des Leiters und n die Ladungsträgerdichte. Die *Hallspannung* hängt dann wie

$$U_{Hall} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n} \quad (3.9.3)$$

von Strom und Spannung ab. Für Elektronen ($q = -e$) erhalten wir dann

$$U_{Hall} = -\frac{I \cdot B}{e \cdot b \cdot n}$$

Bemerkung: Die Hallspannung kann zur Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration verwendet werden.

3.10. Die Lorentztransformation der Felder E und B

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 128])

Wir betrachten die Situation im Bild zum Halleffekt (Siehe Abschnitt 3.37), nun aber vom Ruhesystem der Platte aus. Hier haben die Elektronen keine Geschwindigkeit: es gibt keine *Lorentzkraft*.

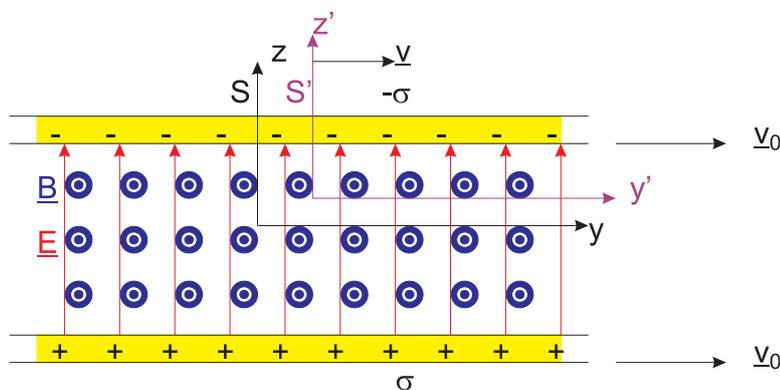


Abbildung 3.38.: Bewegte Magnetfelder und elektrische Felder.

Die obige Abbildung zeigt homogene Magnetfelder und elektrische Felder. Sie werden erzeugt, indem zwei parallele Platten positiv beziehungsweise negativ geladen sind. Wenn die Platten mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt werden ergibt sich auch ein Magnetfeld.

Das elektrische Feld beider Platten im Bezugssystem S ist

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.10.1)$$

wenn σ die Ladungsdichte in diesem Bezugssystem ist. Das Magnetfeld ist

$$B_x = \mu_0 \cdot j = \mu_0 \cdot \sigma \cdot v_0 = \frac{v_0 \cdot \sigma}{\varepsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.10.2)$$

Die entsprechenden Felder im Bezugssystem S' müssen nun berechnet werden. Auch in S' sind die Platten homogen geladen. Also haben wir

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad (3.10.3)$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\varepsilon_0 \cdot c^2} \quad (3.10.4)$$

Wir brauchen die Transformationsgesetze für σ' und v_0

$$\begin{aligned} v'_0 &= \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma}{\gamma_0} \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma'}{\gamma'_0} \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

wenn σ_0 das Ruhesystem der *Ladungen* und $\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ ist. Wir bekommen

$$\sigma' = \sigma \cdot \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} = \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - v_0'^2/c^2}} \quad (3.10.6)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma \sqrt{\frac{1 - v_0^2/c^2}{1 - \left(\frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}\right)^2 / c^2}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)^2 - (v_0 - v)^2/c^2}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - 2\frac{v \cdot v_0}{c^2} + \frac{v^2 \cdot v_0^2}{c^4} - v_0^2/c^2 - v^2/c^2 + 2vv_0/c^2}} \\ &= \sigma \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (3.10.7)$$

Mit

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}}$$

berechnet man

$$\begin{aligned} v'_0 \cdot \sigma' &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) v'_0 \\ &= \sigma \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}\right) \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v \cdot v_0}{c^2}} \\ &= \sigma \gamma (v_0 - v) \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

Damit ist

$$E'_z = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma v \cdot v_0}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \gamma (E_z - v \cdot B_x) \quad (3.10.9)$$

und

$$B'_x = \frac{v'_0 \cdot \sigma'}{\varepsilon_0 \cdot c^2} = \gamma \left(\frac{\sigma \cdot v_0}{\varepsilon_0 c^2} - \frac{\sigma \cdot v}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \gamma \left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z \right) \quad (3.10.10)$$

Damit sind die transversalen Felder B'_x und E'_z in S' Linearkombinationen der Felder B_x und E_z in S .

Die Transformationseigenschaften von B_z und E_x erhält man, indem man die obige Anordnung um $\pi/2$ um die y -Achse dreht. Dann gehen

$$E_z \rightarrow E_x \quad (3.10.11)$$

$$B_x \rightarrow -B_z \quad (3.10.12)$$

über. Die Transformationsgleichungen sind dann

$$E'_x = \gamma (E_x + v \cdot B_z) \quad (3.10.13)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x \right) \quad (3.10.14)$$

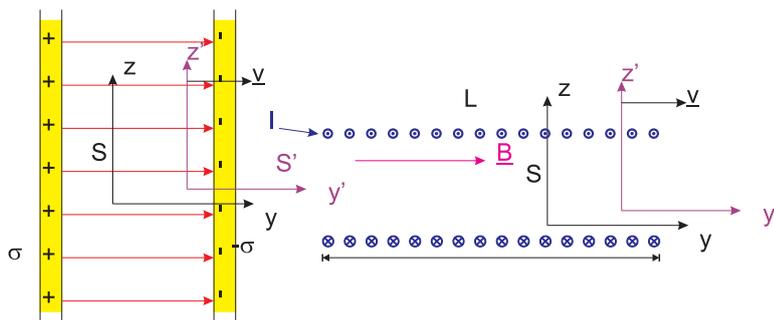


Abbildung 3.39.: Lorentztransformation von E und B .

Skizze zur Transformation eines longitudinalen E -Feldes (links) und des B -Feldes (rechts).

Die Transformation des longitudinalen E -Feldes ergibt sich aus der Erkenntnis, dass transversal zur Geschwindigkeit keine Längenkontraktion auftritt und dass

das Elektrische Feld eines Plattenkondensators⁷ nicht vom Plattenabstand abhängt. Also ist

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E'_y &= \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \\ \sigma &= \sigma' \end{aligned} \quad (3.10.15)$$

Also ist auch

$$E'_y = E_y \quad (3.10.16)$$

Die Transformationseigenschaften des Magnetfeldes können mit der in der obigen Abbildung rechts angedeuteten Spule berechnet werden. Das Magnetfeld in der Spule ist

$$B_y = \mu_0 \frac{I \cdot N}{L} \quad (3.10.17)$$

wobei N die Anzahl Windungen und L die Länge der Spule ist. Wir machen dabei die Annahme, dass die Spule sehr lang im Vergleich zum Durchmesser sei. Mit $I = \dot{Q}$ ist

$$B_y = \mu_0 \frac{N}{L} \frac{dQ}{dt} \quad (3.10.18)$$

Die Anzahl Windungen N und die *Ladung* sind relativistisch invariant. Das transformierte Feld ist dann

$$B'_y = \mu_0 \frac{N}{L'} \frac{dQ}{dt'} \quad (3.10.19)$$

Mit der Längenkontraktion $L' = \gamma L$ und der Zeitdilatation $dt' = dt/\gamma$ folgt, dass sich die relativistischen Effekte kompensieren und damit

$$B'_y = B_y \quad (3.10.20)$$

ist.

Bei einer Bewegung in die y -Richtung mit $\mathbf{v} = (0, v_y, 0)$ ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v_y^2/c^2}$) werden die elektrischen und magnetische Induktion wie

$$E'_x = \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \quad (3.10.21)$$

$$E'_y = E_y$$

$$E'_z = \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x)$$

$$B'_x = \gamma(v_y) \left(B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right)$$

$$B'_y = B_y$$

$$B'_z = \gamma(v_y) \left(B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)$$

transformiert.

⁷oder jeder anderen Anordnung von zwei parallelen, homogenen Flächenladungen

Im Vakuum gilt $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon_0 c^2}$. Die Lorentztransformation für elektrische und magnetische Felder ist dann

$$E'_x = \gamma(v_y) \left(E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot H_z \right) \quad (3.10.22)$$

$$E'_y = E_y$$

$$E'_z = \gamma(v_y) \left(E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right)$$

$$H'_x = \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z)$$

$$H'_y = H_y$$

$$H'_z = \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)$$

3.11. Zusammenfassung: Ströme

Makroskopischer Strom Gleichung (3.0.1)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_{\text{Fläche}}$$

Mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger Gleichung (3.1.5)

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot \mathbf{v}_j$$

Stromdichte Vektorfeld Gleichung (3.1.6)

$$\mathbf{i} = nq \langle \mathbf{v} \rangle$$

Gesamtstrom Gleichung (3.1.8)

$$I(F) = \int_F \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

Strom bei mehreren Ladungsträgern Gleichung (3.1.9)

$$\mathbf{i} = \sum_k n_k q_k \langle \mathbf{v}_k \rangle$$

Kontinuitätsgleichung Integralform Gleichung (3.1.15)

$$\int_A \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_{el} dV$$

Differentialform Gleichung (3.1.16)

$$\operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\mathbf{x}, t)$$

Ohmsches Gesetz lokal Gleichung (3.2.2)

$$\mathbf{i}(\mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E}$$

integral Gleichung (3.2.4)

$$I = G \cdot U$$

Stromdichte und Relaxationszeit Gleichung (3.2.12)

$$\mathbf{i} = n \frac{q^2 \langle t \rangle}{M} \mathbf{E} = n \frac{q^2 \tau}{M} \mathbf{E}$$

Leitfähigkeit und Relaxationszeit Gleichung (3.2.13)

$$\sigma = \sum_k n_k \frac{q_k^2 \tau_k}{M_k}$$

Potential und Leitfähigkeit Gleichung (3.2.21)

$$\operatorname{div} [\sigma(x, y, z) \operatorname{grad} U(x, y, z)] = 0$$

Leistung und Strom Gleichung (3.3.8)

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Magnetische Kraft zweier paralleler Leiter Gleichung (3.6.1)

$$F_M = \operatorname{const} \cdot \frac{\ell \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$$

Magnetische Kraft auf eine sich parallel zu einem Strom bewegende Ladung
Gleichung (3.7.22)

$$F_z(r) = \frac{q \cdot v \cdot I}{2\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Lorentz-Kraft Gleichung (3.8.1)

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Induktionskonstante Gleichung (3.8.3)

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

Magnetfeld eines geraden Leiters mit dem Strom I Gleichung (3.8.4)

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

Kraftgesetz der Elektrodynamik Gleichung (3.8.13)

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} + q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Biot-Savart-Kraft Gleichung (3.8.16)

$$d\mathbf{F} = I \cdot d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz, Integralform Gleichung (3.8.28)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_{A(S)} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz, differentielle Form Gleichung (3.8.30)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

Quellenfreiheit von \mathbf{B} , Integralform Gleichung (3.8.37)

$$0 = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{V(A)} \text{div } \mathbf{B} dV$$

Quellenfreiheit von \mathbf{B} , differentielle Form Gleichung (3.8.38)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

Ampèresches Durchflutungsgesetz und Quellenfreiheit (Vektorpotential)

Gleichung (3.8.43)

$$\Delta \mathbf{A}(x, y, z) = -\mu_0 \mathbf{i}(x, y, z)$$

Berechnung des Vektorpotentials Gleichung (3.8.44)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Integralform der Formel von Laplace Gleichung (3.8.48)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{Leiter}} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

Hall-Spannung Gleichung (3.9.3)

$$U_{\text{Hall}} = \frac{I \cdot B}{q \cdot b \cdot n}$$

Lorentztransformation der Felder Gleichung (3.10.21)

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \\
 E'_y &= E_y \\
 E'_z &= \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x) \\
 B'_x &= \gamma(v_y) \left(B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right) \\
 B'_y &= B_y \\
 B'_z &= \gamma \left(B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)
 \end{aligned}$$

Lorentztransformation der Felder Gleichung (3.10.22)

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_y) \left(E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot H_z \right) \\
 E'_y &= E_y \\
 E'_z &= \gamma(v_y) \left(E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
 H'_x &= \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z) \\
 H'_y &= H_y \\
 H'_z &= \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)
 \end{aligned}$$

4. Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder und magnetische Induktionen

Das allgemeine Kraftgesetz für statische Felder lautet

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} + q \cdot \mathbf{E} \quad (4.0.1)$$

Bei zeitlich sich ändernden Feldern kommen neue Effekte hinzu, der *Verschiebungsstrom* und die *Induktion*.

4.1. Das Faradaysche Induktionsgesetz

4.1.1. Eine bewegte Leiterschleife in einem stationären B -Feld

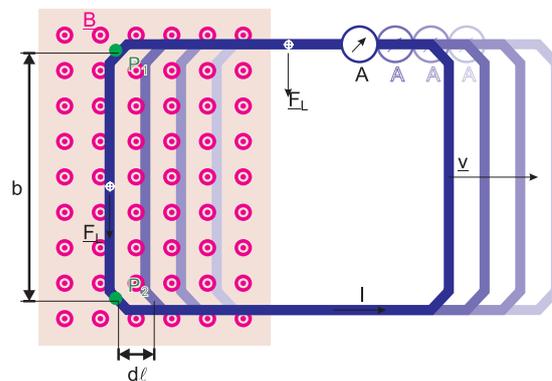


Abbildung 4.1.: Induktion eines Stromes in einer in einer **inhomogenen** magnetischen Induktion bewegten Leiterschleife.

Wir bewegen eine Leiterschleife mit der Geschwindigkeit v aus dem begrenzten Gebiet mit einer homogenen magnetischen Induktion heraus. Auf die beweglichen Ladungsträger, hier positiv angenommen, wirkt die Lorentzkraft \mathbf{F}_L . Auf den horizontalen Teilen der Leiterschleife kennen wir den Effekt: eine Hallspannung (Siehe Abschnitt 3.37) auf. Im vertikalen Teil im Magnetfeld bewirkt die Hallspannung eine Beschleunigung der Ladungsträger. Nach der Definition der elektromotorischen

Kraft (Siehe Gleichung (3.3.9)) haben wir

$$U_{EMK} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \oint \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{q_0} \int_{P_1}^{P_2} F_L \cdot ds = \frac{1}{q_0} (q_0 \cdot v \cdot B) \cdot b = v \cdot B \cdot b \quad (4.1.1)$$

Hat die Drahtschleife den Widerstand R , so fließt der Strom

$$I = \frac{U_{EMK}}{R} \quad (4.1.2)$$



Versuch zur Vorlesung:

Induktion (Versuchskarte EM025)



Versuch zur Vorlesung:

Induktion im Erdfeld (Versuchskarte EM027)

4.1.2. Der magnetische Fluss

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 138]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 876])

Im Zusammenhang mit den elektrischen Feldern \mathbf{E} hatten wir den elektrischen Fluss ϕ_E (Siehe Abschnitt 2.3) eingeführt. Hier bewegen wir die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , wir ändern damit die vom Magnetfeld durchflossene Fläche A um die Größe $da = -d\ell \cdot b$. Da die Geschwindigkeit $v = d\ell/dt$ ist, können wir auch schreiben

$$U_{EMK} = v \cdot B \cdot b = \frac{d\ell}{dt} b \cdot B = -\frac{da}{dt} B = -\frac{B \cdot da}{dt} \quad (4.1.3)$$

schreiben. Wir definieren den

magnetischen Fluss

$$\phi_B = \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.4)$$

durch die von der geschlossenen Kurve S berandete Fläche A

Damit ist die induzierte EMK

$$U_{EMK} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.5)$$

Sie wird durch den zeitlich sich ändernden Fluss erzeugt.

Die Einheit des magnetischen Flusses ist *Weber*.

$$1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad (4.1.6)$$

Das Minuszeichen in den Gleichungen für den magnetischen Fluss rührt daher, dass eine Geschwindigkeit in die positive x -Richtung eine Verkleinerung der Fläche A bewirkt.

Das durch den Strom erzeugte Magnetfeld ist so gerichtet, dass die Bewegung der Spule gebremst wird. Dieses Verhalten wird in der *Lenzschen Regel* zusammengefasst:

Die Induktionsspannung und der Strom, den sie bewirkt, sind stets so gerichtet, dass sie der Ursache entgegenwirken.

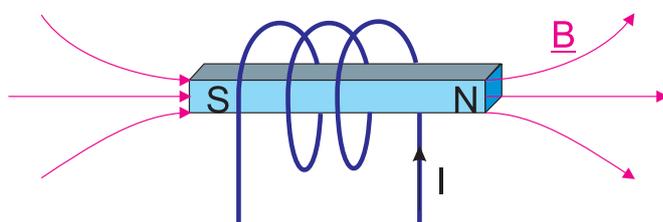


Abbildung 4.2.: Vergleich eines Stabmagneten mit einer Spule. Der magnetische Nordpol ist üblicherweise rot, der Südpol grün markiert.

Eine *Spule* erzeugt ein axiales Magnetfeld. Die Richtung des Magnetfeldes wird mit der *Rechten Hand-Regel* aus der Stromrichtung abgeleitet. Ein Stabmagnet erzeugt ein gleiches Magnetfeld wie eine Spule.

Die Nord- und Südpole der Magnete sind so definiert: Die B -Feldlinien laufen vom Nordpol zum Südpol. Der Nordpol ist rot markiert, der Südpol grün.

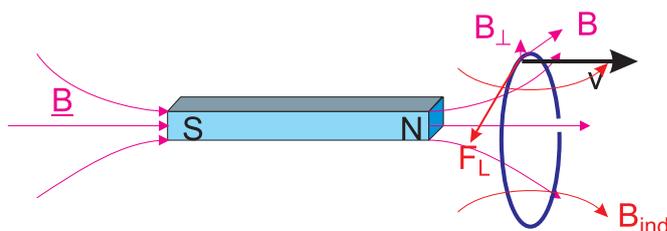


Abbildung 4.3.: Induzierte Spannung

Bewegt man einen Magneten mit der Geschwindigkeit v von einem Stabmagneten weg, so bewirkt die *Lorentzkraft* einen Strom I , der ein Magnetfeld B_{ind} induziert. Dieses Magnetfeld ist so gerichtet, dass es gleichsinnig wie das Magnetfeld des Stabes ist. Der Metallring wird also vom Stabmagneten angezogen und in seiner Bewegung nach rechts gebremst (*Lenzsche Regel*).

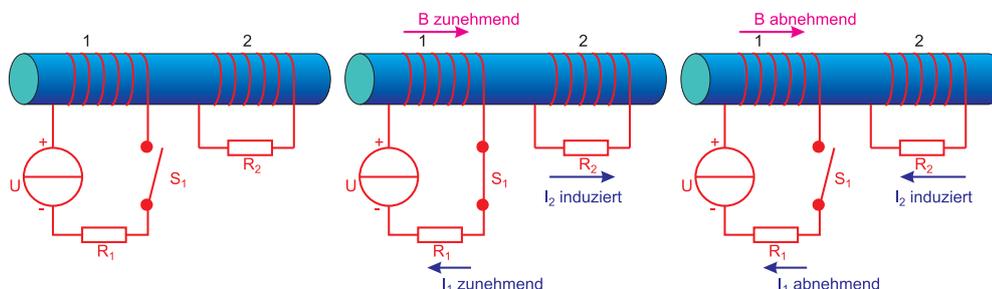


Abbildung 4.4.: Vorzeichen des Magnetfeldes und der induzierten Spannung beim Ein- und Ausschalten.

Hier wird ein Magnetfeld eingeschaltet. Die Richtung der Feldlinien wird durch die *Rechte-Hand-Regel* bestimmt. Ein zeitlich zunehmendes Magnetfeld in der rechten Spule ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule im inhomogenen Feld (links intensiver als rechts) nach links. Dabei zeigt die relevante Feldkomponente nach aussen. Aus der *Rechten Hand-Regel* ergibt sich die angegebene Stromrichtung. Nach dem Ausschalten des erregenden Stromes nimmt die Intensität des Magnetfeldes ab. Dies ist äquivalent zu einer Bewegung der rechten Spule nach rechts, bei gleichbleibender Richtung des Magnetfeldes. Entsprechend dreht sich die Richtung des Stromes um.

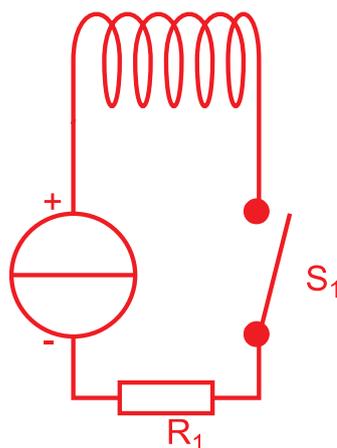


Abbildung 4.5.: *Selbstinduktion*

Wenn eine Spule von einem Strom durchflossen ist, wird dadurch ein Magnetfeld erzeugt. Wenn nun der Strom durch die Spule geändert wird, wird eine Span-

nung induziert, die wie im vorigen Falle so gerichtet ist, dass sie der Änderung des Magnetfeldes entgegenwirkt, so also auch der Änderung des durch die Spule fließenden Stromes. Im besonderen Falle, dass der Strom abgeschaltet wird, dass also der Widerstand im Stromkreis um viele Größenordnungen steigt, bildet sich eine sehr hohe Spannung.

Anwendungen

- Zündspule bei Benzinmotoren
- Erzeugung der Beschleunigungsspannung in Fernsehröhren
- Teslatransformator, siehe auch **Versuch zur Vorlesung:**



Tesla-Transformator (Versuchskarte EM064)

4.1.3. Induktionsgesetz von Faraday, Integral- und Differentialform

Wir betrachten die Situation in der Abbildung 4.1 im Ruhesystem S' der Schleife. Im Laborsystem S ist das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$$

in die z -Richtung gerichtet. Die Geschwindigkeit zeigt in die y -Richtung. Mit der Lorentztransformation (Siehe Gleichung (3.10.21)) berechnen wir die Felder im System S' . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= (0, 0, B'_z) = (0, 0, \gamma(v_y) \cdot B_z) \\ \mathbf{E}' &= (E'_x, 0, 0) = (v \cdot \gamma(v_y) \cdot B_z, 0, 0) \\ &= (v_y \cdot B'_z, 0, 0) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Die Leiterschleife ist im System S' in Ruhe. Also muss die *EMK* durch das elektrische Feld erzeugt werden.

$$U'_{EMK} = E'_x \cdot b = v_y \cdot B'_z \cdot b \quad (4.1.8)$$

Die Flussänderung ist

$$d\phi'_B = -B'_z \cdot v_y \cdot b \cdot dt' \quad (4.1.9)$$

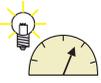
Somit lauten das Induktionsgesetz und das Ohmsche Gesetz

$$\begin{aligned} U'_{EMK} &= -\frac{d\phi'_B}{dt'} \\ U'_{EMK} &= R \cdot I' \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Somit gilt für die *EMK* die *Transformation*

$$U'_{EMK} = \gamma(v)U_{EMK} \quad (4.1.11)$$

Die Gleichungen (4.1.11) gelten in jedem Falle. Wenn $v \ll c$ ist, kann man die Unterschiede im Strom I , in der *EMK* U_{EMK} und im Magnetfeld \mathbf{B} vernachlässigen. Die Transformationseigenschaften zeigen, dass das Induktionsgesetz auch bei stationären Leiterschleifen und zeitlich ändernden Magnetfeldern gelten muss (wir begeben uns in das System S'). Die Wirkungen der Felder \mathbf{B} und \mathbf{E} sind unabhängig von ihrer Entstehung.



Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Induktion (Versuchskarte EM051)

Für einen beliebig geformten ruhenden Leiter (gegeben durch die Kurve S) in einem zeitlich ändernden Magnetfeld gilt für die *EMK*

$$U_{EMK} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.12)$$

Da der Leiter in Ruhe ist, muss die *EMK* durch ein elektrisches Feld erzeugt sein.

$$U_{EMK} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.1.13)$$

und damit

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.14)$$

Bei einer bewegten Leiterschleife kann der magnetische Fluss sich ändern,

- a) weil sich der Fluss mit der Zeit ändert und/oder
- b) weil sich die Berandung bewegt, sich ihr Ort also ändert.

Für eine bewegte Leiterschleife muss das elektrische Feld \mathbf{E}' im bewegten Bezugssystem und die magnetische Induktion \mathbf{B} im Laborsystem berechnet werden [Jac75, p. 210]. $d\mathbf{s}'$ ist das Linienelement im Ruhesystem, in dem \mathbf{E}' gemessen wird. Wir erhalten

$$\oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.15)$$

Mit der Gleichung (C.2.44) für die Beziehung zwischen zeitlichen Ableitungen in Ruhesystemen und mitgeführten Systemen und dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.5.1)) erhalten wir

$$\begin{aligned}
U'_{EMK} &= \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\
&= -\iint_{A(S)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{a} \\
&= -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} - \oint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s}' \quad (4.1.16)
\end{aligned}$$

Dies kann auch so geschrieben werden:

$$\oint_S [\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{s}' = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.17)$$

Wenn man sich nach Jackson [Jac75, p. 212] alternativ vorstellt, dass der Weg S zu einem Zeitpunkt fix im Raum ist, gilt auch

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.18)$$

Deshalb erhalten wir für das elektrische Feld \mathbf{E} im Laborsystem

$$\oint_S [\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v})] \cdot d\mathbf{s}' = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.1.19)$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ist $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}'$.

Damit ist

$$\mathbf{E}' + (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{E} \implies \mathbf{E}' = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \quad (4.1.20)$$

Weiter kann man daraus die *Lorentzkraft* ablesen:

$$\mathbf{F}_L \approx \mathbf{F}'_L = q\mathbf{E}' = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1.21)$$

Zurück zum Faradayschen Induktionsgesetz: Mit Gleichung (4.1.20) kann in Gleichung (4.1.17) \mathbf{E}' eliminiert werden. Das *universelle Induktionsgesetz von Faraday* lautet

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.22)$$

Mit dem Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.5.1)) erhält man

$$\oint_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S(t))} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\iint_{A(S(t))} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.23)$$

Für zeitunabhängige Berandungen $A(S)$ darf man Ableitung und Integral nicht vertauschen. Das Induktionsgesetz lautet dann

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Da diese Integralgleichung für beliebige Kurven S gelten muss, also auch für infinitesimal kleine, erhalten wir die *differentielle Form des Faradayschen Induktionsgesetzes*

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1.24)$$

Bei der Ableitung des *Faradayschen Induktionsgesetzes* haben wir von der Kleinheit der Geschwindigkeiten Gebrauch gemacht, explizit und implizit. Eine relativistisch korrekte Rechnung führt auf die gleichen Ergebnisse.

4.1.4. Wirbelströme



Versuch zur Vorlesung:
Fallrohre (Versuchskarte EM057)

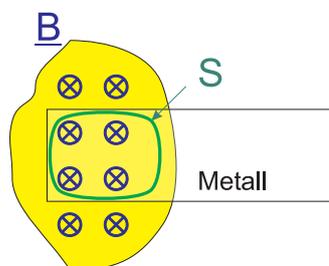


Abbildung 4.6.: *Wirbelströme* in Metallen

Wenn sich ein Metallstück in einem inhomogenen Magnetfeld befindet, dann muss für jede Bahnkurve S das Faradaysche Induktionsgesetz gelten. Da der Leiter einen spezifischen Widerstand ρ_{el} hat, fließt bei einer Änderung des Flusses durch S , zum Beispiel, indem man den Leiter bewegt, ein durch die induzierte Spannung getriebener Strom. Die Richtung des Stromes ist so, dass er sich einer Änderung des magnetischen Flusses widersetzt. Bei einem perfekten Leiter, müssten enorm grosse Kräfte aufgebracht werden, um das Metallstück mit einer minimalen Geschwindigkeit bewegen zu können. Durch die Dissipation im Ohmschen Leiter wird der induzierte Strom geschwächt, so dass die der Bewegung entgegengesetzte Kraft umso kleiner ist, je schlechter die Leitfähigkeit des Metalls ist.

Um die Größenordnung des Wirbelstromes abzuschätzen betrachten wir lokal ein Stück Metall das mit der Geschwindigkeit v_y durch eine magnetische Induktion in die x - Richtung, B_x , gezogen wird. Wir betrachten die Felder im Ruhesystem der Platte. Aus den Lorentz-Transformationen erhalten wir

$$\begin{aligned} E'_z &= \frac{-v_y B_x}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} && \approx -v_y B_x \\ B'_x &= \frac{B_x}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} && \approx B_x \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

da $v^2/c^2 \ll 1$ ist. Lokal gilt der Zusammenhang

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.1.26)$$

Weiter können wir aus $P = IU$ mit $i = I/A$ und $E'_z = U/d$ und der Bezeichnung für das Volumen $V = Ad$ schreiben

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{P}{V} = P_V = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{i A \cdot E'_z d}{V} = i E'_z = \sigma E_z'^2 \quad (4.1.27)$$

Andererseits hängt die dissipierte Leistung pro Volumen von der Volumenkraft F_V und der Geschwindigkeit v_y ab.

$$P_V = F_V \cdot v_y = \sigma E_z'^2 = \sigma (v_y B'_x)^2 = \sigma (v_y B_x)^2 \quad (4.1.28)$$

Die Volumenkraft ist also

$$F_V = \sigma v_y B_x^2 \quad (4.1.29)$$

Die Berechnung wurde anhand eines unendlich ausgedehnten Leiters in einem Magnetfeld gemacht. Endliche Leiter und endliche Magnetfelder bewirken, dass der Effekt nur an den Grenzen vorhanden ist.

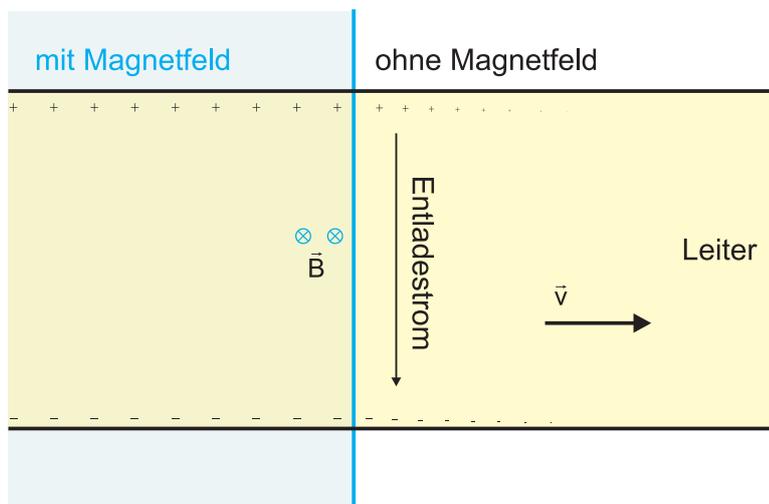


Abbildung 4.7.: Bewegung eines Leiters aus einem Magnetfeld.

Im Ruhesystem des Leiters bewirkt das elektrische Feld eine Bewegung der Ladungsträger an die Seiten des Leiters (analog wie beim Halleffekt). Dadurch wird ein Gegenfeld aufgebaut, bis die Bewegung der Ladungsträger zum Erliegen kommt (Siehe Abbildung 4.7, linke Seite). Wenn der Leiter den Bereich des Magnetfeldes verlässt (wir nehmen eine scharfe Grenze an, dann gleichen sich die Ladungen aus. Die Ströme erzeugen wegen der endlichen Leitfähigkeit σ eine Wärmeleistung, das heisst es gibt eine Gegenkraft. Kondensatoren werden exponentiell entladen, so dass die Wirkung des ändernden Feldes lokal begrenzt ist. Auf der anderen Seite des Magnetfeldes tauchen die gleichen Effekte auf, aber beim Laden des Kondensators. Auch dort nimmt der Strom exponentiell ab beim Entfernen von der Grenze. Warum heisst es dann doch Wirbelströme? Wir haben einen Stromkreis, bei dem die magnetische Induktion die elektromotorische Kraft bewirkt (wie beim van de Graaff-Generator). Während im Ruhesystem des Leiters die Effekte durch das elektrische Feld erklärt werden, müssen sie im Laborsystem mit Flussänderung und magnetischer Induktion beschrieben werden.

In Transformatoren ist die magnetische Induktion parallel zum Eisen, die Wirbelströme transversal dazu. Die Wirbelströme können vermindert werden, indem das Metall geschlitzt wird oder in Lagen mit Isolatoren dazwischen gebündelt wird.

Anwendungen

- Wirbelstrombremse beim ICE
- Retarder in LKWs
- Dämpfung von Schwingungen in Rastertunnelmikroskopen
- In Transformatoren und Motoren verwendet man geschlitzte Bleche

Beispielswerte

$B/T \rightarrow$ v/m	Cu		Al		Fe		Ti		Gd	
	0.1	1	0.1	1	0.1	1	0.1	1	0.1	1
0.01	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.00001	0.001	$2.56 \cdot 10^{-6}$	0.000256	$7.40 \cdot 10^{-7}$	0.000074
0.1	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	0.0001	0.01	0.0000256	0.00256	$7.40 \cdot 10^{-6}$	0.00074
1	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-1}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.37	0.001	0.1	0.000256	0.0256	0.000074	0.0074
10	$5.8 \cdot 10^{-2}$	5.8	$3.7 \cdot 10^{-2}$	3.7	0.01	1.	0.00256	0.256	0.00074	0.074

Tabelle 4.1.: Wirbelstromkräfte von Magneten mit 0.1 T und 1 T auf Platten mit der Geschwindigkeit v aus verschiedenen Materialien.

4.1.5. Unendlich lange Spule

Eine unendlich lange Spule kann man sich aus kreisförmigen Leitern zusammengesetzt denken.

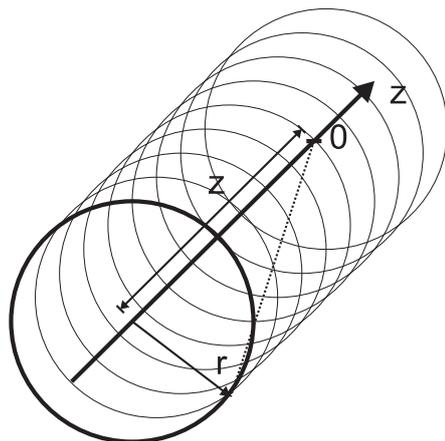


Abbildung 4.8.: Die magnetische Induktion am Punkt 0 auf der z -Achse kann berechnet werden, indem mit Gleichung (3.8.49) die magnetische Induktion eines Rings mit der Stromdichte $I \cdot n \cdot dz$ berechnet wird und dann über alle Ringströme addiert wird.

Wir berechnen zuerst die magnetische Induktion eines Kreisringes mit dem Radius r im Abstand z vom Nullpunkt ($\mathbf{r}' = (x, y, z)$) am Nullpunkt ($\mathbf{r} = (0, 0, 0)$). Ausgehend von Gleichung (3.8.49) schreiben wir für einen Kreisring auf der Position z mit dem Radius r für $\boldsymbol{\rho}$.

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-x, -y, -z)$$

Da r konstant ist, schreiben wir x und y als Funktion des Winkels ϕ

$$\boldsymbol{\rho} = (-r \cos(\phi), -r \sin(\phi), -z)$$

Der Strom I soll im Gegenuhrzeigersinn umlaufen, also in positiver Richtung. Ein Längenelement entlang des Kreisringes ist

$$d\boldsymbol{\ell} = (-y, x, 0) \frac{d\ell}{r} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) r d\phi$$

Das Vektorprodukt $d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}$ ergibt

$$d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho} = (-r z \cos(\phi), -r z \sin(\phi), r^2) d\phi$$

Mit dem Strom pro Windung I wird die magnetische Induktion am Punkte $(0, 0, 0)$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3}$$

Die x - und die y -Komponenten von $d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{\rho}$ enthalten eine Winkelfunktion zur ersten Potenz und ergeben bei einer Integration von 0 nach 2π null. Die z -Komponente der magnetischen Induktion ist

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\phi}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I r^2}{2 (r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.1.30)$$

Die magnetische Induktion einer unendlich langen Spule bekommt man, indem wir den Strom I durch das Produkt aus Strom I , der Windungszahl pro Länge (Windungsdichte) n und dem Längenelement dz ersetzen und integrieren.

$$B_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I n r^2 dz}{2 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 I n \quad (4.1.31)$$

Wird die unendlich lange Spule bei $z = 0$ geteilt, tragen beide Spulenhälften gleichviel zur magnetischen Induktion bei $z = 0$ bei. Wird nun eine Hälfte entfernt, so ist die magnetische Induktion auf der Spulenachse

$$B_z(\text{Endfläche}) = \frac{B_z(0)}{2} = \frac{\mu_0 I n}{2} \quad (4.1.32)$$

Endlich lange Spulen der Länge $\ell \gg r$ verhalten sich wie unendlich lange Spulen. Wenn sich auf der Länge ℓ N Windungen befinden, haben wir

$$B_z(\text{innen}) = \frac{\mu_0 N}{\ell} I \quad (4.1.33)$$

4.1.6. Transformator

Der magnetische Fluss in einer Spule entsteht durch Ströme in dieser Spule selber, oder in anderen Spulen. Nach dem Gesetz von Laplace oder Biot-Savart (Siehe Gleichung (3.8.49)) ist die magnetische Induktion proportional zum Strom. Somit ist auch der Fluss ϕ_B proportional zum Strom. Diese Proportionalität wird mit

$$\phi_B = L \cdot I \quad (4.1.34)$$

ausgedrückt, wobei L die *Selbstinduktivität* der Spule ist.

