Seminar zur Vorlesung

Quantenmechanik

Sommersemester 2017 **Blatt 7** **31.05.2017**

Aufgabe 15 *Poisson'sche Summenformel*

Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(x-\nu) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{\pm 2\pi i \ell x}.$ (1 Punkt)

b) $\displaystyle\sum_{\nu=n}^{N} f(\nu) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{n}^{N} f(\nu)\, e^{\pm 2\pi i \ell \nu}\, d\nu + \frac{1}{2}\,[f(n) + f(N)].$ (1 Punkt)

c) $\displaystyle\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \ell^2} = \frac{\pi}{\alpha} \coth(\pi\alpha).$ (1 Punkt)

Hinweis: Wenden Sie die Poisson'sche Summenformel auf $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} e^{-2\pi\alpha\nu}$ $(\alpha > 0)$ an.

Aufgabe 16 *Teilchen im Kastenpotential*

Durch zwei Wände bei $x = 0$ und $x = L$ wird die Bewegung eines Teilchens auf den Bereich $0 \leq x \leq L$ eingeschränkt, d. h. die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ ist nur im Bereich $0 \leq x \leq L$ von Null verschieden.

a) Überzeugen Sie sich, dass die Operatoren $\hat{p}$ und $\hat{p}^2$ nur dann hermitesch sind, wenn $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ gilt. Lösen Sie die *zeitunabhängige* Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\,\frac{d^2}{dx^2} u(x) = E\, u(x)$$

mit diesen Randbedingungen und normieren Sie die Eigenfunktionen. (1 Punkt)

Ergebnis: $E_n = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ML^2}\, n^2\,, \qquad u_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\, \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}\, x\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

b) Zur Zeit $t = 0$ wird das Teilchen durch die Wellenfunktion $\psi(x,0) = \mathcal{N}[u_1(x) + u_2(x)]$ beschrieben. Wie muss die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ gewählt werden, damit $\psi(x,0)$ normiert ist? Wie sieht die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ zu einer späteren Zeit t aus? (1 Punkt)

c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ für $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$ und $t = T$ mit $T = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$. (1 Punkt)