



Versuchsanleitung

Fadenpendel und Rollschwingungen

Nummer: 01a
Kompiliert am: 5. August 2024
Letzte Änderung: 05.08.2024
Beschreibung: Bestimmung der lokalen Erdbeschleunigung aus Schwingungsversuchen mit einem Fadenpendel und mit verschiedenen Rollkörpern.
Webseite: <https://www.uni-ulm.de/nawi/institut-fuer-quantenoptik/ag-prof-jelezko/lehre/grundpraktikum-physik-physwiphs-la-phys/>

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
2 Stichpunkte zur Versuchsvorbereitung	3
2.1 Theorie	3
2.2 Beispiele aus Natur und Alltag	3
3 Kurze Zusammenfassung der Theorie	3
3.1 Translation und Rotation	3
3.2 Mathematisches Pendel	4
3.3 Physikalisches Pendel	5
3.4 Das Trägheitsmoment	5
3.5 Korrekturen	6
3.5.1 Korrektur: Trägheitsmoment	7
3.5.2 Korrektur: Auslenkung	7
3.5.3 Korrektur: Auftrieb in Luft	7
3.6 Die Rollbewegung - alltäglich aber verblüffend	7
3.7 Rollbewegung auf der schiefen Ebene	9
3.8 Rollschwingungen	10
4 Versuchsdurchführung	11
4.1 Vorbereitende Messungen	11
4.2 Messungen mit dem Fadenpendel	11

4.3	Rollschwingungen	12
4.4	Häufige Fehler	12
5	Versuchszubehör	12
6	Hinweise zur Ausarbeitung	12
6.1	Versuchsspezifisch	12
6.2	Allgemein	13
	Literatur	14

1 Einführung

Das Fadenpendel ist nicht nur Opfer esoterischer Kultur geworden, sondern kann auch dazu verwendet werden, die Erdbeschleunigung zu messen. In diesem Versuch wird mit verschiedenen Schwingungen im Gravitationsfeld der Erde versucht, die lokale Erdbeschleunigung möglichst genau zu bestimmen. Hierzu werden verschiedene Korrekturen betrachtet, die durch die Unterscheidung eines idealen mathematischen Pendels und eines realen physikalischen Pendels in natürlicher Umgebung zustande kommen. Sie sollen zudem lernen, die experimentellen Verfahren bezüglich ihrer relativen Fehler zu beurteilen.

2 Stichpunkte zur Versuchsvorbereitung

2.1 Theorie

- Newton'sche Axiome [Mes06, Nol06]
- Freiheitsgrade der Bewegung [Mes06]
- Zwangsbedingungen [Rei06]
- Berechnung von Trägheitsmomenten [Nol06]: Kugel, Vollzylinder, Hohlzylinder
- Mathematisches Pendel, physikalisches Pendel, reduzierte Pendellänge [Nol06]
- Erdbeschleunigung und ihre Abhängigkeiten [Dem15]

2.2 Beispiele aus Natur und Alltag

- Unruhen in Uhren, Pendeluhr
- Foucault'sches Pendel
- Abrissbirne

3 Kurze Zusammenfassung der Theorie

3.1 Translation und Rotation

Kräfte auf ausgedehnte Körper können diesen nicht nur in eine Translationsbewegung sondern auch in eine Rotationsbewegung versetzen. Beide Bewegungsformen können unabhängig in geeigneten Variablen, den sogenannten verallgemeinerten Koordinaten, beschrieben werden. Die Entsprechungen sind in Tabelle 1 aufgelistet. Folglich werden Translations- und Rotationsbewegung auch durch entsprechende Formulierungen des Newton'schen Gesetzes und Bewegungsgleichungen beschrieben. Das Newton'sche Gesetz für die Translationsbewegung lautet

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \tag{1}$$

$$\stackrel{m \neq m(t)}{\Rightarrow} \vec{F} = m \cdot \vec{a}, \tag{2}$$

Tabelle 1: Analogie zwischen Translation und Rotation bezüglich der Drehachse \vec{d} . Hier ist \vec{r} der Hebelarm, also der Abstand zur Drehachse.