Die Einheit der Induktivität ist

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ T m}^2/\text{A}$$

In den meisten Fällen ist es schwierig, die Selbstinduktivität einer Schaltung zu berechnen. Für eine lange, dicht gewickelte Spule ergibt Gleichung (4.1.33) die magnetische Induktion

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (4.1.35)$$

Dabei ist $N = n \cdot \ell$ die Anzahl Windungen auf der Länge ℓ . Die magnetische Induktion B hängt von der Dichte der Windungen ab, nicht aber von der Länge der Spule. Hat die Spule den Querschnitt A , so ist der Fluss

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I \quad (4.1.36)$$

Damit ist die Induktivität der Spule

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.1.37)$$

Die magnetische Permeabilität μ_0 kann also auch als

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{m}} \quad (4.1.38)$$

Die Änderung der Stromstärke bedingt eine Änderung des magnetischen Flusses.

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.39)$$

Somit wird mit Gleichung (4.1.5)

$$U = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.40)$$

Mit dieser Gleichung wird die Funktionsweise des *Funkeninduktors* klar.



Versuch zur Vorlesung:

Funkeninduktor (Versuchskarte EM017)

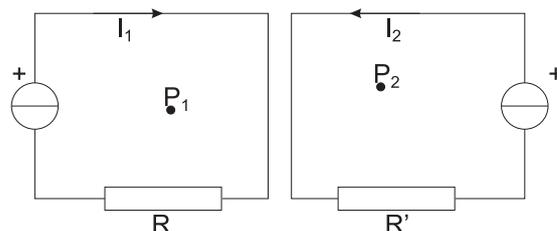


Abbildung 4.9.: Zwei gekoppelte Stromkreise

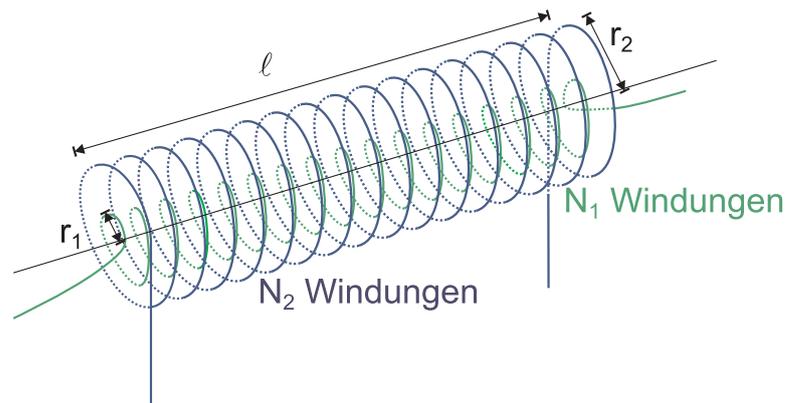
Der magnetische Fluss am Punkt P_2 hängt sowohl vom Strom I_2 wie auch vom Strom I_1 ab:

$$\phi_B(P_2) = L_2 \cdot I_2 + M_{12} \cdot I_1 \quad (4.1.41)$$

Ebenso hängt der magnetische Fluss am Punkt P_1 von beiden Strömen ab

$$\phi_B(P_1) = L_1 \cdot I_1 + M_{21} \cdot I_2 \quad (4.1.42)$$

Neben der *Selbstinduktivität* L_i müssen bei realen Systemen auch die *Gegeninduktivitäten* M_{ij} berücksichtigt werden. Wie bei den Induktivitäten hängt auch bei den Gegeninduktivitäten die Grösse allein von der Geometrie ab.

Abbildung 4.10.: Symbolische Darstellung eines *Transformators*

Im allgemeinen ist es schwierig, die Gegeninduktivitäten zu berechnen. Bei zwei ineinander gewickelten Spulen, einem Beispiel für einen Transformator, gelingt dies. Wir wollen das Beispiel verwenden, um zu zeigen, dass $M_{12} = M_{21}$ ist. Durch die Spule 1 (Länge ℓ , Radius r_1 , Windungsdichte $n_1 = N_1/\ell$) fließt der Strom I_1 , durch die zweite Spule 2 (Länge ℓ , Radius r_2 , Windungsdichte $n_2 = N_2/\ell$) soll der Strom I_2 fließen. Da wir lange Spulen betrachten, ist das Magnetfeld im Inneren der Spulen homogen. Also ist

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad (4.1.43)$$

Ausserhalb der Spule 1 ist das Magnetfeld $B_1 = 0$ (Annahme einer langen Spule). Deshalb ist der Fluss durch den Strom I_1 für die Spule 2 gegeben durch

$$\phi_{B_2} = N_2 \cdot B_1(\pi r_1^2) = n_2 \ell B_1(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) I_1 \quad (4.1.44)$$

Die Gegeninduktivität M_{12} ist also

$$M_{12} = \frac{\phi_{B_2}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) \quad (4.1.45)$$

Im entgegengesetzten Falle beginnen wir mit

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \quad (4.1.46)$$

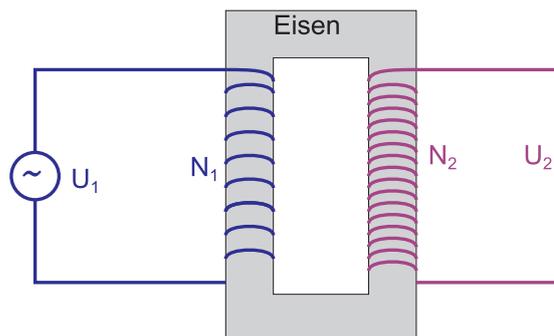
Der für die Spule 1 relevante Fluss ist durch die von der Spule 1 umschlossene Fläche, also $N_1(\pi r_1^2)$ gegeben.

$$\phi_{B_1} = N_1 \cdot B_2(\pi r_1^2) = n_1 \ell \mu_0 n_2 I_2(\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) I_2 \quad (4.1.47)$$

Damit wird die Gegeninduktivität

$$M_{21} = \frac{\phi_{B_1}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 \ell(\pi r_1^2) = M_{12} \quad (4.1.48)$$

Diese Beziehung, die an einem Spezialfall gezeigt wurde, gilt auch allgemein (ohne Beweis).

Abbildung 4.11.: Schematischer Aufbau eines *Transformators*

Die in einem Transformator induzierte Spannung kann wie folgt berechnet werden. In der Spule 1 fällt die Spannung

$$U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.49)$$

ab. Diese Spannung muss durch die Wechselspannungsquelle U erzeugt werden, so das

$$U = U_{L,1} = N_1 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.50)$$

ist. Durch die Anordnung des Eisens wird erreicht, dass der gesamte durch die erste Spule erzeugte magnetische Fluss durch die zweite Spule fließt. Dort haben wir die induzierte Spannung

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.1.51)$$

und somit

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (4.1.52)$$

N_2/N_1 heisst der *Übersetzungsfaktor* des Transformators.

Wird der Ausgang des Transformators mit dem Ohmschen Widerstand R belastet, fließt der Strom I_2 , der zu U_2 in Phase ist. Dieser Strom erzeugt einen magnetischen Fluss $\phi'_B \propto N_2 I_2$, der den ursprünglichen Fluss ϕ_B durch die Spule 2 schwächt. Da durch beide Spulen der gleiche magnetische Fluss fließt, muss auch der Fluss durch die erste Spule geschwächt werden. Da die Spannung durch die Spannungsquelle U vorgegeben ist, muss der Strom I_1 auf der Primärseite zusätzlich fließen, so dass $\phi'_B \propto N_1 I_1$ gilt. Da die Proportionalitätsfaktoren bis auf das Vorzeichen gleich sind, gilt dann auch

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1 \quad (4.1.53)$$

Wenn wir die Effektivwerte betrachten haben wir damit

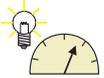
$$U_2 I_2 = \left[-\frac{N_2}{N_1} U_1 \right] \left[-\frac{N_1}{N_2} I_1 \right] = U_1 I_1 \quad (4.1.54)$$

sofern man Verluste vernachlässigt. **Ideale Transformatoren übertragen also verlustfrei Leistung.**



Versuch zur Vorlesung:

Hochspannungsleitung (Versuchskarte EM161)



Versuch zur Vorlesung:

Transformatorenversuche (Versuchskarte EM066)

4.1.7. Kirchhoffsche Gesetze

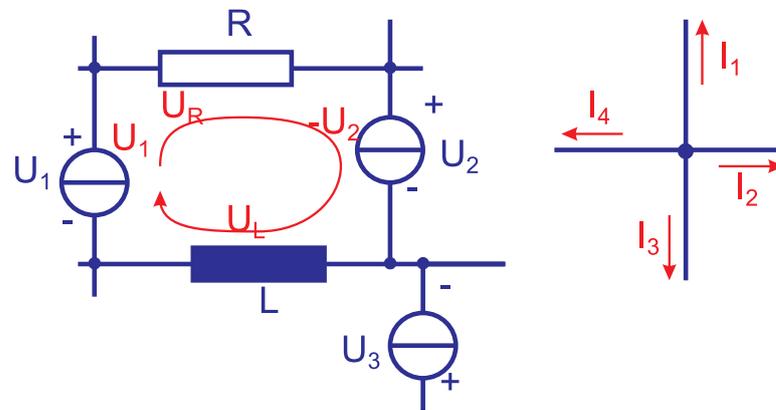


Abbildung 4.12.: Kirchhoffsche Gesetze: links die *Maschenregel*, rechts die *Knotenregel*.

In einer komplizierten elektrischen Schaltung betrachtet man eine einzelne Masche. Nach der Definition der *EMK* muss eine Probeladung langsam um die Masche herumgeführt werden. Dies führt auf die Maschenregel

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j \quad (4.1.55)$$

wobei die Vorzeichen entsprechend dem Umlaufsinn einzusetzen sind. In unserem Beispiel bedeutet dies:

$$U_1 - U_2 = U_R + U_L$$

Die Knotenregel ist ein Ausdruck für die Ladungserhaltung. Wenn wir zum Beispiel alle zufließenden Ströme positiv und alle wegfließenden Ströme negativ zählen (oder umgekehrt), gilt an jedem Knoten

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0 \quad (4.1.56)$$

Mit diesen beiden Regeln sowie der Kenntnis der Charakteristika der Bauelemente kann jede statische oder quasistatische elektronische Schaltung berechnet werden.

4.1.8. Wechselstromkreise, Impedanzen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Wirkung von cosinusförmigen Wechselspannungen

$$U \equiv U(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.1.57)$$

Die Zeitskala für die Wechselspannung wird so gewählt, dass $\varphi = 0$ ist. Weiter setzen wir voraus, dass die zeitliche Änderung aller Größen so gering sind, dass wir wie im stationären Falle rechnen können. Wir dies den quasistationären Fall.

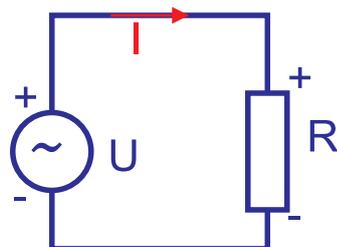


Abbildung 4.13.: Definition von Strömen und Spannungen bei Wechselspannungen

Da bei Wechselspannungen a priori keine Stromrichtung vorgegeben ist, definiert man, zum Beispiel wie in der Abbildung oben, die Stromrichtung zu einem bestimmten Zeitpunkt, hier für $t = 0$. Zu jedem Zeitpunkt muss die Spannung im Stromkreis insgesamt null sein. Also ist

$$U - U_R = 0 \quad (4.1.58)$$

und mit dem Ohmschen Gesetz

$$U_0 \cos(\omega t) - I \cdot R = 0 \quad (4.1.59)$$

oder

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (4.1.60)$$

Der Strom und die Spannung erreichen immer dann einen Extremwert, wenn ωt ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. **Der durch einen Widerstand fließende Strom ist in Phase mit der Spannung.**

Die momentane Leistung am Widerstand ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t) \quad (4.1.61)$$

Der Mittelwert der Leistung ist ($\langle \cos^2 \omega t \rangle_t = 1/2$)

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} I^2 R \quad (4.1.62)$$

Unter dem Effektivwert der Spannung (des Stromes) versteht man diejenige Gleichspannung, die an einem Ohmschen Widerstand die gleiche Verlustleistung erzeugt. Also ist für sinusförmige Spannungen

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \quad (4.1.63)$$

beziehungsweise

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (4.1.64)$$

Für beliebige Spannungsverläufe (Stromverläufe) ist der Effektivwert (auch rms-Wert von "Root Mean Square")

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau} \quad (4.1.65)$$

wobei T eine Zeit ist, die bei periodischen Signalen der Periodendauer entspricht und bei zufälligen Signalen lang gegenüber der charakteristischen Zeitdauer der Schwankungen sein muss. Für Ströme gilt die analoge Formel

$$I_{eff} = I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I^2(\tau) d\tau} \quad (4.1.66)$$



Versuch zur Vorlesung:

Wechselstromwiderstand (Versuchskarte EM053)

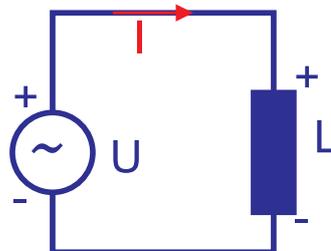


Abbildung 4.14.: Spule mit Wechselspannung

Wir verwenden Gleichung (4.1.40) um die Spannung über der Spule zu berechnen. Die induzierte Spannung ist der Flussänderung entgegengesetzt. Sie wirkt so, dass die Zunahme des Stromes bei zunehmender Anregungsspannung gebremst wird. Deshalb ist

$$U - U_L = 0 = U - L \frac{dI}{dt} \quad (4.1.67)$$

Setzen wir $U = U_0 \cos(\omega t)$ ein, erhalten wir

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t) \quad (4.1.68)$$

und damit

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int_0^t \cos(\omega \tau) d\tau = \frac{U_0}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{U_0}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (4.1.69)$$

Der Strom hat also den Scheitelwert

$$I = \frac{U_0}{\omega L} = \frac{U_0}{X_L} \quad (4.1.70)$$

wobei $X_L = \omega L$ die Impedanz oder der induktive Widerstand der Spule ist. Die Einheit der Impedanz ist gleich wie die Einheit des Widerstandes, das Ohm. Der Strom folgt der Spannung mit einer Phasenverschiebung von $-\pi/2$. Für die Effektivwerte gilt $I_{eff} = U_{eff}/X_L$, da für sinusförmige Spannungen und Ströme der gleiche Faktor zur Umrechnung von Scheitelwerten zu Effektivwerten verwendet werden muss.

Die momentan dissipierte Leistung an einer Spule ist

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.71)$$

Die dissipierte Leistung kann sowohl positiv wie auch negativ sein. Die mittlere dissipierte Leistung ist

$$\langle P \rangle_t = \frac{U_0^2}{\omega L} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.1.72)$$

Im Mittel wird also keine Leistung an einer Spule dissipiert.

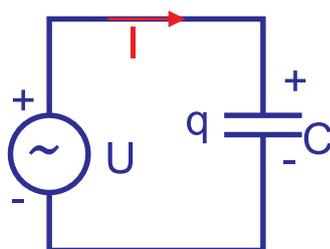


Abbildung 4.15.: Kondensator mit Wechselspannung

Beim Kondensator ist $U_C = q/C$. Diese Spannung muss gleich der treibenden Spannung sein.

$$U - U_C = 0 = U - \frac{q}{C} \quad (4.1.73)$$

Wir setzen U ein und erhalten

$$q = C \cdot U_0 \cos(\omega t) \quad (4.1.74)$$

Der Strom ist dann

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C \cdot U_0 \cos(\omega t) = -C\omega \cdot U_0 \sin(\omega t) = C\omega \cdot U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4.1.75)$$

Wir nennen

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4.1.76)$$

die Impedanz des Kondensators. Der Scheitelwert des Stromes ist

$$I_0 = \omega C U_0 \quad (4.1.77)$$

Analog wie bei der Spule gilt die Gleichung $I_{eff} = U_{eff}/X_C$ mit der gleichen Begründung auch für Kondensatoren. Die momentan dissipierte Leistung ist

$$P(t) = \omega C U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (4.1.78)$$

Sie ist, analog wie bei der Spule, positiv oder negativ. Deshalb ist die mittlere dissipierte Leistung

$$\langle P(t) \rangle_t = \omega C U_0^2 \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_t = 0 \quad (4.1.79)$$



Versuch zur Vorlesung:

Elektrischer Schwingkreis (Versuchskarte Em056)

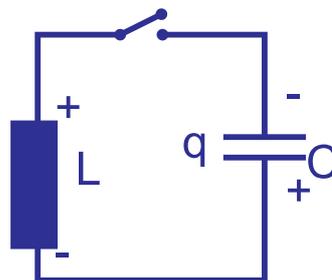


Abbildung 4.16.: Schwingkreis

Der Kondensator soll zur Zeit $t = 0$ auf die Spannung $U_{C,0}$ aufgeladen sein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Die Differentialgleichung dieser Schaltung lautet:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.1.80)$$

Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.1.81)$$

Dies ist die aus der Mechanik bekannte Schwingungsdifferentialgleichung. Durch Analogieschluss sieht man, dass die Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (4.1.82)$$

ist.

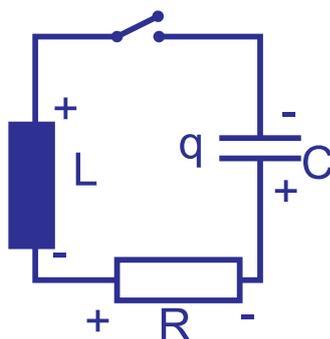


Abbildung 4.17.: Schwingkreis mit Widerstand

Der gedämpfte Schwingkreis enthält neben dem Kondensator und der Spule auch einen Widerstand. Die Differentialgleichung des gedämpften Schwingkreises ist

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \quad (4.1.83)$$

Wir differenzieren einmal und bekommen

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (4.1.84)$$

Analog zur Mechanik ist die $\frac{R}{L}$ der Dämpfungsterm. Das in der Mechanik berechnete Verhalten eines schwingungsfähigen Systems gilt auch für den elektrischen Schwingkreis.

Wenn der elektrische Schwingkreis von einer Wechselspannungsquelle getrieben wird, ergeben sich die gleichen Phänomene wie bei einem getriebenen Pendel, also auch eine Resonanz.

Anwendungen

- Schwingkreise zur Signalfilterung in Radioempfängern
- Verhalten von langen Leitungen
- Verhalten elektrischer Maschinen

4.1.9. Elektromotoren

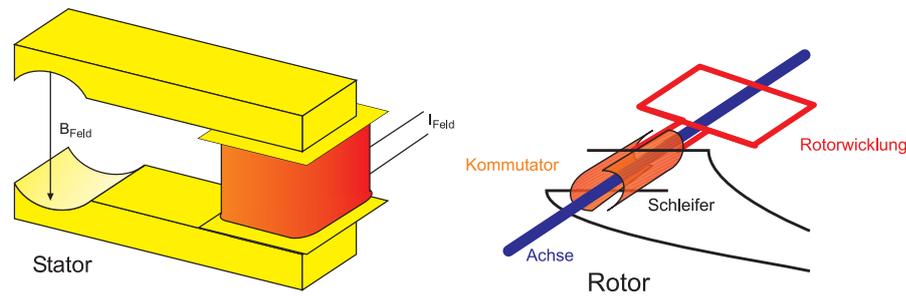


Abbildung 4.18.: Bestandteile eines Elektromotors. Links der Stator, rechts der Rotor mit dem Kommutator.

Ein Elektromotor besteht aus zwei Teilen, dem *Stator*, der das Magnetfeld \mathbf{H} erzeugt und dem *Rotor*, der in diesem Magnetfeld rotiert. Die Richtung des Stromflusses im *Rotor* wird durch den *Kommutator* gesteuert.



Versuch zur Vorlesung:

Elektromotor und -generator (Versuchskarte EM101)

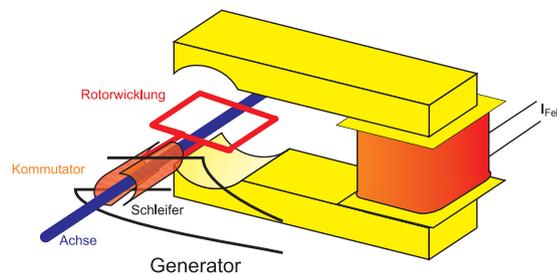


Abbildung 4.19.: Dieses Bild zeigt einen aufgebauten Elektromotor.

Wir betrachten zuerst den Elektromotor als Generator. Der Fluss durch die Leiterschleife mit N Windungen und einer Fläche A ist

$$\phi_B = NBA \cos \Theta \quad (4.1.85)$$

wobei Θ der Winkel zwischen der Normalen der Fläche der Leiterschleife und der Richtung des Magnetfeldes ist. Mit $\Theta = \omega t + \delta$ wird der zeitabhängige Fluss durch eine sich mit ω drehende Leiterschleife

$$\phi_B(t) = NBA \cos(\omega t + \delta) \quad (4.1.86)$$

Durch Ableiten erhält man die Induktionsspannung

$$U = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \delta) = NBA\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (4.1.87)$$

Die induzierte effektive Spannung ist

$$U_{eff,i} = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}} \quad (4.1.88)$$

Wenn die Leiterschleife mit Spannung versorgt wird, arbeitet sie als Motor. Durch den Strom I wird nach Gleichung (3.8.22) ein Drehmoment

$$T = NAB \cdot I \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (4.1.89)$$

erzeugt¹. Das mittlere Drehmoment bei einem Motor, bei dem der Kommutator immer bei dem Winkel, bei dem das Drehmoment null wird, das Vorzeichen ändert, ist

$$T_{eff} = \frac{NAB}{\sqrt{2}} I = NABI_{eff} \quad (4.1.90)$$

Wenn der Widerstand des Ankers, der rotierenden Spule, R ist, kann man den mittleren Strom berechnen

$$I_{eff} = \frac{U - U_{eff,i}}{R} = \frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}}\omega \quad (4.1.91)$$

Die angelegte Spannung U ist eine Gleichspannung, deshalb darf kein Effektivwert genommen werden. Damit hängt das Drehmoment von der Drehzahl ab

$$T_{eff}(\omega) = NAB \left(\frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}}\omega \right) = \frac{NABU}{R} - \frac{N^2A^2B^2}{\sqrt{2}R}\omega \quad (4.1.92)$$

Das Drehmoment des ruhenden Motors ist also

$$T_{eff}(0) = T_{max} = \frac{NABU}{R} \quad (4.1.93)$$

und die maximale Drehzahl (da wo $M_{eff} = 0$) ist

$$\omega_{max} = \frac{\sqrt{2}U}{NAB} \quad (4.1.94)$$

Diese Charakteristik (*Nebenschlussmotor*) hat man immer dann, wenn das erregende Feld B unabhängig von der Drehzahl ist, bei Permanentmagneten oder wenn die Spule für die Erregerwicklung parallel zum Anker angeschlossen ist. Will man die Drehzahl erhöhen, muss man das Feld B schwächer machen.

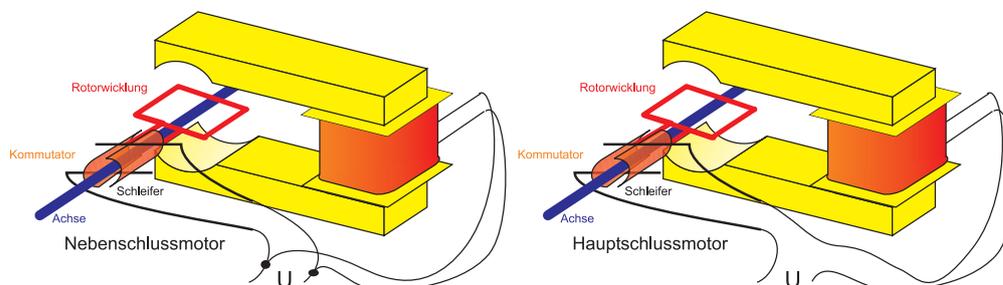


Abbildung 4.20.: Links ist die Schaltung des Nebenschlussmotors, rechts die des Hauptschlussmotors gezeigt.

¹Beachte die Phasenverschiebung zwischen Fluss und Drehmoment!

Ist wie beim *Hauptschlussmotor* die Erregerwicklung in Serie zur Ankerwicklung geschaltet, gibt es keine maximale Drehzahl. Eine lange Zylinderspule (Länge ℓ , Windungszahl N) hat das Magnetfeld

$$B_Z = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (4.1.95)$$

Für andere Geometrien gilt das gleiche Gesetz, aber mit einem geometrieabhängigen Vorfaktor K' . Im statischen Falle ist der Strom nur vom Gleichstromwiderstand R_E der Erregerwicklung abhängig. Wenn U_E der Spannungsabfall an der Erregerwicklung ist, ist

$$B(U_E) = K' \mu_0 \frac{N_E U_E}{\ell_E R_E} = K' \mu_0 \frac{N_E}{\ell_E} I_E = K I_E \quad (4.1.96)$$

wobei alle Vorfaktoren in den Faktor K zusammengezogen wurden. Der durch den Anker fließende Strom ist mit $U_{eff,i} = N B(U_E) A \omega / \sqrt{2}$ durch

$$I_{eff} = \frac{U - U_E - U_{eff,i}}{R} = \frac{U}{R} - \frac{U_E}{R} - \frac{N B(U_E) A}{R \sqrt{2}} \omega \quad (4.1.97)$$

gegeben.

Da $I_{eff} = I_E$ und $U_E = R_E \cdot I_E$ sind, gilt

$$I_{eff} = \frac{U}{R} - \frac{R_E}{R} I_{eff} - \frac{K \cdot N \cdot A}{R \sqrt{2}} I_{eff} \omega \quad (4.1.98)$$

oder

$$I_{eff} = \frac{U}{R + R_E + \frac{K \cdot N \cdot A}{\sqrt{2}} \omega} = \frac{\sqrt{2} U}{\sqrt{2} R + \sqrt{2} R_E + K \cdot N \cdot A \omega} \quad (4.1.99)$$

Damit wird das Drehmoment

$$T_{eff}(\omega) = N A B(I_{eff}) I_{eff} = N A K I_{eff}^2 \quad (4.1.100)$$

Eingesetzt bekommt man

$$T_{eff}(\omega) = \frac{2 N A K U^2}{\left[\sqrt{2} R + \sqrt{2} R_E + K \cdot N \cdot A \omega \right]^2} \quad (4.1.101)$$

$T_{eff}(\omega)$ ist für alle ω grösser als null. Dieser Motor hätte, ohne Lagerreibung, eine unendlich grosse maximale Drehzahl. Das Startdrehmoment für $\omega = 0$ ist

$$T_{eff}(0) = T_{max} = \frac{N A K U^2}{[R + R_E]^2} \quad (4.1.102)$$

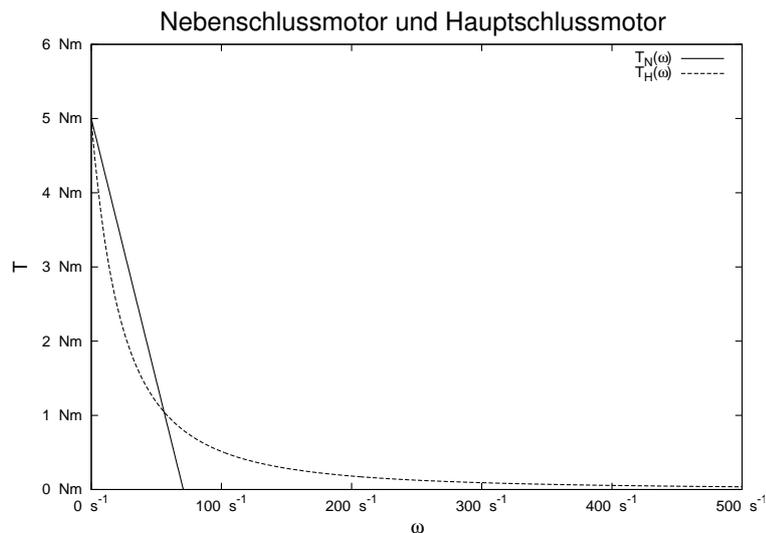


Abbildung 4.21.: Kennlinien von Nebenschluss- und Hauptschlussmotoren. Die Kurven wurden mit $N = 1000$, $A = 0.001 \text{ m}^2$, $U = 5 \text{ V}$, $R = 0.1 \Omega$ und $B = 0.1 \text{ T}$. Die beiden Motoren sind so berechnet, dass sie das gleiche Startdrehmoment und dass $R_E = R/2$ ist (eine vernünftige Annahme).



Versuch zur Vorlesung:

Linearmotor (Versuchskarte EM113)

4.1.10. Betatron



Versuch zur Vorlesung:

Betatron (Versuchskarte EM167)

Die Idee hinter der Konstruktion des Betatrons ist, dass bei einem zeitabhängigen \mathbf{B} -Feld nach $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ auch ein zeitabhängiges \mathbf{E} -Feld existiert.

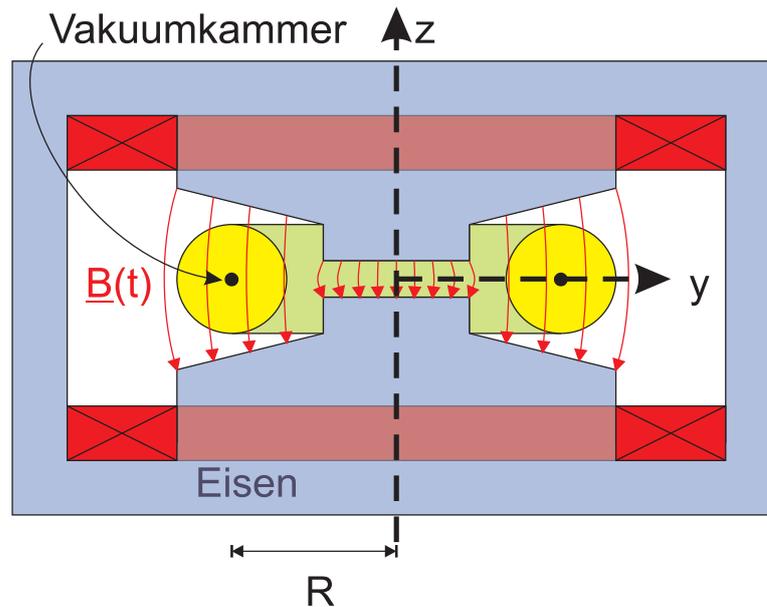


Abbildung 4.22.: Skizze eines Betatrons

Nach dem Induktionsgesetz $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ hat das durch ein in die z -Richtung zeigende Magnetfeld induzierte elektrische Feld keine z -Komponente. Nehmen wir an, dass das \mathbf{E} -Feld eine Radialkomponente hätte. Sie könnte zum Beispiel in die y -Richtung zeigen. Rotieren wir die ganze Anordnung um π um die y -Achse und kehren die Richtung des \mathbf{B} -Feldes um, haben wir wieder die Ausgangsanordnung. Mit der Richtungsumkehr von \mathbf{B} hat aber auch \mathbf{E} die Richtung geändert (Induktionsgesetz). Dies ist aber im Widerspruch zur Ausgangssituation. Deshalb kann es kein radiales \mathbf{E} -Feld geben: das \mathbf{E} -Feld ist tangential und beschleunigt die geladenen Teilchen. Damit die Teilchen auf der Kreisbahn bleiben, muss

$$m \frac{v^2}{R} = e \cdot v \cdot B(t) \quad (4.1.103)$$

oder

$$mv(t) = p(t) = e \cdot B \cdot R \quad (4.1.104)$$

Das zweite Newtonsche Axiom in tangentialer Richtung angewandt bedeutet

$$\frac{dp(t)}{dt} = eE(t) \quad (4.1.105)$$

Mit der Integralform des Induktionsgesetzes erhält man mit einer stationären Kreisbahn $S(R)$ mit dem Radius R

$$\oint_{S(R)} \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{s} = E(t) \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \iint_{A(R)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{d\bar{B}(t)}{dt} \cdot \pi R^2 \quad (4.1.106)$$

wobei \bar{B} das über die Fläche des Kreises gemittelte \mathbf{B} -Feld ist. Durch Kombination der obigen Gleichungen und unter Berücksichtigung der Vorzeichen erhalten wir

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (4.1.107)$$

Die Integration mit den Anfangsbedingungen $p(0) = 0$ und $B(0) = 0$ liefert

$$p(t) = \frac{e \cdot R}{2} \cdot \bar{B}(t) \quad (4.1.108)$$

Der Vergleich mit der Bedingung für die Zentripetalkraft liefert die *Wideroe-Bedingung*

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t) \quad (4.1.109)$$

Diese Bedingung kann durch eine geeignete Wahl der Form der Polschuhe erreicht werden.

4.1.11. Skin-Effekt

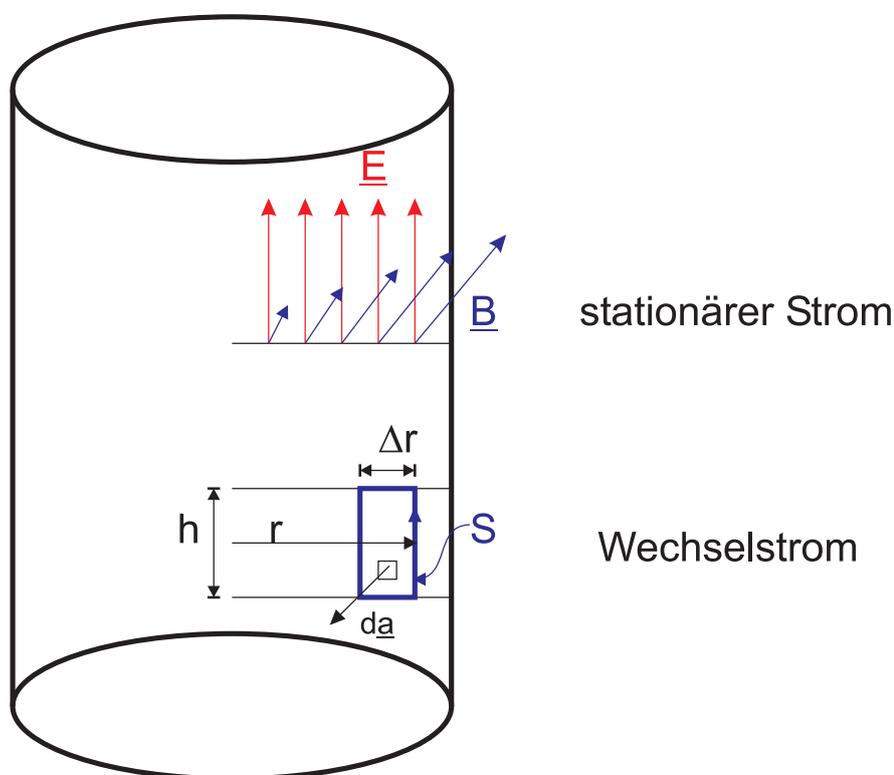


Abbildung 4.23.: Berechnung des Skin-Effektes

Bei Gleichstrom in einem zylindrischen Leiter ist das elektrische Feld konstant über dem Querschnitt. Nach dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz (Siehe Gleichung (3.8.28)) ist das Magnetfeld proportional zum Abstand.

