Seminar zur Vorlesung
Mathematische Methoden II für Lehramtsstudierende

Sommer 2017 **Blatt 8** **26.06.2017**

Aufgabe 21 *Diagonalisierung von Matrizen*

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -2\mathrm{i} & 5 & 2\mathrm{i} \\ 3 & 5\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix},$$

die wir im Folgenden auf eine diagonale Matrix transformieren wollen.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren $\vec{x}_i$. (2 Punkte)

Mit den Eigenvektoren aus Aufgabenteil a) sollen Sie nun die Matrix S konstruieren, die dadurch entsteht, dass man die Eigenvektoren zu den Spalten der 3×3-Matrix S macht.

b) Berechnen Sie die Matrix $D = S^{-1}AS$. Wodurch sind die Diagonaleinträge von D bestimmt? (1 Punkt)

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung $A = SDS^{-1}$ und der Eigenschaft $\mathrm{Sp}(BC) = \mathrm{Sp}(CB)$, dass die Spur von A gleich der Summe der Eigenwerte ist. (1 Punkt)

Aufgabe 22 *Spektralzerlegung*

Wir möchten in dieser Aufgabe die Spektralzerlegung der Matrix

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

a) Bestimmen Sie hierzu zunächst die Eigenwerte λ_i und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von B. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Projektionsmatrizen

$$P_i = \vec{v}_i \vec{v}_i^T$$

und zeigen Sie, dass gilt

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i.$$

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass B durch die Spektralzerlegung

$$B = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i$$

ausgedrückt werden kann. (1 Punkt)