

Aufgabe 1: (Legendre-Transformation mit idealem Gas) Die Freie Helmholtz Energie $F(T, V, N)$ eines Idealen Gases (mit f Freiheitsgraden in der kinetischen Energie) hat folgende Formel:

$$F(T, V, N) = -kTN \left(\ln V + \frac{f}{2} \ln T + c \right), \quad (1)$$

wobei c eine Konstante ist.

a) Berechne den Druck $P(T, V, N)$ mit

$$P = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T, N}$$

und zeige, dass wir die Zustandsgleichung des Idealen Gases erhalten.

Berechne die Entropie $S(T, V, N)$ mit

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, N}$$

und zeige, dass die Innere Energie $U = F + TS$ der bekannten Innerern Energie des Idealen Gases entspricht. **(6 Punkte)**

b) Invertiere die Funktion $S(T, V, N)$ um eine Funktion der Temperatur in Termen der anderen Variablen zu finden: $T(S, V, N)$. **(3 Punkte)**

c) Nutze $T(S, V, N)$ um einen expliziten Ausdruck für die Innere Energie U als Funktion ihrer natürlichen Variablen zu erhalten: $U(S, V, N)$

Zeige schlussendlich, dass

$$\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V, N}$$

wiederum die Temperatur T ergibt,

d.h. man erhält den gleichen Ausdruck $T(S, V, N)$ wie zuvor. **(3 Punkte)**

Rückseite beachten!

Aufgabe 2: (Isochore molare spezifische Wärmekapazität für ein Van-der-Waals-Gas)

Für eine reversible Transformation gilt die differentielle Gleichung $TdS = dQ$, wobei T die Temperatur eines thermodynamischen Ensemble, dS die Zunahme der Entropie und dQ die Wärme, die dem Ensemble zugeführt wird, ist.

- a) Beweise mittels der vorherigen Gleichung und deinem Wissen über thermodynamische Potentiale, dass für die molare spezifische Wärmekapazität während einer reversiblen, isochoren Transformation *jedes* geschlossenen thermodynamischen Ensembles gilt:

$$c_{V,\text{mol}} = -\frac{T}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 F(T, V)}{\partial T^2}, \quad (2)$$

wobei ν die Molzahl und $F(T, V)$ die (helmholtzsche) freie Energie ist. **(4 Punkte)**

- b) Stimmt das wirklich? Setze die freie Energie eines idealen Gases in Gleichung (2) ein (**Tipp:** siehe Aufgabe 1) und prüfe, ob du wirklich die gewöhnliche $c_{V,\text{mol}}$ eines idealen Gases erhältst. **(3 Punkte)**

Betrachten wir nun ein komplizierteres thermodynamisches Ensemble: Ein Van-der-Waals-Gas ist ein Fluid, welches aus einatomigen Teilchen mit nicht verschwindendem Volumen und paarweiser, attraktiver Wechselwirkung besteht. Seine kompletten thermodynamischen Eigenschaften sind in der freien Energie

$$F_{\text{VdW}}(T, V) \equiv -NkT \left[\ln \left((V - Nb)T^{3/2} \right) + c \right] - \frac{aN^2}{V} \quad (3)$$

festgehalten, wobei a , b und c Konstanten sind.

- c) Berechne aus Gleichung (3) den Druck $P(T, V)$ eines Van der Waals Gases. Vergleiche ihn mit der *Van-der-Waals-Gleichung*, die du in jedem Lehrbuch findest. Berechne, erneut aus Gleichung (3), die innere Energie $U = F + TS$ eines Van der Waals Gases. Vergleiche auch diese mit dem Lehrbuch. **(4 Punkte)**
- d) Berechne die isochore, reversible spezifische Wärmekapazität $c_{V,\text{mol}}$ eines Van der Waals Gases, benutze hierfür Gleichung (2) und (3).

Doch halt, das ist doch die gleiche $c_{V,\text{mol}}$ wie für ein einatomiges ideales Gas! Ist das sinnvoll? Weshalb? **(3 Punkte)**