Translation	Rotation
Ort $\vec{x}(t)$	Winkel $\varphi(t)$
Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t) = \dot{\vec{\varphi}}(t)$
Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t) = \ddot{\vec{\varphi}}(t)$
Masse m	Trägheitsmoment $I_{\vec{d}}$ bzgl. \vec{d}
Impuls $\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$	Drehimpuls bzgl. \vec{d} $\vec{L}_{\vec{d}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$
Kraft \vec{F}	Drehmoment $\vec{D} = \vec{r}(t) \times \vec{F}$
kin. Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	rot. Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_{\vec{d}}\omega^2$

die für die Rotationsbewegung

$$\vec{D} = \dot{\vec{L}} \quad (3)$$

$$\stackrel{\text{eben}}{\Rightarrow} \vec{D} = I_{\vec{d}} \cdot \vec{\alpha} \quad (4)$$

mit den in Tabelle 1 angegebenen Bezeichnungen. Man beachte, dass diese Gleichungen im Allgemeinen Vektorcharakter haben - also Gleichungssysteme darstellen - und es sich bei $I_{\vec{d}}$ um den Trägheitstensor, einen 3×3 -Tensor mit 6 unabhängigen Komponenten, handelt. In einfachen Fällen aber zerfallen sie in eine einzige skalare Gleichung mit den Koordinaten x oder φ , und diese werden wir hier suchen.

'Das' Pendel existiert in den unterschiedlichsten Kombinationen und Varianten, z.B.:

- Fadenpendel
- mathematisches oder physikalisches Pendel
- Gorelik's Pendel
- Doubochinski's Pendel

3.2 Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel betrachtet man einen Massepunkt der Masse m , der an einem Faden der Länge l mit festem Ende im homogenen Gravitationsfeld der Beschleunigung \vec{g} hängt. Um die Bewegungsgleichung aufzustellen, legt man den Koordinatenursprung in den Aufhängepunkt des Pendels und wählt die $x-y$ -Ebene horizontal. z zeigt dann nach oben. Die x -Richtung wählt man außerdem so, dass die Bewegung in der x - z -Ebene stattfindet. Folglich gilt

$$\begin{aligned} |\vec{D}| &= |\vec{r} \times \vec{F}_g| \\ &= |\vec{r} \times m\vec{g}| \\ &= M \cdot l \cdot g \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei φ der Winkel zwischen der Vertikalen und dem Faden ist. Dementsprechend lautet nun die Bewegungsgleichung (4):

$$-m \cdot l g \sin \varphi = I_{\vec{d}} \ddot{\varphi} = ml^2 \ddot{\varphi}, \quad (6)$$

wobei wir für das Trägheitsmoment des Massepunktes gleich $I_d = m \cdot l^2$ eingesetzt haben. Auf dieselbe Gleichung wäre man auch über 2 gekommen.

Bei Gleichung 6 handelt es sich um eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Um sie analytisch lösen zu können linearisieren wir sie mit der Kleinwinkelnäherung $\sin x \approx x$. Außerdem beschränken wir uns auf stationäre Lösungen, von denen es zwei unabhängige geben muss. Wir sehen, dass die linearisierte Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \quad (7)$$

gelöst wird durch $\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t$ ebenso wie $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t$. Folglich lautet die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (8)$$

wobei vom Additionstheorem für trigonometrische Funktionen Gebrauch gemacht wurde. φ_0 ist die Amplitude der Schwingung und φ_1 die Phase zum Zeitpunkt $t = 0$. Durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich erhält man außerdem für die Eigen-Kreisfrequenz ω_m und die Periodendauer T_m