Für den Fall eines Wechselstroms mit niedriger Frequenz müssen wir das Induktionsgesetz berücksichtigen. Nach dem Induktionsgesetz gilt für die zeitunabhängige Kurve S , die auf einer Ebene, in der auch die Zylinderachse liegt, liegt

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.1.110)$$

Für die eingezeichnete Schlaufe gilt ($d\mathbf{a}$ ist antiparallel zu \mathbf{B})

$$h[E(r) - E(r - \Delta r)] = \frac{d(-\bar{B})}{dt} \cdot (-h \cdot \Delta r) \quad (4.1.111)$$

wobei wieder \bar{B} das über die Fläche $\Delta r \cdot h$ gemittelte Magnetfeld ist. Als Zwischenresultat bekommen wir:

$$\frac{[E(r) - E(r - \Delta r)]}{\Delta r} = \frac{d(\bar{B})}{dt}$$

Da der Strom zeitabhängig ist, muss auch das \mathbf{E} -Feld ortsabhängig sein. Eine homogene Stromverteilung bei Wechselstrom ist bei einem Ohmschen Leiter nicht vereinbar mit dem *Induktionsgesetz*. Die Taylorentwicklung von Gleichung (4.1.110) liefert die betragsmäßige Bedingung

$$\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (4.1.112)$$

Das elektrische Feld muss also bei Wechselstrom mit zunehmendem Abstand vom Radius zunehmen. Da der Gesamtstrom gegeben ist, ist die Stromdichte an der Oberfläche konzentriert. Dies ist der *Skin-Effekt*.

Anwendung

- Bei Überlandleitungen wird um ein Stahlseil Kupfer (Luxusausführung) oder Aluminium (das Übliche) gewickelt. Dies erhöht den Widerstand kaum, da der Skin-Effekt die Stromleitung bei 50Hz auf etwa 1cm Tiefe beschränkt.

4.2. Energie des Magnetfeldes

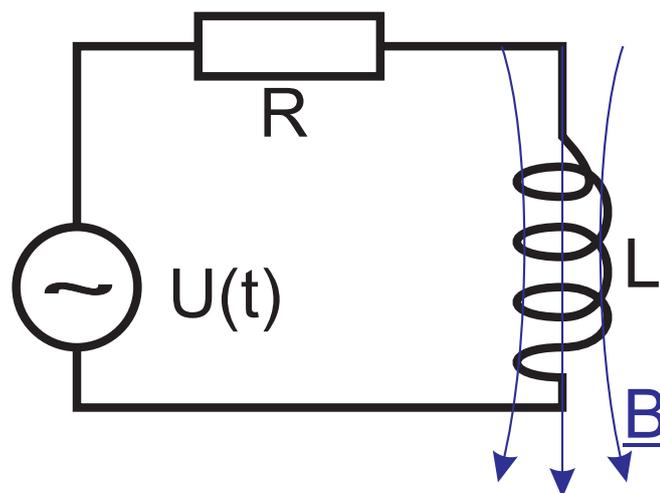


Abbildung 4.24.: Berechnung der Energie im Magnetfeld

Wir betrachten eine mit einer Wechselstromquelle $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ verbundene reale Spule. Diese Spule wird modelliert durch einen Widerstand R und eine ideale Spule L . Die Differentialgleichung dieses Kreises lautet

$$U(t) = L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) \quad (4.2.1)$$

Die stationäre Lösung dieser Gleichung hat die Form

$$I_S(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (4.2.2)$$

Für den Fall, dass $R \ll \omega L$ ist, bekommt man

$$I_S(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos \omega t \quad (4.2.3)$$

Die momentane Leistung der Spannungsquelle ist

$$P_U(t) = U(t) \cdot I(t) = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = -\frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (4.2.4)$$

Die Leistung der Spannungsquelle kann nur die Energie des \mathbf{B} -Feldes ändern, da wir keine dissipativen Elemente haben ($R = 0$). Wenn man die Differentialgleichung für den Fall mit $I(t)$ multipliziert, bekommt man

$$P_U = U(t) \cdot I(t) = L \cdot I \cdot \dot{I} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} I^2 \right) \quad (4.2.5)$$

Nun ist aber $P = dE/dt$. Damit ist die Energie des Magnetfeldes

$$E_L = \frac{L}{2} I^2 \quad (4.2.6)$$

Um die Energiedichte eines Magnetfeldes zu berechnen betrachten wir eine Spule

$$B = \mu_0 n I \quad (4.2.7)$$

mit der Selbstinduktivität

$$L = \mu_0 n^2 A \ell \quad (4.2.8)$$

wobei A der Querschnitt der Spule und ℓ ihre Länge ist. Eingesetzt in die Gleichung für die Energie E_L bekommt man

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 n^2 A \ell \cdot \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell \quad (4.2.9)$$

Deshalb ist die Energiedichte des \mathbf{B} -Feldes

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.2.10)$$

4.3. Magnetische Eigenschaften der Materie

4.3.1. Kugeln im inhomogenen Magnetfeld

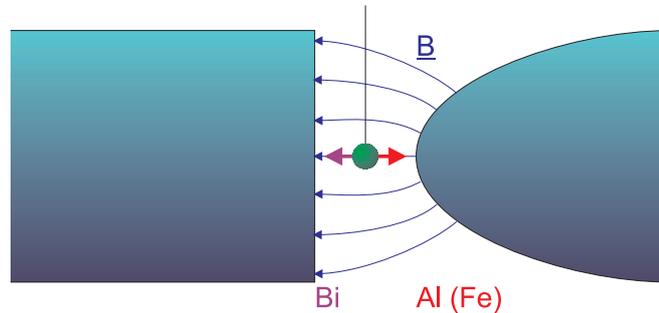


Abbildung 4.25.: Diamagnetische (Bi), paramagnetische (Al) und ferromagnetische (Fe) Materialien im inhomogenen Magnetfeld.



Versuch zur Vorlesung:

Dia- und Paramagnetismus (Versuchskarte EM177)

Materie im inhomogenen Magnetfeld zeigt drei verschiedene Verhalten:

diamagnetisches Verhalten Die Materie wird aus dem starken magnetischen Feld herausgedrückt.

paramagnetisches Verhalten Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen.

ferromagnetisches Verhalten Die Materie wird in das starke Feld hineingezogen, aber sehr viel stärker als bei paramagnetischen Substanzen. Zudem zeigen diese Substanzen ein remanentes Magnetfeld, auch wenn das äussere Magnetfeld wieder verschwunden ist.

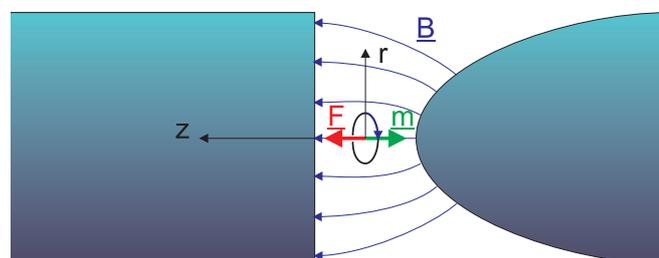


Abbildung 4.26.: Kreisströme als Ursache des Dia- und des Paramagnetismus

Die Materie im inhomogenen Magnetfeld verhält sich wie wenn die Materie aus einem Kreisstrom bestände. Auf diesen Kreisstrom wirkt, je nach Umlaufsinn eine

Kraft zum hohen oder zum niedrigen Feld. Das magnetische Moment der Kreisströme ist beim *Diamagnetismus* antiparallel zu \mathbf{B} . Beim *Paramagnetismus* und beim *Ferromagnetismus* zeigt das magnetische Moment in die Richtung von \mathbf{B} . Der Kreisstrom ist induziert, das heisst, dass seine Richtung von der von \mathbf{B} abhängt. Die resultierende Kraft ist die *Biot-Savart-Kraft* (Siehe Gleichung (3.8.16)). Sie ist proportional zum Produkt $\mathbf{B} \times d\boldsymbol{\ell}$. Wenn man die Richtung des Magnetfeldes umkehrt, wird auch $d\boldsymbol{\ell}$ umgekehrt. Die Richtung der Kraft ist als unabhängig von der Richtung von \mathbf{B} .

Wenn der Kreisstrom (die Materie) sich auf der Symmetrieachse eines rotations-symmetrischen inhomogenen Magnetfeldes befindet, ist

$$F_z = m_z \cdot \frac{\partial B_z(z, 0)}{\partial z} \quad (4.3.1)$$

wobei m_z das induzierte magnetische Moment des Kreisstromes ist.

4.3.2. Der Satz von Larmor

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 162])

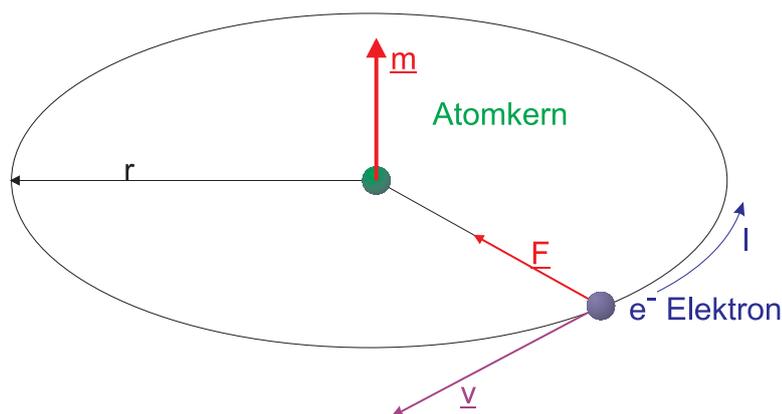


Abbildung 4.27.: Illustration zum Satz von Larmor

Wir hatten postuliert, dass das Verhalten der Materie in einem Gradienten eines Magnetfeldes durch atomare Kreisströme gegeben ist. Wenn wir ein Modell (nach der Quantenphysik nicht realistisch) eines Atoms betrachten, bei dem ein einzelnes Elektron auf einer Bahn mit dem Radius r sich um den positiv geladenen Kern bewegt, ist der resultierende Strom

$$I = -e \frac{v}{2\pi r} \quad (4.3.2)$$

Der Betrag des magnetischen Momentes ist dann

$$|\mathbf{m}| = \pi r^2 I = \frac{1}{2} e \cdot v \cdot r \quad (4.3.3)$$

Die Wirkung eines äusseren Magnetfeldes wird berechnet, indem man betrachtet, wie ein einzelnes Atom auf ein von null anwachsendes äusseres Feld reagiert.

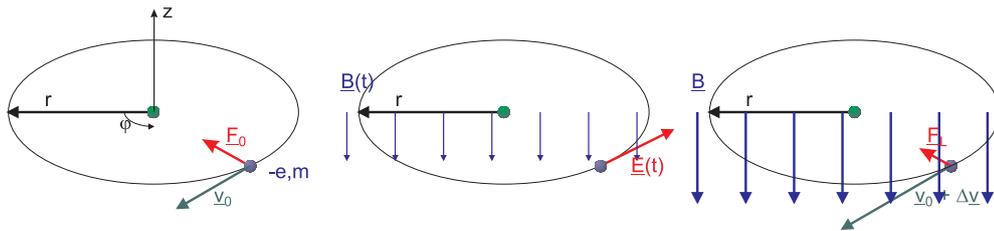


Abbildung 4.28.: Langsames Einschalten eines Magnetfeldes für ein Elektron in einem Atom. Im linken Schaubild sind die positiven Richtungen definiert.

Im Ausgangszustand ist die Zentripetalkraft $\mathbf{F}_0 = -m_e v^2/r$ die Coulombanziehung zwischen dem Elektron und dem Kern sowie durch die gemittelte Coulombabstoßung durch die anderen Elektronen gegeben. Das anwachsende Magnetfeld hat die gleiche Wirkung wie beim Betatron: es entsteht ein tangenciales \mathbf{E} -Feld, das das Elektron beschleunigt. Wir setzen die z -Achse nach oben an. In einem rechtshändigen System ist dann

- das Magnetfeld: $-B$, Betrag: B
- die Geschwindigkeit: $-v$, Betrag: v
- die Zentripetalkraft: $-F_0$, Betrag: F_0
- das induzierte elektrische Feld: E , Betrag: E

Wir setzen diese Größen ein, um vorzeichenrichtig zu rechnen. Aus dem Induktionsgesetz (Siehe Gleichung (4.1.22)) folgt

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \cdot r \cdot E(t) = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\pi r^2 \cdot \frac{d(-B(t))}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.4)$$

Dabei ist $\phi_B = (-B) \cdot A$. Wir erhalten also

$$E(t) = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.5)$$

Die Beschleunigung des Elektrons (nicht-relativistisch) ist durch das zweite Newtonsche Axiom gegeben

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e \cdot E = -\frac{e \cdot r}{2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} \quad (4.3.6)$$

Hier ist m_e die Ruhemasse des Elektrons. Die Geschwindigkeitsänderung hängt also mit der Magnetfeldänderung wie folgt zusammen

$$dv = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot dB \quad (4.3.7)$$

Der gesamte Geschwindigkeitszuwachs des Elektrons ist also

$$\Delta v = -\frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \quad (4.3.8)$$

wenn B das Feld im Endzustand ist. Der Betrag der Geschwindigkeit hat also zugenommen. Nun bewirkt das äussere \mathbf{B} -Feld die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = -e \cdot (-v) \cdot (-B) \quad (4.3.9)$$

die, nach der rechten Hand-Regel, zum Kreiszentrum zeigt. Die Zentripetalkraft ist im Endzustand durch

$$F = -m \frac{(-v + \Delta v)^2}{r} \quad (4.3.10)$$

Da $v \gg \Delta v$ ist, können wir nach Taylor entwickeln

$$\begin{aligned} F &\approx -\frac{m_e}{r} (v^2 - 2v \cdot \Delta v) & (4.3.11) \\ &= -\frac{m_e}{r} \left(v^2 + 2v \cdot \frac{e \cdot r}{2m_e} \cdot B \right) \\ &= -\frac{m_e}{r} v^2 - e \cdot v \cdot B \\ &= F_0 + F_L \end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft bewirkt also, dass die Elektronenbahnen für kleine Geschwindigkeitsänderungen sich nicht ändern. Die *Larmorwinkelgeschwindigkeit* in Abhängigkeit der Zunahme der Bahngeschwindigkeit und der magnetischen Induktion ist

$$\Omega \equiv \frac{\Delta v}{r} = \frac{e \cdot B}{2m_e} \quad (4.3.12)$$

und vektoriell geschrieben

Larmorwinkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B} \quad (4.3.13)$$

In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ rotierenden System sind die Elektronenbahnen im Atom unverändert.

Der *Satz von Larmor* gilt allgemein, auch bei beliebiger Orientierung von Magnetfeld und Bahnebene des Elektrons. Der Satz von Larmor bildet die Grundlage des Verständnisses des Diamagnetismus.

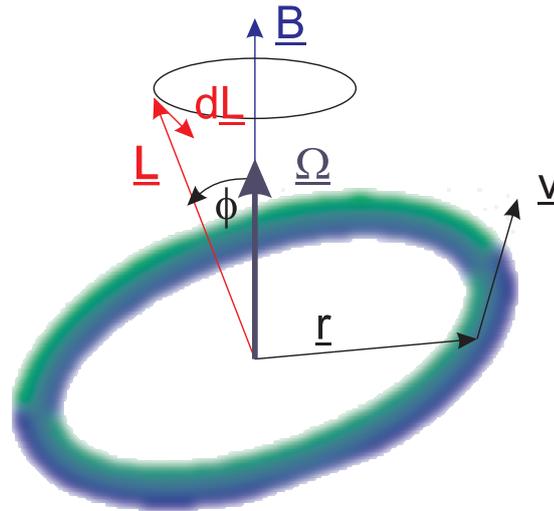


Abbildung 4.29.: Berechnung der Larmorfrequenz mit einem Kreisel

Man kann den *Satz von Larmor* aus der Kreiseltheorie ableiten. Das Elektron ist, bei einer Bahn mit konstantem Radius, ein starrer Körper. Dieser Kreisel hat den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (4.3.14)$$

Das magnetische Moment des Kreisstromes ist nach Gleichung (4.3.3)

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \quad (4.3.15)$$

Der Kreisel erfährt ein mechanisches Drehmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4.3.16)$$

Der Drehimpulssatz bedeutet, dass

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \times \mathbf{L} \quad (4.3.17)$$

Wir erhalten also eine Präzessionsbewegung des Drehimpulsvektors \mathbf{L} um \mathbf{B} mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{\Omega}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} \quad (4.3.18)$$

Wir erhalten die

vektorielle Schreibweise der *Larmorfrequenz*

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \quad (4.3.19)$$

4.3.3. Diamagnetismus

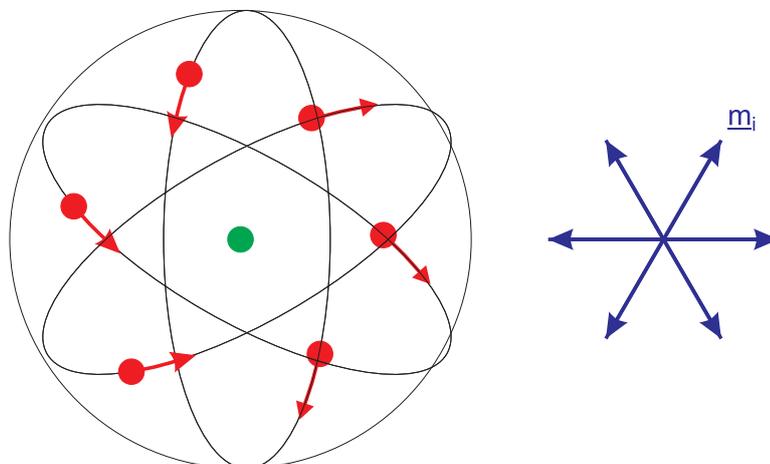


Abbildung 4.30.: Berechnung des Diamagnetismus

Im diamagnetischen Atom ist die Summe aller magnetischer Momente der Elektronen exakt null.

$$\mathbf{m}_A = \sum_j \mathbf{m}_j = 0 \quad (4.3.20)$$

Man kann sich dies vereinfacht so vorstellen, dass jede Elektronenbahn von zwei gegenläufigen Elektronen besetzt ist. Ein diamagnetisches Atom hat deshalb, ohne äusseres \mathbf{B} -Feld eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Diese entsteht, weil sich die einzelnen Elektronenbewegungen über die Zeit ausmitteln.

Wenn ein \mathbf{B} -Feld eingeschaltet wird, beginnt diese kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der Larmorfrequenz zu präzedieren. Durch diese Präzession im Magnetfeld entsteht ein von null verschiedenes magnetisches Moment \mathbf{m}_A , das zum Diamagnetismus führt. Zur vereinfachten Berechnung nimmt man an, dass das Atom eine homogen geladene Kugel ist mit der Ladungsdichte

$$\rho_{el} = -\frac{Ze}{(4/3)\pi R^3} \quad (4.3.21)$$

wobei Z die Kernladungszahl und R der Radius der Elektronenwolke ist.

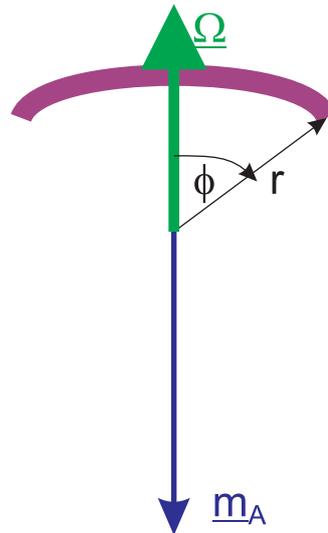


Abbildung 4.31.: Ein einzelner Kreisstrom

Diese homogen geladene Kugel rotiert im äusseren Magnetfeld mit

$$\Omega = \frac{e}{2m} B \quad (4.3.22)$$

Durch ein raumfestes Flächenelement fliesst der Strom

$$\delta I = \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) \quad (4.3.23)$$

mit

$$v(r, \varphi) = \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (4.3.24)$$

Da die *Ladungen* negativ sind, ist das magnetische Moment \mathbf{m}_A entgegengesetzt zu Ω und entgegengesetzt zu \mathbf{B} , hier also nach unten, gerichtet. Dieses magnetische Moment ist

$$\delta m_A(r, \varphi) = \text{Fläche} \cdot \text{Strom} = \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \delta I \quad (4.3.25)$$

oder

$$\begin{aligned} \delta m_A(r, \varphi) &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot v(r, \varphi) & (4.3.26) \\ &= \pi r^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \Omega \cdot r \cdot \sin \varphi \\ &= \pi r^4 \sin^3 \varphi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot dr \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Der Betrag des gesamten magnetischen Momentes erhält man durch Integration

über r und φ Er ist

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{m}_A| &= \int_0^R \int_0^\pi \delta m_A(r, \varphi) dr d\varphi & (4.3.27) \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \rho_{el} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \Omega \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \pi \cdot \frac{Z \cdot e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \frac{eB}{2m_e} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \frac{Z \cdot e^2 \cdot B \cdot R^2}{10m_e}
 \end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben erhalten wir für das diamagnetische Moment

$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B} \quad (4.3.28)$$

Diese diamagnetische Moment ist in allen Atomen vorhanden. Bei paramagnetischen und ferromagnetischen Substanzen wird es unterdrückt.

4.3.4. Magnetisierung

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 170])

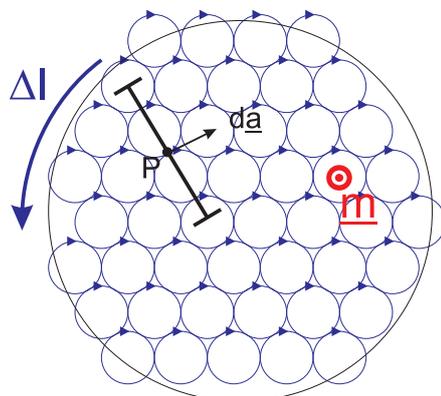


Abbildung 4.32.: Atomare Kreisströme

Die gesamte makroskopische *Magnetisierung* ist das mittlere magnetische Moment

pro Volumeneinheit

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}) = \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{m}_{A_i}}{\Delta V} \quad (4.3.29)$$

Dabei ist \mathbf{m}_{A_1} das magnetische Moment eines Atoms oder einer Atomgruppe, wobei ΔV ein geeignetes Volumenelement ist. Eine Probe heisst homogen magnetisiert, wenn $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ unabhängig vom Probenort ist.

Das externe Magnetfeld soll senkrecht zur Bildebene des obigen Bildes sein. Die atomaren Kreisströme müssen dann in der Bildebene liegen. Betrachten wir ein Flächenelement $d\mathbf{a}$, das senkrecht zur Bildebene liegt, dann stellen wir fest, dass alle Kreisströme zweimal durch dieses Ebenenelement gehen, einmal in positiver und einmal in negativer Richtung. Bis auf die Ströme an den Rändern heben sich alle Ströme auf. Das heisst, dass das mittlere Stromdichtefeld

$$\mathbf{i} = 0 \quad (4.3.30)$$

ist, da $dI(a) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a}$. Nur die Ströme am Rand, die Oberflächenströme mit der Stromdichte j , können deshalb die Quelle der beobachteten makroskopischen Magnetisierung sein. Für eine Probe der Höhe Δz ist der gesamte Strom an der Oberfläche

$$\Delta I = \Delta z \cdot j \quad (4.3.31)$$

Diese makroskopischen Oberflächenströme erklären die experimentellen Beobachtungen. Da für ein diamagnetisches Atom \mathbf{m} entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, und da damit auch die makroskopische Magnetisierung \mathbf{M} entgegengesetzt zum Magnetfeld gerichtet ist, wird diese Probe wie beobachtet vom Magnetfeldgradienten abgestossen.

Das magnetische Feld aller Kreisströme muss identisch mit dem externen Feld \mathbf{B} sein. Nun ist aber das magnetische Moment eines Kreisstromes in genügender Entfernung nicht von der Fläche dieses Stromes abhängig. Deshalb muss die Summe aller einzelner atomarer magnetischer Momente dem magnetischen Moment des Oberflächenstromes gleich sein.

$$m_a \cdot n \cdot A \cdot \Delta z = A \cdot I = A \cdot j \cdot \Delta z \quad (4.3.32)$$

wobei n die Volumendichte der Atome ist. Die Oberflächenstromdichte

$$j = m_a \cdot n = M \quad (4.3.33)$$

ist gleich der Magnetisierung.

4.3.5. Das magnetische Moment des Elektrons: Spin

Neben den von der Bahnbewegung herrührenden magnetischen Momenten hat zum Beispiel das *Elektron* ein magnetisches Moment, das von seinem Drehimpuls \mathbf{s} (*Spin*) herrührt.

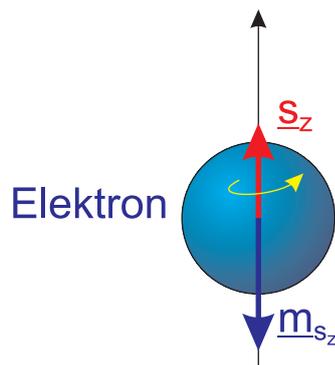


Abbildung 4.33.: Elektronenspin

Zu diesem Drehimpuls oder Spin gehört ein entsprechendes magnetisches Moment \mathbf{m}_s . Aus der Quantenmechanik weiss man, dass die Projektion des Spins auf eine raumfeste Achse einen festen Betragswert

$$s_z = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2} \hbar \quad (4.3.34)$$

hat, wobei das Plancksche Wirkungsquantum durch

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (4.3.35)$$

oder mit $2\pi\hbar = h$

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{ Js}$$

ist. Nach der Quantenmechanik gilt

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{s} \quad (4.3.36)$$

Nach der klassischen Mechanik (rotierende homogen geladene Kugel) wäre $\mathbf{m}_s = -(1/2)\frac{e}{m}\mathbf{s}$. Die Grösse des magnetischen Momentes eines Elektrons ist

$$|m_{s,z}| = \frac{e}{2m} \hbar \equiv 1\mu_B = 0.927 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (4.3.37)$$

auch bekannt unter dem Namen *Bohrsches Magneton*. Das magnetische Moment des Elektrons ist dann

$$\mathbf{m}_s = -g\mu_B \mathbf{s} \quad (4.3.38)$$

Hier ist g der *Landé-Faktor*, der für die klassische Quantenmechanik $g = 2$ ist und für die *Quanten-Elektrodynamik (QED)* abhängig von der Atomsorte. Für Wasserstoff (H) ist $g_{\text{Wasserstoff}} = 2.002284$, für ^{133}Cs ist $g_{^{133}\text{Cs}} = 2.002540$.

4.3.6. Paramagnetismus

(Siehe Kneubühl, Repetitorium der Physik [Kne78, pp. 262])

Bei paramagnetischen Atomen hebt sich das magnetische Bahnmoment der einzelnen Elektronen eines Atoms sowie deren von den Spins herrührendes magnetisches Moment nicht vollständig auf.

$$\mathbf{m}_A \neq 0 \quad (4.3.39)$$

Das magnetische Moment eines paramagnetischen Atoms hat die Größenordnung eines Bohrsche Magneton $1\mu_B$. Ohne äusseres Magnetfeld verschwindet die makroskopische Magnetisierung, da die einzelnen atomaren magnetischen Momente ungeordnet sind. Im äusseren Magnetfeld ordnen sich die magnetischen Momente teilweise, da die thermische Brownsche Bewegung, temperaturabhängig, für Unordnung sorgt.

Die Magnetisierung kann mit der folgenden Überlegung berechnet werden. Wir setzen an

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (0, 0, H) \\ \mathbf{m} &= (m \sin \Theta \cos \phi, m \sin \Theta \sin \phi, m \cos \Theta) \\ d\Omega &= \sin \Theta d\Theta d\phi = -d(\cos \Theta) d\phi \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Die Energie des magnetischen Dipols \mathbf{m} im Magnetfeld \mathbf{H} hängt nur von Θ ab. Wir machen eine Koordinatentransformation auf $u = \cos \Theta$. Die Energie ist dann

$$E_{pot} = -\mathbf{m}_A \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{m}_A \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = -\mu_0 m_A H \cos \Theta = -\mu_0 m_A H u \quad (4.3.41)$$

Die Magnetisierung M_z in der z -Richtung, der Richtung des Magnetfeldes \mathbf{H} , ist

$$M_z = \frac{1}{V} \left(\sum \mathbf{m}_A \right)_z = N m_A \langle \cos \Theta \rangle = N m_A \langle u \rangle \quad (4.3.42)$$

Bei endlichen Temperaturen müssen die potentiellen Energien E_{pot} nach der *Boltzmannstatistik* verteilt sein, also

$$\langle \cos \Theta \rangle = \frac{\int_{\Omega} \cos \Theta e^{-E_{pot}/k_B T} d\Omega}{\int_{\Omega} e^{-E_{pot}/k_B T} d\Omega} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \Theta e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta d\phi} \quad (4.3.43)$$

mit $x = \mu_0 m_A H / k_B T$. In der Koordinate u und nach Ausführen der trivialen Integration über ϕ lautet die Gleichung

$$\langle u \rangle = \frac{\int_{-1}^1 u e^{xu} du}{\int_{-1}^1 e^{xu} du} \quad (4.3.44)$$

Wir wechseln auf $\hat{u} = -u$ und erhalten

$$\langle u \rangle = -\frac{\int_{-1}^1 \hat{u} e^{-x\hat{u}} d\hat{u}}{\int_{-1}^1 e^{-x\hat{u}} d\hat{u}} = \coth x - \frac{1}{x} = L(x) \quad (4.3.45)$$

wobei $L(x)$ die *Langevin-Funktion* ist. Also ist

$$\begin{aligned} M_z &= n m_A L \left(\frac{\mu_0 m_A H}{k_B T} \right) \\ &= n m_A L \left(\frac{m_A B}{k_B T} \right) \\ &= n m_A \left[\coth \left(\frac{m_A B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{m_A B} \right] \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

wobei n die Zahlendichte der Spins ist.

Diese klassisch berechnete Magnetisierung ist für kleine Magnetfelder, also $kT \gg m_A B$ verifizierbar. Da für $x \ll 1$ die Reihenentwicklung $L(x) = x/3 + O(x^2)$ gilt, bekommen wir das *Curie-Gesetz*

$$M = \frac{1}{3} \frac{n m_A^2}{k_b T} B = \chi H = \frac{C}{T} H \quad (4.3.47)$$

Hier ist C die volumenbezogene *Curie-Konstante*

$$C = \mu_0 n \frac{m_A^2}{3 k_b} \quad (4.3.48)$$

Alternativ kann die Curie-Konstante auch mit molaren Grössen ausgedrückt werden, indem wir $m_{mol} = N_A m_A$ setzen.

$$C_{mol} = \mu_0 \frac{m_{mol}^2}{3 R} \quad (4.3.49)$$

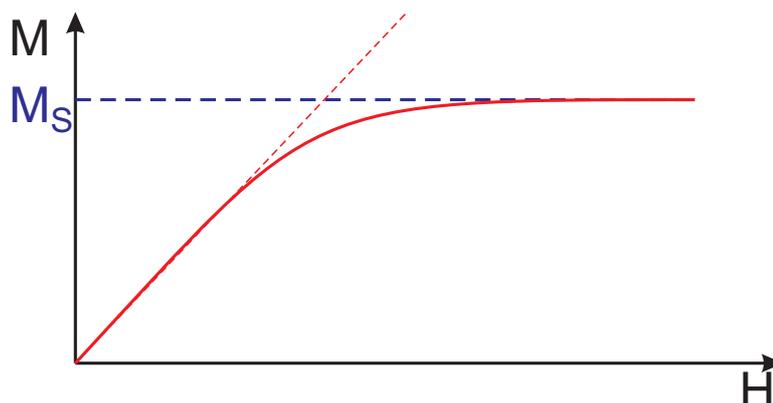


Abbildung 4.34.: Schematischer Verlauf der Magnetisierung (*Curie-Gesetz* für kleine B). M_S ist die Sättigungsmagnetisierung.

4.3.7. Ferromagnetismus

Versuch zur Vorlesung:

Ferromagnetismus - Modellversuch ([Versuchskarte EM175](#))

Ferromagnetische Atome haben genau so wie paramagnetische Atome ein permanentes magnetisches Moment m_A . Im Gegensatz zu den Paramagneten bleibt jedoch auch ohne äusseres Magnetfeld ein magnetisches Moment übrig. Die Magnetisierung als Funktion des Magnetfeldes kann mit der unten stehenden Apparatur gemessen werden.



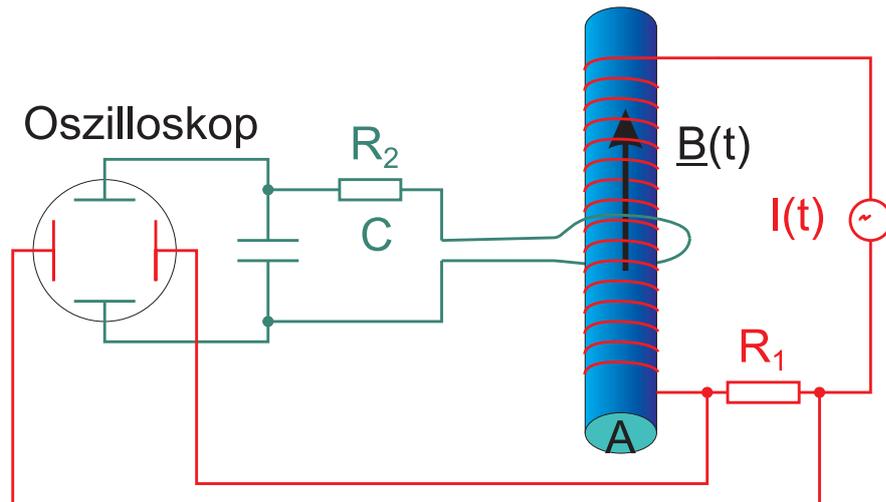


Abbildung 4.35.: Messung der Hysterese eines Ferromagneten. Rot ist der Primärkreis, grün der Sekundärkreis.

Unter Vernachlässigung der Selbstinduktion ist die Differentialgleichung für den Sekundärkreis

$$-A \cdot \frac{dB(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = R_2 \cdot I_2(t) \quad (4.3.50)$$

Dabei ist $Q(t)$ die *Ladung* am Kondensator. Wir schreiben den Strom als zeitliche Ableitung der *Ladung*.

$$-\frac{A}{R_2} \cdot \frac{dB(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{R_2 C} + \frac{dQ(t)}{dt} \quad (4.3.51)$$

Die Anregung in dieser Schaltung ist ein Strom $I_1(t)$, der die Frequenz ω hat. Also ist auch $Q(t)$ eine periodische Funktion mit der gleichen Frequenz. Bei harmonischen Funktionen gilt, dass $dQ(t)/dt \approx \omega Q(t)$ ist. Wenn $1/RC \ll \omega$ ist, kann der erste Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Dann gilt

$$Q(t) = \text{const} \cdot B(t) \quad (4.3.52)$$

und damit für die Spannung am Kondensator

$$U_C(t) = Q(t)/C \propto B(t) \quad (4.3.53)$$

Der Ausgangsstrom $I(t)$ selber erzeugt das anregende Feld.

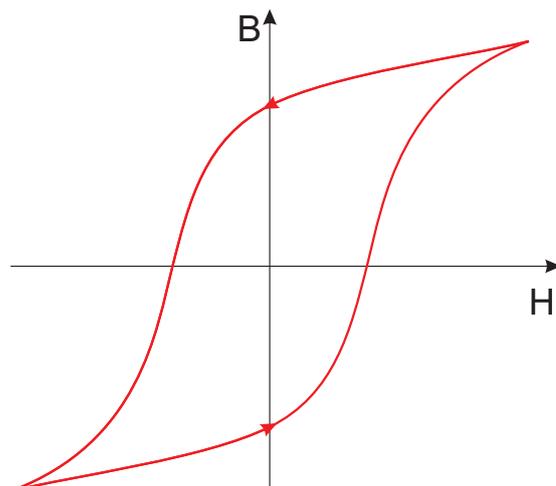


Abbildung 4.36.: Hysteresekurve eines Ferromagneten

Diese Abbildung zeigt das skizzierte Resultat des obigen Versuches. Interessant ist, dass bei $I = 0$, also ohne anregendes Magnetfeld, trotzdem ein Feld $B \neq 0$ gemessen wird. Diese Feld kann nur von einer nichtverschwindenden Magnetisierung ohne äusseres Feld herrühren. Diese nichtverschwindende Magnetisierung $\mathbf{M} \neq 0$ ist das Kennzeichen eines *Ferromagneten*.

