Seminar zur Vorlesung Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 1** **19.04.2017**

Aufgabe 1 *Klassische Wirkung*

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Beispiele die klassische Trajektorie $x(t)$, die zur Zeit t_0 durch x_0 und zur Zeit t_1 durch x_1 geht. Berechnen Sie die zugehörige Wirkung

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t), x(t))\, dt$$

und bringen Sie Ihr Ergebnis auf die angegebene Form.

a) Konstantes Kraftfeld: $L = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - mgx\,,$

$$S[x(t)] = -\frac{m}{24}\,g^2(t_1-t_0)^3 - \frac{m}{2}\,g(x_0+x_1)(t_1-t_0) + \frac{m}{2}\,\frac{(x_1-x_0)^2}{t_1-t_0}\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) Harmonischer Oszillator: $L = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\,\omega^2 x^2\,,$

$$S[x(t)] = \frac{m\omega}{2\sin[\omega(t_1-t_0)]}\left[(x_0^2+x_1^2)\cos[\omega(t_1-t_0)] - 2x_0x_1\right]\,. \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Hinweise:
1. Schreiben Sie $x(t)$ von Anfang an als Funktion von $t - t_0$.
2. Zeigen Sie, dass beim harmonischen Oszillator die Wirkung in der Form
$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\,[x(t_1)\,\dot{x}(t_1) - x(t_0)\,\dot{x}(t_0)]$$
geschrieben werden kann.

Aufgabe 2 *Hermite-Polynome*

Die Hermite-Polynome sind durch

$$H_n\,(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) 1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,H_n(x) = e^{2xz-z^2}\,, \qquad H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial z^n}\,e^{2xz-z^2}\right]_{z=0}\,.$

2. $H_{n+1}\,(x) = 2xH_n\,(x) - 2nH_{n-1}\,(x)\;, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$

3. $H_n'\,(x) = 2nH_{n-1}\,(x)\;, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$ (1 Punkt)

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,H_n(x)\,H_m(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{nm}\,.$ (1 Punkt)