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (9)$$

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (10)$$

3.3 Physikalisches Pendel

Beim *physikalische Pendel* wird der Massepunkt durch einen starren, ausgedehnten Körper ersetzt (vgl. Abbildung 1). Die Konsequenz ist, dass sich nicht nur der Schwerpunkt des Körpers um die Aufhängung des Pendels dreht, sondern der gesamte ausgedehnte Körper. Da der Körper allerdings starr am Faden hängt, dreht er sich immer exakt um den selben Winkel φ um seinen Schwerpunkt, wie der Schwerpunkt sich um die Aufhängung dreht. Folglich setzen wir in Gleichung 6 statt des Trägheitsmoments des Massepunktes $I_d = m l^2$ das mithilfe des Satzes von Steiner berechnete Trägheitsmoment des Körpers bzgl. des Aufhängepunktes ein und erhalten sofort dieselbe allgemeine Gleichung für φ mit den Parametern für das physikalische Pendel

$$\omega_p = \sqrt{\frac{m g l}{I_d}} = \sqrt{\frac{m g l}{I_s + m l^2}} \quad (11)$$

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_d}{m g l}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_s + m l^2}{m g l}}, \quad (12)$$

wobei auf der rechten Seite der Satz von Steiner angewandt wurde und I_s das Trägheitsmoment des Körpers bzgl. seines Schwerpunktes ist.

3.4 Das Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment I eines um einen (festen) Raumpunkt im Abstand r rotierenden Massepunktes m ist definiert als $I = m \cdot r^2$. Man kann sich einen ausgedehnten Körper als

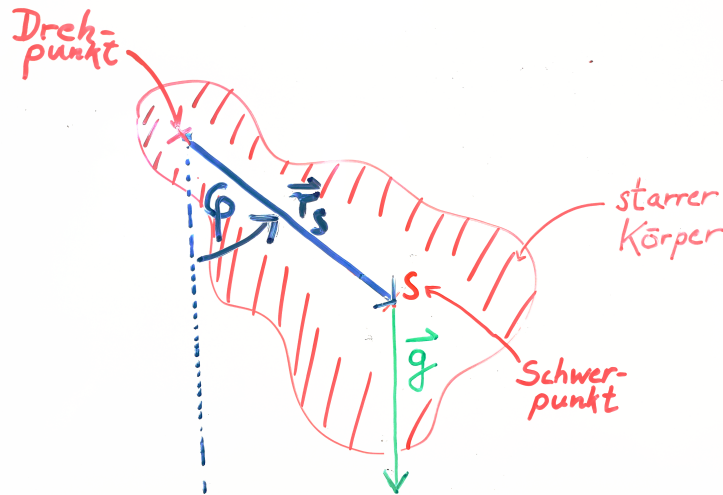


Abbildung 1: Notationen zum physikalischen Pendel. Das Bild wurde in echter Handarbeit produziert.

System von N Massenpunkten mit Teilmassen m_i und festen Abständen untereinander denken (starrer Körper). Die Teilmassen haben unterschiedliche Abstände $r_{\perp,k}$ von einer gemeinsamen Drehachse. Das Trägheitsmoment des gesamten Körpers ist dann die Summe aller einzelnen Trägheitsmomente I_k :

$$I_k = \sum_k^N r_{\perp,k}^2 m_k. \quad (13)$$

Die Vorstellung, dass Masse nicht mehr in einzelnen Punkten konzentriert, sondern über ein endliches Volumen verteilt ist (Kontinuum), ist das Konzept der Massendichte und ermöglicht eine Berechnung des Trägheitsmomentes realitätsnaher Körper. Das Trägheitsmoment eines *ausgedehnten* Körpers mit kontinuierlicher Massendichteverteilung um eine Drehachse $I_{\vec{c}}$ ist daher nur eine Erweiterung des diskreten Falles in (13) und wird daher ganz allgemein berechnet nach:

$$I_{\vec{c}} = \int \vec{r}_{\perp}^2 \varrho(\vec{r}_{\perp}) dV, \quad (14)$$

wobei $\varrho(\vec{r}_{\perp})$ die Massendichteverteilung und dV das Volumenelement im Abstand \vec{r}_{\perp} von der Drehachse ist. Das Volumenelement hängt entscheidend von der Wahl des Koordinatensystems ab und ist z.B. in kartesischen Koordinaten $dV = dx dy dz$, in Zylinderkoordinaten aber $dV = r dr d\varphi dz$. Das allgemeine Trägheitsmoment $I_{\vec{c}}$ eines Körpers um eine beliebige Drehachse \vec{c} muss *nicht* neu berechnet werden, wenn man es bereits um eine zu \vec{c} parallele Drehachse \vec{d} durch den Schwerpunkt kennt. Dazu nehme man den *Steiner'schen Satz* [Dem15]:

$$I_{\vec{d}} = I_{\vec{c}} + M \cdot R^2 \quad (15)$$

mit Gesamtmasse M des Körpers und Abstand R der beiden Drehachsen.

3.5 Korrekturen

Wegen seiner Einfachheit wird üblicherweise das mathematische Pendel als Referenz gewählt und diesbezüglich Korrekturen angebracht.

3.5.1 Korrektur: Trägheitsmoment

Hier geht es um die Korrektur vom physikalischen Pendel mit einem ausgedehnten Körper bzgl. des mathematischen Pendels wie oben beschrieben. Durch schlichtes Einsetzen des Trägheitsmomentes einer Kugel $I_s = \frac{2}{5} m R^2$ (Radius der Kugel R) und Umformen erhält man die unten angegebene Korrektur, wobei für die Fadenlänge l des mathematischen Pendels (Abstand Drehpunkt-Schwerpunkt), die effektive Fadenlänge l' zu verwenden ist:

$$l' = l \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{l^2} \right). \quad (16)$$

3.5.2 Korrektur: Auslenkung

Ohne Kleinwinkelnäherung lässt sich die Bahnkurve $\varphi(t)$ in (6) nicht ohne Weiteres lösen, sehr wohl aber lässt sich die Periodendauer berechnen. Die Idee, hierzu den Energiesatz anzuwenden [Dem15], lässt sich leicht nachvollziehen und führt zu einer Reihenentwicklung der Periodendauer. Die Periodendauer wird dabei vom *Anfangswinkel* abhängig:

$$T_{\varphi_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right). \quad (17)$$

Je größer die Auslenkung, desto länger also die Periodendauer, weil die rücktreibende Kraft mit zunehmender Auslenkung hinter dem Hook'schen Gesetz zurückbleibt.

3.5.3 Korrektur: Auftrieb in Luft

Die Auftriebskraft eines ausgedehnten Körpers in Luft ist endlich und ist, wie bei Flüssigkeiten, gegeben durch die Gewichtskraft des verdrängten Gases [Dem15]:

$$F_A = -g \varrho_{Luft} V, \quad (18)$$

wobei ϱ_{Luft} die Dichte von Luft und V das Volumen des Körpers [Kuc04] sind. Effektiv verändert das also die Gewichtskraft des Pendels bzw. die erfahrene Erdbeschleunigung, so dass

$$\begin{aligned} F_g &= M \cdot g - M_{Luft} g \\ &= M \left(1 - \frac{M_{Luft}}{M} \right) g. \end{aligned} \quad (19)$$

Für die Periodendauer bedeutet dies (das ist nun Ihre Aufgabe):

$$T = ??? \quad (20)$$

3.6 Die Rollbewegung - alltäglich aber verblüffend

Rollbewegungen sind in unserem Alltag so stark präsent, dass sie selbstverständlich geworden sind. Wieso aber ein Körper rollt wird erst wirklich klar, wenn man versucht, etwas auf sehr rutschigem Untergrund zum Rollen zu bringen. Schnell erkennt man, dass es etwas mit