Andererseits gibt es zwei Punkte, bei denen das resultierende Magnetfeld null ist, obwohl ein äusseres Magnetfeld angelegt wurde. Dies kann nur sein, wenn die Magnetisierung im Material das äussere Feld gerade kompensiert.

Weiter nimmt für sehr grosse anregende Felder das resultierende Magnetfeld kaum mehr zu. Man spricht von einer Sättigung der Magnetisierung.



Versuch zur Vorlesung:

Magnetische Bezirke (Versuchskarte EM178)

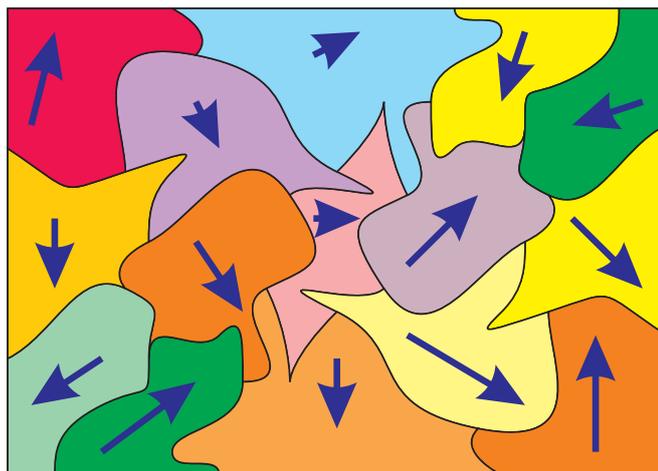


Abbildung 4.37.: Ferromagnetische Domänen

Das beobachtete Verhalten kann mit *ferromagnetischen Domänen*, auch Weissche Bezirke genannt, erklärt werden. Das Material besteht, wie oben skizziert, aus einer grossen Zahl kleiner Bereiche, die jeder seine eigene Orientierung der Magnetisierung haben. Die gemittelte Magnetisierung hängt davon ab, wie zufällig die Domänen verteilt sind.

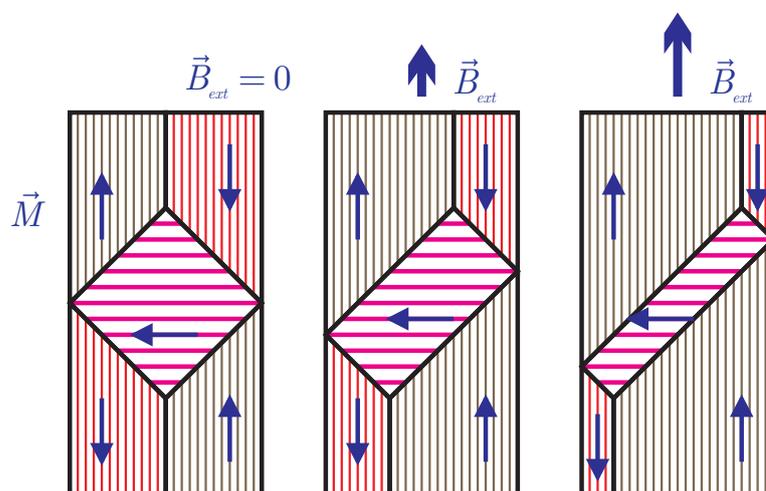


Abbildung 4.38.: Änderung der Domänenstruktur bei stärker werdendem äusserem Magnetfeld

Wird ein äusseres Magnetfeld angelegt, beginnen die Domänen, die bezüglich des externen Feldes richtig orientiert sind, zu wachsen, die anderen schrumpfen. Die makroskopische Magnetisierung wächst, hinkt aber hinter der Anregung zurück.

Domänen ändern die Richtung ihrer Magnetisierung nicht, sie ändern nur ihre Grösse.

Bei der Änderung der Grösse der Domänen müssen Domänenwände verschoben werden. Dies kostet Energie und zeigt sich als *Hysterese*. Dieser Energieverlust bei der Grössenänderung stabilisiert aber auch die Domänen.

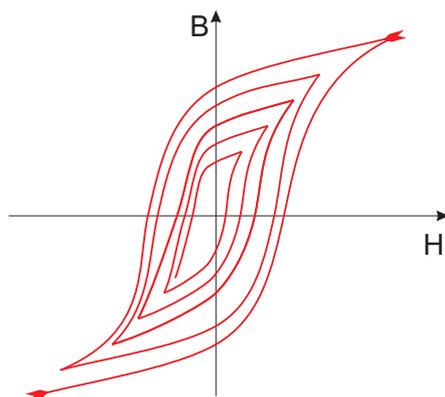


Abbildung 4.39.: Löschen des remanenten Magnetismus

Um die makroskopische Orientierung der Domänen zum Verschwinden zu bringen, muss man die ferromagnetische Substanz langsam aus einem Wechselfeld entfernen. Das Bild oben zeigt die resultierenden Hysteresekurven. Die Hystereseschleife wird so quasikontinuierlich auf einen Punkt, den Ursprung des Koordinatensystems zusammengezogen.

Anwendung: Entmagnetisieren von Schraubenziehern, Löschen von Tonbändern.

4.4. Zusammenfassung: Elektrodynamik: zeitlich veränderliche Magnetfelder

Magnetischer Fluss Gleichung (4.1.4)

$$\phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Lorentztransformation der EMK Gleichung (4.1.11)

$$U'_{EMK} = \gamma(v)U_{EMK}$$

Induktionsgesetz von Faraday Gleichung (4.1.22)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Differentielle Form des Induktionsgesetzes von Faraday Gleichung (4.1.24)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Magnetfeld einer langen Spule Gleichung (4.1.35)

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

Fluss einer langen Spule Gleichung (4.1.36)

$$\phi_B = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \cdot A = \mu_0 n^2 A \ell I$$

Selbstinduktivität einer langen Spule Gleichung (4.1.37)

$$L = \frac{\phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A \ell$$

Selbstinduktionsspannung Gleichung (4.1.40)

$$U = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators Gleichung (4.1.52)

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators Gleichung (4.1.53)

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$$

Übersetzungsverhältnis eines Transformators für Leistungen Gleichung (4.1.54)

$$U_2 I_2 = U_1 I_1$$

Maschenregel Gleichung (4.1.55)

$$\sum_{\forall k \text{ Quellen}} U_k = \sum_{\forall j \text{ Verbraucher}} U_j$$

Knotenregel Gleichung (4.1.56)

$$\sum_{\forall k \text{ eines Knotens}} I_k = 0$$

Effektivspannung Gleichung (4.1.65)

$$U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U^2(\tau) d\tau}$$

Impedanz einer Spule Gleichung (4.1.69)

$$X_L = \omega L$$

Impedanz eines Kondensators Gleichung (4.1.76)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Schwingkreis Gleichung (4.1.84)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Induzierte Spannung in Generator Gleichung (4.1.88)

$$U_{eff,i} = \frac{NBA\omega}{\sqrt{2}}$$

Drehmomentkurve eines Nebenschlussmotors Gleichung (4.1.92)

$$M_{eff}(\omega) = \frac{NAB}{\sqrt{2}} \left(\frac{U}{R} - \frac{NBA}{R\sqrt{2}} \omega \right) = \frac{NABU}{R\sqrt{2}} - \frac{N^2 A^2 B^2}{2R} \omega$$

Drehmomentkurve eines Hauptschlussmotors Gleichung (4.1.101)

$$M_{eff} = NA \frac{\mu_0 N_E}{\ell_E} \left[\frac{U}{R + R_E + \frac{\mu_0 \cdot K \cdot N \cdot N_E \cdot A}{\ell_E \sqrt{2}} \omega} \right]^2$$

Wideroe-Beziehung für das Betatron Gleichung (4.1.109)

$$\bar{B}(t) = 2 \cdot B(t)$$

Energiedichte des Magnetfeldes Gleichung (4.2.10)

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Larmorfrequenz Gleichung (4.3.19)

$$\Omega = \frac{e}{2m} B$$

Diamagnetisches Moment Gleichung (4.3.28)

$$\mathbf{m}_A = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot R^2}{10m_e} \mathbf{B}$$

Magnetisches Moment des Elektrons Gleichung (4.3.36)

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{s}$$

5. Die Maxwell'schen Gleichungen

5.1. Was wissen wir?

(Siehe Leisi, Klassische Physik II [Lei98, pp. 251])

Maxwellgleichungen werden gebraucht, um die Funktionsweise von

- Radiowellen
- Mikrowellen
- Mobiltelefonen

zu erklären.

Bis jetzt kennen wir die folgenden Gleichungen um die elektrischen Phänomene zu beschreiben:

Gauss'sches Gesetz	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{el}$	I
Induktionsgesetz	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	II
Quellenfreiheit	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	III
Durchflutungsgesetz	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$	IV

5.2. Auflösung des Widerspruchs zur Kontinuitätsgleichung, Maxwellgleichungen

Zusätzlich zu den obigen Gleichungen muss die Kontinuitätsgleichung für *Ladungen* gelten

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.2.1)$$

Diese Kontinuitätsgleichung ist im Widerspruch zum Durchflutungsgesetz. Dies sieht man, indem man die Divergenz auf das Durchflutungsgesetz anwendet.

$$\operatorname{div} (\mathbf{i}) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0 \quad (5.2.2)$$

im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung. Dieser Widerspruch wurde von *Maxwell* aufgelöst, indem er das Durchflutungsgesetz ergänzt hat.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.3)$$

Die Grösse $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ hat die Dimension einer Stromdichte. Diese *Maxwellsche Verschiebungsstromdichte* macht das Durchflutungsgesetz mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel. Der Strom ist bei dem modifizierten Durchflutungsgesetz durch

$$\mathbf{i} = \mathbf{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.4)$$

Die Divergenz davon ist (mit $\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{X} \equiv 0$)

$$\mathbf{div} \mathbf{i} = -\mathbf{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} \quad (5.2.5)$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichungen **I-III** zusammen mit dem modifizierten Durchflutungsgesetz auch die Kontinuitätsgleichung beinhalten.

5.3. Maxwellgleichungen

Dieser Satz Gleichungen wird die

Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{D} &= \rho_{el} & \mathbf{I} \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathbf{II} \\ \mathbf{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{III} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \mathbf{IV} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

genannt.

Zusammen mit dem Kraftgesetz

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.3.2)$$

hat man eine vollständige Charakterisierung der Elektrodynamik für isotrope Materialien.

Die Maxwellsche Verschiebungsstromdichte, die eingeführt wurde um die Maxwellgleichungen mit der Kontinuitätsgleichung kompatibel zu machen, führt dazu, dass man aus den Maxwellgleichungen elektromagnetische Wellen vorhersagen kann.

Die Maxwellgleichungen sind nicht invariant unter der Galilei-Transformation. Diese Beobachtung war ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg zur speziellen Relativitätstheorie.

Die Integralform des modifizierten Durchflutungsgesetzes ist

$$\iint_{A(S)} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{A(S)} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} = \oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.3.3)$$

wenn man den Satz von Stokes (Siehe Gleichung (C.5.1)) anwendet. S ist eine beliebige Kurve und $A(S)$ die durch sie berandete Fläche.

Das Gauss'sche Gesetz liefert

$$\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D}) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (5.3.4)$$

Damit wird die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0 = \operatorname{div} \mathbf{i} + \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (5.3.5)$$

Damit ist das Integral über die Fläche in Gleichung (5.3.4) unabhängig von S . Die Integralformeln der Maxwellgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV & \text{I} & \quad (5.3.6) \\ \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} & \text{II} & \\ \iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 & \text{III} & \\ \oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{A(S)} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} & \text{IV} & \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen der zweiten und der dritten Maxwellgleichung ist, dass in der zweiten Gleichung über eine einfache, von der Kurve S aufgespannte Fläche $A(S)$ integriert wird, während in der dritten Gleichung über die das Volumen V einschliessende Fläche $A(V)$ integriert wird.

Die angegebenen Maxwellgleichungen gelten für alle Medien, auch mit tensoriellen Eigenschaften. Dort benötigt man die beiden Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

um das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung, bzw. das magnetische Feld und die magnetische Induktion miteinander zu verknüpfen, wobei $\underline{\varepsilon}$ und $\underline{\mu}$ Tensoren sind.

Die Maxwellgesetze mit explizit eingesetzten Materialgesetzen lauten für beliebige Materialien

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 \operatorname{div} (\underline{\varepsilon} \mathbf{E}) &= \rho_{el} & \mathbf{I} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathbf{II} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{III} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \underline{\mu} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\underline{\varepsilon} \mathbf{E})}{\partial t} \right) & \mathbf{IV}
 \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

in der differentiellen Schreibweise und

$$\begin{aligned}
 \iint_{A(V)} \underline{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_V \rho_{el}(\mathbf{r}) dV & \mathbf{I} \\
 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} & \mathbf{II} \\
 \iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 & \mathbf{III} \\
 \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{A(S)} \underline{\mu} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\underline{\varepsilon} \mathbf{E})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} & \mathbf{IV}
 \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

in der Integralschreibweise. Beachten Sie, dass sowohl $\underline{\varepsilon}$ wie auch $\underline{\mu}$ sowohl von der Zeit wie auch vom Ort abhängen können!

5.4. Maxwellgleichungen in isotropen zeitunabhängigen Medien

Die Maxwellgesetze beliebige isotrope und zeitunabhängige Materialien

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} (\mathbf{E}) &= \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho_{el} & \mathbf{I} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathbf{II} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{III} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E})}{\partial t} \right) & \mathbf{IV}
 \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

in der differentiellen Schreibweise und

$$\iint_{A(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho_{el}(\mathbf{r}) dV \quad \text{I} \quad (5.4.2)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II}$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mu\mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial(\mathbf{E})}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV}$$

in der Integralschreibweise.

5.5. Anwendung der Maxwellgleichungen

Beispiel: Anwendung

Wir betrachten einen langen kreiszylindrischen Leiter mit dem Durchmesser R , aus dem eine Scheibe mit der Dicke $d \ll R$ herausgeschnitten wurde. Dieser Leiter werde an eine Gleichstromquelle mit $I(t) = I_0$ angeschlossen. Die Endflächen beim herausgeschnittenen Stück wirken wie ein Kondensator. Also ist

$$Q(t) = I_0 \cdot t \quad (5.5.1)$$

Da wir eine zeitlich konstante Situation haben, sind alle zeitlichen Ableitungen null. Mit der Integralform des Gauss'schen Gesetzes bekommt man mit einer geschlossenen Fläche A , die eine Kondensatorplatte beinhaltet

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_{V(A)} \rho_{el} dV \\ \varepsilon_0 E(t) \pi R^2 &= Q(t) \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass innerhalb des Leiters sowie ausserhalb des herausgeschnittenen Stückes $\mathbf{E} = 0$ gilt. Damit erhalten wir

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} = \frac{I_0(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} t = \frac{i_0}{\varepsilon_0} t \quad (5.5.3)$$

Dabei ist i_0 die Stromdichte im Draht, nicht in der Lücke. Das Vektorfeld

$$\left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

ist homogen im ganzen Zylinder, einschliesslich des herausgeschnittenen Stückes. Im Leiter ist $\mathbf{E} = 0$, also

$$i_0 = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad (5.5.4)$$

Im herausgeschnittenen Stück ist $i = 0$ und damit

$$i' = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_0(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} t = \frac{I_0}{\pi R^2} = i_0 \quad (5.5.5)$$

Deshalb muss \mathbf{B} über den ganzen Leiter, inklusive des herausgeschnittenen Stückes, tangential und translationsinvariant entlang des Leiters sein.

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{r}{R^2} \quad \text{für} \quad r < R \quad (5.5.6)$$

sowie

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad r \geq R \quad (5.5.7)$$

Der Maxwellsche Verschiebungsstrom bewirkt also, dass die Stromverteilung im Leiter in den Zwischenraum verschoben wird. Das modifizierte Ampèresche Durchflutungsgesetz ist die physikalische Rechtfertigung für den umgangssprachlichen Ausdruck **der Strom fließt durch den Kondensator**.

6. Elektromagnetische Wellen

6.1. Die Wellengleichung im Vakuum

Im *Vakuum* gibt es keine Teilchen, also auch keine geladenen Teilchen. Wir können also setzen:

$$\rho_{el}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}) = 0$$

Damit lauten die Maxwellgleichungen [Max73] in der Integralform

$$\iint_{A(V)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.1)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{II}$$

$$\iint_{A(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \text{III}$$

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \varepsilon\varepsilon_0 \iint_{A(S)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{IV}$$

oder in der differentiellen Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{IV}$$

Im Vakuum ist $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ sowie $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ sowie $\mu = 1$ und $\varepsilon = 1$. Zur Ableitung der Wellengleichung sind die differentiellen Maxwellgleichungen besser als die integralen geeignet. Wir verwenden $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ und erhalten also

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{I} \quad (6.1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{II}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{III}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{IV}$$

Die Maxwellgleichungen im *Vakuum* sind symmetrisch bezüglich \mathbf{E} und \mathbf{B} . Wir nehmen die Rotation der zweiten Maxwellgleichung.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (6.1.4)$$

Indem wir die Austauschbarkeit von Ableitungen verwenden. Nun setzt man die vierte Maxwellgleichung in die zweite Gleichung ein. Wir erhalten eine Differentialgleichung für \mathbf{E} allein.

$$\mathbf{rot\ rot\ E} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.1.5)$$

Nun gilt die Vektoridentität

$$\mathbf{rot\ rot\ E} = \mathbf{grad\ div\ E} - \mathbf{div\ grad\ E} = \mathbf{grad\ div\ E} - \Delta \mathbf{E} \quad (6.1.6)$$

Wegen der ersten Maxwellgleichung verschwindet der erste Term auf der rechten Seite. Also lauten die *Wellengleichungen*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \quad (6.1.7)$$

sowie nach einer analogen Ableitung für \mathbf{B}

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \quad (6.1.8)$$

Die nicht-trivialen Lösungen der *Wellengleichungen* heissen *elektromagnetische Wellen*. Dieses Phänomen ist implizit in den Maxwellgleichungen enthalten, die aus makroskopischen Experimenten abgeleitet wurden. Die *Wellengleichung* beschreibt alle Wellenphänomene aus der Kommunikationstechnik, der *Optik* und der Wechselwirkung von Atomen und Molekülen untereinander, für Abstände von 1nm oder mehr. Die Maxwellgleichungen sind invariant unter der *Lorentz-Transformation*, nicht aber unter der *Galilei-Transformation*. In jedem Inertialsystem im Vakuum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.1.9)$$

Damit haben die Maxwellgleichungen implizit schon 1864 die spezielle Relativitätstheorie vorweggenommen.

In Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \cdot c \quad (6.1.10)$$

wobei μ die relative Permeabilitätszahl und ε die relative Dielektrizitätszahl ist.

6.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Es gibt eine grosse Klasse von Funktionen (skalar oder vektoriell), die die Wellenleitergleichung lösen. Im Folgenden besprechen wir skalare Funktionen, die aber

auch als eine Vektorkomponente aufgefasst werden können. Alle Funktionen, die nur von einer skalaren Variablen

$$u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (6.2.1)$$

abhängen lösen die Wellengleichung, wenn sie genügend oft stetig differenzierbar sind. Wir betrachten die Funktion $f(u) = f(u(\mathbf{r}, t))$. und setzen sie in $c^2 \Delta f(u(\mathbf{r}, t)) = (\partial^2 / \partial t^2) f(u(\mathbf{r}, t))$ ein. Die Kettenregel der Differentiation ergibt für $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(u(x, y, z, t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left[\frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Die letzte Umformung in Gleichung (6.2.3) beruht auf

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) = 0$$

Da $(\partial / \partial t)u = -\omega$ ist, ist auch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \omega^2 \quad (6.2.4)$$

Analog erhalten wir für die Raumkomponente x

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y, z, t)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u(x, y, z, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[\frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u(x, y, z, t))}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \Delta f(\mathbf{r}, t) &= \Delta f(u(\mathbf{r}, t)) \\
 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u(x, y, z, t)) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u(x, y, z, t)) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(u(x, y, z, t)) \right) \\
 &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} u \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} u \right)^2 \right) \\
 &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\
 &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (\mathbf{k}^2)
 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Damit lautet die Wellengleichung mit Gleichung (6.2.3), Gleichung (6.2.6), Gleichung (6.2.4) und Gleichung (6.2.7)

$$\begin{aligned}
 c^2 \Delta f(\mathbf{r}, t) &= c^2 \Delta f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{r}, t) \\
 c^2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot (\mathbf{k}^2) &= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \cdot \omega^2 \\
 c^2 \mathbf{k}^2 &= c^2 |\mathbf{k}|^2 = \omega^2
 \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Damit können wir sagen:

Jede Funktion $\mathbf{E}(u)$ mit $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ ist eine Lösung der Wellengleichung

$$c^2 \Delta \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(u(\mathbf{r}, t)),$$

sofern

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \tag{6.2.9}$$

gilt.

6.3. Elektromagnetische Wellen im Doppelleitersystem

Wir untersuchen die Wellenphänomene an 3 Testsystemen,

- A. Doppelleitung oder *Lecher-Leitung*, die besonders einfach auszumessen ist
- B. Der Doppelleitung aus parallelen Ebenen, die wichtig für die Printplattentechnologie ist und besonders einfach zu berechnen ist

C. dem Koaxialkabel, der technisch wichtigen Anwendung für Verbindungen.



Versuch zur Vorlesung:

Lecherleitung (Versuchskarte SW025)



Versuch zur Vorlesung:

Koaxialleitung (Versuchskarte SW085)

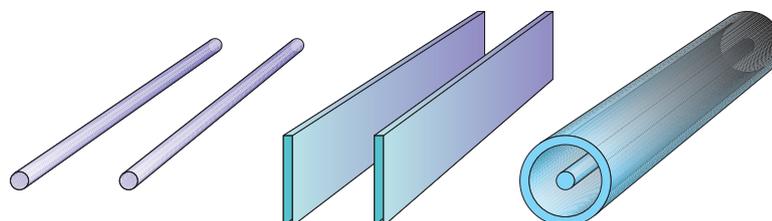
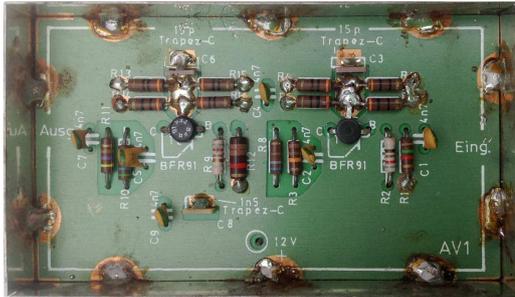


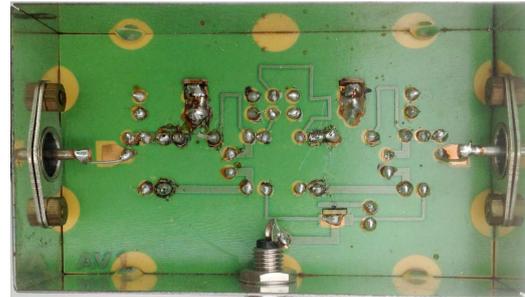
Abbildung 6.1.: 3 mögliche *Doppelleitersysteme*. Links die Lecherleitung, in der Mitte eine Doppelleiterleitung, wie sie bei Printplatten üblich ist und rechts ein Koaxialkabel

Wenn man das Doppelleitersystem mit elektromagnetischen Wellen mit einer Wellenlänge von etwa $\lambda = 1\text{m}$ speist, beobachtet man folgendes

1. Das am Ende offene Doppelleitersystem zeigt Knoten und Bäuche des \mathbf{E} - und des \mathbf{B} -Feldes in Richtung ℓ . Der Abstand der Intensitätsmaxima beträgt $\lambda/2$ für beide Felder. Die Maxima der \mathbf{E} -Feldes sind gegen denen des \mathbf{B} -Feldes verschoben. Wir haben stehende Wellen.
2. Das am Ende mit einem Kurzschlussbügel versehene System zeigt das gleiche Verhalten wie vorher. Die Maxima sind jedoch verschoben. Wieder haben wir stehende Wellen.
3. Wenn das Doppelleitersystem mit einem Widerstand von etwa 400Ω abgeschlossen ist, verschwinden die Maxima. Es gibt keine stehenden Wellen.
4. Die Richtungen von \mathbf{E} und \mathbf{B} sind analog wie beim Kondensator.



Ansicht von oben
Bestückungsseite



Ansicht von unten
Seite mit Wellenleitern

Abbildung 6.2.: 800 MHz-Breitbandverstärker für Fernsehsignale. Auf der Unterseite sind die Wellenleiterstrukturen sichtbar (Mittlere Struktur in Abbildung 6.1)

Abbildung 6.2 zeigt beispielhaft eine Hochfrequenzschaltung. Die Wellenlänge der verstärkten Signale ist zwar einiges grösser als die Schaltung. Die auf der Unterseite sichtbaren Wellenleiterstrukturen verhindern eine unkontrollierte Abstrahlung elektromagnetischer Energie.

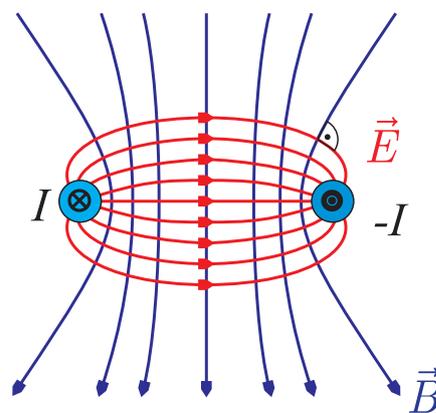


Abbildung 6.3.: Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Lecherleitung.

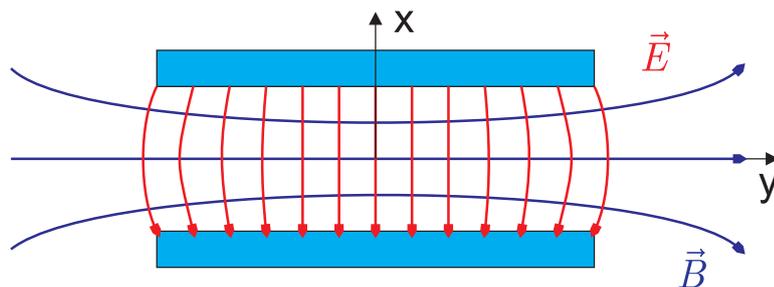


Abbildung 6.4.: Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Doppelleitung aus parallelen Platten

Wir setzen für die \mathbf{E} -Welle in der Geometrie der obigen Zeichnung an

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= 0 \\ E_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Dieses Feld erfüllt die Wellengleichung. Wir behaupten, dass das \mathbf{B} -Feld durch

$$\begin{aligned} B_x(z, t) &= 0 \\ B_y(z, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \\ B_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

gegeben ist. Auch diese Gleichung erfüllt sie Wellengleichung. Wir verwenden die zweite Maxwellgleichung, um zu zeigen, dass die Kopplung richtig ist. Wir schreiben $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{B}$ in Komponenten

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \quad (6.3.3)$$

Die x - und die z -Komponenten sind null, nach der Voraussetzung. Die y -Komponente lautet

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (6.3.4)$$

Mit $c = \omega/k$ ist diese Kopplungsgleichung, die zweite Maxwellgleichung erfüllt. Die vierte Maxwellgleichung ist ebenfalls erfüllt. Aus ihr erhält man

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (6.3.5)$$

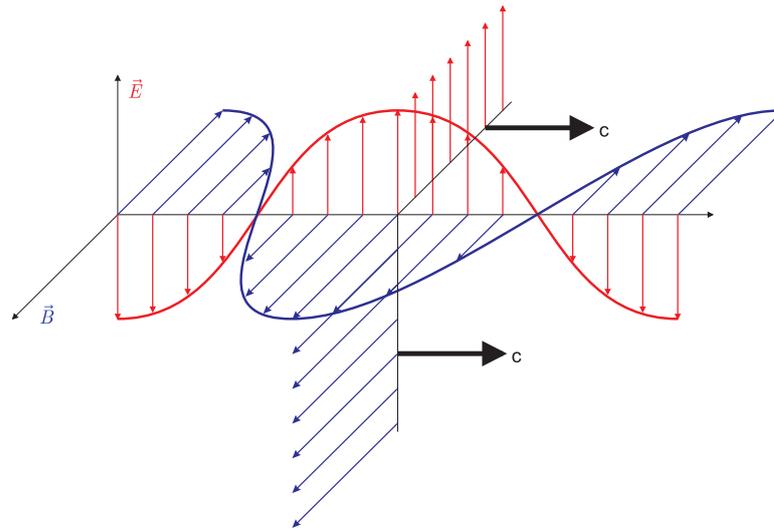


Abbildung 6.5.: Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen

Diese elektromagnetischen Wellen im Innenraum zwischen den beiden Leitern müssen auch in den angrenzenden Leitern Ladungswellen und Stromwellen erzeugen, die mit den Maxwellgleichungen kompatibel sind. Für die *Ladungen* gilt mit der ersten Maxwellischen Gleichung für die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma(z, t) = -\varepsilon_0 E_x(z, t) = \varepsilon_0 E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.6)$$

Die Oberflächenladungsdichte ist eine fortlaufende Welle. Die Erhaltung der elektrischen *Ladung* bedingt für die Oberflächenladungsdichte in einem Abschnitt der Breite b

$$b \cdot [j(z + dz, t) - j(z, t)] = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} \cdot b \cdot dz \quad (6.3.7)$$

und damit

$$\frac{\partial j(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma(z, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 E_0 \cdot \omega \cdot \sin(kz - \omega t) \quad (6.3.8)$$

Die Integration über z und die Verwendung von $c = \omega/k$ ergibt

$$j(z, t) = \varepsilon_0 E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.9)$$

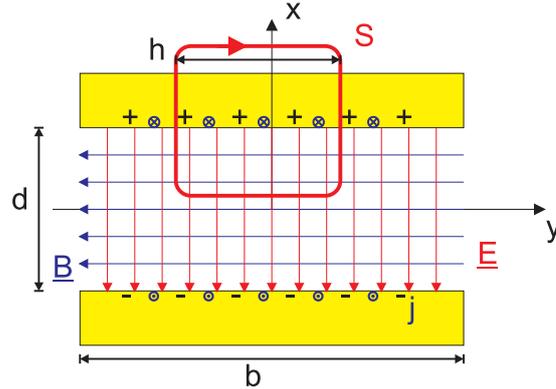


Abbildung 6.6.: Integrationspfad zur Anwendung des vierten Maxwell'schen Gesetzes

Mit dem vierten Maxwell'schen Gesetz $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{A(S)} \mu_0 \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}$ er-

halten wir mit dem eingezeichneten Integrationsweg, da der Term mit \mathbf{E} keinen Beitrag gibt (er liegt in der Integrationsebene)

$$-B_y(z, t) \cdot h = \mu_0 \cdot h \cdot j(z, t) = \mu_0 \cdot h \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.10)$$

Mit $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$ folgt

$$B_y(z, t) = -\frac{E_0}{c} \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.11)$$

eine identische Gleichung zu der im Zwischenraum abgeleiteten. Die Lösung für die auf dem Zweileitersystem transportierten Wellen ist also kompatibel mit den Maxwellgleichungen. *Ladungen* und *Ströme* bewegen sich als Wellen auf der Innenseite der Leiter.

6.3.1. Wellenwiderstand

Durch die in Abschnitt 6.3 abgeleiteten Gleichungen sind an jedem Ort z entlang des Doppelleitersystems und zu jeder Zeit t die lokal fließenden Ströme $I(z, t)$ und die elektromotorische Kraft (Spannung) $U_{EMK}(z, t)$ gegeben. Wenn wir nun an einer festen Stelle z in Gedanken einen ohmschen Widerstand zwischen den beiden Leitern einfügen, so muss dieser Widerstand einen vom Wellenleitersystem gegebenen Wert haben, dass die elektromotorische Kraft $U_{EMK}(z, t)$ genau den Strom $I(z, t)$ durch den Widerstand treibt. U_{EMK} und I sind dabei von der Wellengleichung gegeben. Nur wenn der Widerstand angepasst ist, also wenn

$$U_{emk}(z, t) = \int_{\text{unten}}^{\text{oben}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d \cdot E_x(z, t) = d \cdot E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.12)$$

gilt, wird aller Strom verbraucht. In allen anderen Fällen bleibt Strom übrig, der an der Stelle reflektiert werden kann, oder die elektromotorische Kraft treibt zusätzlichen Strom durch den Widerstand: dieser wird mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert.

Der gesamte Oberflächenstrom auf der oberen Platte an der Stelle z ist

$$I(z, t) = b \cdot j(z, t) = b \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0 \cdot c \cdot \cos(kz - \omega t) \quad (6.3.13)$$

Wenn man an einer beliebigen Stelle das Doppelleitersystem entzweischneidet und dort den Widerstand

$$R^* = \frac{U_{emk}(z, t)}{I(z, t)} = \frac{d}{b} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (6.3.14)$$

den *Wellenwiderstand*, anschliesst, gibt es einen reflexionsfreien Abschluss, wir haben eine reine fortlaufende Welle. Das gleiche gilt für jede beliebige fortlaufende Welle, auch wenn sie nicht harmonisch ist.

Das Zweidraht-Doppelleitersystem hat den Wellenwiderstand

$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{4a}{d}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (6.3.15)$$

Die Grösse

$$R_0^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega \quad (6.3.16)$$

ist der Wellenwiderstand des Vakuums.

6.3.2. Stehende Wellen

Stehende Wellen werden aus zwei fortlaufenden Wellen mit entgegengesetztem Wellenvektor \mathbf{k} zusammengesetzt. Dabei müssen \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden¹. Die nach rechts laufende Welle wurde schon berechnet (hier sind nur die von null verschiedenen Komponenten angegeben)

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \\ B_y(z, t) &= -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Die nach links laufende Welle ist dann gegeben durch (Rechtssystem!)

$$\begin{aligned} E'_x(z, t) &= -E_0 \cos(kz + \omega t) \\ B'_y(z, t) &= \frac{E_0}{c} \cos(kz + \omega t) \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Die Superposition der beiden Wellen ergibt die folgenden nicht verschwindenden Komponenten

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= -2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \\ \hat{B}_y(z, t) &= -2\frac{E_0}{c} \sin(kz) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Im Gegensatz zu laufenden Wellen sind bei **stehenden Wellen** die Maxima der \mathbf{E} -Felder und der \mathbf{B} -Felder gegeneinander um $\lambda/4$ verschoben.

¹Wegen der Rotation in den Maxwellgleichungen!

6.4. Poynting-Vektor und Energiefluss

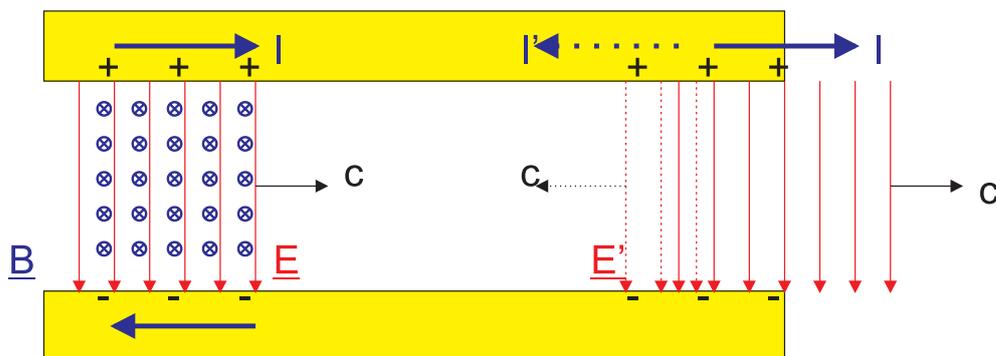


Abbildung 6.7.: Berechnung des Poynting-Vektors

Wir hatten gesehen, dass das elektrische wie das magnetische Feld eine Energiedichte haben. Da sich bei Wellen diese Felder mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, muss es einen Energiefluss geben. Wir betrachten einen Rechteckpuls auf einem Zweileitersystem. Der Energiefluss durch eine raumfeste Fläche $A = b \cdot d$ bezeichnen wir mit S_z , dem Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit. Die in der Zeit dt transportierte Energie ist

$$S_z \cdot A \cdot dt = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right) \cdot A \cdot dt \cdot c \quad (6.4.1)$$

Für beliebige fortlaufende Wellen im Vakuum gilt

$$B_y(z, t) = \frac{1}{c} E_x(z, t) \quad (6.4.2)$$

Wir können damit die Gleichung (6.4.1) symmetrisch schreiben

$$\begin{aligned} S_z &= \left(\frac{\varepsilon_0 \cdot c}{2} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0 \cdot c} E_x \cdot B_y \right) \cdot c \\ &= \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y + \frac{1}{2\mu_0} E_x \cdot B_y \\ &= \frac{1}{\mu_0} E_x \cdot B_y \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Mit $H = \frac{1}{\mu\mu_0} B = \frac{1}{c\mu\mu_0} E = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E$ bekommen wir

$$S = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 \quad (6.4.4)$$

Damit ist auch klar, dass das \mathbf{E} -Feld und das \mathbf{B} -Feld je zur Hälfte zum Energiefluss beitragen.

