

Aufgabe 1: (Die Heizung) Die Abluft der Heizung soll 20 m im Kamin aufsteigen (adiabt. Expansion). Oben angekommen soll sie noch 10 °C wärmer sein als die Umgebungsluft, damit sie nach oben entweicht. Bei einer Aussentemperatur von 0 °C, wie hoch muss die Abgastemperatur unten im Schornstein sein? Verwenden Sie $\kappa = 1.4$ als Adiabatenexponent und $M = 28.97$ g/mol als molare Masse von Luft.

(6 Punkte)

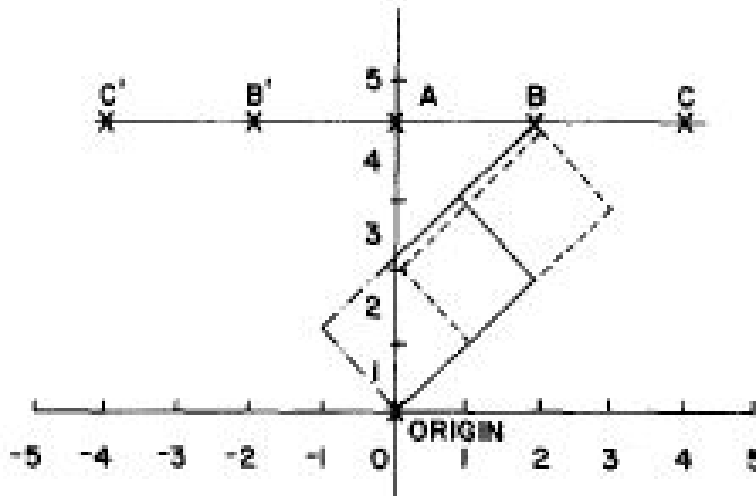
Aufgabe 2: (Wetterballon und barometrische Höhenformel) Ein Wetterballon mit einer Gesamtmasse (ohne Gas) von $M_0 = 1$ kg hat ein maximales Volumen von $V_{\max} = 10$ m³. Er wird am Boden mit Wasserstoffgas ($M_H = 2$ g/mol) gefüllt.

- a) Welches Volumen muss der Ballon am Boden mindestens haben, damit er steigen kann?
- b) Berechnen Sie für eine Füllmenge von $V = 1$ m³ Wasserstoffgas am Boden das Volumen $V_B(h)$ des Ballons und die Steigkraft als Funktion von der Höhe h .
- c) In welcher Höhe h_1 erreicht der Ballon sein maximales Volumen?

Verwenden Sie die barometrische Höhenformel für eine isotherme Atmosphäre mit $\theta = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1013.25$ hPa, und eine mittlere Molmasse für die Luft von $M_L = 29$ g/mol. (Gaskonstante: $R = k \cdot N_A = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$)

(6 Punkte)

Aufgabe 3: (Eindimensionaler Random Walk und Diffusion) Die obige Abbildung zeigt eine eindimensionale Irrfahrt (oder *Random Walk*) eines Teilchens getrieben durch eine zufällige Kraft (Brown'sche Bewegung), die entweder nach links oder rechts gerichtet ist. Auf der x-Achse sind die möglichen, diskreten Positionen m des Teilchens gezeichnet, wobei die Wahrscheinlichkeiten für einen Schritt nach links und einen Schritt nach rechts beide $1/2$ sein sollen. Die Wahrscheinlichkeit $P_N(m)$ das Teilchen nach N Schritten auf der Position m zu finden, ein sogenannter (m, N) Prozess, kann mittels



statistischer Methoden ermittelt werden und ist gegeben durch

$$P_N(m) = \frac{N!}{((N-m)/2)!((N+m)/2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (1)$$

Die vertikale Achse in der Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf, bzw. die Einzelschritte des Prozesses wieder.

- a) Welche Endpositionen m sind in einem (m, N) -Prozess i.A. erreichbar? Sei nun $N = 4$. Bestimmen Sie grafisch durch Abzählen die Anzahl der möglichen Pfade jeweils für die Endpunkte A ($m = 0$), B ($m = 2$), C ($m = 4$), C' ($m = -4$), B' ($m = -2$) und bestimmen Sie mit Hilfe von $\sum_i P_i = 1$ deren Wahrscheinlichkeiten (ein Beispiel für einen solchen Prozess mit Endpunkt B ist in der Abbildung angegeben, durchgezogene Linie). Vergleichen Sie diese mit den Werten, die Sie aus der Formel ermitteln.
- b) Im folgenden wollen wir das System auf einer grossen Skala und für lange Zeiten studieren, d.h. für $N \rightarrow \infty, \Delta m \rightarrow 0$. Nehmen Sie dazu in Gl.(1) auf beiden Seiten den Logarithmus, benutzen Sie die Stirling Formel (Näherungsformel für die Fakultät, die im Limit für grosse s gilt).

$$\ln s! \approx s \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi s \quad (2)$$

und beachten Sie noch, daß folgende Relation gilt: $\ln(u \pm v) = \ln u(1 \pm v/u) = \ln u + \ln(1 \pm v/u) \approx \ln u \pm (v/u) - (v/u)^2/2$ für $u \gg v$. Zeigen Sie damit, daß in diesem Limit die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch $P_N(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp(-m^2/2N)$ angenähert werden kann.

- c) Nehmen wir nun weiterhin eine konstante Frequenz n für das Springen an, sodaß die Zahl der Gesamtsprünge linear mit der Zeit wächst $N = n \cdot t$, so können wir nun die Verteilungsfunktion in der Form schreiben (mit $x = lm$ und l =Längenskala der räumlichen Sprungweite)

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n l^2 t}} \exp(-x^2/2nl^2t) \quad (3)$$

Zeigen Sie, dass dies eine Lösung des 2.Fickschen Gesetzes

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P_t}{\partial x^2} \quad (4)$$

darstellt und bestimmen Sie daraus die Diffusionskonstante D .

Resumee der Aufgabe: ein Random Walk verursacht also einen diffusiven Prozeß auf einer grösseren und zeitlich längeren Skala. Umgekehrt kann man vermuten, daß diffusive im wesentlichen auf Brownschen Bewegungsprozessen basieren.

(4+8+6 Punkte)