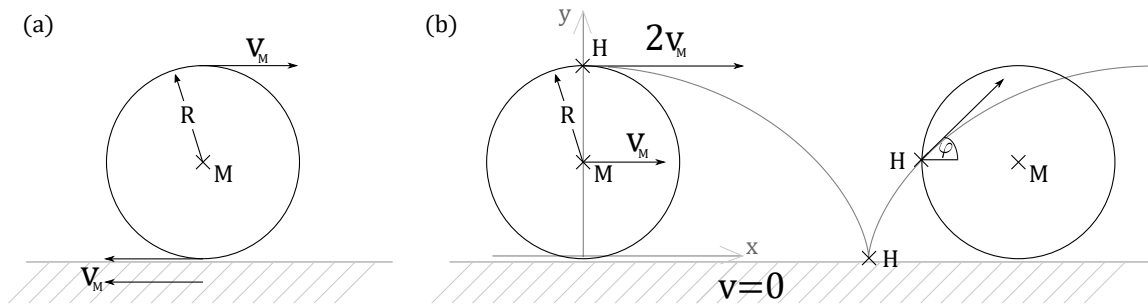


Abbildung 2: Illustration der Rollbewegung. (a) Betrachtet man die Rollbewegung im Bezugssystem des Rollkörpers, so hat jeder Punkt auf dem Körper eine spezifische Geschwindigkeit, die sich durch die Rotationsgeschwindigkeit ω und den Abstand zum Mittelpunkt r beschreiben lässt: $v_{\text{rot}}(r) = \omega r$. (b) Im Bezugssystem des Untergrundes ergibt sich als Bahnkurve die *Zykloide* als Überlagerung der horizontalen und kreisförmigen Bewegung mit Bahngeschwindigkeiten, die abhängig vom Punkt H sind.

der Wechselwirkung der Rollflächen zu tun haben muss. Der Einfachheit halber sollen die Sachverhalte an einem Kreis, vgl. Abbildung 2 verständlich gemacht werden. Fehlende Reibungskräfte zwischen Rollkörper und Rollfläche verhindern eine Rollbewegung zugunsten einer reinen Translation, es kommt zum Rutschen.

Reines Rollen hingegen ist das Verhindern von Rutschen, es erfordert die Präsenz von Haftreibung am Auflagepunkt. Erst eine Reibungskraft F_R zwischen Auflagepunkt und Punkt auf dem Umfang des Kreises ermöglicht eine Drehung. Diese Haftreibungskraft ermöglicht also das Ruhen des Auflagepunktes, verrichtet idealerweise aber keine Arbeit, da sie nicht entlang eines Weges wirkt.¹ Wenn man so will, kippt der Körper zu jedem Zeitpunkt der Bewegung um den Auflagepunkt. Das ist sehr schwer vorzustellen, denn im nächsten Moment ändert sich aber dieser Auflagepunkt und so kippt sich der rollende Körper voran.²

Im Falle einer reinen Rotation (Teilabbildung (a)) bewegt sich also der Schwerpunkt M nicht, während die Punkte auf dem Kreis mit einer jeweiligen Rotationsgeschwindigkeit rotieren.³ In Teilabbildung (b) von Abb. 2 sieht man das rollende Rad im Bezugssystem des Untergrundes. Der Bahn des Umfangs im Bezugssystem des Rades (hier \vec{r}_{rot}) und somit deren Geschwindigkeit

$$\vec{r}_{\text{rot}}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) + 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) + 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\vec{v}_{\text{rot}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

¹Nur, wenn das Lösen der Kontaktflächen inelastisch ist, wird Arbeit verrichtet und das Rollen so erschwert (z.B., wenn eine klebrige Oberfläche ein perfektes Rollen verhindert, kommt die Bewegung irgendwann zum Stillstand).