Die allgemeine Form des Energieflusses im Vakuum ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4.5)$$

In Medien muss der Energiefluss wie

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4.6)$$

geschrieben werden. $|\mathbf{S}|$ gibt die in Richtung \mathbf{S} fließende Energie pro Flächeneinheit und Zeit wieder. Die Einheit von S ist $J/(m^2 \cdot s)$. Da \mathbf{H} und \mathbf{B} über einen Tensor verbunden sein können, muss der Energiefluss nicht unbedingt in die Richtung des Wellenvektors zeigen. Dieses Verhalten ist die Grundlage von optisch doppelbrechenden Materialien.

6.5. Elektromagnetische Wellen im Raum

Hier soll mit einer beschleunigten *Ladung* erklärt werden, wie Wellen im Raum entstehen.



Versuch zur Vorlesung:
Hertzscher Dipol (Versuchskarte SW099)



Versuch zur Vorlesung:
Stehende Wellen (Versuchskarte SW032)

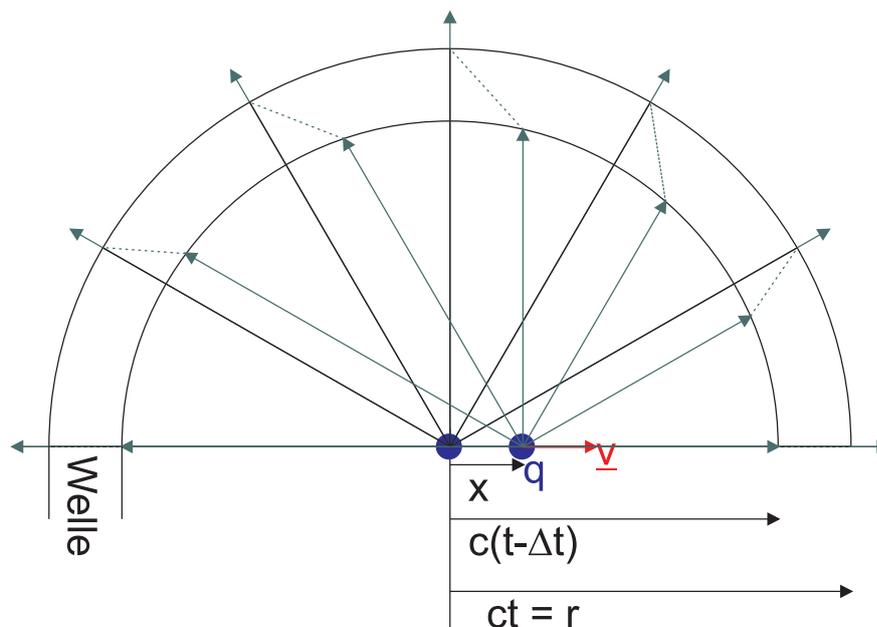


Abbildung 6.8.: Wellenausbreitung

Wir betrachten eine *Ladung* q , die die folgende Geschwindigkeit hat

$$\mathbf{v} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ \mathbf{a} \cdot t & \text{für } 0 \leq t < \Delta t \\ \mathbf{a} \cdot \Delta t & \text{für } t \geq \Delta t \end{cases}$$

Die Beschleunigungszeit Δt sowie die Beschleunigung \mathbf{a} sollen so gewählt sein, dass

$$a \cdot \Delta t = v \ll c$$

gilt. Die Behauptung ist, dass das elektrische Feld \mathbf{E} für $t \gg \Delta t$ wie in der Zeichnung oben aussieht. In der Beschleunigungsphase soll eine elektromagnetische Welle erzeugt worden sein. Ausserhalb der Kugel mit dem Radius

$$r = c \cdot t$$

muss das elektrische Feld das Feld einer im Ursprung ruhenden *Ladung* sein, da nach der *Relativitätstheorie* die Information über die Beschleunigung diesen Raum noch nicht erreicht haben kann.

Innerhalb der Kugel mit

$$r \leq c(t - \Delta t)$$

haben wir das Feld der *Ladung* q , die sich mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt, denn in diesem Bereich ist die noch unbekannte Welle erzeugt durch die Beschleunigung einer Ladung schon wieder vorbei. Die Feldlinien im Laborsystem können wir erhalten, indem wir das elektrische Feld im Ruhesystem der *Ladung* (radiale Feldlinien) in das Laborsystem transformieren. Wenn $v \ll c$ ist, haben wir auch im Laborsystem radiale Feldlinien, die von der momentanen Position der *Ladung* weggehen. **Die Maxwellgleichung im Vakuum $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ bedingt, dass die Feldlinien geschlossen und stetig sind.** Die Vermutung ist, dass die Feldlinien in der Wellenzone linear die beiden Feldlinienmuster miteinander verbinden.

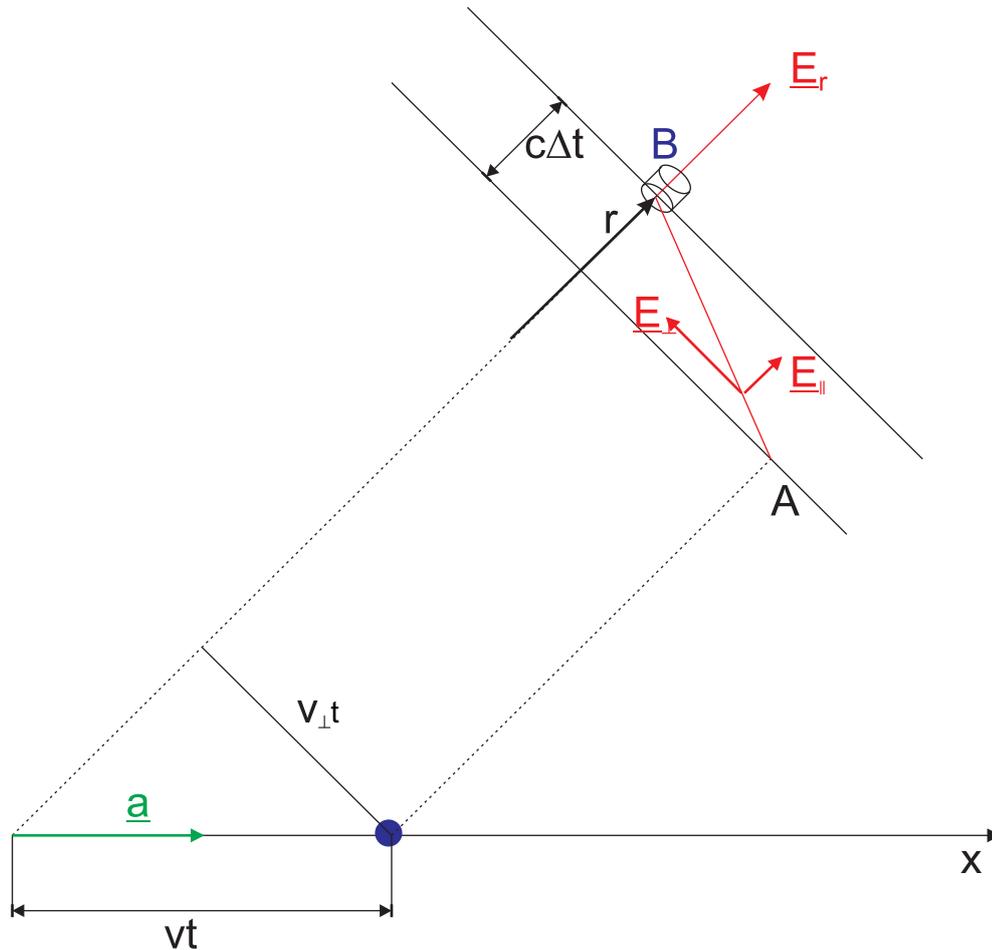


Abbildung 6.9.: Berechnung der Wellenausbreitung

Da $t \gg \Delta t$ ist, kann die Beschleunigungsphase für die Bestimmung der Position der *Ladung* zur Zeit t vernachlässigt werden. Wir haben also

$$x(t) = v \cdot t \quad (6.5.1)$$

Wegen $v \ll c$ ist dann auch

$$r = c \cdot t \gg x \quad (6.5.2)$$

sowie wegen $t \gg \Delta t$ auch

$$r \gg c \cdot \Delta t \quad (6.5.3)$$

Wir bezeichnen mit \perp die Richtung senkrecht zum Radiusvektor \mathbf{r} . Wir erhalten dann, unter der Annahme, dass das \mathbf{E} -Feld in der Wellenzone linear sei,

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{v_{\perp} \cdot t}{c \cdot \Delta t} \quad (6.5.4)$$

Mit

$$v_{\perp} = a_{\perp} \cdot \Delta t \quad (6.5.5)$$

sowie mit $t = r/c$ bekommen wir

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = a_{\perp} \frac{r}{c^2} \quad (6.5.6)$$

Andererseits, wenn wir die Integralform der ersten Maxwellgleichung auf den kleinen Zylinder an der Stelle \mathbf{r} anwenden, erhalten

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (6.5.7)$$

und damit mit dem Coulombgesetz

$$E_{\parallel} = E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (6.5.8)$$

Dies bedeutet, dass das radiale \mathbf{E}_r -Feld sich stetig durch die Kugelschale hindurch fortsetzt. Die Komponente \mathbf{E}_{\perp} existiert nur in der Wellenzone. Das \mathbf{E}_{\perp} -Feld ist das gesuchte Feld der elektromagnetischen Feldes, das *Strahlungsfeld*. Seine Grösse ist

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a_{\perp}}{c^2 \cdot r} \quad (6.5.9)$$

Vektoriell geschrieben lautet diese Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{a}_{\perp}(t')}{r} \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (6.5.10)$$

Das elektrische Feld \mathbf{E} an der Stelle \mathbf{r} ist proportional zur senkrechten Komponente der Beschleunigung, aber zur *retardierten Zeit* $t' = t - r/c$. Zum Strahlungsfeld gehört auch ein \mathbf{B} -Feld, das so gerichtet ist, dass \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} ein Rechtssystem bilden. \mathbf{k} ist die Ausbreitungsrichtung. Das Magnetfeld ist, in vektorieller Schreibweise,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \right) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.5.11)$$

Wenn wir Δt halbieren, bleibt der äussere Teil der des Strahlungsfeldes konstant, der innere Teil liegt dann in der Mitte der Verbindungslinie durch die Wellenzone. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens wird die Linearität des elektrischen Feldes in der Wellenzone gezeigt.

Wenn $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ist, gilt die Vektoridentität $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b}$. Also ist im Vakuum

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \right) \times \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 c} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.12)$$

Also ist \mathbf{S} kollinear zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} . Mit $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$ erhalten wir auch im Vakuum

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.13)$$

Diese Gleichung kann auf lokal isotrope Medien erweitert werden (ε und μ sind Zahlen!)

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (6.5.14)$$

Beispiel: Ein Elektron in einem Atom führe in die z -Richtung die harmonische Bewegung

$$z(t') = z_0 \cdot \sin \omega t' \quad (6.5.15)$$

aus. Dabei ist t' die retardierte Zeit. Die Beschleunigung ist

$$a(t') = \ddot{z}(t') = -z_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t' \quad (6.5.16)$$

Das elektrische Feld ist

$$E(r, \Theta, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta \quad (6.5.17)$$

Das Magnetfeld ist

$$B(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} E(r, \Theta, t) \quad (6.5.18)$$

Der Poynting-Vektor oder Energiefluss ist

$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t) \quad (6.5.19)$$

Mit $\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle_t = 1/2$ wird die Intensität

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\varepsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2} \quad (6.5.20)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Annahme eines harmonischen Oszillators das Strahlungsfeld eines Atoms erklären kann. Die abgeführte Energie dämpft dabei den Oszillator. Je stärker die Dämpfung ist, das heisst, je kürzer die Lebensdauer ist, desto breiter wird das Frequenzspektrum sein.

6.5.1. Ebene Wellen

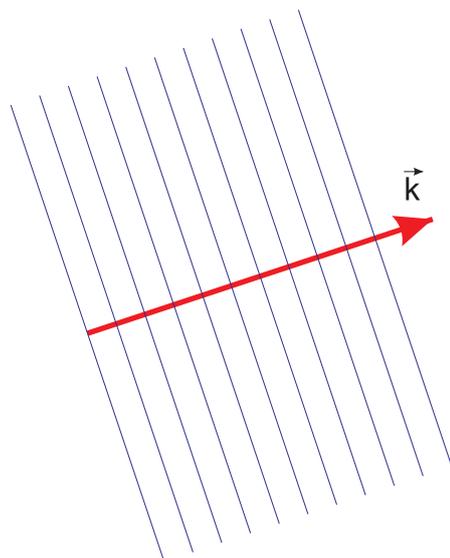


Abbildung 6.10.: Bild einer ebenen Welle

Eine ebene Welle entsteht aus der allgemeinen Wellengleichung dadurch, dass die *Amplitude* und der Wellenvektor nicht vom Ort abhängen. Eine ebene Transversalwelle des elektromagnetischen Feldes ist durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (6.5.21)$$

gegeben. Der Vektor \mathbf{k} , der , gibt die Ausbreitungsrichtung an, der Betrag $|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ heisst die *Wellenzahl*. Bei elektromagnetischen Wellen im Sichtbaren kann man alternativ auch von *Lichtstrahlen* sprechen. Zum Vergleich, eine Longitudinalwelle ist eine örtliche Schwankung einer skalaren Funktion, zum Beispiel, des Druckes, gegeben durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (6.5.22)$$

6.5.2. Kugelwellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 48, 710]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 287])



Versuch zur Vorlesung:

Wellenwanne (Versuchskarte O-021)

Eine weitere häufig vorkommende Form von Wellen sind die Kugelwellen. Wir können die Amplitudenabhängigkeit durch folgende Überlegung erhalten.

- Wir denken uns eine Kugeloberfläche um die Quelle, wobei die Quelle im Mittelpunkt der Kugel sein soll.

- Der Energiefluss pro Zeit, die Leistung, die durch die gesamte Kugeloberfläche fließt ist konstant, unabhängig vom Radius der Kugel.
- Damit diese Gleichung für alle r gilt muss $E(r) = E_0 \frac{r_0}{r}$ sein.

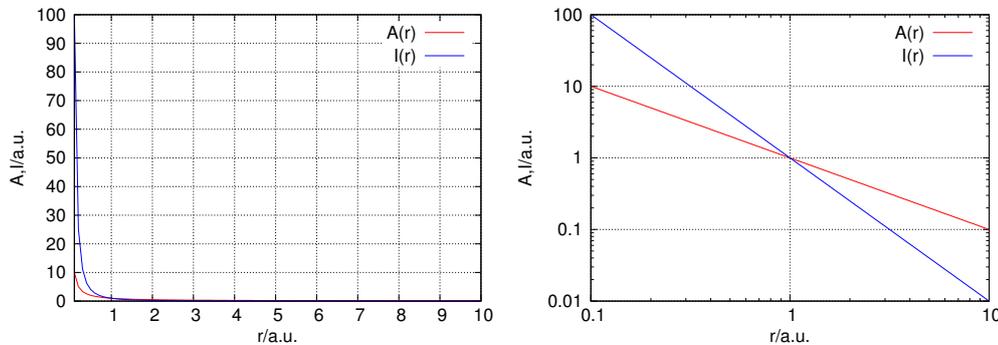


Abbildung 6.11.: *Amplitude* und *Intensität* einer Kugelwelle in Abhängigkeit der Distanz r von der Quelle. Links eine lineare, rechts eine logarithmische Darstellung.

Bei elektromagnetischen Wellen gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{\hat{\mathbf{E}}_0(\phi, \theta)}{r} \cos(kr - \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0(\phi, \theta) \quad (6.5.23)$$

Bei einer Kugelwelle ist

- die *Amplitude*: $E(r) = E_0 \frac{r_0}{r}$
- die *Intensität* $I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

6.6. Lichtgeschwindigkeit im Medium und Intensität

In einem Medium bewegen sich elektromagnetische Wellen langsamer. Die einfallende Welle regt die polarisierbaren Atome zum Schwingen an. Diese schwingen mit der gleichen Frequenz, aber mit einer frequenzabhängigen Phasenverschiebung. Die Resonanzfrequenz des Elektron-Atomrumpfsystems liegt im Ultravioletten. In der Summe wird die elektromagnetische Welle durch diese mit der zunehmenden Frequenz zunehmenden Phasenverschiebung verlangsamt. Mit dem (frequenzabhängigen) *Brechungsindex* $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ bekommt man

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}} = \frac{c}{n} \quad (6.6.1)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die *Brechzahl* oder der *Brechungsindex* n gibt an, um wieviel langsamer elektromagnetische Wellen in einem Medium sind als im Vakuum. Die *Intensität* ist gegeben durch den Mittelwert des Poynting-Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{r}) \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Für harmonische Schwingungen erhält man für die auf die Fläche mit der Flächennormale \mathbf{a} einfallende Intensität

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) &= \langle |\mathbf{S}(\mathbf{r})| \rangle_t = \frac{1}{2} \mathbf{S}_0(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} |\mathbf{E}|^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \\ &= \frac{n \varepsilon_0 c}{2 \mu} E^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

wenn E das elektrische Feld, d.h. eine der beiden möglichen Amplituden der elektromagnetischen Welle ist. $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm}$ ist die *Vakuumpermittivität* und $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ entsteht durch die Mittelung über viele Perioden. Bei nichtmagnetischen Materialien ($\mu = 1$) kann man auch schreiben:

$$I_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \frac{n \varepsilon_0 c}{2} E^2 \cos(\angle \mathbf{S}_0, \mathbf{a}) \quad (6.6.3)$$

Gleichung (6.6.2) kann auch so geschrieben werden:

$$I = \frac{n}{\mu} E^2 \cdot 1.3272 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V} \quad (6.6.4)$$

6.7. Polarisation



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 475]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])

Versuch zur Vorlesung: Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator

Elektromagnetische Wellen (auch Licht) sind transversale Wellen. Das heißt, dass das elektrische und das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Die Wellengleichung für das elektrische Feld und damit auch für die elektromagnetischen Wellen sind durch $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ gegeben. Die Tatsache, dass wir eine Transversalwelle haben erfordert, dass \mathbf{E}_0 der Bedingung

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (6.7.1)$$

gilt.

Wenn wir nun, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Ausbreitungsrichtung der Welle in die x-Richtung legen, dann sind

- der Wellenvektor $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$
- und die Amplitude $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$

Diese Wahl erfüllt die Bedingung der Transversalität.

Es gibt zwei mögliche orthogonale Orientierungen von \mathbf{E}_0 sowie die daraus folgenden Linearkombinationen. Die Richtung, in die \mathbf{E}_0 zeigt ist die **Polarisationsrichtung**.



6.7.1. Polarisation durch Absorption (*Dichroismus*)



(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 323]) (Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 487]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])

Versuch zur Vorlesung: [Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator](#)

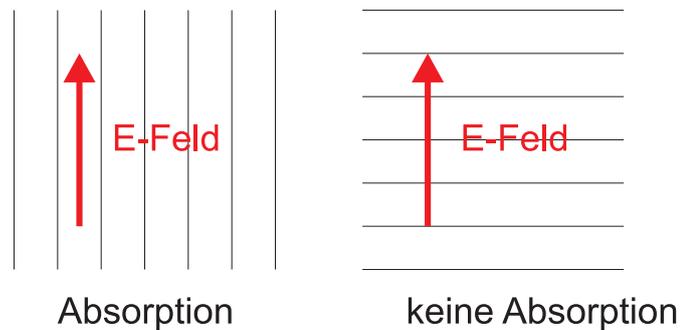


Abbildung 6.12.: Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator

Wenn das elektrische Feld einer Mikrowellen entlang eines Drahtes zeigt, kann dieses Feld im Draht Ladungen bewegen und so Energie abgeben. Die *Intensität* der Welle und damit die die Absorption hängen von der **Polarisation** ab.

Ebenso gibt es Moleküle mit Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, bei denen π -Elektronen beweglich sind, die wie Drähte wirken. Werden diese Moleküle orientiert zu einer Folie gemacht, so erhält man eine polarisierende Folie.

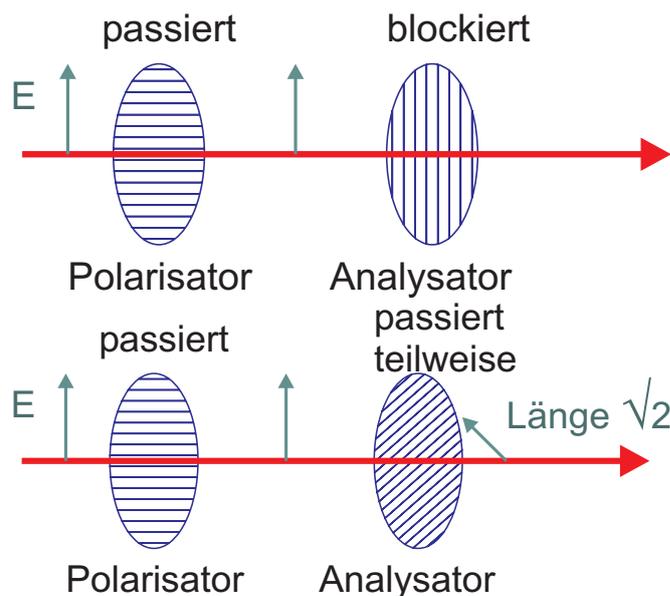


Abbildung 6.13.: Elektromagnetische Wellen durchstrahlen durch einen *Polarisator* und einen *Analysator* mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der *Analysator* ist nun um $\pi/4$ gedreht.

Bei einer Anordnung von *Analysator* und *Polarisator* polarisiert der *Polarisator* die elektromagnetische Welle. Der *Analysator* lässt nur die Projektion des \mathbf{E} -Feldes auf seine Durchlassachse durch. Für die *Amplitude* gilt

$$E = E_0 \cos \theta \quad (6.7.2)$$

wobei θ der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen von *Polarisator* und *Analysator* ist. Da die *Intensität* der elektromagnetischen Welle durch $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2$ ist und somit proportional zum Quadrat der *Amplitude* $I \propto E^2$, gilt

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (6.7.3)$$

(Gesetz von Malus). Wenn zwischen gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren eine Substanz eingebracht wird, die die Polarisationsebene der elektromagnetischen Welle dreht (eine „optisch aktive Substanz“) eingebracht wird, kann mit dieser Anordnung die Größe der optischen Aktivität gemessen werden².

²Die Analyse von Spannungen in Bauteilen nachgebildet mit Plexiglas war eine wichtige Anwendung (heute gibt es Programme zur Finite-Elemente-Analyse)

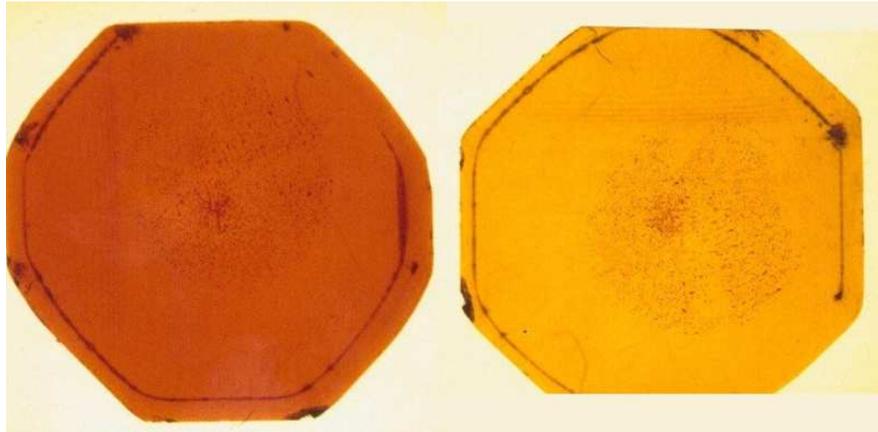


Abbildung 6.14.: Dichroismus in einem Kristall von NaVO_4Mn (gezüchtet von A. Lentz, fotografiert von M. Pietralla, verwendet mit Erlaubnis des Fotografen).



6.8. Die Fresnelschen Formeln

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 190]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 539])



Abbildung 6.15.: Das gleiche Gebäude mit Polarisationsfilter aufgenommen. Die Achse des Polarisationsfilters wurde dabei um 90° gedreht. Links sind die Reflexionen im Glas kaum zu erkennen, rechts ist dafür der Kontrast des Himmels schwächer.

Die beiden Aufnahmen in Abbildung 6.15 wurden mit dem *Polarisationsfilter* in zwei um 90° gedrehten Stellungen aufgenommen. Aus den Abschnitten 2.9, 6.5 und 6.7.1 wissen wir, dass Licht vom Himmel polarisiert ist. Links wird durch den Polarisator das diffus gestreute Licht mit der falschen Polarisation unterdrückt. Links ist die Spiegelung des linken Gebäudes im rechten nicht sichtbar, Die Fensterfront ist hell. Rechts ist das linke Gebäude dunkel. Das bedeutet, dass das gespiegelte Licht polarisiert ist. Die im folgenden abgeleiteten Fresnelschen Formeln erklären dieses Phänomen, aber auch die Spiegelung an Metallen. Sie beschreiben die

Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Grenzflächen jeder Art.



Versuch zur Vorlesung:

Fresnelsche Formeln (Versuchskarte O-039)

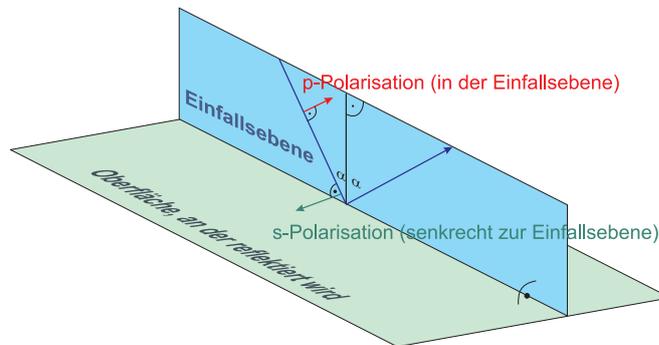


Abbildung 6.16.: Definition der *s-Polarisation* und der *p-Polarisation*

Die *Reflexion* und die *Brechung* von elektromagnetischen Wellen werden durch die Maxwell'schen Gleichungen und die daraus abgeleiteten Randbedingungen bestimmt. Die resultierenden Beziehungen für die Amplituden und die Intensitäten werden die *Fresnelschen Formeln* genannt. Zur Berechnung verwenden die Definitionen

- Der einfallende und der reflektierte Strahl elektromagnetischer Wellen definiert die *Einfallsebene*. Diese ist senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationsebene senkrecht zur *Einfallsebene* liegt, heißen *s-polarisiert*. Die Polarisationsebene gibt die Richtung des elektrischen Feldes an.
- Elektromagnetische Wellen, deren Polarisationsebene parallel zur *Einfallsebene* liegt, heißen *p-polarisiert*.
- Für die *Intensität* der elektromagnetischen Wellen in nichtmagnetischen Medien gilt $I \propto \sqrt{\varepsilon} E^2$, wobei $\varepsilon = n^2$ ist.
- Genauer gilt für die Intensität: $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \frac{n \varepsilon_0 c}{2 \mu} E^2$ für sinusförmige Wellen mit der Amplitude E .

Wir betrachten eine Welle \mathbf{E}_0 , die aus dem Medium mit μ_1 und ε_1 auf eine ebene Grenzfläche zum Medium mit μ_2 und ε_2 fällt. Neben der einfallenden Welle existieren eine reflektierte und eine transmittierte elektromagnetische Welle

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= \mathfrak{E}_e \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_e t) \\ \mathbf{E}_r &= \mathfrak{E}_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r) \\ \mathbf{E}_t &= \mathfrak{E}_t \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t) \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

Gegeben sind \mathfrak{G}_e , μ_1 , ε_1 , μ_2 , ε_2 , \mathbf{k}_e und $\omega_e (|\mathbf{k}_e|)$. An den Grenzflächen gilt

- Die tangentielle Komponente von \mathbf{E} ist stetig.
- Die tangentielle Komponente von \mathbf{H} ist stetig.

Sei \mathbf{e}_n der Normaleneinheitsvektor auf die Grenzfläche. Der resultierende Vektor des Kreuzproduktes mit \mathbf{e}_n liegt senkrecht zu \mathbf{e}_n und damit in der Grenzfläche der beiden Medien. Unabhängig von der Richtung von \mathbf{E}_e bekommt man mit dieser Operation immer die Tangentialkomponente von \mathbf{E}_e zur Grenzfläche

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.2)$$

Mit der gleichen Methode kann man auch die Komponenten der Vektoren \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_t in der Grenzfläche berechnen. Die Bedingung der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes kann dann mit den Kreuzprodukten so geschrieben werden

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_r \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_n \quad (6.8.3)$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes im Medium 1 (einfallende und reflektierte Welle) gleich der Tangentialkomponente der transmittierten Welle ist. Ausgeschrieben erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times \mathfrak{G}_e \cos(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t) \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathfrak{G}_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r) \times \mathbf{e}_n \\ = \mathbf{e}_n \times \mathfrak{G}_t \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t) \times \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

Die Gleichung (6.8.4) muss für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gelten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)|_{\text{Grenzfläche}} &= \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)|_{\text{Grenzfläche}} \\ &= \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)|_{\text{Grenzfläche}} \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

wobei \mathbf{r} nach Definition ein Vektor in der Grenzfläche ist, also mit $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r} = 0$. Damit Gleichung (6.8.5) zu allen Zeiten an einem beliebigen Punkt gilt, müssen die Kreisfrequenzen gleich sein

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \quad (6.8.6)$$

Weiter muss dann gelten: Die Gleichung (6.8.4) muss für alle Zeiten und alle Orte auf der Grenzfläche gelten. Deshalb gilt

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}|_{\text{Grenzfläche}} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \varphi_r|_{\text{Grenzfläche}} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \varphi_t|_{\text{Grenzfläche}} \quad (6.8.7)$$

\mathbf{r} zeigt auf einen Punkt in der Grenzfläche, ist im Allgemeinen nicht parallel zu ihr. Aus der ersten Gleichung in (6.8.7) folgt

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r})_{\text{Grenzfläche}} = \varphi_r \quad (6.8.8)$$

Eine Gleichung vom Typ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \varpi$ beschreibt eine Ebene. Die Endpunkte von \mathbf{r} liegen in der Ebene mit dem Normalenvektor \mathbf{a} . ϖ gibt die Verschiebung zum Nullpunkt an. Gleichung (6.8.8) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht

zu $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$ liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass \mathbf{r} in der Grenzfläche mit dem Normalenvektor \mathbf{e}_n liegt. \mathbf{e}_n ist also parallel zu $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r$. Weiter sind beide Wellen im gleichen Medium 1, das heisst $|\mathbf{k}_e| = k_e = |\mathbf{k}_r| = k_r$. Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r) = 0 \quad (6.8.9)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_r \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad (6.8.10)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen der Oberflächennormale \mathbf{e}_n und dem Wellenvektor der einfallenden Welle \mathbf{k}_e und β der Winkel zwischen der Oberflächennormale \mathbf{e}_n und dem Wellenvektor der reflektierten Welle \mathbf{k}_r .

Das Reflexionsgesetz besagt, dass

$$\alpha = \beta$$

(Einfallswinkel=Ausfallswinkel)

Aus Gleichung (6.8.7) folgt weiter

$$((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r})_{\text{Grenzfläche}} = \varphi_t \quad (6.8.11)$$

Gleichung (6.8.8) ist also die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zu $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$ liegt. Andererseits wissen wir, nach unserer Konstruktion, dass \mathbf{r} in der Grenzfläche mit dem Normalenvektor \mathbf{e}_n liegt. \mathbf{e}_n ist also parallel zu $\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t$. Wir können also schreiben

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_t) = 0 \quad (6.8.12)$$

Mit Beträgen geschrieben heisst dies

$$k_e \sin \alpha = k_t \sin \gamma \quad (6.8.13)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen der Oberflächennormale \mathbf{e}_n und dem Wellenvektor der einfallenden Welle \mathbf{k}_e und γ der Winkel zwischen der Oberflächennormale \mathbf{e}_n und dem Wellenvektor der transmittierten Welle \mathbf{k}_t . Aus der Wellengleichung folgt

$$\frac{\omega}{k_i} = c_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_0 \varepsilon_i \varepsilon_0}} \quad (6.8.14)$$

Da $\omega_e = \omega_r = \omega_t$ ist, kann Gleichung (6.8.13) auch als

$$\frac{\omega_e}{c_e} \sin \alpha = \frac{\omega_t}{c_t} \sin \gamma \quad (6.8.15)$$

oder

$$\sqrt{\mu_1 \mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_0} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \mu_0 \varepsilon_2 \varepsilon_0} \sin \gamma \Rightarrow \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin \gamma \quad (6.8.16)$$

Mit der Definition (6.6.1) bekommt man auch

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\gamma) \quad (6.8.17)$$

Dies ist das Brechungsgesetz nach Snellius.

Zur Berechnung der Amplitude der reflektierten und transmittierten Wellen mit einer allgemeinen Polarisation verwenden wir zwei orthogonale Polarisationsrichtungen, die s-Polarisation und die p-Polarisation. Jeder Polarisationszustand kann als Linearkombination der s-Polarisation und der p-Polarisation geschrieben werden.

6.8.1. s-Polarisation

Wir beginnen die Rechnungen für elektromagnetische Wellen mit einer Polarisation senkrecht zur *Einfallebene* (*s-Polarisation*).

Wenn in den beiden angrenzenden Medien die *Dielektrizitätskonstanten* ε_1 und ε_2 sind, dann muss der *Pointingvektor* (Energiestrom) senkrecht zur Grenzfläche an der Grenzfläche kontinuierlich sein, also

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} E_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.18)$$

wobei α und γ die Winkel zur *Oberflächennormalen* \mathbf{e}_n sind, E_e ist die E -Feldkomponente der einfallenden elektromagnetischen Welle parallel zur *Oberfläche* (s-Polarisation), E_r die der reflektierten und E_t die der gebrochenen elektromagnetischen Welle.

