Seminar zur Vorlesung Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 5** **17.05.2017**

Aufgabe 10 *Delta-Funktion II*

$f(x)$ sei eine beliebige, stetig differenzierbare Testfunktion, die im Unendlichen genügend schnell verschwindet und

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) , \quad \sigma \to 0^+$$

eine „Darstellung“ der Delta-Funktion.

a) Bestimmen Sie

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'_\sigma(x) dx \, .$$

Dabei ist $\delta'_\sigma(x)$ die Ableitung von $\delta_\sigma(x)$. Ändert sich etwas an diesem Ergebnis, wenn Sie eine andere Darstellung der Delta-Funktion verwenden? (1 Punkt)

b) Berechnen Sie

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta_\sigma(x)]^2 \, dx \, , \qquad \lim_{\sigma\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\delta_\sigma(x)} dx \, .$$ (1 Punkt)

c) Zeigen Sie:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right] , \quad a > 0 \, .$$ (1 Punkt)

Aufgabe 11 *Lineare Operatoren*

In der Vorlesung wurde der zu $\hat{A}$ adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{A}^\dagger \psi(x)\right]^* \psi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left[\hat{A}\psi(x)\right] dx$$

definiert. Die Funktionen $\psi(x)$, auf die diese Operatoren wirken, sind auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ normierbar.

a) Zeigen Sie:

$$(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}\,, \qquad (\hat{A}\,\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger\,. \qquad\qquad \text{(1 Punkt)}$$

b) Durch

$$\hat{A}_1 : \psi(x) \to \frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\,, \quad \hat{A}_2 : \psi(x) \to x\frac{d}{dx}\psi(x)\,,$$

$$\hat{A}_3 : \psi(x) \to \psi(x+a)\,, \quad \hat{A}_4 : \psi(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2}\psi(y)\,dy$$

werden vier lineare Operatoren $\hat{A}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ definiert. Wie sehen die adjungierten Operatoren $\hat{A}_i^\dagger$ aus? Welche Operatoren sind hermitesch? (1 Punkt)