²Man kann sich den Kreis auch als endlich segmentiertes Polygon, im einfachsten Fall ein gleichseitiges Dreieck, vorstellen, welches rollt, indem es immer um einen Eckpunkt rotiert. Dieser momentane Drehpunkt springt dann von Ecke zu Ecke, sobald eine Kante mit der Abrollfläche übereinstimmt. Im Grenzfall unendlich vieler Ecken entsteht die Kreisbewegung, deren Drehpunkt kontinuierlich über Peripherie streicht.

³Der Standpunkt der Betrachtung ist wichtig. Im Bezugssystem des rollenden Kreises zieht der Untergrund mit $-v_M$ hinweg und der Schwerpunkt ist in Ruhe. Der Auflagepunkt bewegt sich ebenfalls mit $-v_M$ und der Punkt auf der gegenüberliegenden Seite hat eine Geschwindigkeit von $+v_M$. Im Bezugssystem des Untergrundes, also einfach auf alle Geschwindigkeiten $+v_M$ addieren, bewegt sich der Schwerpunkt mit v_M , der oberste Punkt mit $2v_M$ und der Auflagepunkt ruht!

Im Bezugssystem des Untergrunds wird nun auch die Translationsgeschwindigkeit des Mittelpunkts v_M relevant. Die Geschwindigkeit wird dabei einer einfachen Galileo-Transformation unterzogen $\vec{v}(t) = \vec{v}_{\text{rot}}(t) + \vec{v}_U$, wobei \vec{v}_U die konstante Geschwindigkeit des Untergrundes bzgl. des Bezugssystems des Rades ist, mit $\vec{v}_U = (v_M, 0)^T$. Entsprechend kann man auf die parametrische Form der Zykloidenbahn $\vec{r}_{\text{Zyk}}(t)$ schließen:

$$\vec{r}_{\text{Zyk}}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + v_M t / R \\ \sin(\omega t) + 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

bzw. deren Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v}_{\text{Zyk}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) + v_M / R \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Man beachte, dass aufgrund der Rollbedingung die *Zwangsbedingung* $v_M = R\omega$ gelten muss. Dies bedeutet, dass sich der Umfang des Rads genau so schnell drehen muss damit die resultierende Geschwindigkeit des Mittelpunkts gewährleistet werden kann. Dies führt zu der finalisierten Parametrisierung der Rollbewegung

$$\vec{r}_{\text{Zyk}}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \omega t \\ \sin(\omega t) + 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

3.7 Rollbewegung auf der schiefen Ebene

Wenn auf einen starrer Körper, der nicht in einem Punkt gelagert ist, ein Drehmoment ausgeübt wird, so befindet sich der Momentanpol der Drehung im Schwerpunkt. Betrachten wir beispielsweise eine Kugel, welche eine schiefe Ebene hinunterrollt, so passiert genau das. Im Idealfall verhindert die Haftreibung vollständig das Gleiten der Kugel und sorgt so für eine Rotation um den Auflagepunkt (vgl. 3.6). Das wirkende Drehmoment D ist dann, völlig analog zu Abschnitt 3.3, einfach

$$D = MgR \sin(\alpha), \quad (26)$$

wobei α die Steigung der schiefen Ebene, M die Gesamtmasse und R der Radius der Kugel sei. Über die Bewegungsgleichung für die Rotation, siehe Tabelle 1 auf S. 4, erhalten wir (für zeitkonstantes Trägheitsmoment I) die Gleichung

$$D = I\ddot{\varphi} \quad (27)$$

und konkret mit dem speziellen Drehmoment aus Gl. (26)

$$MgR \sin(\alpha) = I\ddot{\varphi}. \quad (28)$$

Da die Rollbedingung einer Relation zwischen Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit unterliegt (Zwangsbedingung), gilt auch für die Beschleunigung $\dot{v} = \ddot{x}$ entsprechend

$$\ddot{x} = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi}. \quad (29)$$