Vereinfacht kann man die Energieerhaltung schreiben als

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.19)$$

Die Komponente von \mathbf{E} parallel zur *Oberfläche* muss stetig sein, also ist nach Gleichung (6.8.3)

$$E_e + E_r = E_t \quad (6.8.20)$$

Wir beachten, dass $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ist und dividieren die beiden Gleichungen durcheinander. Wir erhalten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_e - E_r) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t \cos \gamma \Rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} (E_e - E_r) \cos \alpha = E_t \cos \gamma \quad (6.8.21)$$

Die Fresnelschen Gleichungen für die *s*-Polarisation lauten

$$E_r = E_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma}$$

$$E_t = E_e \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \gamma} \quad (6.8.22)$$

Mit den Brechungsindizes $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$ und $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ erhält man

$$E_r = E_e \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma}$$

$$E_t = E_e \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \gamma} \quad (6.8.23)$$

Nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \varepsilon_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Wir setzen dies ein und erhalten

$$\frac{\mu_2 \sin \gamma}{\mu_1 \sin \alpha} (E_e - E_r) \cos \alpha = E_t \cos \gamma$$

$$\frac{(E_e - E_r) \cos \alpha \sin \gamma}{\mu_1} = \frac{E_t \cos \gamma \sin \alpha}{\mu_2} \quad (6.8.24)$$

Wir setzen $E_e + E_r = E_t$ ein und bekommen

Fresnelsche Formeln für die *s*-Polarisation

$$E_r = E_e \frac{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}$$

$$E_t = E_e \frac{\frac{2}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\frac{1}{\mu_1} \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \frac{1}{\mu_2} \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \quad (6.8.25)$$

Dabei ist

$$\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sin \gamma$$

Für nichtmagnetische Materialien können die Fresnelgleichungen umgeschrieben werden

Fresnelsche Formeln für die *s*-Polarisation bei nichtmagnetischen Materialien

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_e \frac{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\
 &= -E_e \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))} \\
 E_t &= E_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)} \\
 &= E_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma(\alpha))} \tag{6.8.26}
 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma$$

- Wenn $\alpha > \gamma$, wenn also die elektromagnetische Welle aus dem schnelleren Medium auf das langsamere Medium trifft, haben E_e und E_r unterschiedliche Vorzeichen: es tritt ein Phasensprung um π bei der *Reflexion* auf.
- Bei der *Reflexion* am schnelleren Medium $\alpha < \gamma$ ist $\sin(\alpha - \gamma)$ negativ und E_r positiv. Es gibt keinen Phasensprung bei der *Reflexion*. Dies erklärt zum Beispiel, warum Seifenlamellen in Reflexion schwarz werden, wenn die Dicke gegen null geht.
- Die Gesetze für die *Intensität* bekommt man durch quadrieren und unter Berücksichtigung der relativen Dielektrizitätszahl ε_1 und der relativen magnetischen Permeabilität μ_1 .
- Bei fast senkrechtem Einfall bekommt man $E_r \approx -E_e \frac{\sin \alpha - \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \gamma} = -E_e \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$

Fresnelsche Formeln für die Intensität bei der *s*-Polarisation für nichtmagnetische Materialien

$$\begin{aligned}
 I_r &= I_e \frac{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2}{[\sin \gamma(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma(\alpha)]^2} \\
 &= I_e \frac{\sin^2(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))} \\
 I_t &= \frac{n_2}{n_1} I_e \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \gamma(\alpha))} \quad (6.8.27)
 \end{aligned}$$

Wir haben die einfallende Intensität $I_e = n_1 \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2$ als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor $\frac{n_2}{n_1}$ für I_t . Im Medium mit dem Brechungsindex n_2 wird die Energie mit einer anderen Geschwindigkeit transportiert als im Medium mit dem Brechungsindex n_1 . Ist n_2 grösser als n_1 , so ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner und I_2 muss grösser werden.

6.8.2. p-Polarisation

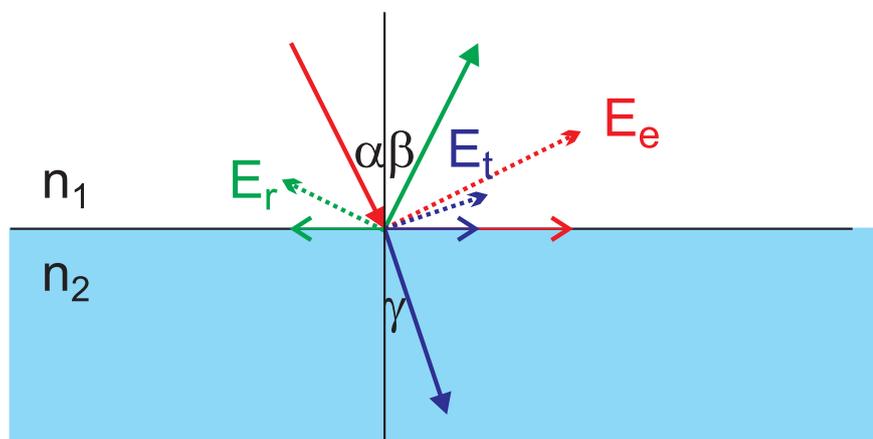


Abbildung 6.17.: Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen mit p-Polarisation. Die dicken Vektoren stellen die \mathbf{k} -Vektoren dar (rot für die einfallende elektromagnetische Welle, grün für die reflektierte und blau für die gebrochene elektromagnetische Welle.). Die \mathbf{E} -Vektoren sind gestrichelt gezeichnet, ihre Projektion auf die Grenzfläche dünn.

Bei p-polarisierten elektromagnetischen Wellen ist die Bedingung für die Stetigkeit

der Parallelkomponente von \mathbf{E} durch

$$(E_e - E_r) \cos \alpha = E_t \cos \gamma \quad (6.8.28)$$

gegeben. Weiter gilt immer noch die Beziehung für den Poynting-Vektor (Energieerhaltung)

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t^2 \cos \gamma \quad (6.8.29)$$

Wir teilen die beiden Gleichungen und erhalten

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_e + E_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t \quad (6.8.30)$$

Damit müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_r + E_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \\ E_e \cos \alpha &= E_r \cos \alpha + E_t \cos \gamma \end{aligned} \quad (6.8.31)$$

lösen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\cos \alpha$ und die zweite mit $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ und addieren

$$2E_e \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha = E_t \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma \right) \quad (6.8.32)$$

Um E_r zu bekommen multiplizieren wir die obere Gleichung in Gleichung (6.8.31) mit $\cos \gamma$ und die untere mit $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}$, subtrahieren und erhalten

$$E_e \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha \right) = -E_r \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha \right) \quad (6.8.33)$$

Damit erhält man

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\begin{aligned} E_r &= E_e \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha} \\ E_t &= E_e \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \gamma} \end{aligned} \quad (6.8.34)$$

Mit den Brechungsindizes $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$ und $n_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ erhält man

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_e \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha} \\
 E_t &= E_e \frac{2 \frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \gamma}
 \end{aligned}
 \tag{6.8.35}$$

Für nichtmagnetische Materialien vereinfachen sie sich zu

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_e \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \gamma}{n_1 \cos \gamma + n_2 \cos \alpha} \\
 E_t &= E_e \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \gamma}
 \end{aligned}
 \tag{6.8.36}$$

Die Brechungsindizes n_1 und n_2 können mit dem Snelliusschen Gesetz $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma$ eliminiert werden

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_e \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma \cos \gamma + \sin \alpha \cos \alpha} \\
 E_t &= E_e \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \gamma \cos \gamma}
 \end{aligned}
 \tag{6.8.37}$$

Mit $\sin(\alpha \pm \gamma) \cos(\alpha \mp \gamma) = \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \gamma \cos \gamma$ werden die obigen Gleichungen

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) für nichtmagnetische Materialien:

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_e \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cos(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)} \\
 E_t &= E_e \frac{2 \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma) \cos(\alpha - \gamma)}
 \end{aligned}
 \tag{6.8.38}$$

Die Quotienten aus sin und cos können zu tan zusammengefasst werden

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation) bei nichtmagnetischen Materialien:

$$E_r = E_e \frac{\tan[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan[\alpha + \gamma(\alpha)]}$$

$$E_t = E_e \frac{2 \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.39)$$

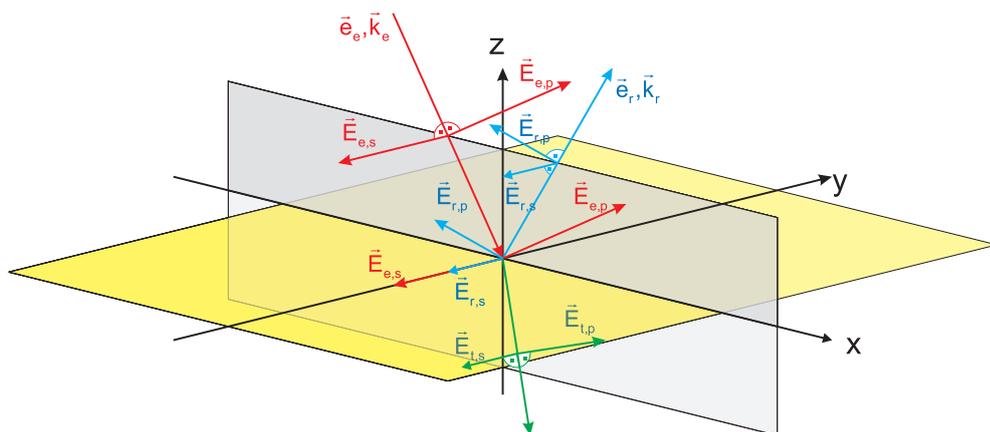


Abbildung 6.18.: Darstellung der Richtungen der elektrischen Felder für die s- und p-Polarisation.

Im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ müssen die Resultate für die s- und p-Polarisation übereinstimmen. Lässt man in Gleichung (6.8.38) α gegen null gehen, ergibt sich für das reflektierte elektrische Feld $E_{r,p} > 0$. Andererseits ist der Grenzwert des elektrischen Feldes $E_{s,p}$ für α gegen Null bei Gleichung (6.8.26) negativ. Dies ist korrekt, da nach der Abbildung 6.18 die Vektoren für beide Polarisationen in unterschiedliche Richtungen zeigen. Die beiden Werte $E_{s,p}$ und $E_{p,r}$ sind die Vorfaktoren. Also zeigen die beiden elektrischen Felder der reflektierten Wellen identisch.

Wenn in der Gleichung (6.8.38) für E_r der Nenner $\alpha + \gamma(\alpha) = \pi/2$ ist, divergiert der Nenner, Wir erhalten also $E_r(\alpha = \pi/2 - \gamma(\alpha)) = 0$. Dies ist der *Brewster-Winkel*.

Die Fresnelschen Formeln für die Intensität lauten

Fresnelsche Formeln für die Intensität bei (p-Polarisation) bei nichtmagnetischen Materialien:

$$I_r = I_e \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]}$$

$$I_t = I_e \frac{n_2}{n_1} \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos[\alpha - \gamma(\alpha)]} \quad (6.8.40)$$

Wir haben die einfallende Intensität $I_e = n_1 \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2$ als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor $\frac{n_2}{n_1}$ für I_t .

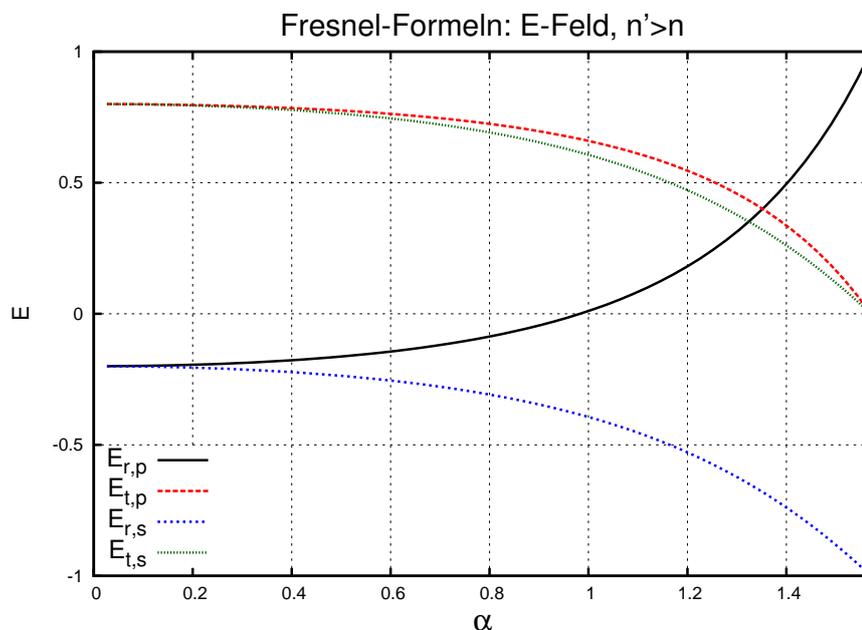


Abbildung 6.19.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren Medium ($n_1 = 1$) in das langsamere ($n_2 = 1.5$) eintreten.

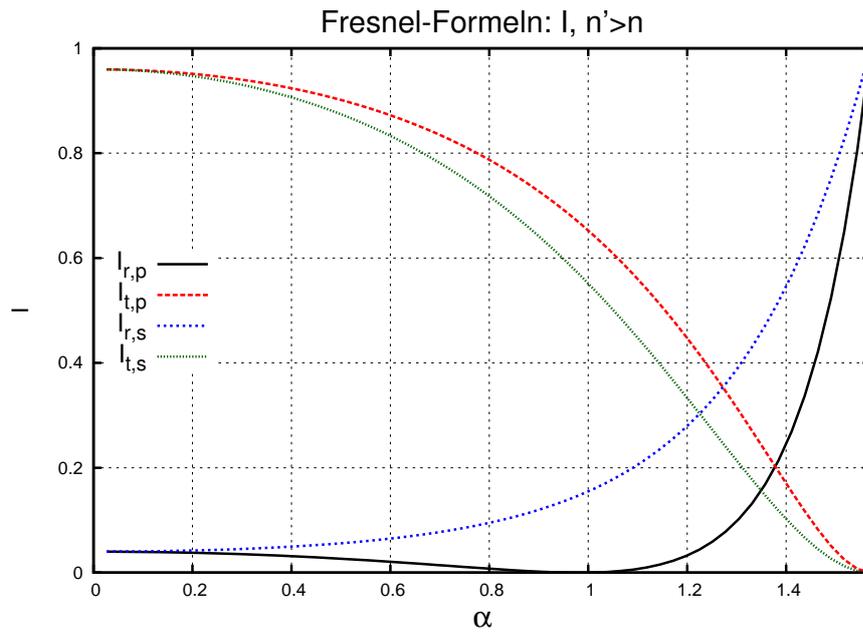


Abbildung 6.20.: Verlauf der *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren Medium ($n_1 = 1$) in das langsamere ($n_2 = 1.5$) eintreten. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

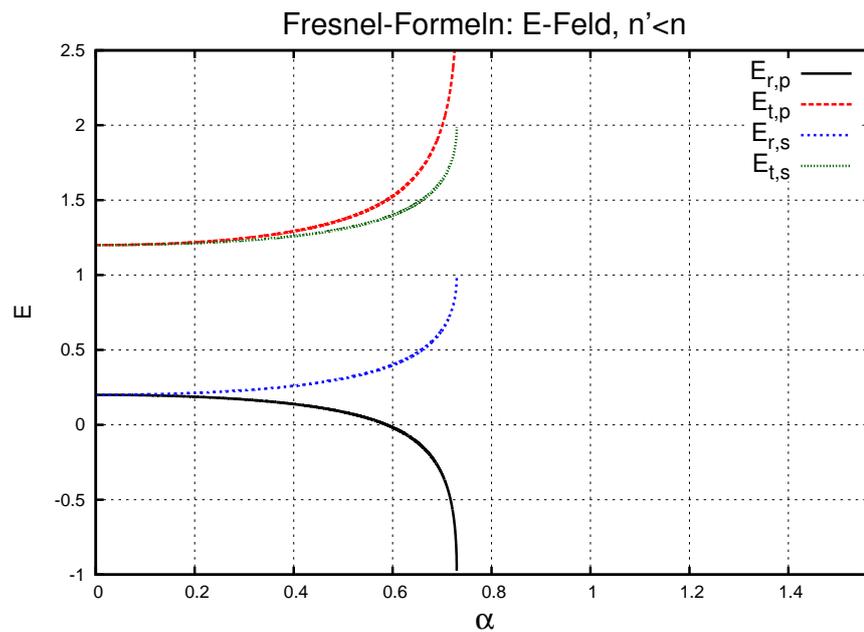


Abbildung 6.21.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes für *p*- und *s*-*Polarisation*, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ($n_1 = 1.5$) Medium in das schnellere ($n_2 = 1$) eintreten.

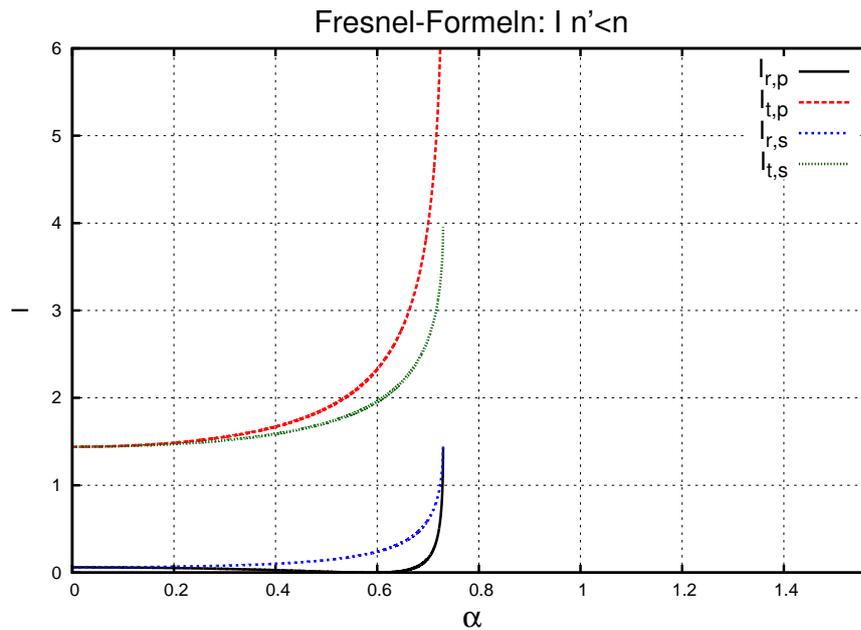


Abbildung 6.22.: Verlauf der *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ($n_1 = 1.5$) Medium in das schnellere ($n_2 = 1$) eintreten. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

Wir können kontrollieren, ob im Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche die Energie erhalten bleibt. Dazu müssen wir den Energiefluss durch eine Fläche parallel zur Oberfläche berechnen. Der einfallende Energiefluss ist

$$I_{e,\perp} = n \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \quad (6.8.41)$$

Der Fluss der reflektierten Energie (Betrag des Poynting-Vektors) durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche ist

$$I_{r,\perp} = n \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_r^2 \cos \alpha \quad (6.8.42)$$

Ebenso ist der Fluss der gebrochenen Energie durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche

$$I_{g,\perp} = n' \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_g^2 \cos \alpha \quad (6.8.43)$$

Die Energieerhaltung sagt nun, dass für die *p*-Polarisation

$$\begin{aligned}
I_{e,p,\perp} &= n \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \\
&= I_{r,p,\perp} + I_{g,p,\perp} \\
&= n \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \frac{\tan^2[\alpha - \gamma(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \gamma(\alpha)]} \cos \alpha \\
&\quad + n' \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \cos(\gamma(\alpha)) \\
&= \frac{\varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \\
&\quad \left[n \frac{\sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos \alpha}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \right. \\
&\quad \left. + n' \frac{4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\gamma(\alpha))}{\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)]} \right] \\
&= \frac{n \varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \\
&\quad \left[\sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos \alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma(\alpha)} 4 \sin^2 \gamma(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right] \\
&\quad \cdot \left[\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right]^{-1} \\
&= \frac{n \varepsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \\
&\quad \left[\sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \right. \\
&\quad \left. + 4 \sin \alpha \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right] \\
&\quad \cdot \left[\sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right]^{-1} \tag{6.8.44}
\end{aligned}$$

gilt.

Wir müssen also den Wert des Bruches

$$\begin{aligned}
X &= \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha + \gamma(\alpha)] + 4 \sin \alpha \sin \gamma(\alpha) \cos \alpha \cos(\gamma(\alpha)) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma(\alpha)] \cos^2[\alpha - \gamma(\alpha)] \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

berechnen.

$$\begin{aligned}
 X &= \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma] \cos^2[\alpha + \gamma] + \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma] \cos^2[\alpha - \gamma] \right\}^{-1} \\
 &= \left\{ \sin^2[\alpha - \gamma] \cos^2[\alpha + \gamma] + \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \gamma] \cos^2[\alpha - \gamma] \right\}^{-1} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \right. \\
 &\quad \left. + \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma]) \right\}^{-1} \\
 &= \left\{ (1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ (1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma]) \right\}^{-1} \\
 &= \left\{ (1 - \cos[2\alpha - 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha + 2\gamma]) \right. \\
 &\quad \left. + 2 (\cos[2\alpha - 2\gamma] - \cos[2\alpha + 2\gamma]) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ (1 - \cos[2\alpha + 2\gamma]) (1 + \cos[2\alpha - 2\gamma]) \right\}^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.8.45}$$

Wir setzen $A = \cos[2\alpha - 2\gamma]$ und $B = \cos[2\alpha + 2\gamma]$ und schreiben die Gleichung um

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{(1 - A)(1 + B) + 2A - 2B}{(1 - B)(1 - A)} \\
 &= \frac{1 - A + B - AB + 2A - 2B}{1 + A - B - AB} \\
 &= \frac{1 + A - B - AB}{1 + A - B - AB} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{6.8.46}$$

Da $X = 1$ ist, ist gezeigt, dass für den Energiefluss durch die Grenzfläche für p -Polarisation Energieerhaltung gilt.

Eine ähnliche Gleichung kann man für die s -Polarisation berechnen. In der Elektrizitätslehre würde man sagen, dass der Fluss anhand des Poynting-Vektors berechnet wurde.

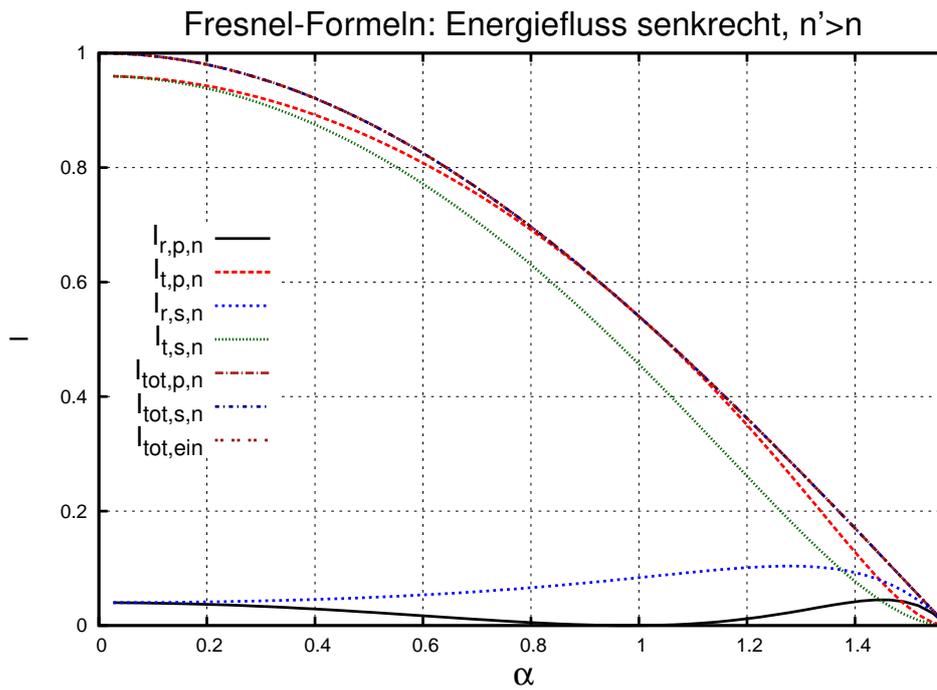


Abbildung 6.23.: Verlauf der mit der Fläche gewichteten *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem schnelleren ($n_1 = 1$) Medium in das langsamere ($n_2 = 1.5$) eintreten.

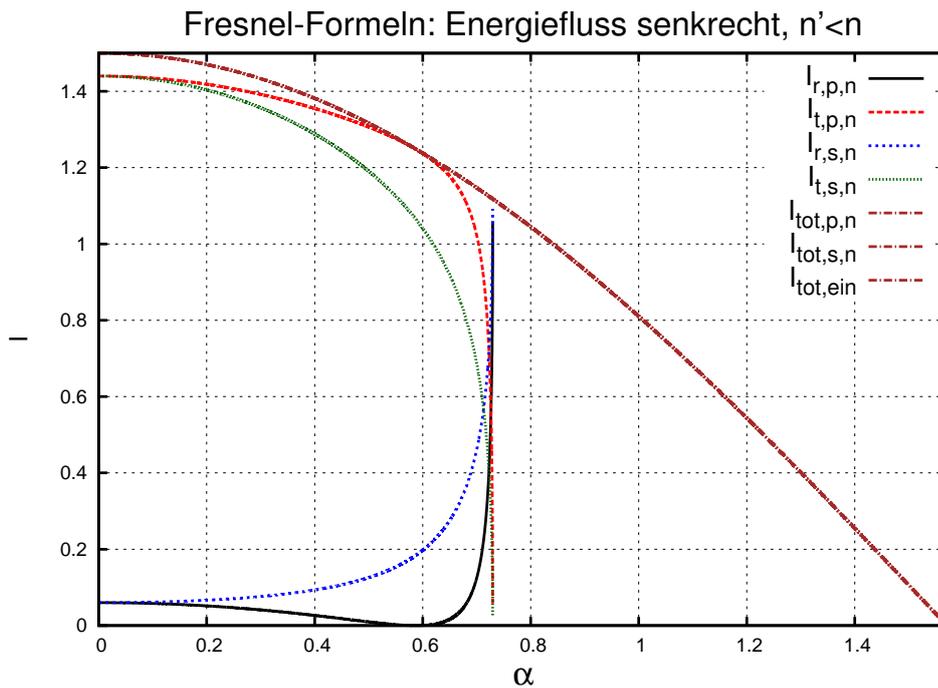


Abbildung 6.24.: Verlauf der mit der Fläche gewichteten *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren ($n_1 = 1.5$) Medium in das schnellere ($n_2 = 1$) eintreten.

Für beide Bilder wurde die *Intensität* mit $I = n_i E^2 \cos(\alpha_i)$ berechnet, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl und α_i der entsprechende Winkel ist. Die drei Kurven für die gesamte Intensität bei der *p*-Polarisation und der *s*-Polarisation liegen über der Kurve der mit dem Winkel gewichteten Intensität der einfallenden elektromagnetischen Welle.

Parallel zur Oberfläche ist es wegen der Translationssymmetrie schwieriger Energieerhaltungsgrößen zu definieren.

Die dritte Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche, die der Normalkomponente von $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ liefert das Snelliussche Gesetz.



6.8.3. Evaneszente Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 193,196])



Versuch zur Vorlesung:

Evaneszente Wellen - tunnelt mit Licht (Versuchskarte O-080)

Aus den letzten Abbildungen ist ersichtlich, dass, wenn elektromagnetische Wellen aus dem langsameren Medium in das schnellere eintreten, es Winkel gibt ($n_2 \sin \gamma > 1$), für die es keine reelle Lösung der Fresnelschen Formeln gibt. Die Lösung ist rein imaginär. Was bedeutet dies? Dies heisst, dass auch der \mathbf{k} -Vektor der elektromagnetischen Welle im schnelleren Medium imaginär wird. Darum wird

aus e^{ikr} mit $k = i\kappa$ der exponentielle Dämpfungsfaktor $e^{-\kappa r}$, wobei κ vom Einfallswinkel abhängt. Die elektromagnetischen Wellen aus dem langsameren Medium können sich im schnelleren Medium also nicht weiter bewegen: Wegen der Energieerhaltung ist die *Reflexion* perfekt.

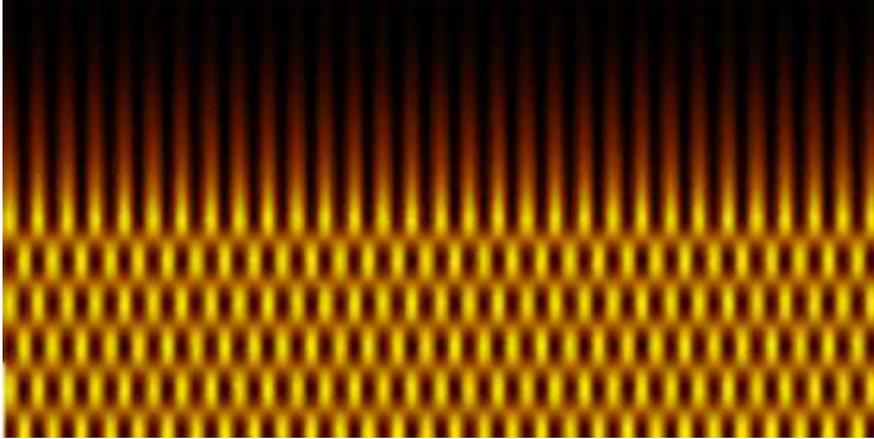


Abbildung 6.25.: Momentaufnahme der Interferenz einer total reflektierten Welle mit sich selber sowie der evaneszenten Wellen.

6.9. Zusammenfassung

Maxwellgleichungen im Vakuum Gleichung (6.1.3)

$$\begin{array}{lll}
 \operatorname{div} \mathbf{E} & = 0 & \text{I} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} & = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{II} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} & = 0 & \text{III} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} & = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{IIII}
 \end{array}$$

Wellengleichung für \mathbf{E} Gleichung (6.1.7)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{E}$$

Wellengleichung für \mathbf{B} Gleichung (6.1.8)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -c^2 \Delta \mathbf{B}$$

Wellenwiderstand eines Zweidrahtsystems Gleichung (6.3.15)

$$R^* = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{4a}{d} \right) \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Wellenwiderstand des Vakuums Gleichung (6.3.16)

$$R_0^* = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 377 \Omega$$

Energiefluss im Vakuum, Poynting-Vektor Gleichung (6.4.5)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

Energiefluss in Materie, Poynting-Vektor Gleichung (6.4.6)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Elektrisches Strahlungsfeld eines Atoms Gleichung (6.5.17)

$$E(r, \Theta, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot |a(t')| \sin \Theta = \frac{e z_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \Theta$$

Magnetisches Strahlungsfeld eines Atoms Gleichung (6.5.18)

$$B(r, \Theta, t) = \frac{1}{c} e(r, \Theta, t)$$

Energiefluss des Strahlungsfeldes eines Atoms Gleichung (6.5.19)

$$S(r, \Theta, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(r, \Theta, t)$$

Intensität des Strahlungsfeldes eines Atoms Gleichung (6.5.20)

$$I(r, \Theta) = \langle S(r, \Theta, t) \rangle_t = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi\epsilon_0 c^2)^2} \frac{\sin^2 \Theta}{2r^2}$$

A. Literaturhinweise

Den Stoff der Vorlesung finden Sie in ähnlicher Form in den Werken von Giancoli „Physik“ [Gia06], Gerthsen/Meschede „Physik“ [Mes06], Tipler „Physik“ [TM04], Leisi „Klassische Physik“ [Lei98], Alonso-Finn „Physik“ [AF00] und, als leichtere Einführung im Buch von Halliday „Physik“ [HRW03].

Eine gut strukturierte (und leicht tragbare Übersicht bieten Lindström/Langkau „Physik kompakt: Elektrodynamik“ [LL96] und Langkau/Lindström/Scobel „Physik kompakt: Elektromagnetische Wellen“ [LLS96]

Zusätzliche Übungsaufgaben finden Sie in „Tutorien zur Physik“ [MS09] oder im „Prüfungstrainer Physik“ [Tur07]. Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch Kneubühls [Kne78] „Repetitorium der Physik“ empfohlen werden. Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein [BSMM00] zusammengefasst. Arfken/Weber „Mathematical methods for Physicists“ [AW95] und sowie Weltner „Mathematik für Physiker“ [Wel94] können beim Bewältigen von mathematischen Problemen helfen.

Dieses Skript gibt es auch als [PDF-Datei](#) und als [Web-Site](#).

Eine wunderbare Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#).

Historische wissenschaftliche Arbeiten bieten oftmals einen guten Einblick in die Gedanken hinter den physikalischen Gesetzen. Dazu gehören die Arbeiten von Michael Faraday [Far32b, Far32a, Far33b, Far33a, Far33c, Far34a, Far34b, Far34c, Far35a, Far35b, Far38b, Far38a, Far38a, Far38a, Far38a, Far38a, Far39, Far40, Far40, Far43, Far46, Far46, Far46, Far49b, Far49a, Far50, Far51c, Far51a, Far51b, Far51b, Far52a, Far52b, Far56], James Clerk Maxwell [Max65, Max73] und anderen.