Wichtig ist jetzt die Überlegung, dass der Körper um den Auflagepunkt rollt, somit ergibt sich nach dem Satz von Steiner in Gl. 15 für das gesamte Trägheitsmoment $I = I_K + MR^2$ mit

dem Trägheitsmoment I_K des Körpers um seinen Schwerpunkt. Somit ergibt sich also für die Beschleunigung die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \frac{MgR^2}{I_K + MR^2} \sin(\alpha). \quad (30)$$

Besonders einfach wird diese Beziehung, wenn wir den *Formfaktor* γ definieren mit $I_K = \gamma MR^2$ (für die Kugel also $\gamma = \frac{2}{5}$), so dass

$$\ddot{x} = \frac{g}{1 + \gamma} \sin(\alpha). \quad (31)$$

3.8 Rollschwingungen

Betrachtet wird einen Körper, welcher mit kreisförmiger Peripherie und Radius r auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius R im Schwerfeld der Erde rollt. Das Drehmoment, welches den Rollkörper aufgrund seines Gewichtes die Bahn hinunter treibt, hängt natürlich von der momentanen Steigung ab, ganz analog zu Gl. (26). Im Falle der Rollschwingung wählt man allerdings, analog zum Pendel, die Winkelauslenkung δ als Variable. Natürlich gibt es eine direkte Verknüpfung von δ zu der 'inneren' Variablen φ des rollenden Kreises aus Abschnitt 3.7

$$(R - r) \cdot \delta(t) = r \cdot \varphi(t). \quad (32)$$

Auf den zweiten Blick einfache geometrische Überlegungen führen außerdem zu

$$\alpha = \delta.$$

Da nun $\ddot{x} = \ddot{\varphi}r$ ist, nimmt die Differentialgleichung für die Rollschwingung folgende Form an:

$$\left(m(R - r) + I_K \frac{(R - r)}{r^2} \right) \ddot{\delta}(t) + mg \sin(\delta(t)) = 0. \quad (33)$$

Sie hat also exakt die gleiche Form, wie die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels (Gl. (6) auf S. 4). Völlig analog dazu gilt für die Schwingungsdauer in Kleinwinkelnäherung

$$T_R = 2\pi \sqrt{\frac{m(R - r) + I_K \frac{(R - r)}{r^2}}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{R - r}{g} (1 + \gamma)}. \quad (34)$$

Dies entspricht also *irrwitzigerweise* dem mathematischen Pendel mit der korrigierten Fadenlänge $l' = (R - r)(1 + \gamma)$. Somit lässt sich bei gemessener Periodendauer das Trägheitsmoment bestimmen als

$$I_K = mr^2 \left[\frac{gT_R^2}{4\pi^2 (R - r)} - 1 \right]. \quad (35)$$

Der Radius R der Schale lässt sich berechnen, wenn das Trägheitsmoment der Kugel und die Periodendauer bekannt sind:

$$R = r + \frac{5gT_R^2}{28\pi^2}. \quad (36)$$

4 Versuchsdurchführung

In der Vorbesprechung werden die Schwingungsgleichungen für das mathematische Pendel und das physikalische Pendel für die Rollschwingungen mit Hilfe des Energiesatzes und der Bewegungsgleichung hergeleitet. Schreiben Sie die Endformeln in Ihr Laborbuch. Der Versuch wird direkt in Ihrem Laborbuch ausgewertet.

4.1 Vorbereitende Messungen

1. Wiegen Sie die Massen
 - a) des Pendelkörpers vom Fadenpendel
 - b) der Rollkörperauf einer Waage mit einer Auflösung von mg.
2. Messen Sie die Abmessungen der
 - a) Kugel des Fadenpendels
 - b) der Rollkörpermit der Schiebelehre. Machen Sie mindestens 5 Einzelmessungen.
3. Messen Sie mit einem Lineal die Länge des Fadenpendels.
4. Messen Sie mit einem Lineal und der Schiebelehre den Krümmungsradius R der Uhrglases.
5. Werten Sie die Messungen aus und geben Sie alle Größen mit ihrem jeweiligen Fehler an.

4.2 Messungen mit dem Fadenpendel

1. Periodendauer
 - a) Stellen Sie den Winkel der Auslenkung durch den Abstand zwischen Pendelkörper und Anschlag ein. (Der Winkel sollte kleiner als 5° sein.)
 - b) Messen Sie mit der Lichtschranke und der elektronischen Stoppuhr 10 mal 50 Schwingungen.
2. Berechnen Sie die Erdbeschleunigung.
3. Berechnen Sie die Korrekturterme:
 - a) Winkelnäherung

$$T' = T\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2\right), \quad (37)$$

- b) Näherung mathematisches Pendel - physikalisches Pendel

$$l' = l\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right), \quad (38)$$

c) Auftriebskorrektur in Luft

$$m' = m\left(1 - \frac{\rho_L}{\rho}\right). \quad (39)$$

4. Angabe von Messfehlern:

- a) Relative Fehler bei der Zeitmessung,
- b) Relative Fehler bei der Längenmessung.

4.3 Rollschwingungen

Als Rollkörper verwenden Sie eine Kugel, einen Vollzylinder und einen Hohlzylinder.

1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente dieser Körper aus den Messungen in Aufgabe 4.1/1b und Aufgabe 4.1/2b und geben Sie deren Fehler an.
2. Reinigen Sie das Uhrglasschale und die Rollkörper vor den Schwingungsmessungen sorgfältig.
3. Messen Sie die Schwingungsdauern der Kugel in der Uhrglasschale und berechnen Sie damit den Radius der Schale. Vergleichen Sie diese Messung mit dem Ergebnis nach Aufgabe 4.1/4. Messen Sie jeweils 5 Schwingungen und wiederholen Sie die Messung mindestens 5 Mal.
4. Messen Sie die Schwingungsdauern der beiden Zylinderkörper in der Uhrglasschale. Berechnen Sie daraus jeweils die Trägheitsmomente der Rollkörper.
5. Vergleichen Sie diese Werte mit den Ergebnissen aus den Berechnungen nach Aufgabe 4.3/1.

4.4 Häufige Fehler

5 Versuchszubehör

- 1 Fadenpendel mit 1 Lichtschranke und elektronischer Stoppuhr
- 1 Uhrglas in Halterung (Kugelschale)
- 3 Rollkörper (1 Kugel, 1 Vollzylinder, 1 Hohlzylinder)
- 1 Massband, 1 Schiebelehre
- 1 Stoppuhr

6 Hinweise zur Ausarbeitung

6.1 Versuchsspezifisch

Eine Ausarbeitung ist zu diesem Versuch nicht erforderlich, da die Pendelbewegungen im nächsten Versuch (→ Reversionspendel) ausgearbeitet werden.

6.2 Allgemein

- Fehler des Mittelwerts richtig berechnen und Ergebnisse richtig runden (siehe Anleitung Limmer und/oder Folien zu unserem Statistik-Workshop)
- Gute Skizzen und Abbildungen verwendet (z.B. deutsche Beschriftung, Skizzen entsprechen den Erläuterungen, ...); Skizzen dürfen gerne selbst angefertigt werden
- Vergleich mit Literaturwerten

Literatur

- [Dem15] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. 7. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2015
- [Kuc04] KUCHLING, Horst: *Taschenbuch der Physik*. 18. Auflage. Leipzig : Fachbuchverlag, 2004
- [Mes06] MESCHEDE, Dieter: *Gerthsen Physik*. 23. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2006
- [Nol06] NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*. 8. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2006
- [Rei06] REINEKER, Peter: *Theoretische Physik I: Mechanik*. Weinheim : Wiley-VCH Verlag, 2006