B. Begriffe

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
$\langle f \rangle$	Mittelung über f	–	
α	atomare Polarisierbarkeit	$\frac{C^2 m}{N} = \frac{C m^2}{V} =$ $F m^2 = \frac{A s m^2}{V}$	
α	Winkel (z.B. zwischen Geschwindigkeit und der Oberflächennormalen der Referenzfläche)	1	
a	Abstand einer Ladung zur Oberfläche, Radius	m	
a	Dicke eines Dielektrikums	m	
a	Länge einer Leiterschleife in einem Motor	m	
da	Oberflächenelement in Integralen	m^2	
\mathbf{a}	Beschleunigung	$\frac{m}{s^2} = \frac{N}{kg}$	
A	Fläche	m^2	
A	Fläche des Plattenkondensators	m^2	
\mathbf{A}	Vektorpotential	$T m = \frac{N}{A} =$ $\frac{kg}{As^2} = \frac{Vs}{m}$	
β	reduzierte Geschwindigkeit	1	$\beta = \frac{v}{c}$
b	Breite eines Dielektrikums	m	
b	Breite einer Leiterschleife in einem Motor	m	
h	Breite des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
\mathbf{B}	magnetische Induktion	$T = \frac{N}{Am} =$ $\frac{kg}{As^2} = \frac{Vs}{m^2}$	
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$\frac{m}{s}$	
C	Kapazität	$F = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} =$ $\frac{J}{V^2} = \frac{C^2}{J}$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
C	Curie-Konstante	$\frac{AK}{T_m} = \frac{A^2 K}{N} = \frac{Am}{Vs} K$	
c_{ij}	Kapazität zwischen den Körpern i und j	F	
$\delta(t)$	Delta-Funktion für die Zeit	$\frac{1}{s}$	
$\delta(x)$	Delta-Funktion für den Ort	$\frac{1}{m}$	
δx	Längenelement	m	andere Schreibweise zu dx
Δ	Laplace-Operator	$\frac{1}{m^2}$	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
$d\mathbf{A}$	Flächenelement	m^2	
d	Abstand	m	
d	Abstand der Platten im Plattenkondensator	m	
div	Divergenz-Operator	$\frac{1}{m}$	$\operatorname{div} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$
\mathbf{D}	Dielektrische Verschiebung	$\frac{C}{m^2} = \frac{C}{Nm} = \frac{N}{Vm}$	
e	Elementarladung	C	$e = 1.6022 \times 10^{-19} C$
e	Basis des natürlichen Logarithmus	1	$e = 2.7182818284590$
ϵ	relative Dielektrizitätszahl	1	Im Allgemeinen ist ϵ ein Tensor. (heißt auch relative Dielektrizitätskonstante)
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums	$\frac{C^2}{Np^2} = \frac{C}{Vm} = \frac{N}{Vm}$	$\epsilon_0 = 8.8544 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	elektrisches Feld	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	
$\mathbf{E}_{\text{lokal}}$	lokales elektrisches Feld	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	
E_0	elektrisches Feld ohne Dielektrikum	$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$	Verwendet bei Berechnungen mit dielektrischen Materialien
E_{pot}	potentielle Energie	$J = Nm$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
E_t	spezifische Haftenergie	$\frac{J}{m^2}$	
ϕ	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der x -Achse in der xy -Ebene (Längengrad)
φ	elektrostatistisches Potential	$\frac{J}{C} = V$	
φ	Phase	1	
Φ	Fluss eines Vektorfeldes \mathbf{F}	Nm^2	In diesem Falle, Einheit hängt vom Vektorfeld ab
Φ_B	magnetischer Fluss	$1Wb = Tm^2 = \frac{Nm}{A} = \frac{kgm^2}{As^2} = Vs$	
$f(x)$	Funktion	–	x ist ein Platzhalter
\mathbf{F}	Kraft	N	
\mathbf{F}_L	Lorentzkraft	N	
F_M	magnetische Kraft	N	
\mathbf{F}_V	Kraftdichte	$\frac{N}{m^3}$	$\mathbf{F}_V = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_V}{\Delta V}$
γ	relativistischer Korrekturfaktor	1	$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$
grad	Gradienten-Operator	$\frac{1}{m}$	grad $f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
G	Leitwert	$S = \frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega}$	
G	Gravitationskonstante	$\frac{m^3}{kg s^2}$	
h	Höhe der Mantelfläche	m	
h	Höhe des Leiters in einer Hall-Anordnung	m	
h	Plancksches Wirkungsquantum	Js	$h = 6.63 \times 10^{-34} Js$
\hbar	reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	Js	$\hbar \approx 10^{-34} Js$
H	Magnetfeld	$\frac{A}{m}$	
\mathbf{i}	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$	
I	Strom	A	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
I_{eff}	effektiver Strom	A	
I_{rms}	RMS-Strom	A	Leistungsgewichteter Strom, "Root Mean Square"-Strom
j	lineare Stromdichte	$\frac{A}{m}$	$j = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(\Delta y)}{\Delta y}$
k	Federkonstante	$\frac{N}{m}$	
k	beliebige, auch komplexe Zahl	1	
k_B	Boltzmann-Konstante	$\frac{J}{K}$	
K	Vorfaktor	1	
λ	mittlere freie Weglänge	m	
λ	Linienladungsdichte	$\frac{C}{m}$	
ℓ	Abstand von $-q$ zu $+q$ im Dipol	m	
ℓ	Drehimpuls	$\frac{m^2 kg}{s}$	
L	Länge	m	
L	Selbstinduktion oder Selbstinduktivität einer Spule	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Nm}{A^2} = \frac{kgm^2}{A^2s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
μ_0	Induktionskonstante	$\frac{Ns^2}{C^2} = \frac{N}{A^2} = \frac{H}{m}$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
m	Masse	kg	
\mathbf{m}	magnetisches Moment	Am^2	
m_z	magnetisches Moment in z -Richtung	Am^2	
M	Gesamtmasse aller Ionen	kg	
M_{12}	Gegeninduktivität zwischen zwei Spulen	$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Nm}{A^2} = \frac{kgm^2}{A^2s^2} = \frac{Vs}{A} = \Omega s$	
M_{Mol}	Molmasse	$\frac{kg}{Mol}$	
\mathbf{M}	makroskopische Magnetisierung	$\frac{A}{m}$	
\mathbf{M}	Drehmoment	Nm	
ν	Frequenz	$Hz = \frac{1}{s}$	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
n	Ladungsträgerdichte	$\frac{1}{m^2}$	
n	spezifische Windungszahl einer Spule	$\frac{1}{m}$	$n = \frac{N}{\ell}$
\mathbf{n}	Normalenvektor auf ein Flächenelement	1	
N	Dichte der induzierten Dipole	$\frac{1}{m^3}$	
N	Windungszahl einer Spule	1	
N_A	Avogadrozahl	$\frac{1}{Mol}$	$N_A = 6.02 \times 10^{23} \frac{1}{Mol}$
\mathbf{p}	Dipolmoment	Cm	
\mathbf{p}	Impuls (mechanisch)	$\frac{kgm}{s} = Ns$	
\mathbf{p}_{ind}	induziertes Dipolmoment	$Cm = Asm = \frac{Nm^2}{V}$	
P	Leistung	$W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s} = \frac{m^2kg}{s^3}$	z.B. Verlustleistung am Widerstand
\mathbf{P}	Polarisation	$\frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2} = \frac{N}{Vm}$	
P_M	Leistung des Motors	$W = \frac{Nm}{s} = \frac{m^2kg}{s^3}$	
q	Ladung	$C = As = \frac{Nm}{V}$	
Q	Ladung	$C = As = \frac{Nm}{V}$	andere Schreibweise für q
ρ	Massedichte	$\frac{kg}{m^3}$	
ρ_{el}	elektrische Ladungsdichte	$\frac{C}{m^3} = \frac{Pa}{V}$	Siehe auch Gleichung (2.2.4)
ρ	spezifischer Widerstand	$\Omega m = \frac{Vm}{A} = \frac{m}{S}$	
ρ	Abstand	m	
\mathbf{r}	Abstand, Ortsvektor	m	
r_0	Referenzradius	m	
rot	Rotations-Operator	$\frac{1}{m}$	$\mathbf{rot} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \end{pmatrix}$

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
R	Widerstand	$\Omega = \frac{V}{A}$	
R^*	Wellenwiderstand	$\Omega = \frac{V}{A}$	
R	Radius	m	
σ	Oberflächenladungsdichte	$\frac{C}{m^2}$	
σ	Influenzladungsdichte an der Oberfläche	$\frac{C}{m^2}$	
σ	(spezifische) Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$	Im Allgemeinen ist die Leitfähigkeit ein Tensor
$\sigma_{Maxwell}$	Maxwellspannung (mechanische Spannung)	$\frac{N}{m^2}$	$\sigma_{Maxwell} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$
s	Schleufe, ein Weg	m	
\mathbf{s}	Spin	Js	
$d\mathbf{s}$	Längenelement	m	
S	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
S'	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
S^+	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
S^-	Bezugssystem für relativistische Rechnung	—	
\mathbf{S}	Poynting-Vektor	$\frac{J}{m^2 s} = \frac{N}{ms}$	
Θ	eine der Koordinaten bei Kugelkoordinaten	1	Winkel gemessen von der z -Achse (Breitengrad, von Norden gemessen)
τ	Mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, Relaxationszeit	s	
τ	Abklingzeitkonstante eines RC -Gliedes	s	
τ	Zeit unter Integralen	s	
t	Zeit	s	
Δt	kleine Zeitdifferenz	s	
T	Periodendauer einer periodischen grösse	s	

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
T	Temperatur	K	
U	Spannung, auch elektro- statisches Potential	$\frac{J}{C} = V$	
U_{grav}	Gravitationspotential	$\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$	
U_C	Spannung am Kondensa- tor	$V = \frac{Nm}{As}$	
U_{eff}	effektive Spannung	V	
U_{rms}	RMS-Spannung	V	Leistungsgewichtete Spannung, "Root Mean Square"-Spannung
U_{EMK}	elektromotorische Kraft	$V = \frac{Nm}{As}$	
U_{Hall}	Hallspannung	$V = \frac{Nm}{As}$	
U_R	Spannung am Wider- stand	$V = \frac{Nm}{As}$	
v_j	Geschwindigkeit des j - ten Ladungsträgers	$\frac{m}{s}$	
v_s	Abziehgeschwindigkeit Klebestreifen	$\frac{m}{s}$	
\mathbf{V}	Hilfsvektorpotential	$Tm = \frac{N}{A} =$ $\frac{mkg}{As^2} = \frac{Vs}{m}$	
dV	Volumenelement	m^3	
ω	Kreisfrequenz	$\frac{1}{s}$	$\omega = 2\pi\nu$
Ω	Larmorwinkelgeschwindigkeit	$\frac{1}{s}$	
w_{el}	elektrische Energiedich- te	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
w_B	Energiedichte des Ma- gnetfeldes	$\frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2}$	
W	Arbeit	$J = Nm$	
W_{el}	elektrische Arbeit	$J = Nm$	
W_{mech}	mechanische Arbeit	$J = Nm$	
W_{Batt}	Arbeit der Batterie	$J = Nm$	
ξ	Ersatz für x in Integra- len	m	
χ_e	dielektrische Suszeptibi- lität	1	Im Allgemeinen ist χ_e ein Tensor

Symbol	Name	Einheit	Bemerkungen
\boldsymbol{x}	Ortsvektor	m	
x	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	
X_C	Impedanz der Kapazität oder kapazitiver Widerstand	Ω	
X_L	Impedanz der Spule oder induktiver Widerstand	Ω	
y	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	
z	Koordinate im kartesischen Koordinatensystem	m	
Z	Kernladungszahl	1	

C. Mathematische Sätze

C.1. Die Diracsche Deltafunktion

Die Diracsche Deltafunktion ist ein nützliches Instrument, um diskrete Ladungsverteilungen, Kräfte, Punktmassen als kontinuierliche Verteilung oder Kraftfelder zu beschreiben.

Wir beginnen, indem wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{für } |x| \leq \frac{a}{2}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

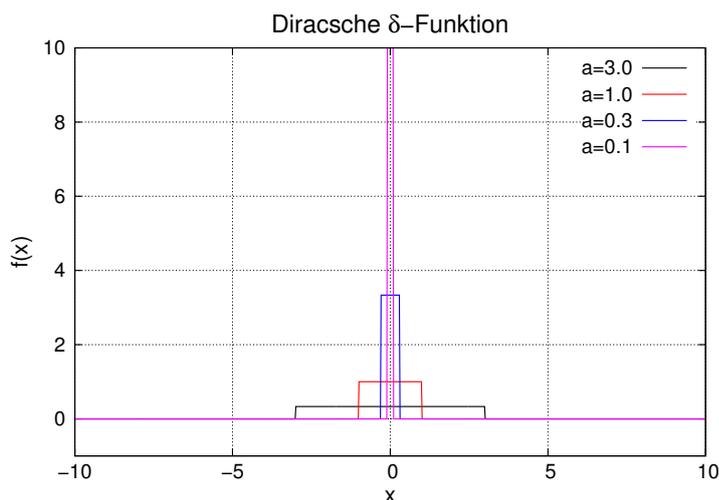


Abbildung C.1.: Darstellung von $f(x)$, wobei a variiert wird.

In der Abbildung C.1 sieht man, dass mit kleiner werdendem a die Amplitude von $f(x)$ immer grösser wird. Die Fläche unter der Kurve

$$A_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2} \right) \right) = 1 \quad (\text{C.1.2})$$

ist konstant und unabhängig von a . Wir definieren nun die Diracsche Deltafunktion

$$\delta(x) := \lim_{a \rightarrow 0} f(x) \quad (\text{C.1.3})$$

Damit ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{a \rightarrow 0} f(x) \right) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dx = \lim_{a \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (\text{C.1.4})$$

Als Anwendung betrachten wir das Integral des Produktes

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x) dx$$

wobei $g(x)$ genügend oft (Fragen Sie einen Mathematiker oder lesen die Packungsbeilage oder ein Mathematikbuch) stetig differenzierbar sein soll. Die Taylorreihe von $g(x)$ ist dann

$$g(x) = g(0) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \quad (\text{C.1.5})$$

Dann ergibt das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & (\text{C.1.6}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(0) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \left[g(0) + x \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) + \dots \right] \frac{1}{a} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{g(0)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x dx + \dots \right] \\ &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right)}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_{-a/2}^{a/2} + \dots \right] \\ &= g(0) + \lim_{a \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \Big|_{x=0} \right) \frac{a^2}{4a} + \dots \right] = g(0) \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass die nützliche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0) \quad (\text{C.1.7})$$

gilt. Man kann sie anwenden, zum Beispiel im Gaussschen Gesetz, wenn man das elektrische Feld einer Ebene berechnen will. Wir setzen für die Ladungsdichte

$$\rho_{el}(x, y, z) = \sigma_{el}(x, y) \delta(z)$$

Für die Einheiten haben wir

$$[\rho_{el}] = \text{C m}^{-3} \qquad [\sigma_{el}] = \text{C m}^{-2}$$

Der Unterschied in den Dimensionen rührt daher, dass die Delta-Funktion $\delta(z)$ implizit die Dimension $[\delta(z)] = \text{m}^{-1}$ hat, sonst wären die Definition in Gleichung (C.1.3) und Gleichung (C.1.1) dimensionsmässig nicht korrekt.

Das Gauss'sche Gesetz sagt dann

$$\begin{aligned} \iint_{A(V)} \mathbf{D} da &= \iiint_V \rho_{el} dV &= \iiint_V \rho_{el}(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_V \sigma_{el}(x, y) \delta(z) dx dy dz &= \iint_{\text{Ebene}} \sigma_{el}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

C.2. Vektoridentitäten

(Siehe Bronstein, Taschenbuch der Mathematik [BSMM00, pp. 190])

Im Folgenden sind \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und \mathbf{f} Vektoren oder vektorielle Funktionen, a , b , c und f ihre Längen, k eine Zahl und $\varphi(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion. Die Komponenten der Vektoren in kartesischen Koordinaten sind

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Für die anderen Vektoren werden die Komponenten analog geschrieben.

C.2.1. Produkte mit Vektoren

Skalarprodukt

$$k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{C.2.1})$$

Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad (\text{C.2.2})$$

Vertauschung der Reihenfolge (Kommutationsgesetze)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{C.2.3})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{C.2.4})$$

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

Sie sind kollinear, wenn

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.6})$$

Doppeltes Vektorprodukt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (\text{C.2.7})$$

Spatprodukt oder gemischtes Produkt

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \\
 &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \\
 &= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \\
 &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \\
 &= -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \\
 &= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - (a_z b_y c_x + a_x b_z c_y + a_y b_x c_z) \quad (\text{C.2.8})
 \end{aligned}$$

Drei Vektoren sind komplanar, wenn

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (\text{C.2.9})$$

Lagrangesche Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{C.2.10})$$

Vierfaches Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}) \mathbf{c} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f} \quad (\text{C.2.11})$$

C.2.2. Ableiten von Vektoren

Ableiten eines Vektors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_x}{dt} \\ \frac{da_y}{dt} \\ \frac{da_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.2.12})$$

Ableitung eines Produktes

$$\frac{d}{dt} (\varphi(t) \mathbf{a}(t)) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\text{C.2.13})$$

Ableitung des Skalarproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.2.14})$$

Ableitung des Vektorproduktes

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{C.2.15})$$

Ableitung eines Vektors mit konstantem Betrag. Hier ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const.}$ Aus Gleichung (C.2.14) folgt

$$0 = \frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} \perp \mathbf{a} \quad (\text{C.2.16})$$

Taylorentwicklung einer Vektorfunktion

$$\mathbf{a}(t + \tau) = \mathbf{a}(t) + \tau \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right|_t + \dots + \frac{\tau^n}{n!} \left. \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} \right|_t + \dots \quad (\text{C.2.17})$$

C.2.3. Vektorableitungen bei Skalarfeldern

Ableitung eines skalaren Feldes nach einer Richtung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.2.18})$$

Ableitung $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.2.19})$$

Richtungsableitung einer skalaren Funktion im Vergleich zur Richtung mit dem stärksten Abfall (Einheitsvektor \mathbf{n})

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \cos(\angle \mathbf{e}_c, \mathbf{n}) \quad (\text{C.2.20})$$

C.2.4. Vektorableitungen bei Vektorfeldern

Ableitung eines Vektorfeldes \mathbf{a} nach einer Richtung

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{C.2.21})$$

Ableitung $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c}$ in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e}_c in Richtung von \mathbf{c}

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{e}_c} \quad (\text{C.2.22})$$

Richtungsableitung einer Vektorfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{c}} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{div} \mathbf{a} \\ &\quad - \mathbf{a} \cdot \mathbf{div} \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{c}] \end{aligned} \quad (\text{C.2.23})$$

Gradient eines Produktes

$$\mathbf{grad}(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \mathbf{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \mathbf{grad} \varphi_1 \quad (\text{C.2.24})$$

Kettenregel beim Gradienten

$$\mathbf{grad} \varphi_1(\varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \mathbf{grad} \varphi_2 \quad (\text{C.2.25})$$

Gradient eines Skalarproduktes

$$\mathbf{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{C.2.26})$$

Gradient eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\mathbf{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} \quad (\text{C.2.27})$$

Divergenz eines Produktes

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi \quad (\text{C.2.28})$$

Divergenz eines Skalarproduktes eines konstanten Vektors \mathbf{k} mit einem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\operatorname{div} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{C.2.29})$$

Divergenz eines Vektorproduktes

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (\text{C.2.30})$$

Rotation eines Produktes

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a} \quad (\text{C.2.31})$$

Rotation eines Vektorproduktes

$$\operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (\text{C.2.32})$$

Rotation eines Potentialfeldes

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \quad (\text{C.2.33})$$

Divergenz einer Rotation

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{C.2.34})$$

Rotation einer Rotation

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{a}) \quad (\text{C.2.35})$$

Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta f = (\operatorname{div} \operatorname{grad}) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{C.2.36})$$

und für Vektorfunktionen

$$\Delta \mathbf{a} = (\operatorname{div} \operatorname{grad}) \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2} \quad (\text{C.2.37})$$

C.2.5. Graphische Darstellung der Ableitungen in drei Dimensionen

C.2.5.1. Gradient in kartesischen Koordinaten

Wenn wir eine Funktion $y = f(x)$ als Höhenprofil in einer zweidimensionalen Landschaft auffassen, dann ist

$$\frac{df(x)}{dx}$$

die Steigung dieses Profils an der Stelle x . $f(x)$ ist die Höhenangabe über einer eindimensionalen Grundfläche.

Wir können eine Funktion $f(x, y)$ als Höhenangabe über einer zweidimensionalen Grundfläche betrachten.

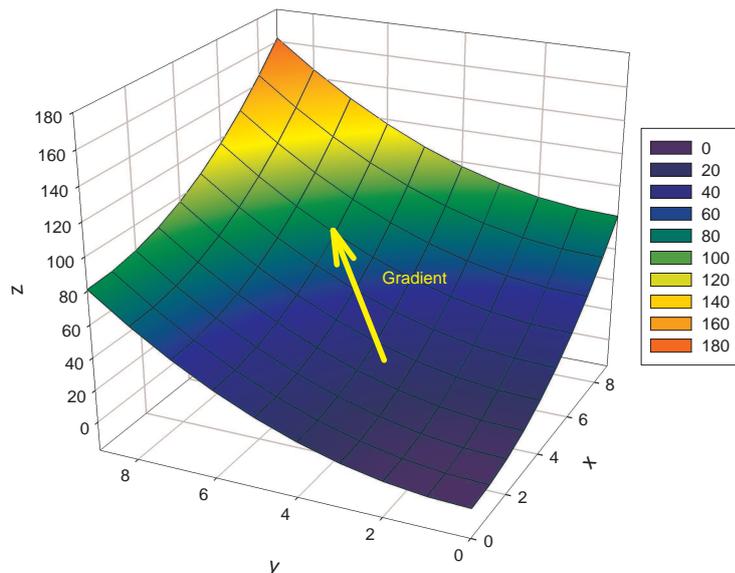


Abbildung C.2.: Gradient als Richtung der stärksten Steigung

Die Funktion **Gradient** berechnet das stärkste Gefälle einer Höhenlandschaft über einer zweidimensionalen Ebene. Sie ist definiert:

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eine skalare Funktion $f(x, y, z)$ definiert eine „Höhenlandschaft“ über einer dreidimensionalen Grundfläche. Sie kann nicht mit einfachen Mitteln visualisiert werden. Hier ist die Definition

Gradient einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ von drei Variablen

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

C.2.5.2. Divergenz in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

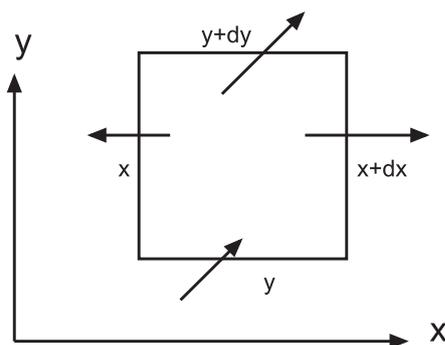


Abbildung C.3.: Vektorfeld mit Umrandung

Wenn wir die Umrandung betrachten, dann sehen wir, dass netto etwas aus ihr herausfließt. Die „Fläche“ ist dx . In die x -Richtung heisst das, dass

$$F_x \cdot dx = f_x(x + dx, y) - f_x(x, y) \implies F_x = \frac{f_x(x + dx, y) - f_x(x, y)}{dx}$$

fließt.

In die y -Richtung müssen wir die schräg liegenden Vektoren aufteilen. Die x -Komponente, $f_x(x, y)$ und $f_x(x, y + dy)$ ist parallel zur oberen und unteren Umrandung. Sie trägt nichts zum Fluss bei. Also gilt auch für die y -Richtung

$$F_y \cdot dy = f_y(x, y + dy) - f_y(x, y) \implies F_y = \frac{f_y(x, y + dy) - f_y(x, y)}{dy}$$

Die Grösse $F = F_x + F_y$ nennen wir Divergenz oder Quellstärke. Mit

$$\lim_{dx \rightarrow 0} F_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f_x(x + dx, y) - f_x(x, y)}{dx} = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x}$$

und

$$\lim_{dy \rightarrow 0} F_y = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f_y(x, y + dy) - f_y(x, y)}{dy} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y}$$

erhalten wir für die

Divergenz oder Quellstärke in 2 Dimensionen

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y}$$

Eine analoge Überlegung kann man sich in drei Dimensionen machen. Die Vektorfunktion ist dann

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Wir definieren

Divergenz einer Vektorfunktion $\mathbf{f}(x, y, z)$ in drei Dimensionen

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z}$$

C.2.5.3. Rotation in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten wieder eine zweidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$

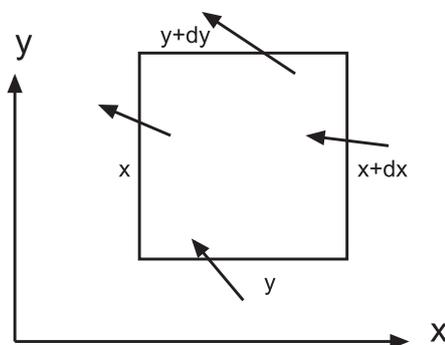


Abbildung C.4.: Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation

Wir nehmen nun an, dass die durch $\mathbf{f}(x, y)$ definierten Strömungen den rechteckigen schwimmenden Klotz beeinflussen. So wie die Vektoren gezeichnet sind, wird er sich drehen. Seine Drehachse zeigt aus der Zeichenebene heraus, also die z -Richtung. Die Drehung hat etwas zu tun mit den Grössen

$$R_y dx = f_y(x + dx, y) - f_y(x, y) \longrightarrow R_x = \frac{f_y(x + dx, y) - f_y(x, y)}{dx}$$

und

$$R_x dy = -(f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)) \implies R_x = -\frac{f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)}{dy}$$

Um bei gleicher Drehrichtung (positiv ist im Gegenuhrzeigersinn) eine positive Grösse zu haben, wird bei R_x ein „-“ eingefügt. Mit

$$\lim_{dx \rightarrow 0} R_y = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f_y(x + dx, y) - f_y(x, y)}{dx} = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x}$$

und

$$\lim_{dy \rightarrow 0} R_x = -\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + dy) - f_x(x, y)}{dy} = -\frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$$

ist die Stärke der Drehung oder die

Rotation in zwei Dimensionen

$$R = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y}$$

Diese R zeigt in die $+z$ -Richtung, wenn wir den zweidimensionalen Raum im dreidimensionalen eingebettet betrachten. Für eine dreidimensionale Vektorfunktion

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

kann man sich überlegen, dass die gleichen Überlegungen wie für die xy -Ebene (Rotation um z) auch für die xz -Ebene (Rotation um y) und die yz -Ebene (Rotation um x) gelten. Wir definieren also

Rotation in drei Dimensionen

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Man kann sich die Berechnung gut merken mit

Gedankenstütze für Rotation

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

C.2.6. Totale Ableitung bei mitgeführten Koordinatensystemen

Wenn $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$ ein konstanter Geschwindigkeitsvektor ist und diese Grösse an einem mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Ort beobachtet wird, dann gilt (Siehe Jackson[Jac75, p212]):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \quad (\text{C.2.38})$$

wobei $\frac{d}{dt}$ die totale Ableitung im raumfesten Koordinatensystem und $\frac{\partial}{\partial t}$ die lokale, mitgeführte Ableitung ist. Diese Gleichung stammt von der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x(t), t) \\ &= v(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x(t), t) \end{aligned} \quad (\text{C.2.39})$$

In drei Dimensionen muss mit dem Gradienten gerechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t), t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), t) \\ &= [\mathbf{grad} f(x, y, z, t)] \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}(t), t) \\ &= [\mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t), t)] \cdot \mathbf{v}(t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t), t) \end{aligned} \quad (\text{C.2.40})$$

Dabei bedeutet die partielle Ableitung $\partial/\partial t$ dass man nur nach der Zeitvariable ableitet, nicht aber nach der impliziten Zeitableitung in \mathbf{r} .

Mit Gleichung (C.2.32) kann man schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{C.2.41})$$

oder

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} &= \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{C.2.42})$$

Nun ist $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Weiter ist $\operatorname{div} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(3) = 0$ und $\mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{grad} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} E = 0$, wobei E die 3 mal 3 Einheits-Diagonalmatrix ist. Damit haben wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} &= \mathbf{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{C.2.43})$$

und

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (\text{C.2.44})$$

C.3. Satz von Gauss

Der *Satz von K. F. Gauss (1777-1855)* verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschließt.

$$\int_{V(S)} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{C.3.1})$$

Man kann auch schreiben $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

C.4. Satz von Green

Der *Satz von G. Green (1793-1841)* verknüpft ein Volumenintegral mit einem Oberflächenintegral.

Gegeben seien

- eine skalare Ortsfunktion $\Psi(\mathbf{r})$
- eine geschlossene Fläche S , die das Volumen $V(S)$ umschließt.

$$\int_{V(S)} \Delta \Psi dV = \int_S \mathbf{grad} \Psi d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{grad} \Psi \mathbf{n} da \quad (\text{C.4.1})$$

Man kann auch schreiben $\mathbf{grad} \Psi = \nabla \Psi$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

C.5. Satz von Stokes

Der *Satz von G. G. Stokes (1819-1903)* verknüpft ein Oberflächenintegral mit einem Linienintegral.

Gegeben seien

- eine vektorielle Ortsfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- eine geschlossener Weg s , der die Oberfläche $a(s)$ umrandet.

$$\int_{a(s)} \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_{a(s)} \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = \oint_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{C.5.1})$$

Man kann auch schreiben $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$, wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ der *Nabla-Operator* ist.

Dabei wird jedes Flächenelement so umlaufen, dass die entsprechende Normale \mathbf{n} der Bewegung einer Rechtsschraube entspricht.

D. Berechnung elektrischer Felder

D.1. In der Nähe eines Leiterstückes

Entlang der x -Achse von $x = 0$ bis $x = \ell$ sei die *Ladung* Q homogen verteilt. Zu berechnen ist das elektrische Feld für einen Punkt $P = (\xi, 0, 0)$ auf der x -Achse!

Die Linienladungsdichte ist

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

Das elektrische Feld bei P ist

$$dE_x(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x - \xi) d\xi}{|x - \xi|^3}$$

Wir integrieren über die Länge des Drahtes

$$E_x(\xi) = \int_0^\ell dE_x(x, \xi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} \int_0^\ell \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \int_0^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^2} - \int_x^\ell \frac{d\xi}{(x - \xi)^2}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)} \begin{cases} \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } x > \ell \text{ oder } x < 0; \\ \frac{\lambda(2x - \ell)}{4\pi\epsilon_0 x(x - \ell)}, & \text{für } 0 < x < \ell. \end{cases}$$

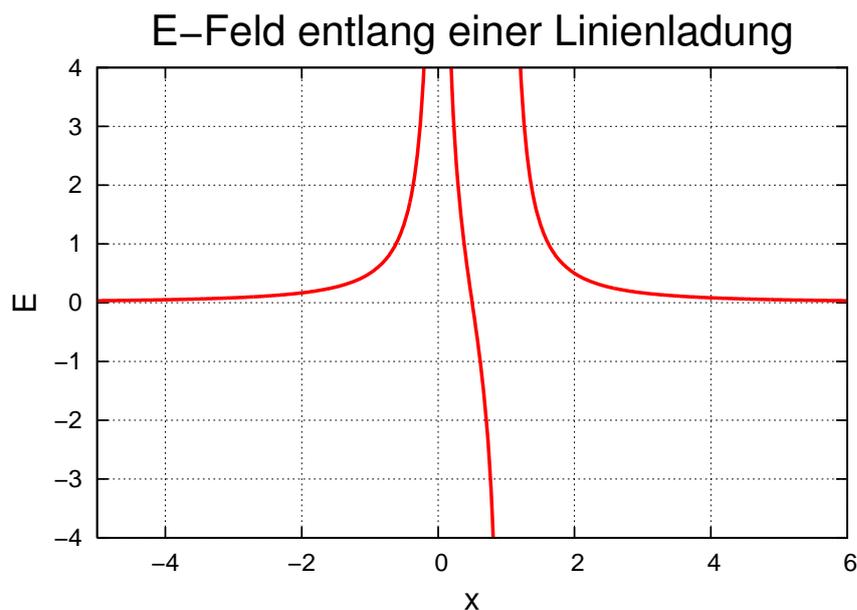


Abbildung D.1.: Elektrisches Feld entlang einer Linienladung.

Wir berechnen nun das elektrische Feld entlang der Mittelsenkrechten einer Linienladung der Länge ℓ . Zur Berechnung legen wir das Koordinationssystem so, dass die Ladungsverteilung von $-\frac{\ell}{2}$ bis $\frac{\ell}{2}$ reicht. Aus Symmetriegründen existiert auf der Mittelsenkrechten keine Komponente in x -Richtung. Wir betrachten also die Komponente entlang y . Am Punkt $P = (0, y, 0)$ ist

$$dE_y(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y$$

Ebenso ist

$$E_y(y) = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein[BSMM00] ist

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}$$

mit $X = x^2 + a^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_y(y) &= \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left(\frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}} + \frac{\ell}{2\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}} \right) \\ &= \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \end{aligned}$$

Für $y \gg \ell$ bekommt man

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Für $y \ll -\ell$ bekommt man

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\ell}{y^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y^2}$$

Wenn die Linienladung "unendlich" ausgedehnt ist, gilt

$$y \ll \ell$$

Dann ist

$$E_y \approx \frac{\lambda\ell}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 |y|} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell |y|}$$

E-Feld senkrecht zu Linienladung (Nahfeld)

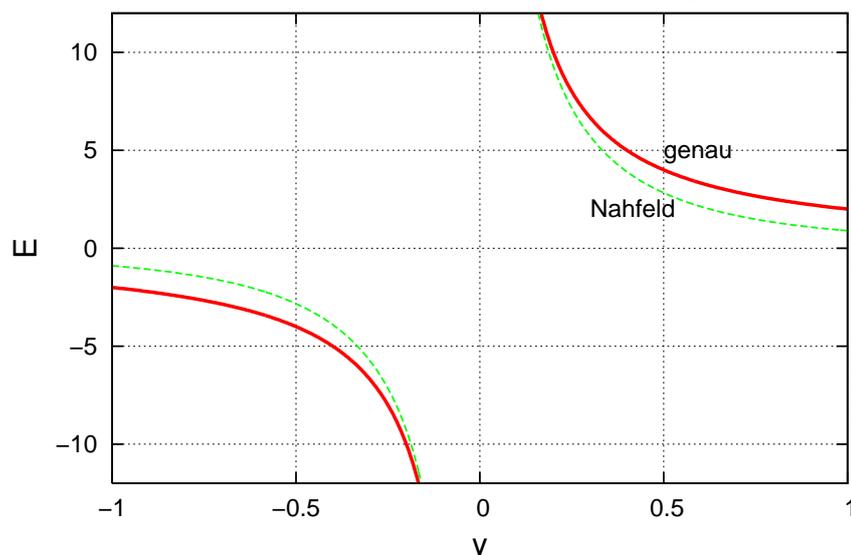


Abbildung D.2.: Elektrisches Feld senkrecht zu einer Linienladung.

D.2. Auf der Symmetrieachse einer Kreisscheibe

Zur Berechnung setzen wir die Flächenladungsdichte auf

$$\sigma = \frac{g}{\pi r^2}$$

Das elektrische Feld auf der Symmetrieachse kann nur parallel zu dieser sein. Wir setzen also an

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} x$$

Also ist

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \hat{r} x d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r} d\varphi}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^r \frac{\hat{r} d\hat{r}}{(\hat{r}^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nach Bronstein ist

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Also ist

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{\hat{r}^2 + x^2}} \right) \Big|_0^r \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + \frac{1}{|x|} \right) \\ &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \frac{|x| - \sqrt{r^2 + x^2}}{|x| \sqrt{r^2 + x^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + x^2} - |x|}{\sqrt{r^2 + x^2}} \end{aligned}$$

Für $|x| \gg r$ ist

$$\sqrt{r^2 + |x|^2} - |x| = |x| \left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{x^2}} \right) - |x| = |x| \left(1 + \frac{r^2}{2x^2} \right) - |x| = \frac{r^2}{2x^2}$$

und damit

$$E_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{r^2}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

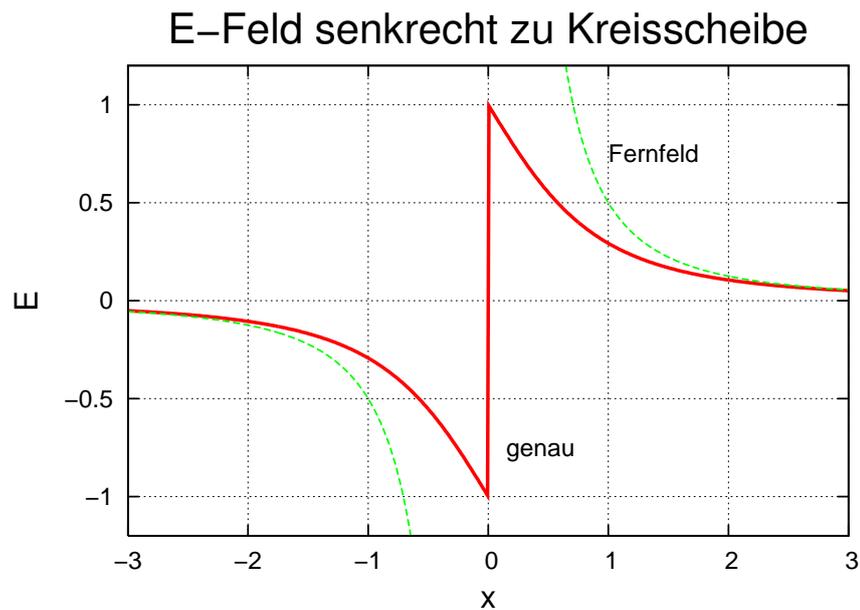


Abbildung D.3.: \mathbf{E} -Feld einer homogen geladenen Kreisscheibe entlang einer Senkrechten durch den Mittelpunkt.

D.3. Innerhalb und ausserhalb einer geladenen Zylinderfläche

Der Zylindermantel habe den Radius R , die Flächenladungsdichte sei σ . Wir betrachten eine Zylinderfläche koaxial zur geladenen Fläche mit dem Radius $r < R$. Das \mathbf{E} -Feld ist aus Symmetriegründen radial symmetrisch. Der Fluss durch die Fläche ist:

$$\phi = \iint_{\text{Fläche}} E_n da = E_r \iint_{\text{Fläche}} da = E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Da keine *Ladung* umschlossen wird, ist

$$E_r = 0, \quad r < R$$

Für $r > R$ gilt

$$E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{\sigma \cdot 2\pi R \ell}{\epsilon_0}$$

oder

$$E_r = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

E-Feld ausserhalb eines geladenen Zylinders

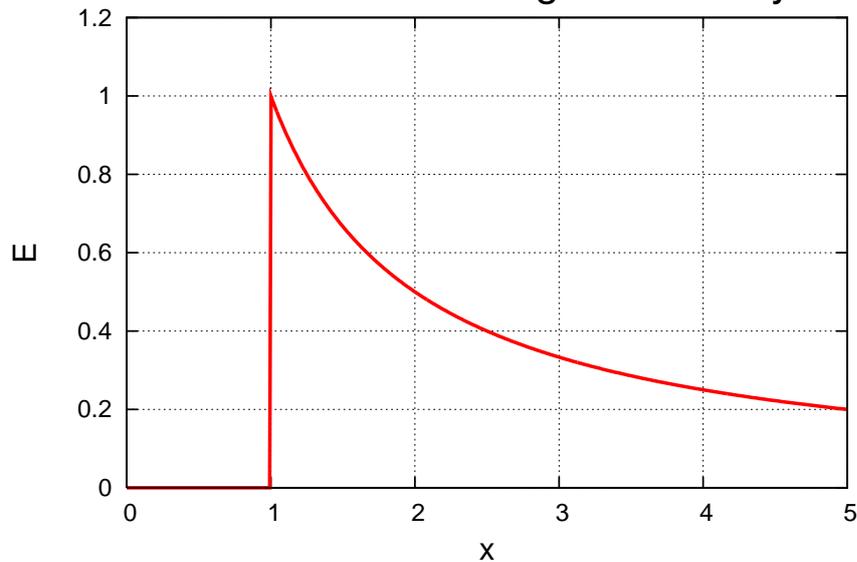


Abbildung D.4.: Ladung senkrecht zu einem Kreiszyylinder.

D.4. In allen Bereichen zweier koaxialer zylinderförmiger Leiter

Nach Abschnitt D.3 ist $E_r = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ wenn die Ladungsdichte σ auf der Zylinderschale mit $R < r$ aufgebracht ist. Wir betrachten zwei konzentrische Zylinder mit den Radien $R_1 < R_2$ und deren Oberflächenladungsdichten σ_1 und σ_2 . Für $r < R_1$ gilt

$$E_r = 0 \text{ für } r < R_1$$

Für $R_1 < r < R_2$ existiert allein das Feld des inneren Kreiszyllinders. Also ist dort:

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r} \text{ für } R_1 < r < R_2$$

Schliesslich ist für $r > R_2$:

$$E_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r} \text{ für } r > R_2$$

wobei hier die Additivität elektrischer Felder benutzt wurde. Wenn für $r > R_2$ $E_r = 0$ sein soll, muss gelten

$$\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 = 0$$

oder

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

.

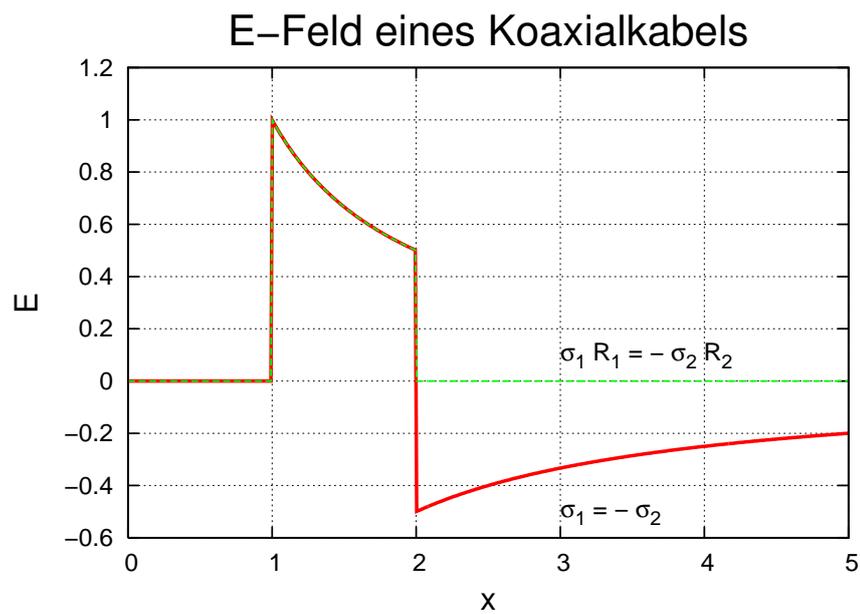


Abbildung D.5.: Elektrische Felder bei einem Koaxialkabel, wobei einmal (dünne Linie) die Oberflächenladungsdichten σ_i vom Betrage nach gleich und einmal (dicke Linie) die Produkte $R_i \cdot \sigma_i$ dem Betrage nach gleich sind.

E. Lorentztransformationen

E.1. Lorentztransformationen für die magnetische Induktion

Bewegung entlang der x -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x \\E'_y &= \gamma(v_x) (E_y - v_x \cdot B_z) \\E'_z &= \gamma(v_x) (E_z + v_x \cdot B_y) \\B'_x &= B_x \\B'_y &= \gamma(v_x) \left(B_y + \frac{v_x}{c^2} E_z \right) \\B'_z &= \gamma(v_x) \left(B_z - \frac{v_x}{c^2} E_y \right)\end{aligned}$$

Bewegung entlang der y -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= \gamma(v_y) (E_x + v_y \cdot B_z) \\E'_y &= E_y \\E'_z &= \gamma(v_y) (E_z - v_y \cdot B_x) \\B'_x &= \gamma(v_y) \left(B_x - \frac{v_y}{c^2} E_z \right) \\B'_y &= B_y \\B'_z &= \gamma(v_y) \left(B_z + \frac{v_y}{c^2} E_x \right)\end{aligned}$$

Bewegung entlang der z -Richtung

$$\begin{aligned}E'_x &= \gamma(v_z) (E_x - v_z \cdot B_y) \\E'_y &= \gamma(v_z) (E_y + v_z \cdot B_x) \\E'_z &= E_z \\B'_x &= \gamma(v_z) \left(B_x + \frac{v_z}{c^2} E_y \right) \\B'_y &= \gamma(v_z) \left(B_y - \frac{v_z}{c^2} E_x \right) \\B'_z &= B_z\end{aligned}$$

E.2. Lorentztransformation für das magnetische Feld

Bewegung entlang der x -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x \\
 E'_y &= \gamma(v_x) \left(E_y - \frac{v_x}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_z \right) \\
 E'_z &= \gamma(v_x) \left(E_z + \frac{v_x}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_y \right) \\
 H'_x &= H_x \\
 H'_y &= \gamma(v_x) (H_y + v_x \varepsilon_0 E_z) \\
 H'_z &= \gamma(v_x) (H_z - v_x \varepsilon_0 E_y)
 \end{aligned}$$

Bewegung entlang der y -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_y) \left(E_x + \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_z \right) \\
 E'_y &= E_y \\
 E'_z &= \gamma(v_y) \left(E_z - \frac{v_y}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
 H'_x &= \gamma(v_y) (H_x - v_y \varepsilon_0 E_z) \\
 H'_y &= H_y \\
 H'_z &= \gamma(v_y) (H_z + v_y \varepsilon_0 E_x)
 \end{aligned}$$

Bewegung entlang der z -Richtung

$$\begin{aligned}
 E'_x &= \gamma(v_z) \left(E_x - \frac{v_z}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_y \right) \\
 E'_y &= \gamma(v_z) \left(E_y + \frac{v_z}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} H_x \right) \\
 E'_z &= E_z \\
 H'_x &= \gamma(v_z) (H_x + v_z \varepsilon_0 E_y) \\
 H'_y &= \gamma(v_z) (H_y - v_z \varepsilon_0 E_x) \\
 H'_z &= H_z
 \end{aligned}$$

Liste der Versuche

Versuch: Ladungstrennung (ES-25)	13
Versuch: Reibungselektrizität (ES-15)	14
Versuch: <i>Ladungen</i> löffeln (ES-13)	14
Versuch: Coulomb-Gesetz (ES-31)	16
Versuch: Elektrische Feldlinien (ES-4)	18
Versuch: Applet: elektrostatische Felder ()	18
Versuch: Drehmoment auf einen elektrischen Dipol (ES-30)	23
Versuch: Elektrische Feldlinien (ES-4)	24
Versuch: Faraday-Becher (ES-9)	24
Versuch: Faraday-Käfig (ES-21)	24
Versuch: Van-de-Graaff-Generator (ES-19)	24
Versuch: Flächenladungsdichte (ES-8)	34
Versuch: Kapazität von Kugeln (ES-27)	40
Versuch: Reihen- und Parallelschaltung von Kapazitäten (EM-48)	43
Versuch: Spannungswaage (Kirchhoffsche Waage) (ES-16)	46
Versuch: Plattenkondensator mit Dielektrikum (ES-3)	49
Versuch: Steighöhe im Kondensator (ES-12)	56
Versuch: Strom-Spannungs-Kennlinie (EM-83)	69
Versuch: Ohmscher Leiter (EM-117)	69
Versuch: Leitfähigkeit (EM-172)	71
Versuch: Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit (TH-122)	71
Versuch: EMK des Daniell-Elementes (TH-44)	76
Versuch: Entladen eines Kondensators (EM-145)	76
Versuch: Kraft zweier stromdurchflossener Leiter (EM-63)	88
Versuch: Lorentzkraft auf stromdurchflossenen Leiter (Applet)	89
Versuch: Fadenstrahlrohr (EM-11)	95
Versuch: Magnetische Feldlinien (EM-50)	96
Versuch: Lorentz-Kraft (EM046)	99
Versuch: Barlowsches Rad (EM004)	100
Versuch: Magnetfeld von Leitern (Em021)	107
Versuch: Halleffekt (EM023)	112
Versuch: Induktion (EM025)	122
Versuch: Induktion im Erdfeld (EM027)	122
Versuch: Tesla-Transformator (EM064)	125
Versuch: Magnetische Induktion (EM051)	126
Versuch: Fallrohre (EM057)	128
Versuch: Funkeninduktor (EM017)	133
Versuch: Hochspannungsleitung (EM161)	136
Versuch: Transformatorenversuche (EM066)	136

Versuch: Wechselstromwiderstand (EM053)	138
Versuch: Elektrischer Schwingkreis (Em056)	140
Versuch: Elektromotor und -generator (EM101)	142
Versuch: Linearmotor (EM113)	145
Versuch: Betatron (EM167)	145
Versuch: Dia- und Paramagnetismus (EM177)	150
Versuch: Ferromagnetismus - Modellversuch (EM175)	161
Versuch: Magnetische Bezirke (EM178)	163
Versuch: Lecherleitung (SW025)	179
Versuch: Koaxialleitung (SW085)	179
Versuch: Hertzscher Dipol (SW099)	186
Versuch: Stehende Wellen (SW032)	186
Versuch: Wellenwanne (O-021)	191
Versuch: Fresnelsche Formeln (O-039)	197
Versuch: Evaneszente Wellen - tunneln mit Licht (O-080)	214

Abbildungsverzeichnis

2.1	Auslenkung zweier mit identischer <i>Ladung</i> q geladener Kugeln.	15
2.2	Feldlinien + und -	18
2.3	Feldlinien bei zwei gleichen positiven <i>Ladungen</i>	19
2.4	Feldlinien $+q$ und $-q$	20
2.5	Integration über eine Kugel­fläche mit einer Punktladung im Zentrum .	21
2.6	Allgemeine Oberflächen und beliebige Ladungsverteilung	22
2.7	Kräfte auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld.	23
2.8	Berechnung eines Feldes einer Kugelschale	24
2.9	Die Feldverteilung einer homogen geladenen Kugelschale.	25
2.10	Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel	26
2.11	Integrations­fläche zur Berechnung des elektrischen Feldes einer Ebene .	26
2.12	Elektrisches Feld um eine endliche Platte.	27
2.13	Elektrisches Feld entgegengesetzt gleich geladener Platten.	28
2.14	Elektrisches Feld gleich geladener Platten	29
2.15	Integrations­fläche	29
2.16	Feldlinien in der Nähe eines Leiters	30
2.17	Approximation eines beliebigen Integrationsweges durch Kreis­segmente.	32
2.18	Potential einer homogen geladenen Ebene	35
2.19	Potential eines Kreisringes	36
2.20	Potential einer homogen geladenen Kreisscheibe	37
2.21	Potential einer homogen geladenen Kugelschale	38
2.22	Potential einer homogenen unendlichen Linienladung	39
2.23	Integrations­oberfläche an der Grenze Metall-Vakuum.	41
2.24	Geometrie eines Plattenkondensators.	42
2.25	Minimierung der Rande­effekte in einem Kondensator	43
2.26	<i>Parallelschaltung</i> von Kondensatoren.	43
2.27	<i>Reihenschaltung</i> oder <i>Serienschaltung</i> von Kondensatoren.	44
2.28	Flächen­ladungsversuch	47
2.29	Schematisches Bild eines <i>Atoms</i> mit seiner <i>Elektronenhülle</i>	48
2.30	Isolatoren in einem Kondensatoren	50
2.31	Anordnung permanenter Dipole ohne und mit elektrischem Feld.	51
2.32	Induzierte Polarisierung	52
2.33	Berechnung des Gesetzes von Clausius-Mosotti	54
2.34	Links: Kondensator ohne und rechts: mit Dielektrikum	55
2.35	Dielektrische Flüssigkeit im Kondensator	57
2.36	Skizze der Änderungen beim Anlegen einer Spannung	57
3.1	Kräfte auf <i>Ladungen</i> in einem Leiter	63
3.2	Berechnung des Stromes in einem Medium	65
3.3	Fluss eines Stromdichtefeldes	67

3.4	Stromfluss in einem Kondensator	68
3.5	Bahnkurven ohne und mit elektrischem Feld.	70
3.6	Berechnung des Widerstandes bei einem inhomogenen Leiter	73
3.7	Ladungstransport in einem van de Graaff-Generator	74
3.8	Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen Widerstand.	76
3.9	Ladekurven am Kondensator	77
3.10	Entladekurven am Kondensator.	78
3.11	Kennlinie eines 1000Ω -Widerstands.	79
3.12	In Schaltungen übliche Symbole.	79
3.13	Messung der Kennlinie eines Widerstandes.	80
3.14	Bestimmung einer Diodenkennlinie	80
3.15	Typische Diodenkennlinie.	81
3.16	Spannungsteiler.	81
3.17	Arbeitspunkt zweier Widerstände	82
3.18	Serieschaltung einer Diode D mit einem Widerstand R	83
3.19	Arbeitspunkt einer Diode.	83
3.20	Kennlinien eines Transistors.	84
3.21	Bestimmung der Ausgangskennlinie eines Transistors.	85
3.22	Arbeitskennlinie eines Transistors.	85
3.23	Verstärkung eines Transistors in der Emitterschaltung	86
3.24	Verstärkerschaltung mit BC107.	87
3.25	Strom in zwei parallelen Leitern	88
3.26	Metallischer Gastank mit Ausströmöffnung.	89
3.27	Berechnung der magnetischen Kraft.	91
3.28	Magnetische Induktion relativ zur Geschwindigkeit der Ladung.	96
3.29	Berechnung der Kraft auf ein Leiterelement.	98
3.30	Drehmoment auf eine Leiterschleife im homogenen Magnetfeld	99
3.31	Tangentiales Magnetfeld eines Linienstromes.	103
3.32	Magnetfeld einer homogenen Stromverteilung	103
3.33	Integrationsfläche zur Analyse der Quellenfreiheit des Magnetfeldes	105
3.34	Integration über die Mantelfläche.	106
3.35	Darstellung von \mathbf{B} in einer ($x = const$)-Ebene.	110
3.36	Vektorpotential einer unendlichen Stromdichte.	111
3.37	<i>Hall-Effekt</i>	112
3.38	Bewegte Magnetfelder und elektrische Felder.	113
3.39	Lorentztransformation von \mathbf{E} und \mathbf{B}	115
4.1	Induktion im inhomogenen Magnetfeld.	121
4.2	Vergleich eines Stabmagneten mit einer Spule.	123
4.3	Induzierte Spannung	123
4.4	Vorzeichen des Magnetfeldes und der induzierten Spannung.	124
4.5	<i>Selbstinduktion</i>	124
4.6	<i>Wirbelströme</i> in Metallen	128
4.7	Bewegung eines Leiters aus einem Magnetfeld.	129
4.8	Magnetische Induktion einer langen Spule	131
4.9	Zwei gekoppelte Stromkreise	133
4.10	Symbolische Darstellung eines <i>Transformators</i>	134
4.11	Schematischer Aufbau eines <i>Transformators</i>	135

4.12	Kirchhoffsche Gesetze: links die <i>Maschenregel</i> , rechts die <i>Knotenregel</i> .	136
4.13	Definition von Strömen und Spannungen bei Wechselspannungen	137
4.14	Spule mit Wechselspannung	138
4.15	Kondensator mit Wechselspannung	139
4.16	<i>Schwingkreis</i>	140
4.17	Schwingkreis mit Widerstand	141
4.18	Bestandteile eines Elektromotors	142
4.19	Aufbau eines Elektromotors	142
4.20	Bauarten von Elektromotoren	143
4.21	Kennlinien von Nebenschluss- und Hauptschlussmotoren.	145
4.22	Skizze eines Betatrons	146
4.23	Berechnung des Skin-Effektes	147
4.24	Berechnung der Energie im Magnetfeld	148
4.25	Dia-, Para- und Ferromagnete im inhomogenen Feld.	150
4.26	Kreisströme als Ursache des Dia- und des Paramagnetismus	150
4.27	Illustration zum Satz von Larmor	151
4.28	Einschalten eines Magnetfeldes für ein Elektron in einem Atom.	152
4.29	Berechnung der Larmorfrequenz mit einem Kreisell	154
4.30	Berechnung des Diamagnetismus	155
4.31	Ein einzelner Kreisstrom	156
4.32	Atomare Kreisströme	157
4.33	Elektronenspin	159
4.34	Schematischer Verlauf der Magnetisierung	161
4.35	Messung der Hysterese eines Ferromagneten.	162
4.36	Hysteresekurve eines Ferromagneten	163
4.37	Ferromagnetische Domänen	164
4.38	Domänenstruktur im ändernden Magnetfeld.	164
4.39	Löschen des remanenten Magnetismus	165
6.1	3 mögliche <i>Doppelleitersysteme</i> .	179
6.2	800 MHz-Breitbandverstärker für Fernsehsignale. Auf der Unterseite sind die Wellenleiterstrukturen sichtbar (Mittlere Struktur in Abbildung 6.1)	180
6.3	Magnetfelder und elektrische Felder bei einer Lecherleitung.	180
6.4	Doppelleitung aus parallelen Platten.	181
6.5	Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen	182
6.6	Integrationspfad zur Anwendung des vierten Maxwellschen Gesetzes	183
6.7	Berechnung des Poynting-Vektors	185
6.8	Wellenausbreitung	186
6.9	Berechnung der Wellenausbreitung	188
6.10	Bild einer ebenen Welle	191
6.11	Kugelwelle	192
6.12	Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator	194
6.13	Polarisator und Analysator	195
6.14	Dichroismus	196
6.15	Polarisation und Spiegelung	196
6.16	Definition der <i>s-Polarisation</i> und der <i>p-Polarisation</i>	197
6.17	Stetigkeitsbedingungen für elektromagnetische Wellen	203

6.18	Richtungen des elektrischen Feldes und Vorzeichen	206
6.19	p-Polarisation	207
6.20	Intensitätsverlauf für p- und s-Polarisation	208
6.21	Amplitudenverlauf	209
6.22	Intensitätsverlauf	210
6.23	Verlauf der Intensität	213
6.24	Gewichtete Intensität	214
6.25	Momentaufnahme der Interferenz	215
C.1	Darstellung von $f(x)$, wobei a variiert wird.	227
C.2	Gradient als Richtung der stärksten Steigung	233
C.3	Vektorfeld mit Umrandung	234
C.4	Drehung eines schwimmenden Klotzes, Rotation	235
D.1	Elektrisches Feld entlang einer Linienladung.	242
D.2	Elektrisches Feld senkrecht zu einer Linienladung.	243
D.3	\mathbf{E} -Feld einer homogen geladenen Kreisscheibe.	245
D.4	Ladung senkrecht zu einem Kreiszyylinder.	246
D.5	Elektrische Felder bei einem Koaxialkabel.	247

Tabellenverzeichnis

2.1	Elektrische Felder in der Natur	17
2.2	Gefüllte Elektronenschale	49
2.3	Nicht gefüllte Elektronenschale	49
2.4	Einige relative Permittivitäten	51
3.1	Verstärkungen der Schaltung 3.21.	86
3.2	Dimensionierung der Schaltung nach Abbildung 3.24	88
4.1	Wirbelstromkräfte von Magneten mit 0.1 T und 1 T auf Platten mit der Geschwindigkeit v aus verschiedenen Materialien.	130

Literaturverzeichnis

- [AF00] Marcelo Alonso and Edward J. Finn. *Physik*. JR. Oldenbourg Verlag, 3. durchgesehene Auflage edition, 2000. QC 21/2000 A Ex.5.
- [AW95] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1995.
- [BSMM00] I.N. Bronštein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2000.
- [Dör01] Andreas Döring. *Rasterkraftmikroskopische Untersuchungen an Haftklebstoffen*. Phd thesis, University of Ulm, 2001. Seite 61.
- [Far32a] Michael Faraday. The bakerian lecture: Experimental researches in electricity. second series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 122:163–194, 1832.
- [Far32b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 122:125–162, 1832.
- [Far33a] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. fifth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 123:675–710, 1833.
- [Far33b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. fourth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 123:507–522, 1833.
- [Far33c] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. third series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 123:23–54, 1833.
- [Far34a] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. eighth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:425–470, 1834.
- [Far34b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. seventh series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:77–122, 1834.
- [Far34c] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. sixth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:55–76, 1834.
- [Far35a] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. ninth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125:41–56, 1835.

- [Far35b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. tenth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125:263–274, 1835.
- [Far38a] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. thirteenth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 128:125–168, 1838.
- [Far38b] Michael Faraday. Supplementary note to experimental researches in electricity. eleventh series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 128:79–81, 1838.
- [Far39] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. fifteenth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 129:1–12, 1839.
- [Far40] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. seventeenth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 130:93–127, 1840.
- [Far43] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. eighteenth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 133:17–32, 1843.
- [Far46] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twentieth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 136:21–40, 1846.
- [Far49a] Michael Faraday. The bakerian lecture: Experimental researches in electricity. twenty-second series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 139:1–18, 1849.
- [Far49b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-second series (continued). *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 139:19–41, 1849.
- [Far50] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-third series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 140:171–188, 1850.
- [Far51a] Michael Faraday. The bakerian lecture. experimental researches in electricity. twenty-fourth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 141:1–6, 1851.
- [Far51b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-fifth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 141:7–28, 1851.
- [Far51c] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-sixth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 141:29–84, 1851.

- [Far52a] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-eighth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 142:25–56, 1852.
- [Far52b] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. twenty-ninth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 142:137–159, 1852.
- [Far56] Michael Faraday. Experimental researches in electricity. thirtieth series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 146:159–180, 1856.
- [Gia06] Douglas C. Giancoli. *Physik*. Pearson Studium, 2006. QC 21/2006 Gb Ex.2.
- [Hec] E. Hecht. *Optik*. Oldenbourg, 3rd edition.
- [HRW03] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Physik*. Wiley-VCH GmbH, 2003. QC 21/2003 H.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 2nd edition, 1975.
- [Kän78] Werner Känzig. *Physik 2: Elektrizität und Magnetismus*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978.
- [Kne78] Fritz Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner, 1978.
- [Lei98] Hans Jörg Leisi. *Klassische Physik*, volume 2. Birkhäuser, 1998. QC 21/1996 L-2 und QC 21/1996 L-1.
- [LL85] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Elektrodynamik der Kontinua*, volume 8. Akademie-Verlag Berlin, 4th edition, 1985.
- [LL89] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Klassische Feldtheorie*, volume 2. Akademie-Verlag Berlin, 1989.
- [LL96] Gunnar Lindström and Rudolf Langkau. *Physik kompakt: Elektrodynamik*. vieweg studium, 1996. QC 21/C6.3 Ex.2.
- [LLS96] Rudolf Langkau, Gunnar Lindström, and Wolfgang Scobel. *Physik kompakt: Elektromagnetische Wellen*. vieweg studium, 1996. QC 21/C6.4.
- [Mar09] Othmar Marti. *Physikalische Elektronik und Messtechnik*. Universität Ulm, 2009.
- [Max65] James Clerk Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 155:459–512, 1865.
- [Max73] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. Oxford : Clarendon Press, 1873.
- [Mes06] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 23rd edition, 2006. QC 21/2006 G-1 Ex.2.

- [MS09] Lillian C. McDermott and Peter S. Shaffer. *Tutorien zur Physik*. Pearson Studium, 2009.
- [Pér96] José-Philippe Pérez. *Optik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- [Som78] A. Sommerfeld. *Theoretische Physik III, Elektrodynamik*. Verlag Harri Deutsch, 1978.
- [TM04] Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physik*. Spektrum Verlag, 2nd edition edition, 2004. ISBN-13: 978-3827411648.
- [Tur07] Claus Wilhelm Turtur. *Prüfungstrainer Physik*. Teubner Verlag, 2007.
- [Wel94] Klaus Weltner. *Mathematik für Physiker*. vieweg studium, 1994. Lehrbuch und Leitfaden (5 Bände) Exemplar 711621537.

Stichwortverzeichnis

- δ -Funktion
 - Dirac, 227–229
 - Übersetzungsfaktor, 135
- Ableitung
 - drei Dimensionen, 232–237
 - mitgeführt, 237–238
- Ampèresches Durchflutungsgesetz, 101–105
- Ampèresches Gesetz, 107
- Amplitude, 191–193, 195, 207, 209
- Analysator, 195
- Atom, 48
- atomare Polarisierbarkeit, 49
- B**-Feld
 - Eigenschaften, 95–112
- Barlowsches Rad, 100
- Basis, 79
- Basis-Emitter-Kennlinie, 84
- Bauelemente, 79–88
- Betatron, 145–147
- Bezugssystem, 89
- Bildladung, 30–31
- Biot-Savart
 - Gesetz, 98–100, 109
 - Kraft, 98
- Biot-Savart-Kraft, 151
- Bohrsches Magneton, 159
- Boltzmannstatistik, 160
- Brechungsindex, 192, 193
- Brechzahl, 193
- Brewster-Winkel, 206
- Cavendish, 15
- Clausius, 53–55
- Coulomb
 - Gesetz, 16, 59
- Coulombsches Gesetz, 14–16
- Curie-Gesetz, 161
- Curie-Konstante, 161
- D** dielektrische Verschiebung, 21
- Diamagnetismus, 150, 151, 155–157
- Dichroismus, 194
- Dielektrika, 49–56
- dielektrische Suszeptibilität, 61
- Dielektrische Verschiebung, 21
- dielektrische Verschiebung, 59
 - Stetigkeit, 52, 61
- Dielektrizitätskonstanten, 200
- Dipol, 23
- Dipolmoment, 23
 - induziert, 48, 61
- Dirac
 - δ -Funktion, 227–229
- Divergenz, 23, 234–235
- Domäne
 - ferromagnetisch, 164
- Doppelleitersystem, 178–183
- Drehmoment, 99
- Drehspulinstrument, 100
- Driftgeschwindigkeit, 63
- Durchlassrichtung, 81
- Eichung, 108
- Einfallsebene, 197, 200
- Elektrische Eigenschaften
 - materie, 48–59
- elektrische Felder von Leitern, 23–31
- Elektrische Feldlinien, 59
- Elektrische Ladung, 14–16
- Elektrische Ströme, 63–120
- elektrischer Fluss, 60
- Elektrisches Feld
 - Fluss, 21
- elektrisches Feld, 17–20, 59, 95
 - Energie, 45–47
 - Energiedichte, 45, 61
 - Stetigkeit, 52, 61

- elektrisches Potential, 33, 60
- Elektrodynamik
Kraftgesetz, 97
- elektromagnetische Wellen, 175–215
- Elektromotor, 142–145
- elektromotorische Kraft, 74–76
- Elektronen, 95, 158
Hülle, 48
- Elektrostatik, 13–61, 108
- elektrostatisches Potential, 31–39, 60
kontinuierliche Ladungsverteilung, 60
- Emitter, 79
- EMK, 74–76, 125, 126, 136
- Energie
elektrisches Feld, 45–47
Magnetfeld, 148–149
potentiell, 60
- Energiedichte des elektrischen Feldes, 45, 61
- Energiefluss, 185–186
- ε_0 Permittivität des Vakuums, 15, 59
- Faraday
Induktionsgesetz
differentiell, 125–128
integral, 125–128
Michael, 18
- Faradaysches Induktionsgesetz, 121–148
- Feld
elektrisch, 17–20, 59
magnetisch, 94–95
- Feldlinien, 18
elektrisch, 59
- Feldstärke
magnetisch, 95–97
- Ferromagnet, 163
- Ferromagnetismus, 150, 151, 161–165
- Flächenladungsdichte, 46–47
- Fluss, 66
elektrisch, 60
magnetisch, 122–125
- Fluss des elektrischen Feldes, 21
- Fluss des Vektorfeldes, 21
- Formel von Laplace, 110
- Fresnelsche Formeln
p-Polarisation, 204–207
- Fresnelschen Formeln, 197
- Funkeninduktor, 133
- Galilei-Transformation, 176
- Gauss
Gesetz, 52
- Gauss, K.F., 238
- Gaussssches Gesetz, 20–23, 60
- Gegeninduktivitäten, 133
- Gesetz
Clausius und Mosotti, 53–55
Clausius-Mosotti, 55
Coulomb, 14–16, 59
Gauss, 20–23, 52, 60
Kirchhoff, 136–137
Ohm, 69–74
- Gesetz von Biot-Savart, 98–100, 109
- Gleichung
Poisson, 60
- Gleichungen
Maxwell, 169–174
- Gradient, 232–234
- Graphit, 69
- Green, G., 238
- H**-Feld, 94–95
- Hall-Effekt, 112–113
- Hallspannung, 112, 113
- Hauptschlussmotor, 144
- Helmholtzspulen, 95
- Hysterese, 165
- i** Stromdichte, 67
- Impedanzen, 137–141
- Induktion, 121
magnetisch, 95–97
- Induktionsgesetz, 148
Faraday, 121–148
differentiell, 125–128
itegral, 125–128
universell, 127
- Induktionskonstante, 95
- Induktivität
Selbst-, 132
- Inertialsystem, 90
- Influenz, 30–31
- Influenzladung, 30
- Inhomogenes Magnetfeld, 150–151
- Intensität, 192–195, 197, 202, 208, 210, 213, 214

- Joulesche Wärme, 74–76
- Kapazität, 40–44, 61
- Kirchhoffsche Gesetze, 136–137
- Klebestreifen, 28
- Knotenregel, 136
- Kollektor, 79
- Kollektor-Kennlinienfeld, 84
- Kommutator, 142
- Kondensator, 79
 - Reihenschaltung, 44
- Kondensatoren, 43
 - Parallelschaltung, 43
- Kontinuitätsgleichung, 64–68
- Kraft, 15
 - Biot
 - Savart, 98
- Kraftgesetz der Elektrodynamik, 97
- Lösung, allgemein
 - Wellengleichung, 176–178
- Ladung, 13–20, 23, 25, 28–31, 33–36, 40–42, 44, 45, 48, 50, 51, 54, 56, 58, 59, 63, 65, 70, 74, 75, 89–91, 93, 94, 96, 97, 100, 114, 116, 118, 156, 162, 169, 182, 183, 186–188, 241, 245, 246
 - elektrisch, 14–16
 - magnetisch, 107
 - Proton, 90
- Ladungsdichte, 27
- Ladungserhaltung, 67, 90
- Ladungsinvarianz, 90
 - relativistisch, 90
- Ladungsmenge, 65
- Ladungsträger, 63, 65, 66, 71
- Ladungstransport, 63
- Ladungsverteilung
 - kontinuierlich, 59
- Landé-Faktor, 159
- Langevin-Funktion, 160
- Laplace
 - Formel, 110
- Larmor
 - Satz, 151–154
- Larmorfrequenz, 154
- Larmorwinkelgeschwindigkeit, 153
- Lecher-Leitung, 178
- Leiter, 60
 - elektrische Felder, 23–31
- Leiterschleife
 - bewegt, 121–122
- Leitfähigkeit, 69
- Leitwert, 69
- Lenzsche Regel, 123, 124
- Lichtenberg, G.C. 1742–1799, 14
- Lichtstrahlen, 191
- Lorentz-Beziehung, 54, 61
- Lorentz-Kraft, 95
- Lorentz-Transformation, 95, 176
 - B , 113–117
 - E , 113–117
 - EMK, 125
- Lorentzkraft, 88–89, 113, 124, 127
- Magnetfeld, 88–89
 - Eigenschaften, 95–112
 - Energie, 148–149
 - inhomogen, 150–151
 - Quellenfreiheit, 105–107
 - zeitlich veränderlich, 121–165
- Magnetische Eigenschaften der Materie, 150–165
 - magnetische Feldstärke, 95–97
 - magnetische Flussdichte, 97
 - magnetische Induktion, 95–97
- Magnetische Kraft
 - Berechnung, 89–95
- magnetischer Fluss, 122–125
- magnetisches Feld, 94–95, 97
- Magnetisches Moment, 100
 - Elektronen, 158–159
- Magnetisierung, 157–158
- Maschenregel, 136
- Materie
 - elektrische Eigenschaften, 48–59
 - magnetische Eigenschaften, 150–165
 - Magnetisierung, 157–158
- Maxwell
 - Gleichungen, 169–174
- Maxwell, James Clerk, 169
- Maxwellsche Gleichungen, 169–174
- Maxwellsche Verschiebungsstromdichte, 170
- Maxwellspannung, 45, 61
- Millikan, 16
- Moment

- magnetisch, 100
 - Elektronen, 158–159
- Mosotti, 53–55
- Motor, 100
- ∇ Nabla-Operator, 238, 239
- Nabla-Operator, 238, 239
- Nebenschlussmotor, 143
- Oberfläche, 200
- Oberflächenladungsdichte, 46
- Oberflächennormalen, 200
- Ohmscher Leiter, 69
- Ohmsches Gesetz, 69–74
- Optik, 176
- optisch aktive Substanz, 195
- Orientierungspolarisation, 51
- \mathbf{p} Dipolmoment, 23
- p-Polarisation, 197, 207–210, 213, 214
- p-polarisiert, 197
- Parallelschaltung, 43
 - Kondensatoren, 43, 61
- Paramagnetismus, 150, 151, 159–161
- Permittivität, 53
 - Vakuum, 15, 59, 94
- Φ Fluss, 21
- φ Potential, 33
- Pointingvektor, 200
- Poisson-Gleichung, 39–40, 60
- Poissongleichung, 39
- Polarisation, 53
 - p, 207–210, 213, 214
 - s, 200–203, 207–210, 213, 214
- Polarisationsfilter, 196
- Polarisator, 195
- Polarisierbarkeit, 53
 - atomar, 49
- Potential
 - elektrostatisch, 31–39, 60
 - kontinuierlich, 60
 - Stetigkeit, 53, 61
- potentielle Energie, 60
- Poynting-Vektor, 185–186
- Punktladung, 15
- QED, 159
- Quanten-Elektrodynamik, 159
- Quantenmechanik, 108
- Quellen, 23
- Quellenfreiheit des Magnetfeldes, 105–107
- RC-Stromkreise, 76–78
- Rechte-Hand-Regel, 123, 124
- Reflexion, 197, 202, 215
- Regel
 - Lenz, 123
- Reihenschaltung, 44
 - Kondensatoren, 44, 61
- Relativitätstheorie, 89, 108, 187
- retardierte Zeit, 189
- ρ_{el} elektrische Ladungsdichte, 17
- Rotation, 235–237
- Rotor, 142
- s-Polarisation, 197, 200–203, 207–210, 213, 214
- s-polarisiert, 197
- Satz von Gauss, 238
- Satz von Green, 238
- Satz von Larmor, 151–154
- Satz von Stokes, 239
- Schaltungen, 79–88
- Schwingkreis, 140
- Selbstinduktion, 124
- Selbstinduktivität, 132, 133
- Serienschaltung, 44
- SI-System, 94, 97
- Skin-Effekt, 147–148
- Spannung, 33, 60
- Sperrrichtung, 81
- Spiegelsymmetrie, 27
- Spin, 158
 - Elektronen, 158–159
- Spule, 123
 - unendlich lang, 130–132
- Stator, 142
- Stehende Wellen, 184
- Stetigkeit, 52–53
 - dielektrische Verschiebung, 52, 61
 - elektrisches Feld, 52, 61
 - Potential, 53, 61
- Stokes, G. G., 239
- Strahlungsfeld, 189
- Strom, 63–120
- Stromdichte, 65, 67
- Stromdichtefeld, 66
- Stromkreise, 76–78

- Stromverteilung
 - Magnetfeld, 107–112
- Suszeptibilität
 - dielektrisch, 61
- Symmetrieüberlegungen, 27
- Tensor, 69
- Transformator, 132–136
- Translationsinvarianz, 26
- Vakuum, 175
- Vakuumpermittivität, 193
- van de Graaff-Generator, 74
- Vektorfeld
 - Stromdichte, 67
- Vektorpotential, 107, 108, 119
- Verschiebung
 - dielektrisch, 21
- Verschiebungspolarisation, 52
- Verschiebungsstrom, 121
- Vierervektor, 93
- Weber, 123
- Wechselstromkreise, 137–141
- Wellen
 - Doppelleiter, 178–183
 - elektromagnetisch, 175–215
 - Raum, 186–190
 - stehend, 184
- Wellengleichung, 175–176
 - allgemeine Lösung, 176–178
 - Vakuum, 175–176
- Wellenvektor, 191
- Wellenwiderstand, 183–184
- Wellenzahl, 191
- Wideroe-Bedingung, 147
- Widerstand, 69, 79
- Wirbelstrom, 128–130
- zeitlich veränderliche Magnetfelder, 121–165